

GRUPPEN FÖR VÄGENERGIFORSKNING



VÄGENERGIFORSKNING I SVERIGE

Slutrapport etapp 4.

Del IV (V)

Teoriutveckling

Rapport GR:44
Göteborg
December 1981

GRUPPEN FÖR VÄGENERGIFORSKNING



VÄGENERGIFORSKNING I SVERIGE

Slutrapport etapp 4.

Del IV (V)

Teoriutveckling

Rapport GR:44
Göteborg
December 1981

Förord

Denna rapport sammanfattar det forskningsarbete som utförts under etapp 4 av NE-projektet 5563 954. I vissa avsnitt berörs dock även arbete och resultat från såväl tidigare etapper som etapp 5. I kapitel 7 beskrivs försöken med en vågkraftboj till havs. Detta projekt har bekostats huvudsakligen av STU och Interproject Service AB.

På grund av rapportens omfang - närmare 500 sidor - har den uppdelats i fem delar, varje del motsvarande ett kapitel. Varje del innehåller även innehållsförteckning och, rapportsammanfattning och inledning. I slutet på varje kapitel redovisas till kapitlethörande referenser.

Rapporten har utarbetats av Gruppen för vågenergiforskning som under etapp 4 har utgjorts av följande personer (aktuell institutionstillhörighet anges).

Jan Forsberg	Inst för elektromaskinlära, CTH
Jonny Hylander	" " " "
Svante von Zweybergk	" " " "
Curt Falkemo	Inst för skeppshydromekanik, CTH
Birgit Jacobsson	" " " "
Johannes K Lunde	" " " "
Bengt-Olov Sjöström	" " " "
Lars Bergdahl	Inst för vattenbyggnad , CTH
Nils Mårtensson	" " " "
Lars-Ove Sörman	" " " "
Filip Alm	Technocean i Göteborg AB
Anders Byström	" " " "
Lennart Claeson	" " " "
Åke Kinnander	" " " "
Thomas Rindby	" " " "
Anders Rylander	" " " "
Pontus Clason	Arendalsvarvet fd Skeppshydromekanik, CTH

Dessutom har personal vid institutionerna och Technocean medverkat
vid utskrift av rapporten, verkstadsarbete mm.

Information om forskningsgruppens verksamhet kan lämnas av
Lennart Claeson (031-81 33 25) som är samordnare i gruppen.

Göteborg den 20 december 1981


Curt Falkemo
Projektledare

VÄGENERGIFORSKNING I SVERIGE

Slutrapport etapp 4.

Innehållsförteckning	i:iii
Förord	i:i
1. SAMMANFATTNING	1:1
1.1 Allmänt	1:1
1.2 Internationell utblick (Del I)	1:1
1.2.1 Uppföljning av internationell utveckling	1:1
1.2.2 Litteraturuppföljning bibliotek	1:3
1.2.3 Kontakter med utländska forskare	1:3
1.3 Energipotential (Del II)	1:3
1.3.1 Vågmätningar, bruttoenergipotential	1:3
1.3.2 Tillgängliga vattenområden	1:4
1.4 Tekniköversikt och tillämpningar (Del III)	1:4
1.4.1 Vågkraftverk	1:4
1.4.2 Energiupptagning	1:5
1.4.3 Elektriska system	1:5
1.4.4 Förankringssystem	1:6
1.4.5 Material	1:6
1.4.6 Realisering av vågkraftverk	1:6
1.4.7 Kostnader	1:7
1.5 Teoriutveckling (Del IV)	1:7
1.5.1 Grundläggande teoriutveckling	1:7
1.5.2 Tillämpad teori	1:8
1.5.3 Teoretisk analys av petropumps slang	1:8
1.5.4 Optimering av boj	1:8
1.5.5 Energiproduktionsberäkning	1:9
1.5.6 Frekvensanalys inom vågteorin	1:9
1.6 Modellförsök (Del V)	1:10
1.6.1 Laboratorieförsök	1:10
1.6.2 Försök i Lygern med kopplade bojen 1979.	1:10
1.6.3 Försök i Lygern med kopplade bojen 1981.	1:10

1.6.4 Försök i Lygnern med petropumpskraftverk	1:11
1.6.5 Försök med IPS-bojen vid Trubaduren	1:11
2. INLEDNING	2:1
2.1 Allmänt	2:1
2.2 Rapporten	2:2
2.3 Rapportförteckning	2:3
3. INTERNATIONELL UTBLICK	3:1
3.1 Uppföljning av internationell utveckling	3:1
3.1.1 Norge	3:1
3.1.2 Storbritannien	3:5
3.1.3 Japan	3:20
3.1.4 Övriga länder	3:24
3.2 Litteraturuppföljning	3:25
3.3 Kontakter med utländska forskare	3:28
3.3.1 Allmänt	3:28
3.3.2 Kontakter refererade i reserapporter	3:28
3.3.3 Övriga kontakter	3:44
3.4 Referenser	3:48
4. ENERGIPOTENTIAL	4:1
4.1 Vågmätningar	4:1
4.1.1 Använda metoder för insamling av vågdata	4:1
4.1.2 Redovisning av vågdata	4:13
4.1.3 Bedömning av årsmedeleffekter	4:20
4.2 Tillgängliga vattenområden	4:26
4.2.1 Allmänt	4:26
4.2.2 Isförhållanden	4:26
4.2.3 Miljöförhållanden	4:29
4.2.4 Fiske	4:30
4.2.5 Sjöfart	4:33
4.2.6 Militära intressen	4:33
4.2.7 Fritidsintressen	4:33
4.2.8 Anslutning till kraftnätet	4:33
4.3 Lokalisering till havs	4:35
4.4 Referenser	4:35

5. TEKNIKÖVERSIKT OCH TILLÄMPNINGAR	5:1
5.1 Vågkraftverk	5:1
5.1.1 Allmänt om vågkraftverk	5:1
5.1.2 Struktur hos vågkraftverk	5:1
5.1.3 Samlokalisering av vind- och vågkraftverk	5:6
5.2 Energiupptagning	5:15
5.2.1 Några hydrodynamiska principer	5:15
5.2.2 Omvandlare - översikt	5:19
5.2.3 Mellanled	5:62
5.2.4 Generatorer	5:69
5.3 Elektriska system	5:85
5.3.1 Frekvensomriktarsystem	5:85
5.3.2 Exempel på system för simulering av vågkraftverk map elektriska systemet	5:90
5.4 Förankringssystem	5:100
5.4.1 Struktur och funktionssätt	5:100
5.4.2 Komponenter	5:105
5.5 Material	5:112
5.5.1 Allmänt	5:112
5.5.2 Stål	5:112
5.5.3 Betong	5:118
5.5.4 Plaster	5:121
5.5.5 Gummi	5:123
5.6 Realisering av vågkraftverk	5:125
5.6.1 Tillverkning	5:125
5.6.2 Installation	5:126
5.6.3 Underhåll och drift	5:126
5.6.4 Utförda studier	5:127
5.7 Kostnader	5:135
5.7.1 Principer för kostnadsberäkning	5:135
5.7.2 Utförda kostnadskalkyler	5:142
5.7.3 Exempel på kostnadskalkyler	5:147
5.8 Referenser	5:151
6. TEORIUTVECKLING	1/6.1
6.1 Grundläggande teoriutveckling	1/6.1
6.1.1 Allmänt om den hydrodynamiska teorin	1/6.1
6.1.2 Rörelseekvationerna	1/6.2

6.1.3 Hastighetspotentialer	1/6.3
6.1.4 Den hydrodynamiska reaktionskraften och dess moment	1/6.4
6.1.5 Kochinfunktionen	1/6.5
6.1.6 Den hydrodynamiska exitationskraften och dess moment Haskinds formel	1/6.6
6.1.7 Effektupptagning hos en svängande kropp i vågor	1/6.7
6.1.8 Exitationskraftens amplitudfaktor	1/6.8
6.1.9 Direktivitet och absorptionslängd	1/6.9
6.2 Tillämpad teori	6:82
6.2.1 Använda begrepp	6:82
6.2.2 Energi- och effektspektrum	6:84
6.2.3 Standardspektrum	6:87
6.2.4 Linjär teori för NE-bojen	6:88
6.2.5 Teori för den kopplade bojen	6:93
6.2.6 Energiupptagning i oregelbunden sjö	6:99
6.3 Teoretisk analys av petropumps slang	6:101
6.4 Optimering av boj	6:102
6.5 Energiproduktionsberäkning	6:120
6.5.1 Inledning	6:120
6.5.2 Den statistiska modellen	6:121
6.6 Frekvensanalys inom vågteorin	6:127
6.6.1 Bakgrund	6:127
6.6.2 Den diskreta Fouriertransformen	6:127
6.6.3 Autokorrelationsfunktionen och effektspektrum	6:128
6.6.4 Fast Fourier Transform (FFT)	6:128
6.6.5 Överföringsfunktion	6:130
6.6.6 Reducering av felet i spektralskattningen	6:132
6.6.7 Spektralupplösning	6:133
6.7 Referenser	6:134
7. MODELLFÖRSÖK	7:1
7.1 Laboratorieförsök	7:1
7.1.1 Målsättning	7:1
7.1.2 Utförda modellförsök	7:1
7.1.3 Försoksanordningar	7:10
7.1.4 Resultat	7:13
7.1.5 Slutsatser av modellförsöken	7:26

7.2 Försök i Lygnern med kopplade bojen 1979	7:28
7.2.1 Målsättning	7:28
7.2.2 Utförda försök	7:28
7.2.3 Försöksanordningar	7:32
7.2.4 Utvärdering	7:40
7.2.5 Resultat med kommentar	7:43
7.2.6 Slutsatser och sammanfattning	7:47
7.3 Försök i Lygnern med kopplade bojen 1981	7:48
7.3.1 Målsättning	7:48
7.3.2 Utförda modellförsök	7:48
7.3.3 Försöksanordningar	7:48
7.3.4 Resultat	7:55
7.3.5 Slutsatser och erfarenheter	7:70
7.4 Försök i Lygnern med petropumpskraftverk	7:79
7.4.1 Försök 1979	7:79
7.4.2 Försök 1980	7:81
7.5 Försök med IPS-bojen vid Trubaduren	7:84
7.5.1 Målsättning	7:84
7.5.2 Konstruktion och funktion	7:84
7.5.3 Utförda försök 1980	7:89
7.5.4 Resultat 1980	7:96
7.5.5 Utförda försök 1981	7:113
7.5.6 Resultat 1981	7:116
7.6 Referenser	7:123

1 SAMMANFATTNING

1.1 Allmänt

I detta kapitel redovisas kortfattat för innehållet i kapitel 3-7 i rapporten. Sammanfattningsarna står inte i proportion till omfanget hos respektive kapitel utan tonvikten har lagts vid att ge upplysning om väsentliga resultat.

1.2 Internationell utblick

1.2.1 Uppföljning av internationell utveckling

I detta avsnitt lämnas en redogörelse över utvecklingen inom vågenergiforskningen i flera länder. Informationens aktualitet och insiktsfullhet varierar betydligt.

Norge har hittills satsat ca 60 milj kr, vilket motiverats av de goda förutsättningarna landet har med ett årsmedelvärde på ca 20 kW/m i vågeffekt. I huvudsak har tre olika koncept utvecklats - fasstyrd boj, svängande vattenpelare och koncept med fokuserande kraftverk. Dessutom har betydande insatser gjorts beträffande studium av vågor och vågklimat. I slutet av 1981 presenterades en evaluering av den norska vågenergiforskningen. I denna jämfördes de tre olika koncepten för tre olika platser på den norska kusten. För den bästa av dessa platser undersöktes även ett brittiskt projekt som jämförelse. Evalueringen tog sikte på att jämte energipotentialen uppskatta energikostnaderna. I del II av evalueringen presenteras energikostnader på mellan 100 och 150 öre/kWh, för de norska koncepten och över 200 öre/kWh för det brittiska. Forsknings-teamen är starkt kritiska mot det sätt varpå kostnadsberäkningarna har gjorts och menar att kostnaderna bör kunna bli lägre än 50 öre/kWh.

Storbritannien har det tyngsta programmet med en satsning på hittills 120 milj kr. Satsningen har dels gjorts på olika koncept dels på stödforskning av allmän karaktär t ex map nya omvandlings-system, insamling och analys av vågdata, hållfasthet, förankring, energigenerering och energiöverföring samt miljöpåverkan.

Storbritannien räknar med att ca 20% av elenergibehovet skulle kunna täckas med vågenergi. Pga att vågenergin skulle produceras långt från konsumenterna blir nätets kapacitet begränsande. Av de många koncept som studerats kan nämnas Salter's ducks, Cockerells Contouring rafts, Russel's rectifier, NEL's OWC (Oscillating Water Column), Bristol Cylinder, Lancaster flexible bags och Vickers Chambers.

Försök har utförts i olika skalor - 1/100 i laboratorier och 1/10 till sjöss, teoretiska modeller har utvecklats och kostnadsberäkningar har genomförts. Efter hand har på grundval av detta omfattande arbete ett antal omvandlare befunnits orealistiska av ekonomiska eller tekniska skäl (i första hand överlevnad). För närvarande är de fyra sistnämnda omvandlarna ovan föremål för fortsatt satsning.

De beräknade kostnaderna för vågenergin varierar kraftigt och beror i hög grad på vem som räknat. Det beräkningar som gjorts av oberoende konsulter pekar på kostnader mellan 60-150 öre/kWh medan forskningsteamens egna uppskattningar hävdar kostnader mellan 35 och 100 öre/kWh.

Under 1982 skall Storbritannien besluta om nästa steg skall bli en fullskaleprototyp till havs och i så fall även hur den skall se ut.

Japan är det land som sysslat längst med vågenergi genom sina vågdrivna ljud- och lysbojar. I mitten av 1970-talet byggde man efter omfattande laboratorieförsök en fullskaleprototyp med samma omvandlingsprincip som bojarna. Prototypen, med namnet KAIMEI utnyttjas nu i ett internationellt samarbetsprojekt inom IEA. De deltagande länderna ges möjlighet att utprova olika turbiner mm.

Japan studerar även ett antal andra koncept samt har ett pågående vågmätningsprogram.

USA har gjort vissa undersökningar av ljud- och lysbojar samt av en vågpump. Mest aktuell är idén med "dam-atoll" som bygger på vågornas refraktion. USA deltar även i Kaimeiprojektet.

Övriga_länder som visat intresse för vågenergi är Canada, Eire, Frankrike, Finland, Danmark, Italien m fl.

1.2.2 Litteraturuppföljning,_bibliotek

Sedan oktober 1979 bevakas ett flertal relevanta tidsskrifter. Ett bibliotek har byggts upp som nu omfattar ca 3000 artiklar, rapporter och proceedings med särskild inriktning på kroppars rörelser i vågor, krafter från vågor, vågspektra och förankring.

1.2.3 Kontakter_med_utländska_forskare

Ett viktigt led i kunskapsuppgnaden utgör kontakterna med utländska forskare. Dessa kontakter har bestått både i korrespondens och personliga sammanträffanden. Oftast har ramen varit en konferens eller liknande. Av naturliga skäl har umgänget med norrmännen varit särskilt livligt. I rapporten ges en förteckning över deltagande i olika konferenser mm samt en uppräkning av andra former av kontakter. Särskilt givande har seminariesamarbetet med Norge varit. Vidare har vi haft stor nytta av deltagandet i de stora brittiska konferenserna och av ett flertal studiebesök i både Storbritannien och Norge. I och med symposiet i Göteborg 1979 blev den svenska forskningsinsatsen internationellt känd och erkänd.

1.3 Energipotential

1.3.1 Vågmätningar

I detta avsnitt redovisas alla kända bestämningar för minst ett helt år av vågeffekter runt den svenska kusten. Bestämningarna utgörs av observationer, mätningar och olika hindcastberäkningar. Metoderna beskrivs och bedöms. Sammanlagt föreligger 10 olika källor. Värden finns för 33 olika platser längs svenska kusten och gäller för tidsperioder från 20 år till 1 år. Slutligen görs en sammanfattande bedömning av årsmedeleffekten på de nämnda platserna

där även tillförlitligheten av bestämningsmetoden anges och hänsyn till isförekomst tas.

De mest intressanta områdena på västkusten och utanför Gotland bedöms ha en årsmedeleffekt på $5 \pm 1 \text{ kW/m}$.

1.3.2 Tillgängliga vattenområden

Kapitlet behandlar de hinder som kan tänkas för placering av vågkraftverk utmed den svenska kusten. Sålunda beskrivs isförhållandena under normal respektive sträng vinter samt diskuteras vilka problem isen kan medföra och hur de skulle kunna bemötas. Vidare berörs eventuella miljöproblem men framför allt riskerna för konflikt med fiskerinäringen. Metoder för fiske beskrivs kortfattat och en översikt över var fisket bedrivs ges. Konfliktrisker med sjöfart, militära intressen, fritidsintressen och marin kulturminnesvård berörs, liksom anslutningsmöjligheterna till kraftnätet.

Möjligheten att lokalisera vågkraftverk till havs diskuteras.

Utanför bohuskusten kan fiske och is utgöra betydande hinder för introduktion av vågkraftverk. Öster om Gotland bedöms problemen vara betydligt mindre.

1.4 Tekniköversikt och tillämpningar

1.4.1 Vågkraftverk

Detta omfattande kapitel berör först olika strukturlösningar hos vågkraftverk. Bl a tas möjligheten upp att samlokalisera havsförlagda vindkraftverk och vågkraftverk. En studie av detta har gjorts för Gotland.

Därefter berörs kortfattat några olika hydrodynamiska principer samt olika sätt att dela in vågenergiomvandlare. Därefter beskrivs utformning och funktion mm hos de flesta omvandlare som på allvar studerats. Antalet koncept fördelar sig på olika länder enligt följande:

Japan	7
Storbritannien	12
Norge	3
USA	4
Finland	2
Västtyskland	1
Danmark	1
Frankrike	1
Mauritius	1
Summa	32

De svenska koncepten berörs i kapitel 7 och tas ej upp här.

Ett stort antal patent finns på området och ett par exempel lämnas.

1.4.2 Energiupptagning

Fortsättningsvis beskrivs olika omvandlingsled mellan det hydro-dynamiska och det elektriska ledet, såsom mekanisk, hydraulisk och pneumatisk omvandling.

En omfattande undersökning av rotorlindningsfria generatorer för vågenergiomvandlare sammanfattas ganska kortfattat. Särskilt berörs de högst speciella krav som ställs på en sådan generator: den skall uppfylla extremt höga miljökrav med starkt salthaltig och fuktig atmosfär och den bör vara praktiskt taget service- och underhållsfri. Dessa krav medför att endast vissa typer av generatorer kommer ifråga nämligen borstlösa synkrongeneratorer, asynkrongeneratorer med burlindad rotor samt reluktansgeneratorer. Särskilt reluktansgeneratorer diskuteras.

I ett följande avsnitt följs tidigare gjorda utredningar avseende den linjära generatorn upp. Ett konkret exempel på en dimensionering av en 50 W modellgenerator visas.

1.4.3 Elektriska system

I avsnittet ges en översikt över sådana frekvensomriktarsystem som är lämpliga för överföring av effekt från vågenergiomvandlare till

ett kraftnät. En förutsättning är att den elektriska energin levereras med en likspänning överlagrad med ett spektrum av växelströmskomponenter. Den elektriska effektenens kvalitet förbättras genom olika åtgärder avseende reaktiv effektförbrukning, övertonshalt i växelpänningen, modulation av den aktiva och reaktiva effekten samt variation hos den avgivna effekten.

Kapitalet exemplifierar fortsättningsvis hur man kan simulera det elektriska systemet hos ett helt vågkraftverk. Som indata används verkliga spänningstidsserier från fältmätningar. Med en uppkoppling av en mätdator och två strömriktare kan sedan ett kraftverk simuleras och inverkan studeras när olika villkor för sammanlagring av effekten från många bojar ställs.

1.4.4 Förankringssystem

Kapitlet lämnar en översiktig beskrivning av olika föreslagna förankringssystem och dessas egenskaper. Vissa exempel på tillämpningar beskrivs. En översikt ges över olika komponenter i förankringssystemet.

1.4.5 Material

Havet utgör från beständighetssynpunkt en besvärlig miljö och valet av material har därför en avgörande betydelse. Vågornas karaktär orsakar även problem med nötning och utmattning. I kapitlet görs en genomgång av olika material. I avsnittet om stål beskrivs korrosionsmekanismen ingående liksom olika sätt att skydda sig mot korrosion. Betong diskuteras map armeringskorrosion, kemisk nedbrytning och frostskador. Vidare berörs plast och gummi.

1.4.6 Realisering av vågkraftverk

I detta kapitel diskuteras hur det skulle gå till att tillverka och installera samt driva och underhålla ett kraftverk. I litteraturen redovisade studier refereras.

1.4.7 Kostnader

Avsnittet tar först upp olika principer för kostnadsberäkningar dels den vanliga annuitetsmetoden och dels metoden med diskonterat kapitalflöde. Olika principer för bestämning av underhållskostnader berörs liksom inverkan av tillverkning i långa serier.

Därefter följer en översikt över hittills publicerade kostnads-kalkyler för vågkraftgenererad elenergi. 62 sådana uppgifter redovisas. Variationen av energikostnaderna är mycket kraftig vilket i första hand beror på att kalkylerna ofta haft helt olika syften.

Slutligen visas exempel på kostnadskalkyler enligt de två ovan nämnda metoderna.

1.5 Teoriutveckling

1.5.1 Grundläggande teoriutveckling

I detta kapitel rapporteras forskningsarbete avseende utveckling av en matematisk-hydrodynamisk teori för beräkning av på en flytande kropp verkande reaktionskrafter och deras moment, excitationskrafter och deras moment, samt kroppens effektupptagning och absorptionslängd.

Problemet betraktas som ett hydrodynamiskt potentialproblem. Därmed måste det existera en hastighetspotential vars gradient ger vätskerörelsen och därför också trycket i varje punkt i vätskan.

Det första steget mot en lösning av det skisserade problemet är att identifiera de randvillkor på kroppen, på den fria havsytan, på havsbotten och strålningsvillkoren oändligt långt från kroppen, som hastighetspotentialen måste tillfredsställa när problemet är linjäriserat.

Det andra steget är att bygga upp en hastighetspotential som tillfredsställer alla dessa linjära randvillkor. För detta utvecklas hastighetspotentialen för en pulserande källa under havsytan. Denna integreras därefter över kroppens yta. Genom att addera hastighetspotentialen för den infallande vågen blir den resulterande

hastighetspotentialen för vätskerörelsen fastställd.

Det tredje steget är att använda den resulterande hastighetspotentialen för att utveckla generella formler för de olika hydrodynamiska krafter som påverkar kroppen.

Det fjärde steget är att utveckla en generell formel för kroppens effektupptagning och att optimera denna under globala bivillkor eller dämpningsvillkor.

Det femte steget är att diskutera kroppens absorptionslängd och påvisa att de tidigare generellt accepterade resultaten måste modifieras när hänsyn tagits till dämpningsvillkoren.

1.5.2 Tillämpad teori

Inledningsvis ges en översikt över allmänna vågsamband och vågspektrum. Sedan redovisas den linjära teorin för NE-bojen med bl a beräkning av verkningsgrad. Därefter beskrivs teorin för oregelbunden sjö som diskuteras utifrån den linjära teorin för NE-bojen.

1.5.3 Teoretisk analys av petropumpslang

En utförd teoretisk analys av petropumpslangen berörs i korthet.

1.5.4 Optimering av boj

En teoretisk optimering av bojar har gjorts utifrån den enkla matematiska modellen för NE-bojen. Beräknade vågförhållanden vid Hoburg har använts. Vid optimeringen har bojens diameter, massa och dämpning varierats så att bästa medelverkningsgrad erhållits. Samtidig ändring av massa och dämpning har inte gjorts.

Optimeringen resulterar i en boj på ca 190 ton med en diameter på 9.7 m och en konstant dämpning på 300 kNs/m. Bojen skulle därvid få en total medelverkningsgrad på 20% och leverera 142 MWh/år.

1.5.5 Energiproduktionsberäkning

Här redovisas en nyutvecklad metod att på statistiska grunder beräkna energiproduktionen från en NE-boj. Metoden tillåter att effektbegränsningar beaktas liksom återkopplingen på bojrörelsen av dessa begränsningar.

Metoden medför i ett konkret fall att energin från en viss boj beräkningsmässigt ökar från 18 till 23 MWh när hänsyn tas till återkopplingen av effektbegränsning.

1.5.6 Frekvensanalys_inom vågteorin

Med frekvensanalys kan ett kraftfullt hjälpmittel erhållas för att beskriva energiupptagningen i en vågkraftboj, med hjälp av Fast Fourier Transform (FFT) tar analysen rimlig tid.

Överföringsfunktioner och effektspektrum kan uppskattas för de undersökta vågenergiomvandlarna. Emellertid bör det betonas att det är skattningar av spektrum och överföringsfunktionerna som erhålls. Beroende på hur dataserien som uppmättes ser ut, om den använda mättiden är tillräcklig, erhålls mer eller mindre bra skattningar. Vid analysen av effektspektrum bör variansen reduceras eftersom den är alltför stor hos ett råspektrum. Härvid kan emellertid medelvärdesfel uppkomma. Vid bestämningar av överföringsfunktioner är det viktigt att de ingående spektra variansen reduceras innan kvotbildningen sker.

Ett flertal FFT-algoritmer förekommer, innan de användes bör noga undersökas hur de är definierade, då ett flertal definitioner av Fouriertransformen förekommer. Likaså bör de provas mot en känd korrekt FFT-algoritm eller kontrolleras genom att variansen för tidsserien jämföras med ytan under effektspektrum ("medeleffekten"). Dessa bör vara lika om FFT-algoritmen är korrekt.

1.6 Modellförsök

1.6.1 Laboratorieförsök

Rapporten redovisar experiment med modellbojar i vågränna och vågbassäng. Försöken har utförts i regelbundna och oregelbundna vågor med eller utan energiupptagning. Olika bojar har undersökts map form, diameter och massa. Vid energiupptagning har den simulerade generatordämpningen varierats. Resultaten har använts för dimensionering av bojar i större skala och för verifiering av uppställda matematiska teorier. Speciellt har hydrodynamisk massa och dämpning för bojar undersökts. Verkningsgraden hos energiupptagande bojar har studerats. Maximalvärdet på över 50% och medelvärdet på ca 35% uppnåddes i regelbundna respektive oregelbundna vågor.

1.6.2 Försök_i_Lygnern_med_kopplade_bojen_1979

På grundval av tidigare erfarenheter från olika förankringsarrangemang byggdes en ny boj med ett kopplat system (via en generator) bestående av dels en boj och dels en friflytandestång med en dämpskiva nere i vattnet.

Mätningar utfördes i naturliga vågor på sjön Lygnern. Vågor och bojeffekt mm mättes samtidigt. Resultaten signalbehandlades och lagrades mha en mätdator och bearbetades senare. Rapporten redovisar 40 försöksserier. Den mekaniska verkningsgraden bestämdes på laboratorium varefter den hydrodynamiska verkningsgraden kunde bestämmas ur den totala. Den hydrodynamiska medelverkningsgraden bestämdes genom tidsserieanalys. Som mest erhölls nära 100%.

Försöksserien gav värdefulla erfarenheter av mätgivarsystem, digital signalbehandling samt försöksmetodik.

1.6.3 Försök_i_Lygnern_med_kopplade_bojen_1981

1981 gjordes mätningar med den kopplade bojen sedan den modifierats något. 35 användbara mätserier har registrerats. Mätningar med olika generatordämpning har utförts i ett antal vågsituationer.

Resultaten har bearbetats både med tidsserieanalys och frekvensanalys. Den senare har medfört en utvidgning av frekvensanalysen för oregelbundna vågor.

Bojens hydrodynamiska medelverkningsgrad ligger i området 15-20% i naturliga vågor. Bojen har visat sig vara något för liten för Lygnerns vågor.

1.6.4 Försök_i_Lygnern_med_petroumpskraftwerk

Under 1978 byggdes ett kraftverk med en petropump som lades ut i Lygnern. Några mätningar utfördes ej men olika förankringsarrangemang testades. Kraftverket visade sig mycket tillförlitligt även i hårt väder.

Kraftverket byggdes om och mätningar kunde genomföras under 1980. Sammanlagt 13 mätserier redovisades. Maximala medelverkningsgraden uppgick till 16% vilket är bra mht att systemet på intet sätt var optimerat.

Försöken kommer att fortsätta på uppdrag av Svenska Varv AB.

1.6.5 Försök_med_IPS-bojen_vid_Trubaduren

1980 sjösattes ett vågkraftverk i form av en större bojmodell i havet utanför Göteborg. Bojen är sammansatt av dels själva bojskrovet och ett därunder hängande långt rör. Vattnet i röret driver en kolv som rör sig relativt bojen och genom dämpning av denna relativa rörelse tas energi ut. Försöken föregicks av modellprov i Lygnern varvid preliminära dimensioner bestämdes vilka sedan skalades upp.

Försöken innebar framför allt en erfarenhetsmässig framgång eftersom alla viktiga moment fanns med såsom

- projektering och konstruktion
- upphandling och byggande
- mekaniska och elektriska installationer
- utformning av mätutrustning och upprättande av mätstation
- utmärkning och utläggning av förankringar

- sjösättning och intrimning av kraftverk
- reparation till sjöss
- mätning och signalöverföring med upp till 6 kanaler
- upptagning av boj
- utvärdering och rapportering

Eftersom försöken kom att äga rum under hösten utsattes kraftverket flera gånger för kraftiga stormar med våghöjder på över 6 m. Detta medförde att kraftverket skadades och under 1980 mättes därför endast förankringskrafoten. Sedan kraftverket reparerats och modifierats kunde under 1981 ett antal mätserier erhållas avseende energiproduktion, bojrörelser mm.

Förankringskraftmätningarna visade att det valda trepunktssystemet med blåsa och wire-kätting gav mycket små förankringskrafter. Som mest registrerades 16 kN i en lina. Totalt registrerades 19 mätserier. Mätserierna har analyserats med tidsserieanalys och frekvensanalys. Kraftspektrum och överföringsfunktioner har framtagits.

Vid mätningarna 1981 registrerades följande signaler: våghöjd, bojacceleration, stångkraft, generatorns varvtal, ström och spänning. Generatorns dämpning varierades automatiskt i fyra steg.

Totalt har 23 mer eller mindre fullständiga mätserier registrerats.

Kraftverkets hydrodynamiska medelverkningsgrad har uppgått till nära 50% och den totala medelverkningsgraden till nära 30%. Vid en optimering av kraftverket bör man kunna få ut mycket mer energi.

I kapitlet anges slutligen hur mycket energi IPS-kraftverk i olika skalor skulle producera för förhållandena vid Ölands södra grund.

2.1 Allmänt

Sedan vågenergiforskningen i världen kom i gång på allvar i mitten av 1970-talet har kunskaperna inom området ökat enormt. Trots på vågenergins möjligheter har präglats av omväxlande optimism och pessimism. I dagsläget synes många av de tekniska problemen vara lösta. Det återstår att göra försök med prototyper i fullskala. Det stora problemet är nu att få godtagbar ekonomi vid utnyttjandet av vågenergi. Visserligen anges relativt höga kostnader i dag, men det finns stora möjligheter att sänka dessa genom bättre konstruktioner.

De största satsningarna görs i Storbritannien (hittills 120 Mkr), Norge (60 Mkr) och Japan (60 Mkr). I mindre omfattning forskas i flera länder bl a USA och Sverige. Jämte de officiella statliga forskningsprogrammen växer intresset från industrin.

Trots begränsad tillgång på vågenergi i svenska vatten finns det all anledning för oss att delta i utvecklingen av följande skäl:

- vågenergi har bättre möjligheter att utnyttjas ekonomiskt här än t ex vid Atlantens kuster. Detta beror framför allt på mindre svåra stormförhållanden.
- energipotentialen är av tillräcklig storlek för att vara intressant, särskilt för lokala behov såsom exempelvis för Gotland.
- provningsförhållandena är gynnsamma i svenska farvatten (risken för att en hel försöksprototypanläggning spolas bort vid en storm är mindre än t ex i Nordsjön). Därigenom har svensk industri möjlighet till en snabb utveckling och kan vinna försteg vid provning av anläggningar. Detta har stor betydelse vid en satsning på export av produkter och know-how.
- vågenergi utgör ett tillämpat forskningsområde vilket motiverar en förhållandevis stor satsning för upprätthållande av kunskapsnivån.

- många utvecklingsländer har potentiella möjligheter att utnyttja vågenergi. Ofta är kostnaderna för den importerade energin mycket hög. Dessa länder saknar emellertid möjligheter att själva utveckla den komplicerade teknik som ett utnyttjande av vågenergi medför. Enkla vågkraftverk skulle därför kunna utgöra en lämplig form av u-landsstöd.

Inom den närmaste femårsperioden kommer fullskaleanläggningar att byggas och utprovas. Det är troligt att detta arbete kommer att ske i internationell samverkan. Det är mycket önskvärt att Sverige då deltar.

2.2 Rapporten

I denna rapport presenteras resultaten av de senaste insatserna inom vågnergiforskningen i Sverige. Bland dessa insatser märks bl.a.

- inhämtande av kunskap från forskning i utlandet
- etablering av kontakter med utländska forskare
- grundläggande och tillämpad teoriutveckling
- utveckling av mät- och analysmetoder
- kartläggning av vågförhållanden och lokaliseringsförutsättningar omkring den svenska kusten
- studium av kostnadskalkyler och teknik för omvandling
- undersökningar av generatorer och elektriska system
- modellförsök med bojar i laboratorium
- försök med skalmodeller i Lygnern
- försök med en modell i stor skala

Rapporten består av ett antal kapitel som är relativt oberoende av varandra. De olika avsnitten skiljer sig ifråga om språklig stil, teknisk nivå och omfang eftersom många olika författare medverkat.

I rapporten presenteras för första gången resultaten från de fältmätningar som hittills utförts. Vidare redovisas den omfattande och grundläggande hydrodynamiska teorin. Dessutom görs en genomgång av olika möjliga typer av elgeneratorer.

Överskådliga sammanfattnings återfinns avseende internationella kontakter, uppskattningar av vågenergin runt svenska kusten och hittills tillkännagivna uppgifter om kostnader för vågenergi producerad elenergi.

2.3 Rapportförteckningar

Förteckning över reserapporter

- RR: 1 Redogörelse för resa i Storbritannien för Planeringsgruppen för vågenergi. Edinburgh 760714. Lars Bergdahl.
- RR: 2 Besök vid Vassdrags- och Havnelaboratoriet (VHL), Trondheim 770118. Curt Falkemo.
- RR: 3 Redogörelse för besök i Danmark för Planeringsgruppen för Vågenergi. Köpenhamn 770118. Anders Rylander.
- RR: 4 Redogörelse för besök i Trondheim för Planeringsgruppen för Vågenergi. Trondheim 770322. Anders Rylander m fl.
- RR: 5 Redogörelse för besök i Köpenhamn i samband med ett havsenergimöte. Köpenhamn 770414. Lennart Claeson m fl.
- RR: 6 Besök vid hydrografisk-meteorologisk bojstation i Örlogsberga, Stockholm 77615. Lennart Claeson.
- RR: 7 Rapport från möte med IEA Wave Power Expert Group. Oxford 780902. Anders Rylander, Gösta Wahl.
- RR: 8 Rapport från besök i Skottland, Edinburgh 771205, Lennart Claeson m fl.
- RR: 9 Rapport från besök i Storbritannien. 780129 - 780205. Anders Rylander och Thomas Rindby.
- RR: 10 Rapport från besök i Norge 780524 - 780525. Curt Falkemo och Lennart Claeson.
- RR: 11 Rapport från besök vid två centra för vågnergiforskning i USA i juni 1978. Svante von Zweybergk.

- RR: 12 Rapport från deltagande i ett symposium on "Wave and Tidal Energy" i Canterbury, Storbritannien, 27-29 september 1978.
Lennart Claeson och Curt Falkemo.
- RR: 13 Rapport från besök i Hamburg 780926 - 780927. Thomas Rindby.
- RR: 14 Rapport från deltagande i vågenergikonferens i London 22-23 november 1978 samt från besök hos Vickers Ltd den 24 november. Per Andersson m fl.
- RR: 15 Rapport från besök i Trondheim. 790326 - 790327.
Lennart Claeson.
- RR: 16 Besök vid Marintekniskt Senter vid NTH. Trondheim.
79613 - 79615. Lars Bergdahl.
- RR: 17 Kätting, stål och fiberlinor, kurs i Fagernes, Norge.
790425 - 790427. Thomas Rindby.
- RR: 18 Reserapport från Vågenergikonferensen i Edinburgh
26-28 juni 1979. Åke Kinnander m fl.
- RR: 19 Rapport från deltagande i konferensen BOSS 1979 i London. 14 dec 1979. Lars Bergdahl.
- RR: 20 Rapport med fotobilaga från besök hos Even Mehlum, Oslo.
1979-09-27. Lars-Ove Sörman m fl.
- RR: 21 Rapport från möte på SMHI. 1979-09-31. Anders Rylander.
- RR: 22 Rapport från deltagande i konferensen Sea Climatology i Paris 1979. Januari 1980. Anders Rylander.
- RR: 23 Rapport beträffande besök vid två laboratorier för studium av vågenergi i USA i januari 1980. Svante von Zweybergk.
- RR: 24 Resa till Stockholm 18-22 okt 1979. Föredrag SMR-IVA,
besök hos VBB och Vattenbyggnad KTII, 1979-12-14, Lars Bergdahl.

RR: 25 Rapport från resa till Storbritannien 1980-03-26 -
1980-04-03. Göran Olsson. 8 okt 1980.

RR: 26 Rapport från besök i Trondheim den 1-3 dec 1981 i sam-
band med seminarium om vågmätningar. Lennart Claeson
jan 1981.

RR: 27 Rapport från besök i Visby 80 05 06. Lennart Claeson
30 maj 1980.

RR: 28 Rapport om deltagande i seminariet BETON TILL ENERGI-
ANLAEG i Köpenhamn 810325.
Anders Byström April 1981.

RR: 29 Rapport från IEA-möte i Paris den 29 september 1981,
oktober 1981, Lennart Claeson.

RR: 30 Rapport från deltagande i symposiet Wave and wind direc-
tionality with applications to the design of structures.
Paris 810930 - 811001. Oktober 1981, Anders Byström.

** RR: 31 Rapport från deltagande i ett symposium on "Wave and
Tidal Energy" i Cambridge, Storbritannien, 23-25 sep-
tember 1978.
Anders Byström, Lennart Claeson och Pontus Clason.

* RR: 32 Rapport från deltagande i hydraulikdagar i Linköping
den 27 och 28 oktober 1981.

** RR: 33 Rapport från besök i Trondheim den 23-25 november 1981
i samband med seminarium om material och korrosion.

Förteckning av grupprapporter (GR) från Gruppen för Vågenergi-forsknings

- GR: 1 Sea Waves at the Swedish Coastal Waters as a Source of Energy. September 1976. Anders Rylander CTH-SH Rapport nr 74-76.
- GR: 2 Vågenergi i Sverige. Rapport från planeringsgruppen för Vågenergi. - NEPÖ/V. 29 december 1976.
- GR: 3 Analys av ett förslag till vågkraftverk. Rapport från planeringsgruppen för Vågenergi - NEPÖ/V. 15 mars 1976.
- GR: 4 Komplettering av kostnadskalkyl för vågkraftverk med bojar. 77-10-20. Thomas Rindby.
- GR: 5 Effektupptagning i oregelbundna vågor hos en vågboj med linjär dämpning. Lars Bergdahl 79-08-28.
- GR: 6 Energi ur havsströmmar. 1977. Björn Ringesten. Inst. för Vattenbyggnad CTH. Report Series B:4.
- GR: 7 Possibility of large electric output by floating type Sea Wave Electric Generator av Youshio Masuda, Takeaki Miyazaki och Tomio Emura, JAMSTEC. Översättning till svenska. 1977. Thomas Rindby och Lennart Claeson.
- GR: 8 Vattentanksprov med stor elektrisk våggenerator under åren 1974-1975 utförda av JAMSTEC, (Originaltets titel: Water Tank Test of Large Sea Wave Electric Generator from 1974 to 1975 by JAMSTEC, Reporter Y Masuda, T Miyazaki.) Sammanfattning på svenska. 1977. Lennart Claeson och Thomas Rindby.
- GR: 9 Progressive study of Sea wave electric Generator in 1976 by JAMSTEC, Youshio Masuda & Takeaki Miyazaki. Sammanfattning på svenska. 1977. Lennart Claeson.
- GR: 10 Linjär teori för energiupptagning hos en oscillerande vågenergiomvandlare av bojtyp. 1978-05-12. Lars Bergdahl, Lennart Claeson, Johannes K Lunde.

- GR: 11 Vågkraftbojar - modellförsök i regelbundna vågor, 1978-08-30. Lars Bergdahl, Anders Rylander, Lars-Ove Sörman och Lars Wernersson.
- GR: 12 Ocean Wave ENergy Research in Sweden. 1977. Revised 1978-12-09.
- GR: 13 Vågkraftbojar - modellförsök i regelbundna vågor i bred bassäng. 1979-03-20. Lars Bergdahl, Lars-Ove Sörman, Lars Wernersson.
- GR: 14 Vågkraftbojar - modeillförsök med energiupptagning i regelbundna vågor. 1979-03-21. Per Andersson och Jan Forsberg.
- GR: 15 Havets vågor - en energikälla för framtiden. Rev 1980-01-22. Lennart Claeson.
- GR: 16 Vågenergi i Sverige. 79-05-14. 2:a upplagan februari 1980.
- ** GR: 17 Modellförsök med energiupptagande bojar i sjön Lygnern (1978-79).
- ** GR: 18 Program för beräkning av vågor ur vinddata.
- GR: 19 Vågkraftverk i svenska farvatten. Tillgängliga vattenområden - Inledande studie. 5 aug 1980. Lennart Claeson.
- GR: 20 Hydrodynamic theory of ocean surface waves and energy conversion. Johannes K Lunde. 1 februari 1980.
- ** GR: 21 Likströmsmodell för linjär generator.
- GR: 22 Dimensionering av linjär synkrongenerator. Jan Forsberg, Per Bergström, Åke Kinnander, 800721.
- GR: 23 Linear Analysis of a Wave Energy Converter Consisting of two Coupled Heaving Bodies. Lennart Claeson. March 1980.
- GR: 24 Vågkraftbojar - modellförsök med energiupptagning i regelbundna vågor i bred bassäng. Lars Bergdahl, Göran Olsson, Lars-Ove Sörman, Mars 1980.

- GR: 25 Vectors, Second Order Cartesian Theorems and Integral Theorems. Johannes K Lunde.
- GR: 26 Inledande försök med petropump. Karl-Gustav Wahlstrand. Dec 80.
- * * GR: 27 Pendlande synkrongenerator.
- GR: 28 The Swedish Wave Energy Programme. Paper from First Symposium on Wave Energy Utilization, Gothenburg 1979. Bergdahl, Claeson, Falkemo, Forsberg, Rylander. December 1981.
- GR: 29 Vågenergi för Gotland - ett förslag till energiförsörjning med vågkraftverk. Februari 1980, Anders Byström.
- GR: 30 Vågenergi för Gotland, Mars 1980, Anders Byström.
- * GR: 31 Energiproduktionen från en vågkraftboj.
- GR: 32 Vågkraftbojar - modellförsök med energiupptagning i oregelbundna vågor i bred bassäng. Lars Bergdahl, Göran Olsson, Lars-Ove Sörman. 30 mars 1981.
- GR: 33 Förankringsseminarium i Göteborg 12-14 maj 1980. Föredrag sammanställda av Lennart Claeson. Oktober 1980.
- GR: 34 Inledande försök med Interprojektbojen, dec 1980.
- * GR: 35 Fortsatta försök med petropump. Karl-Gustav Wahlstrand. Dec 81.
- GR: 36 Seminarium om vågdata för vågenergi. Trondheim 1-3 december 1980. Föredrag sammanställda av Knut Torsethaugen och Lennart Claeson. Trondheim/Göteborg, oktober 1981.
- * * GR: 37 Modellförsök med energiupptagande boj i Lygnern (1980-81).
- * * GR: 38 Förankringskraftmätningar på Interprojectbojen.

GR: 39 Undersökning av nya typer av rotorlindningsfria generatorer för användning i vågenergiomvandlare. Svante von Zweybergk. Göteborg november 1981.

* GR: 40 Samlokalisering av vågkraftverk och havsbaserade vindkraftverk vid Gotland. Lennart Claeson, Pontus Clason, Hans Ganander, Nils Mårtensson.

* GR: 41 Seminarium om Elektriska system för vågenergiomvandlare. Göteborg 11-13 maj 1981. Föredrag sammanställda av Lennart Claeson. Dec 1981.

* * GR: 42 Seminarium om Materialteknikk, korrosjon og aldring i bølgekraftverk. Trondheim 23-25 nov 1981. Föredrag sammanställda av Lennart Claeson.

* * GR: 43 Fortsatta försök med Interprojectbojen.

NE-rapporter

NE 1977:4 Vågenergi i Sverige

NE 1981:16 Akvatisk energi, resultat, utvecklingsläge och förutsättningar

NE 1981:23 Utvärdering av vågenergi. Förslag till fortsatta insatser.

Proceedings från vågenergisymposiet i Göteborg 1979

First Symposium on Wave Energy Utilization, CTH, Gothenburg 30 Oct-1 Nov 1979.

* * Rapporter som ännu ej är färdigställda
* Rapporter som är praktiskt taget klara

6 TEORIUTVECKLING

6.1 Grundläggande teoriutveckling

6.1.1 Allmänt om den hydrodynamiska teorin

En flytande kropp, som förutsätts att hålla sin medel-position, påverkas av vågor.

I detta kapitel rapporteras forskningsarbetet avseende utveckling av en matematisk-hydrodynamisk teori för beräkning av på kroppen verkande reaktionskrafter och deras moment, excitationskrafter och deras moment, samt kroppens effektupptagning och absorptionslängd.

Problemet betraktas som ett hydrodynamiskt potentialproblem. Därmed måste det existera en hastighetspotential vars gradient ger vätskerörelsen och därför också trycket i varje punkt i vätskan.

Det första steget mot en lösning av det skisserade problemet är att identifiera de randvillkor på kroppen, på den fria havsytan, på havsbotten och strålningsvillkoren oändligt långt från kroppen, som hastighetspotentialen måste tillfredsställa när problemet är linjäriserat.

Det andra steget är att bygga upp en hastighetspotential som tillfredsställde alla dessa linjära randvillkor. För detta utvecklas hastighetspotentialen för en pulserande källa under havsytan. Denna integreras därefter över kroppens yta. Genom att addera hastighetspotentialen för den infallande vågen blir den resulterande hastighetspotentialen för vätskerörelsen fastställd.

Det tredje steget är att använda den resulterande hastighetspotentialen för att utveckla generella formler för de olika hydrodynamiska krafter som påverkar kroppen.

Det fjärde steget är att utveckla en generell formel för kroppens effektupptagning och att optimera denna under globala bivillkor eller dämpningsvillkor.

Det femte steget är att diskutera kroppens absorptionslängd och påvisa att de tidigare generellt accepterade resultaten måste modifieras när hänsyn tagits till dämpningsvillkoren.

6.1.2 Rörelseekvationerna

Låt x_1, x_2, x_3 i fig 6.2.1 vara ett rumsfast koordinatsystem med

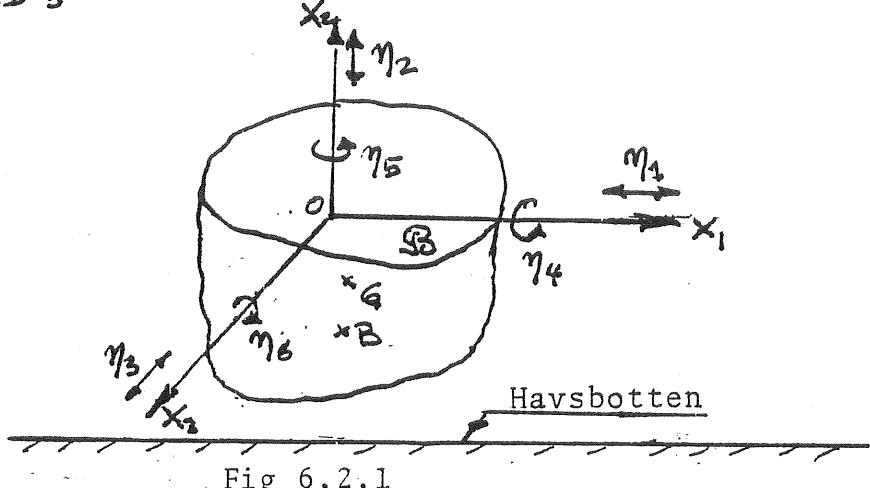


Fig 6.2.1

origo i havsvattenytan. Förskjutningarna av \mathbf{B} i x_1, x_2, x_3 -riktningarna benämnes

η_1 = surge, η_2 = heave, η_3 = sway

Rotationerna kring samma axlar benämnes

η_4 = roll, η_5 = yaw, η_6 = pitch

Rörelseekvationerna för \mathbf{B} 's tyngdpunkt G, när \mathbf{B} exiteras av vågrörelsen, består av sex simultana differentialekvationer av andra ordningen.

$$\sum_{k=1}^6 P_{k\ell} \eta_k(t) = \bar{F}_\ell \quad (\ell=1, 2, \dots, 6) \quad (6.2.1)^*$$

där index ℓ betecknar respektive surge, heave, sway, roll, yaw, pitch och där $\eta_k(t)$ är \mathbf{B} 's förskjutning eller rotation i mod ℓ .

^{*}) Paginering samt numrering av figurer och ekvationer är för kapitel 6.1 genomförda separat och på ett annat sätt än i rapporten i övrigt.

Vidare är F_ℓ den yttre kraften eller det yttre momentet pga låga vågor och $P_{\ell k}$ är differentialoperatorn

$$P_{\ell k} = (m_{\ell k} + \alpha_{\ell k}) \frac{d^2}{dt^2} + b_{\ell k} \frac{d}{dt} + c_{\ell k} + e_{\ell k} \quad (6.2.2)$$

där $(m_{\ell k} + \alpha_{\ell k})$ är \mathbf{B} 's virtuella massa eller komponenten av \mathbf{B} 's virtuell masströghetstensor, $b_{\ell k}$ är \mathbf{B} 's hydrodynamiska dämpningskoefficient pga en från kroppen utstrålande vågrörelse samt de viskosa krafternas verkan, $c_{\ell k}$ är \mathbf{B} 's hydrostatiska återförningskoefficient och $e_{\ell k}$ är den linjära koefficienten pga förtöjningsreaktionen i mod. ℓ pga rörelsen i mod. k .

Vidare är $\alpha_{\ell k} = \alpha_{k \ell}$.

Låt x_1, x_2, x_3 vara ett kroppsfast koordinatsystem som är lämpligt för beskrivning av \mathbf{B} .

Vi förutsätter att \mathbf{B} är symmetrisk om $x_1 x_2$ -planet och vi använder följande definitioner, fig 6.2.2:

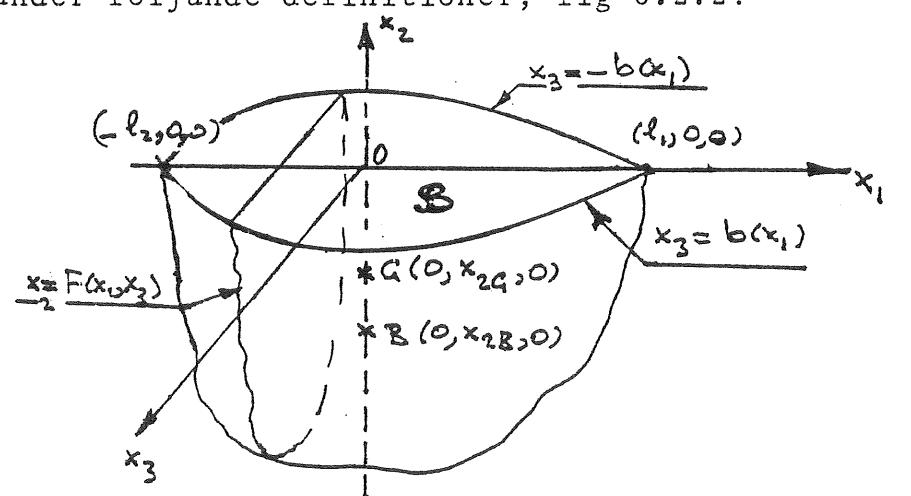


Fig 6.2.2

Vattenlinjearean W fås ur

$$W = \int_{-l_2}^{l_1} 2b(x_1) dx_1 \quad (6.2.3)$$

Tyngdpunkten hos vattenlinjearean W har koordinaterna

$$(x_{1c}, 0, 0) \text{ där } x_{1c} = \frac{2}{W} \int_{-l_2}^{l_1} b(x_1) dx_1 \quad (6.2.4)$$

Tröghetsradien d_1 för vattenlinjen om Ox_3

fås ur

$$d_1^2 = \frac{2}{W} \int_{-l_2}^{l_1} b(x_1) x_1^2 dx_1 \quad (6.2.5)$$

Tröghetsradien d_3 för vattenlinjen om Ox_1

fås ur

$$d_3^2 = \frac{1}{W} \int_{-l_2}^{l_1} dx_1 \int_{-b(x_1)}^{b(x_1)} x_3^2 dx_3 = \frac{2}{3W} \int_{-l_2}^{l_1} b(x_1) dx_1 \quad (6.2.6)$$

Spantarean $S(x_1)$ vid sektion x_1 fås ur

$$S(x_1) = \int_{-b(x_1)}^{b(x_1)} F(x_1, x_3) dx_3 \quad (6.2.7)$$

Volyndeplacementet ∇ fås ur

$$\nabla = \int_{-l_2}^{l_1} S(x_1) dx_1 \quad (6.2.8)$$

Deplacementtyngdpunkten för B har koordinaterna $(0, x_{2B}, 0)$

där

$$x_{2B} = \frac{1}{2V} \int_{-l_2}^{l_1} dx_1 \int_{-b(x_1)}^{b(x_1)} F^2(x_1, x_3) dx_3 \quad (6.2.9)$$

Eftersom B är symmetrisk om x_2 -planet finner vi att

$$a_{31} = a_{32} = a_{51} = a_{52} = a_{56} = a_{41} = a_{42} = a_{46} = 0$$

Låt m vara B 's massa och $f_B(x_1, x_2, x_3)$ dess täthet i punkten (x_1, x_2, x_3) . Då är

$$m = \int_{\nabla} f_B d\nabla \quad (6.2.10)$$

där $d\nabla$ är ett volymelement.

Vikttyngdpunkten G för B har koordinaterna

$$x_{ig} = \frac{1}{m} \int_{\nabla} x_i f_B d\nabla \quad (i=1,2,3) \quad (6.2.11)$$

Kroppen \mathbf{B} 's masströghetsprodukter fås ur

$$I_{ij} = \int_V x_i x_j \rho_B dV = I_{ji} \quad (i,j=1,2,3; i \neq j) \quad (6.2.12)$$

där $I_{23} = I_{31} = 0$ då \mathbf{B} förutsätts vara symmetrisk
om x_1, x_2 -planet.

Masströghetsmomenten I_1, I_2, I_3 om

x_1, x_2, x_3 -axlarna fås ur respektive

$$I_1 = I_{22} + I_{33}, \quad I_2 = I_{33} + I_{11}, \quad I_3 = I_{11} + I_{22} \quad (6.2.13)$$

Då vi har förutsatt låga vågor, blir amplituden av \mathbf{B} 's rörelser i de olika möderna av liten storlek, och man finner att de sex rörelseekvationerna, när man bortser från förtöjningsreaktionerna, kan skrivas.

$$(m + a_{11})\ddot{\gamma}_1 + a_{12}\ddot{\gamma}_2 + a_{16}\ddot{\gamma}_6 + b_{11}\dot{\gamma}_1 + b_{12}\dot{\gamma}_2 + b_{16}\dot{\gamma}_6 = F_1 \quad (\text{surge}) \quad (6.2.14)$$

$$\begin{aligned} a_{21}\ddot{\gamma}_1 + (m + a_{22})\ddot{\gamma}_2 + a_{26}\ddot{\gamma}_6 + b_{21}\dot{\gamma}_1 + b_{22}\dot{\gamma}_2 \\ + b_{26}\dot{\gamma}_6 + g\rho^W y_2 + g\rho^W x_{1c} \gamma_6 = F_2 \end{aligned} \quad (\text{heave}) \quad (6.2.15)$$

$$(m + a_{33})\ddot{\eta}_3 + a_{34}\ddot{\eta}_4 + a_{35}\ddot{\eta}_5 + b_{33}\dot{\eta}_3 \\ + b_{34}\dot{\eta}_4 + b_{35}\dot{\eta}_5 = F_3 \quad (\text{sway}) \quad (6.2.16)$$

$$a_{43}\ddot{\eta}_3 + (I_1 + a_{44})\ddot{\eta}_4 + (-I_{12} + a_{45})\ddot{\eta}_5 + b_{43}\dot{\eta}_3 \\ + b_{44}\dot{\eta}_4 + b_{45}\dot{\eta}_5 + g\rho(Wd_3^2 + \nabla \times_{2B})\gamma_4 = F_4 \quad (\text{roll}) \quad (6.2.17)$$

$$a_{53}\ddot{\eta}_3 + (-I_{12} + a_{54})\ddot{\eta}_4 + (I_2 + a_{55})\ddot{\eta}_5 + b_{53}\dot{\eta}_3 \\ + b_{54}\dot{\eta}_4 + b_{55}\dot{\eta}_5 = F_5 \quad (\text{yaw}) \quad (6.2.18)$$

$$a_{61}\ddot{\eta}_1 + a_{62}\ddot{\eta}_2 + (I_2 + a_{66})\ddot{\eta}_6 + b_{61}\dot{\eta}_1 + b_{62}\dot{\eta}_2 \\ + b_{66}\dot{\eta}_6 + g\rho Wx_{1C}\gamma_2 + g\rho(Wd_1^2 + \nabla \times_{2B})\gamma_6 = F_6 \quad (\text{pitch}) \quad (6.2.19)$$

Vi märker att det inte finns någon koppling mellan rörelseekvationerna för sway (6.2.16), roll (6.2.17), yaw (6.2.18), och rörelseekvationerna för surge (6.2.14), heave (6.2.15), pitch (6.2.19), dvs det är ingen interferens mellan dessa två grupper av rörelsers modi.

För vanliga skepp är det en svag koppling mellan surge, heave och pitch. Denna koppling är ofta försummad, dvs

$$a_{12}, a_{21}, a_{16}, a_{61}, b_{12}, b_{21}, b_{16}, b_{61} \approx 0$$

och vi har då ändå koppling mellan heave (6.2.15) och pitch (6.2.19).

För att komprimera rörelseekvationerna (6.2.14) till (6.2.18) sätter vi

$$[m+a_{\ell k}] = \begin{bmatrix} m+a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ a_{21} & m+a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & m+a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & I_1 + a_{44} & -I_{12} + a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & -I_{12} + a_{54} & I_2 + a_{55} & 0 \\ a_{61} & a_{62} & 0 & 0 & 0 & I_3 + a_{66} \end{bmatrix} \quad (6.2.20)$$

$$[\eta_\ell] = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4 \ \eta_5 \ \eta_6]^T \quad (6.2.21)$$

$$[F_\ell] = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6]^T \quad (6.2.22)$$

$$[b_{\ell k}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & 0 & b_{26} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & b_{45} & 0 \\ 0 & 0 & b_{53} & b_{54} & b_{55} & 0 \\ b_{61} & b_{62} & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \quad (6.2.23)$$

$$[C_{\ell k}] = g\rho \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & 0 & Wx_{1c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Wd_3^2 + \nabla x_{2B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Wx_{1c} & 0 & 0 & 0 & Wd_1^2 + \nabla x_{2B} \end{bmatrix} \quad (6.2.24)$$

Rörelseekvationerna kan nu skrivas som

$$[m+a_{ek}][\ddot{\eta}_k] + [b_{ek}][\dot{\eta}_k] + [c_{ek}+e_{ek}][\eta_k] = [F_k] \quad (6.2.25)$$

där vi har tagit med förtöjningsreaktionerna.

Om man emellertid också tar med effektupptagningen måste vi lägga till både en dämpningsterm $[b'_{ek}][\dot{\eta}_k]$ och en styvhetsterm $[e'_{ek}][\eta_k]$.

Rörelseekvationerna kan nu skrivas som

$$[m+a_{ek}][\ddot{\eta}_k] + [b_{ek}+b'_{ek}][\dot{\eta}_k] + [c_{ek}+e_{ek}+e'_{ek}][\eta_k] = [F_k] \quad (6.2.26)$$

eller ännu mer komprimerade

$$[\underline{m}+\underline{a}][\ddot{\underline{\eta}}] + [\underline{b}+\underline{b'}][\dot{\underline{\eta}}] + [\underline{c}+\underline{e}+\underline{e'}][\underline{\eta}] = [\underline{F}] \quad (6.2.27)$$

dvs

$$\underline{\Delta} \ddot{\underline{\eta}} + \underline{R} \dot{\underline{\eta}} + \underline{C} \underline{\eta} = \underline{F} \quad (6.2.28)$$

där koefficienterna är matriser givna med

$$\begin{aligned} \underline{\Delta} &= [\underline{m}+\underline{a}] = \underline{\tilde{m}} + \underline{\tilde{a}} \Rightarrow \underline{R} = [\underline{b}+\underline{b'}] = \underline{\tilde{b}} + \underline{\tilde{b'}} \\ \underline{C} &= [\underline{c}+\underline{e}+\underline{e'}] = \underline{\tilde{c}} + \underline{\tilde{e}} + \underline{\tilde{e'}}, \quad \underline{F} = [\underline{F}], \quad \underline{\eta} = [\underline{\eta}] \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

Här är $\underline{\Delta}$ den virtuella massamatrixen, \underline{R} är dämpningsmatrixen och \underline{C} är styvhetsmatrixen för systemet.

Då $\ddot{\mathbf{F}}$ exiteras av låga sinusformade monokromatiska vågor är den yttre kraften harmonisk och kan skrivas som

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{F}} &= |\hat{\mathbf{F}}| \cos(\omega t + \hat{\alpha}) \\ &= \operatorname{Re} |\hat{\mathbf{F}}| \hat{e}^{i(\omega t + \hat{\alpha})} \\ &= \operatorname{Re} (\hat{\mathbf{F}} e^{i\omega t})\end{aligned}\quad (6.2.30)$$

där $|\hat{\mathbf{F}}|$ är amplituden av $\ddot{\mathbf{F}}$ och

$$\hat{\mathbf{F}} = |\hat{\mathbf{F}}| \hat{e}^{i\hat{\alpha}} \quad (6.2.31)$$

är den komplexa kraftamplituden.

Den stationära lösningen av (6.2.28) ger en harmonisk rörelse

$$\begin{aligned}\ddot{\eta} &= |\hat{\eta}| \cos(\omega t + \hat{\beta}) \\ &= \operatorname{Re} (\hat{\eta} \hat{e}^{i\omega t})\end{aligned}\quad (6.2.32)$$

där

$$\hat{\eta} = |\hat{\eta}| \hat{e}^{i\hat{\beta}} \quad (6.2.33)$$

är den komplexa svängningsamplituden.

Insättes (6.2.33) i (6.2.28) finner vi att den komplexa svängningsamplituden $\hat{\vec{\gamma}}$ är

$$\hat{\vec{\gamma}} = [\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A} + i\omega \mathbf{B}]^{-1} \hat{\vec{F}} \quad (6.2.34)$$

där $[\mathbf{J}]^{-1}$ betecknar en invers matris. Responsvektorn fås ur

$$\vec{\gamma} = \operatorname{Re} \{ [\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A} + i\omega \mathbf{B}]^{-1} \hat{\vec{F}} e^{i\omega t} \} \quad (6.2.35)$$

Vi betraktar en av rörelseekvationerna (6.2.28), dvs en mod, och skriver

$$A\ddot{\vec{\gamma}} + R\dot{\vec{\gamma}} + C\vec{\gamma} = \vec{F} \quad (6.2.36)$$

där

$$F = |\hat{F}| \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(\hat{F} e^{i\omega t}), \quad \hat{F} = |\hat{F}| e^{i\alpha} \quad (6.2.37)$$

och

$$\vec{\gamma} = |\hat{\vec{\gamma}}| \cos(\omega t + \beta) = \operatorname{Re}(\hat{\vec{\gamma}} e^{i\omega t}), \quad \hat{\vec{\gamma}} = |\hat{\vec{\gamma}}| e^{i\beta} \quad (6.2.38)$$

Kroppens hastighet i denna mod fås ur

$$u = \dot{\vec{\gamma}} = \operatorname{Re}(-i\omega \hat{\vec{\gamma}} e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(\hat{u} e^{i\omega t}) \quad (6.2.39)$$

där

$$\hat{u} = -i\omega \hat{\vec{\gamma}} = -i\omega |\hat{\vec{\gamma}}| e^{i\beta} \quad (6.2.40)$$

är den komplexa hastighetsamplituden.

Kroppens acceleration \ddot{u} fås ur

$$\ddot{u} = \ddot{\eta} = \operatorname{Re}(-\omega^2 \hat{\eta} e^{i\omega t}) - \operatorname{Re}(-i\omega \hat{u} e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(\hat{a} e^{i\omega t}) \quad (6.2.41)$$

där

$$\hat{a} = -i\omega \hat{u} = -\omega^2 \hat{\eta} = -\omega^2 |\hat{\eta}| e^{i\beta} \quad (6.2.42)$$

är den komplexa accelerationsamplituden.

Insättes nu för η i (6.2.36),

$$(R - i\omega A + i\frac{C}{\omega}) \hat{u} = \hat{F} \quad (6.2.43)$$

och lösningen är

$$\hat{u} = \frac{\hat{F}}{Z} \quad (6.2.44)$$

där

$$Z = R - i\omega A + i\frac{C}{\omega} = R + iY \quad (6.2.45)$$

är impedansen av systemet i denna speciella mod, R är den resulterande resistansen och

$$Y = \frac{C}{\omega} - \omega A \quad (6.2.46)$$

är den resulterande reaktansen.

Vi märker att impedansen är förhållandet mellan komplexa amplituden för kraft och hastighet.

Effekten pga den yttre kraften är

$$\begin{aligned} F_u &= \frac{1}{4} (\hat{F} e^{i\omega t} + \hat{F}^* e^{i\omega t})(\hat{u} e^{-i\omega t} + \hat{u}^* e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{4} (\hat{F} \hat{u}^* + \hat{F}^* \hat{u} + \hat{F} \hat{u} e^{2i\omega t} + \hat{F}^* \hat{u}^* e^{2i\omega t}) \quad (6.2.47) \end{aligned}$$

där \hat{F}^* är det komplexa konjugatet av \hat{F} .

Medeleffekten över en period $T = 2\pi/\omega$ är då

$$\begin{aligned} P_u = \overline{F_u} &= \frac{1}{4} (\hat{F} \hat{u}^* + \hat{F}^* \hat{u}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{F} \hat{u}^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z \hat{u} \hat{u}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z |\hat{u}|^2) \\ &= \frac{1}{2} R |\hat{u}|^2 \\ &= \frac{R |\hat{F}|^2}{2[R^2 + (\frac{C}{\omega} - A\omega)^2]} \quad (6.2.48) \end{aligned}$$

Då R_u är dämpningskraften måste effekten pga resistansen R
vara

$$\begin{aligned} R_u^2 &= \frac{1}{4} R (\hat{u} e^{-i\omega t} + \hat{u}^* e^{i\omega t}) \\ &= \frac{1}{4} R (\hat{u}^2 e^{-2i\omega t} + \hat{u}^* e^{2i\omega t} + 2 \hat{u} \hat{u}^*) \quad (6.2.49) \end{aligned}$$

Resistanseffekten i medel över en period är då

$$\begin{aligned} P_R = \overline{R_u^2} &= \frac{1}{2} R \hat{u} \hat{u}^* \\ &= \frac{1}{2} R |\hat{u}|^2 = P \quad (6.2.50) \end{aligned}$$

A. andra sidan är generellt $F_u \neq R_u^2$.

Skriver vi R som $R_1 + R_2$ där R_1 är resistansen motsvarande den effekt som man tillgodogör sig och R_2 är resistansen motsvarande tappad effekt i utstrålande vågor o dyl blir den användbara medeleffekten

$$P = \frac{1}{2} R_1 |\hat{u}|^2 = \frac{R_1 |\hat{F}|^2}{2[(R_1 + R_2)^2 + (\frac{C}{\omega} - \omega A)^2]} \quad (6.2.50)$$

Alltså är $P=0$ när $R_1=0$ och när $R_1=\infty$. För att P skall vara maximum är det en förutsättning att vi har resonans,

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{A}} = \omega_0 \quad (6.2.52)$$

där ω_0 är egenfrekvensen. Då blir

$$P = \frac{R_1 |\hat{F}|^2}{2(R_1 + R_2)^2} \quad (6.2.53)$$

Vidare är $\partial P / \partial R_1 = 0$ när $R_1 = R_2$ varvid

$$P_{\max} = \frac{|\hat{F}|^2}{8R_1}, \quad (R_1 = R_2, \omega_0 = \sqrt{C/A}) \quad (6.2.54)$$

Insättes $R_1 = R_2$ i (6.2.51) blir den användbara medeffekten

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{R_1 |\hat{F}|^2}{2 [A R_1^2 + A^2 (\frac{C}{\omega A} - \omega)^2]} \\ &= \frac{|\hat{F}|^2}{8 R_1 [1 + \frac{\omega_0^2}{4\delta^2} (\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})^2]} \quad (6.2.55) \end{aligned}$$

där

$$\delta = \frac{R_1}{A} \quad (6.2.56)$$

Alltså är

$$\frac{P(\omega)}{P_{\max}} = \left[1 + \frac{\omega_0^2}{4\delta^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{-1} \quad (6.2.57)$$

Av (6.2.58) ser vi att den användbara medeleffekten $P(\omega)$
för $R_1 = R_2$ blir P_{\max} när $\omega = \omega_0$ och att $P(\omega)$
blir hälften av P_{\max} när

$$\frac{\omega_0^2}{4\delta^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 1 \quad (R_1 = R_2) \quad (6.2.58)$$

dvs

$$\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} = \pm \frac{2\delta}{\omega_0} \text{ eller } \frac{1}{\alpha} - \alpha = \pm 2k \quad (6.2.59)$$

där $\alpha = \omega/\omega_0$ och $k = \delta/\omega_0$. Alltså är

$$\frac{1}{\alpha_1} - \alpha_1 = -2k \quad \text{när } \omega = \omega_1 = \alpha_1 \omega_0, \alpha_1 = \alpha_1 > 1, \text{ och}$$

$$\frac{1}{\alpha_2} - \alpha_2 = 2k \quad \text{när } \omega = \omega_2 = \alpha_2 \omega_0, \alpha_2 = \alpha_2 < 1 \quad (6.2.60)$$

och vi har

$$\alpha_1 = \kappa + \sqrt{1+\kappa^2} \quad \text{och} \quad \alpha_1 \rightarrow 1 \quad \text{när} \quad \kappa \rightarrow 0$$

$$\alpha_2 = -\kappa + \sqrt{1+\kappa^2} \quad \text{och} \quad \alpha_2 \rightarrow 1 \quad \text{när} \quad \kappa \rightarrow 0 \quad (6.2.61)$$

En skiss av resonanskurvan $P(\omega)/P_{max}$ finns i fig 6.2.3.

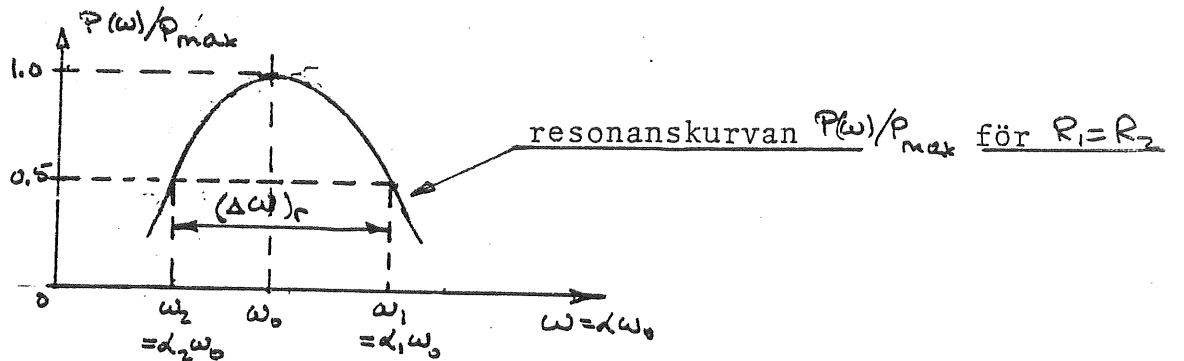


Fig 6.2.3

Av (6.2.60) och (6.2.61) ser vi att $P(\omega)/P_{max} \geq 1/2$

över en frekvensbredd $(\Delta\omega)_r$ som fås ur

$$(\Delta\omega)_r = \omega_1 - \omega_2 = \omega_0 (\alpha_1 - \alpha_2) = 2\kappa\omega_0 = 2\delta \quad (6.2.62)$$

Är $(\Delta\omega)_e$ den motsvarande frekvensbredden för vågspektrat
bör vi i praktiken ha $(\Delta\omega)_r > (\Delta\omega)_e$ om absorptionen
skall vara effektiv.

Vi skall nu uppskatta arbetet utfört av de enkla termerna i
 (6.2.36) över en period när $\ddot{\eta}$ utförsharmoniska svängningar
 given genom (6.2.38). Arbetet utfört av massakraften $A\ddot{\eta}$

över en period är

$$\int_0^T A\ddot{\eta} d\eta = A\omega^3 \hat{\eta}^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \sin \omega t dt = 0 \quad (6.2.63)$$

dvs att arbetet utfört över en halv svängning återvinnes över den resterande halva svängningen. Det samma gäller för fjäderkraften $C\dot{\eta}$ då

$$\int_0^T C\dot{\eta} d\eta = -C\omega \hat{\eta}^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \sin \omega t dt = 0 \quad (6.2.64)$$

För dämpningskraften $R\ddot{\eta}$ får vi emellertid ett netto arbete över en svängningsperiod då

$$\int_0^T R\ddot{\eta} d\eta = R\omega^2 \hat{\eta}^2 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = R\pi\omega \hat{\eta}^2 \quad (6.2.65)$$

Därmed reduceras tillförd energi och svängningarna dämpas.

6.1.3 Hastighetspotentialen

Vätskerörelsen kan åskådliggöras som gradient av en hastighets potential

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \operatorname{Re} \phi(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t} \quad (6.3.1)$$

där $\phi(x_1, x_2, x_3)$ är komplex. Hastighetspotentialen måste tillfredsställa kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (6.3.2)$$

För vågor med liten amplitud är randvillkoren på den fria vätskeytan given genom

$$\left(g \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \Big|_{x_2=0} = 0 \quad \text{dvs} \quad \left(g \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \omega^2 \phi \right) \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (6.3.3)$$

Randvillkoren på havsbotten $x_2 = -h$ är

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-h} = 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-h} = 0 \quad (6.3.4)$$

Låt hastigheten i en godtycklig punkt N i \mathbb{B} vara U och
låt \mathbb{B} 's rotationshastighet vara ω , fig 6.3.1

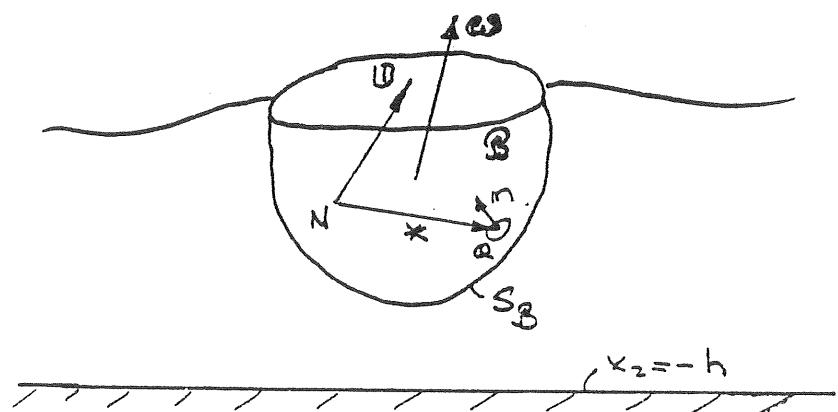


Fig 6.3.1

Låt en godtycklig punkt Q på \mathcal{B} 's våta yta $S_{\mathcal{B}}$ vara given med vektoren $\omega \times$ i relation till N. Hastigheten av Q är då $U + \omega \times$. Låt n vara en normal enhetsvektor på $S_{\mathcal{B}}$ vid Q. Randvillkoren på $S_{\mathcal{B}}$ är nu

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{S_{\mathcal{B}}} = (U + \omega \times) \cdot n \Big|_{S_{\mathcal{B}}} = [U \cdot n + \omega \cdot (\omega \times n)] \Big|_{S_{\mathcal{B}}} \quad (6.3.5)$$

där vektoren U har translationskomponenterna

$$U = (u_1, u_2, u_3) \quad (6.3.6)$$

och rotationsvektoren ω har rotationskomponenterna $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (u_4, u_5, u_6)$

Vi skall främst nu anta att N är \mathcal{B} 's rotationscenter. (6.3.7)

Hastighetspotentialen för fortskridande monokromatiska vågor om fortskridningsriktningen ger vinkeln β med x-axeln kan skrivas som

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= -Re i \int_0^{\lambda} \frac{q}{\omega} \frac{\cosh k(x_2+d)}{\cosh kd} e^{ik(x_1 \cos \beta + x_3 \sin \beta) - i\omega t} \\ &= Re \phi_0 e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

där

$$\phi_0 = -i \int_0^{\lambda} \frac{q}{\omega} \frac{\cosh k(x_2+d)}{\cosh kd} e^{ik(x_1 \cos \beta + x_3 \sin \beta)} \quad (6.3.9)$$

och där

$\$_0$ = komplexa amplituden

$k = 2\pi/\lambda = \tau\omega/\lambda =$ vågtalset

λ = våglängden

$\tau = 2\pi/\omega = \lambda/c =$ vågperioden

$\omega = 2\pi/\tau =$ cirkelfrekvensen

$c = \omega/k =$ vågens fashastighet

x_0, x_3 = koordinaterna för en punkt vilken som helst på en linje genom origo och perpendikulär på vågkammarna, dvs linjen har samma vinkel med x_1 -axeln som vågens fortskridningsriktning.

Vågens dispersionsekvation är

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (6.3.10)$$

Hastighetspotentialen Φ_0 tillfredsställer kontinuitets-
ekvationen (6.3.2) och randvillkoren (6.3.3) och (6.3.4).

Låt

$$\Phi_7 = \operatorname{Re} \phi_7 e^{i\omega t} \quad (6.3.11)$$

vara hastighetspotentialen till den våg som uppstår genom att \mathbf{B} , som vi tänker oss att vara fixerad, sprider den infallande vågen olika mycket åt olika håll. Dvs Φ_7 är en diffractionspotential och $\Phi_0 + \Phi_7 = \Phi_s$ är spridningspotentialen.

Hastighetspotentialen för vätskerörelsen är nu $\Phi_s = \Phi_o + \Phi_r$
som bl a skall uppfylla randvillkoren på \mathfrak{B} , nämligen

$$\left. \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \right|_{S_B} = \left(\left. \frac{\partial \Phi_o}{\partial n} + \left. \frac{\partial \Phi_r}{\partial n} \right| \right) \right|_{S_B} = 0 \quad \text{dvs} \quad \left. \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \right|_{S_B} = \left(\left. \frac{\partial \Phi_o}{\partial n} + \left. \frac{\partial \Phi_r}{\partial n} \right| \right) \right|_{S_B} = 0 \quad (6.3.12)$$

Genom att $\Phi_s = \Phi_o + \Phi_r$, som representerar regelmässiga vågor, påverkar \mathfrak{B} , sättes denna i rörelse och responsen η_ℓ i mod ℓ kan skrivas som

$$\eta_\ell = \operatorname{Re}(\hat{\eta}_\ell e^{i\omega t}) \quad (6.3.13)$$

där $\hat{\eta}_\ell$ är den komplexa svängningsamplituden i mod ℓ . Hastigheten och accelerationen av rörelsen i mod ℓ är därför respektive

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\ell &= u_\ell = \operatorname{Re} \hat{u}_\ell e^{i\omega t} = \operatorname{Re} (-i\omega \hat{\eta}_\ell e^{i\omega t}) \\ \ddot{\eta}_\ell &= \operatorname{Re} (-\omega^2 \hat{\eta}_\ell e^{i\omega t}) \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

där \hat{u}_ℓ är den komplexa hastighetsamplituden för mod ℓ .

Hastighetspotentialen Φ_ℓ till de vågor som uppstår pga \mathfrak{B} 's rörelse i mod ℓ kan skrivas som

$$\Phi_\ell = \operatorname{Re}(\hat{u}_\ell \phi_\ell e^{i\omega t}) \quad (\ell = 1, 2, \dots, 6) \quad (6.3.15)$$

där delpotentialen Φ_ℓ , som är förknippad med rörelse-frihetsgraden ℓ hos \mathfrak{B} är en strålnings- eller radiationspotential.

Den fullständiga hastighetspotentialen Φ kan nu skrivas som

$$\Phi = \operatorname{Re} \phi e^{i\omega t} = \Phi_0 + \sum_{\ell=1}^7 \Phi_\ell \quad (6.3.16)$$

där

$$\phi = \phi_0 + \sum_{\ell=1}^6 \hat{u}_\ell \phi_\ell + \phi_7 \quad (6.3.17)$$

Vi har här antagit att B är en stel kropp. År B däremot flexibel måste summationen utvidgas till $\ell > 6$ för att omfatta en serie flexibla rörelser av högre ordning.

Hastighetspotentialen Φ skall uppfylla kontinuitetsekvationen (6.3.2), randvillkoren på den fria vätskeytan (6.3.3) och på havsbotten (6.3.4). Vidare skall Φ uppfylla randvillkoren (6.3.5) på S_B , dvs

$$\left[\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial n} + \frac{\partial \phi_7}{\partial n} \right) + \sum_{\ell=1}^6 \hat{u}_\ell \frac{\partial \phi_\ell}{\partial n} \right] e^{i\omega t} \Big|_{S_B} = [u \cdot n + \omega \cdot (\mathbf{x}_n \cdot n)] \Big|_{S_B} \\ = \left[\sum_{\ell=1}^3 \hat{u}_\ell (n)_\ell + \sum_{\ell=4}^6 \hat{u}_\ell (\mathbf{x}_n \cdot n)_{\ell-3} \right] e^{i\omega t} \Big|_{S_B} \quad (6.3.18)$$

där $(n)_\ell$ står för komponenten ℓ av enhetsvektoren i riktningen ℓ , $(\ell=1, 2, 3)$ och $(\mathbf{x}_n \cdot n)_{\ell-3}$ står för komponenten av vektorn $(\mathbf{x}_n \cdot n)$ i riktningen $\ell-3$, $(\ell=4, 5, 6)$. Från (6.3.12) och då \hat{u}_ℓ är oberoende parameter erhålls från (6.3.18)

$$\left. \frac{\partial \phi_\ell}{\partial n} \right|_{S_B} = \begin{cases} (n)_\ell & \ell = 1, 2, 3 \\ (\mathbf{x}_n \cdot n)_\ell & \ell = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (6.3.19)$$

där komponenterna till \vec{n} och (\vec{x}, \vec{n}) är

$$\begin{aligned} (\vec{n})_1 &= n_1 = \cos(\vec{n}, \vec{x}_1) \\ (\vec{n})_2 &= n_2 = \cos(\vec{n}, \vec{x}_2) \\ (\vec{n})_3 &= n_3 = \cos(\vec{n}, \vec{x}_3) \\ (\vec{x}, \vec{n})_1 &= x_2 n_3 - x_3 n_2 = n_4 \\ (\vec{x}, \vec{n})_2 &= x_3 n_1 - x_1 n_3 = n_5 \\ (\vec{x}, \vec{n})_3 &= x_1 n_2 - x_2 n_1 = n_6 \end{aligned}$$

(6.3.20)

I tillägg måste vi införa ett strålnings- eller radiationsvillkor, nämligen att varje $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_7$ ger ringvågor oändligt långt från \mathfrak{B} .

Det totala trycket i punkten (x_1, x_2, x_3) är givet genom

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, x_3, t) &= -\rho \left(Re \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + gx_2 \right) \\ &= Re i \omega \rho (\phi_0 + \sum_{l=1}^6 \hat{u}_l \phi_l + \phi_7) e^{i \omega t} - g \rho x_2 \quad (6.3.21) \end{aligned}$$

Kraften \vec{F} som verkar på \mathfrak{B} och moment M om N (fig 6.3.1) kan skrivas som

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathfrak{B}} &= \int_{S_{\mathfrak{B}}} p(\vec{x}, \vec{n}) dS \\ &= -g \rho \int_{S_{\mathfrak{B}}} (\vec{x}, \vec{n}) \times_2 dS \\ &\quad + Re \rho \sum_{l=1}^6 i \omega \bar{e}^{i \omega t} \int_{S_{\mathfrak{B}}} \hat{u}_l \phi_l (\vec{x}, \vec{n}) dS \\ &\quad + Re \rho i \omega \bar{e}^{i \omega t} \int_{S_{\mathfrak{B}}} (\phi_0 + \phi_7) (\vec{x}, \vec{n}) dS \\ &= \vec{F}_s + \vec{F}_R + \vec{F}_E + M_s + M_R + M_E \quad (6.3.22) \end{aligned}$$

där den första termen representerar den hydrostatiska kraften F_s eller momentet M_s ; den andra termen representerar den hydrodynamiska reaktionskraften F_R eller momentet M_R , dvs kraften eller momentet på kroppen när denna oseillerar i sin inducerade rörelse, men under frånvaro av den infallande vågen (6.3.8) och därför också av diffractionsvågen (6.3.11); medan den sista termen representerar excitationskraften F_E eller excitationsmomentet M_E , dvs kraften eller momentet på kroppen när denna påverkas av den infallande vågen och därför också av diffractionsvågen, men är förhindrade att röra sig. Som det framgår av (6.3.22) består excitationskraften och excitationsmomentet bågge av två delar. Den delen som innehållar Φ_0 är den så kallade Froude-Krylov kraften (momenten) medan den andra delen som innehåller Φ_1 ofta kallas diffractionskraften (momentet).

Från hydrodynamiken är det känt att man genom att kombinera olika källor och sänkor kan få fram vätskerörelser för kroppar med olika form.

Metoden för att bestämma diffractionspotentialen $Re \phi e^{i\omega t}$ och radiationspotentialerna $Re \phi_l e^{-i\omega t}$ ($l=1, 2, \dots, 6$) kräver i första hand konstruktion av Green's funktion $G(x_1, x_2, x_3, t)$ i form av en källa med pulsrande styrka $4m e^{-i\omega t}$.

Antag att vattnet är djupt och att vi har en pulserande källa i punkten $Q = (0, 0, -f)$. Dess hastighetspotential är

$$Re \frac{m}{r} e^{i\omega t} \quad (6.3.23)$$

där

$$r^2 = x_1^2 + (x_2 + f)^2 + x_3^2 \quad (6.3.24)$$

Då källan är den enda singulariteten i vätskan så måste dess singulariteter, som är nödvändiga för att tillfredsställa randvillkoren på den fria ytan, vara i området över ytan.

Därmed måste Greens funktion i punkten P och tiden t pga källan i Q ha formen

$$\begin{aligned} G(P, Q, t) &= Re \left(-\frac{m}{r} e^{i\omega t} - \sum_s \frac{m}{r_s} e^{i\omega t} \right) \\ &= -Re \frac{m}{2\pi} e^{i\omega t} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty K [i\bar{\omega} - (x_2 + f)] dk \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty F(k) e^{k(i\bar{\omega} + x_2)} dk \quad (6.3.25) \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} r^2 &= x_1^2 + (x_2 + f)^2 + x_3^2, \quad r_s^2 = (x_1 - x_{1s})^2 + (x_2 - x_{2s})^2 + (x_3 - x_{3s})^2 \\ \bar{\omega} &= x_1 \cos \theta + x_3 \sin \theta, \quad x_2 + f > 0 \quad (6.3.26) \end{aligned}$$

och där $F(k)$ är en okänd faktor som kan bestämmas från randvillkoren för den fria vätskeytan.

För att vissa integraler skall konvergera införvi en fingerad kraft som är proportionell till vätskehastigheten ψ . Då vätskans rörelse, trots denna fingerade kraft, fortfarande är en potentialrörelse, existerar det en hastighetspotential i form av Greens funktion.

Randvillkoren på den fria vätskeytan kan nu skrivas som

$$\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + g \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_2} + g\mu \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right) \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (6.3.27)$$

där μ är en positiv konstant som behålls i den mellanliggande analysen tills dess huvudavsikt är uppnådd och som därefter sätts lika med noll i det slutliga resultatet.

Sättes nu (6.3.25) in i (6.3.27) bestäms faktorn $F(k)$ och Greens funktion för den pulserande källan kan, när vattnet är djupt, skrivas

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(P, Q, t) &= -Re m e^{i\omega t} \left\{ \frac{1}{r} + \int_0^\infty \frac{k+k+i\omega}{k-k-i\omega} e^{k(x_2-t)} J_0(k\bar{\omega}) dk \right\} \\ &= -Re m e^{i\omega t} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{q} + 2k \int_0^\infty \frac{e^{k(x_2-t)}}{k-k-i\omega} J_0(k\bar{\omega}) dk \right\} \\ &= -Re m e^{i\omega t} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{q} + 2\pi i Re \int_0^\infty k e^{k(x_2-t)} H_0^{(1)}(k\bar{\omega}) dk \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\pi} k \int_0^\infty [k \sin k(x_2-t) - k \cos k(x_2-t)] \frac{K_0(k\bar{\omega})}{k^2 + k^2} dk \right\} \quad (6.3.28) \end{aligned}$$

där $J_0(\alpha)$ är Besselfunktionen av första slaget och av ordning noll,

$$H_0^{(1)}(\alpha) = J_0(\alpha) + i Y_0(\alpha) \quad (6.3.29)$$

är Besselfunktionen av tredje slaget och av ordning noll,

$\gamma(\omega)$ är Neumanns Besselfunktion av andra slaget och av ordning noll, $K_0(\omega)$ är den modifierade Besselfunktionen av andra slaget och av ordning noll och där

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= x_1 \cos \theta + x_3 \sin \theta, \quad \bar{\omega}^2 = x_1^2 + x_3^2 \\ r^2 &= x_1^2 + (x_2 + f)^2 + x_3^2, \quad r_1^2 = x_1^2 + (x_2 - f)^2 + x_3^2 \\ \omega^2 &= g \frac{k}{r} \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

Genom att ..., integrera runt en passande kontur och därför sätta μ lika med noll i det slutliga resultatet har vi kommit från $(6.3.28)_2$ till $(6.3.28)_3$.

Alternativt kan Greens funktion skrivas

$$\begin{aligned}g(P, Q, t) &= -\operatorname{Re} m e^{i \omega t} \left\{ \frac{1}{r} + P V \int_0^\infty \frac{k+k}{k-k} e^{k(x_2-f)} J_0(k \bar{\omega}) dk \right. \\ &\quad \left. + 2\pi i k e^{k(x_2-f)} J_0(k \bar{\omega}) \right\} \\ &= -\operatorname{Re} m e^{i \omega t} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{q} + 2k P V \int_0^\infty \frac{e^{k(x_2-f)}}{k-k} J_0(k \bar{\omega}) dk \right. \\ &\quad \left. + 2\pi i k e^{k(x_2-f)} J_0(k \bar{\omega}) \right\} \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

där PV betecknar principal värde av integralen.

Greens funktion (6.3.28) eller (6.3.31) för en pulserande källa i $(0, 0, -f)$ på djupt vatten tillfredsställer kontinuitetekvationen och randvillkoren på den fria ytan.

$\mathcal{G}(P, Q, t)$ uppför sig som $-m \bar{e}^{i\omega t}/r$ i närhet av $Q = (0, 0, -f)$ och konvergerar till noll när $x_2 \rightarrow -\infty$.

Vidare kan vi för oändlig sträcka från källan skriva

$$\mathcal{G}(P, Q, t) = Re m \bar{e}^{i\omega t} \left\{ 2\pi k \left(\frac{2}{\pi k \bar{\omega}} \right)^{1/2} e^{-ik(x_2-f)} e^{i(\bar{\omega}t - \frac{\pi}{4})} + O(\bar{\omega}^{-1}) \right\} \quad (6.3.32)$$

som erhålls genom att bl a skriva Besselfunktionen som en asymptotisk serie.

Alltså tillfredsställer $\mathcal{G}(P, Q, t)$

$$\lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} \bar{\omega}^{1/2} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{\omega}} - ik \mathcal{G} \right) = 0 \quad (6.3.33)$$

som är en form av den så kallade strålnings- eller radiationsvillkoren. Detta villkor försäkrar att vågorna, orsakade av en pulserande källa, radierar bort från källan som ringvågor.

Om vi antager att vattnet har ett djup $x_2 = -h$ måste också randvillkoren (6.3.4) tillfredsställas. Det kan visas att Greens funktion nu kan skrivas

$$\begin{aligned} g(P, Q, t) &= -Re m e^{-i\omega t} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r_i} \right. \\ &\quad \left. + 2PV \int_0^\infty \frac{(k+\nu) e^{kh} \cosh[k(h-t)] \cosh[k(x_2+h)]}{k \sinh kh - \nu \cosh kh} J_0(k\bar{\omega}) dk \right. \\ &\quad \left. + i 2\pi k \frac{\cosh[k(h-f)] \cosh[k(x_2+h)]}{\cosh^2 kh \ (k^2 h - \nu^2 h + \nu)} J_0(k\bar{\omega}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -Re m e^{-i\omega t} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r_i} \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^\infty \frac{(k+\nu) e^{kh} \cosh[k(h-f)] \cosh[k(x_2+h)]}{k \sinh kh - \nu \cosh kh} J_0(k\bar{\omega}) dk \right\} \end{aligned}$$

$$= -Re m e^{-i\omega t} \left\{ 2 \int_0^\infty \frac{k \cosh kx_2 + \nu \sinh kx_2}{k \sinh kh - \nu \cosh kh} \cosh[k(h-f)] J_0(k\bar{\omega}) dk \right\}$$

(6.3.34)

där

$$\begin{aligned} r^2 &= x_1^2 + (x_2 + f)^2 + x_3^2, \quad r_i^2 = x_1^2 + (x_2 + 2h - f)^2 + x_3^2 \\ \bar{\omega} &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \quad \bar{\omega}^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \omega^2 = g\nu \end{aligned} \quad (6.3.35)$$

och \bar{k} , vägtalet, är den reella positiva roten av

$$\bar{k} \tanh \bar{k}h - \nu = 0 \quad (6.3.36)$$

Symbolen \curvearrowleft angiver att integrationsvägen är under polen.

Funktionen

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{k \cosh kx_1 + v \sinh kx_1}{k \sinh kh - v \cosh kh} \cosh[k(h-f)] \\ &= \frac{(k+v) \cosh[k(x_1+h)] \cosh[k(h-f)]}{\cosh kh \quad (k \tanh kh - v)} e^{-kh} \end{aligned} \quad (6.3.37)$$

är meromorf med poler i

$$k = \pm k$$

där k är den positiva reella rotten av

$$k \tanh kh - v = 0 \quad (6.3.39)$$

och i

$$k = \pm k_n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (6.3.40)$$

där k_1, k_2, \dots är de positiva reella rötterna av

$$k \tan kh + v = 0 \quad (6.3.41)$$

En meromorf funktion $f(k)$ med poler i $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

där $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots$ kan skrivas

$$f(k) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{k}{\alpha_n(k-\alpha_n)} \quad (6.3.42)$$

där b_1, b_2, \dots är residuerna i polerna

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots$$

För (6.3.37) är

$$b_0(+k) = b_0(-k) = \frac{(k^2 - \nu^2) \cosh[k(x_2 + h)] \cosh[k(h - f)]}{k^2 h - \nu^2 h + \nu} \quad (6.3.43)$$

och

$$b_n(+k_n) = b_n(-k_n) = \frac{(-k_n^2 + \nu^2) \cos[k_n(x_2 + h)] \cos[k_n(h - f)]}{-k_n^2 h + \nu^2 h - \nu} \quad (6.3.44)$$

Följaktligen kan (6.3.37) skrivas

$$\begin{aligned} f(k) &= 2k \frac{(-k^2 - \nu^2) \cosh[k(x_2 + h)] \cosh[k(h - f)]}{(-k^2 h - \nu^2 h + \nu)(k^2 - k^2)} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} 2k \frac{(-k_n^2 + \nu^2) \cos[k_n(x_2 + h)] \cos[k_n(h - f)]}{(-k_n^2 h + \nu^2 h - \nu)(k^2 + k_n^2)} \end{aligned} \quad (6.3.45)$$

Med detta resultat kan Greens funktion (6.3.34) också

skrivas

$$\begin{aligned} g(P, Q, t) &= -Re m e^{-i\omega t} \left\{ 2\pi \frac{(\nu^2 - k^2)}{(k^2 h - \nu^2 h + \nu)} \cosh[k(x_2 + h)] \cosh[k(h - f)] [J_0(\bar{\omega} k) \right. \\ &\quad \left. + i J_1(\bar{\omega} k)] + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 + \nu^2}{-k_n^2 h + \nu^2 h - \nu} \cos[k(x_2 + h)] \cos[k_n(h - f)] J'_n(\bar{\omega} k_n) \right\} \end{aligned} \quad (6.3.46)$$

Då (6.3.46) för oändligt avstånd från källan kan skrivas som

$$\begin{aligned} g(P, Q, t) &= -Re m e^{-i\omega t} \left(\frac{2}{\pi k \bar{\omega}} \right)^{1/2} \frac{k \cosh[k(h - f)] \cosh[k(x_2 + h)]}{\cosh^2 kh} e^{i(k\bar{\omega} - \frac{\pi i}{4})} \\ &\quad + O(\bar{\omega}^{-1}) \end{aligned} \quad (6.3.47)$$

tillfredsställer $\mathcal{G}(P, Q, t)$ strålningssvilkoren (6.3.33)

I det efterföljande låt vi källan vara placerad i en generell punkt $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ i stället för i $Q(0, 0, -f)$.

Detta medförde helt klara förändringar av ekvationerna (6.3.25) till (6.3.47) och det är därför onödigt att skriva ned de nya ekvationerna.

I det efterföljande skall vi skriva Greens funktion för en pulserande källa som

$$G(P, Q, t) = -Re m e^{i\omega t} G(P, Q) \quad (6.3.48)$$

där $G(P, Q)$ står för den modifierade funktionen i { }-paranteser i (6.3.34) eller i någon av de likvärdiga ekvationerna.

Vi tänker oss nu kroppen B inrymd i en cylinder som sträcker sig

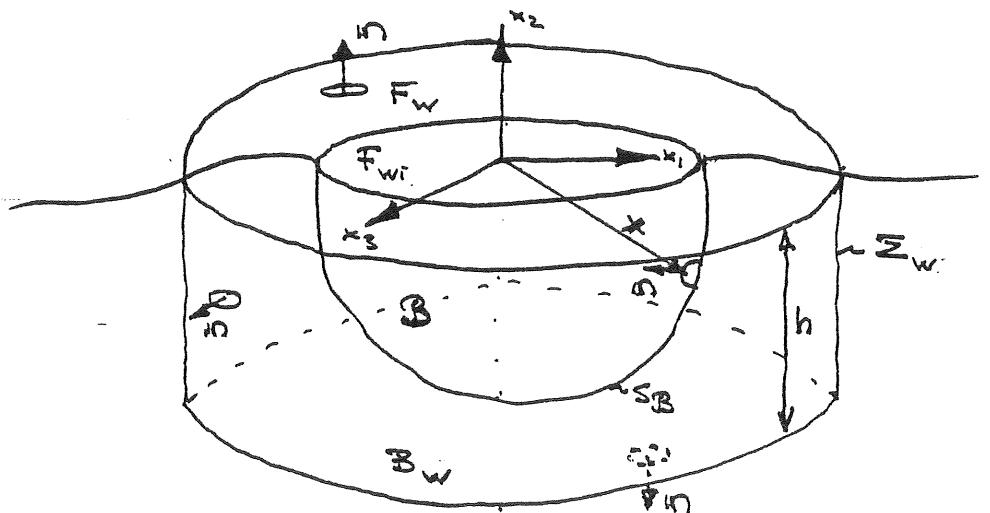


Fig 6.3.2

från den fria vattenytan till havsbotten, och att V är området begränsat av ytan $S_B \cup F_W \cup B_W \cup \Sigma_W$, fig 6.3.2.

Låt Q vara en godtycklig punkt på denna ytan och P en godtycklig punkt i det inre av V eller på S_B .

Från Greens teorem har vi att

$$\begin{aligned} & \int_{S_B \cup F_w \cup B_w \cup \Sigma_w} \left[G(P, Q) \frac{\partial \phi_j(Q)}{\partial n_Q} - \phi_j(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} \right] dS_Q \\ &= \begin{cases} 4\pi \phi_j(P), & \text{när } P \text{ är i det inre av } V, \quad (j=1, 2, \dots, 7) \\ 2\pi \phi_j(P), & \text{när } P \text{ är på ytan, } \quad (j=1, 2, \dots, 7) \\ 0, & \text{när } P \text{ är utanför } V, \quad (j=1, 2, \dots, 7) \end{cases} \quad (6.3.49) \end{aligned}$$

där

$$n_Q = (n_{Q1}, n_{Q2}, n_{Q3}), \quad (6.3.50)$$

är en normal enhetsvektor i Q på ytan $S_B \cup F_w \cup B_w \cup \Sigma_w$

och

$$\frac{\partial}{\partial n_Q} = n_{Q1} \frac{\partial}{\partial x_1} + n_{Q2} \frac{\partial}{\partial x_2} + n_{Q3} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (6.3.51)$$

Genom att betrakta varje särskild yta S_B, F_w, B_w, Σ_w för sig och också genom att låta $\omega \rightarrow \infty$ för ytan Σ_w finner vi att (6.3.49) reduceras till

$$\begin{aligned} & \int_{S_B} \left[G(P, Q) \frac{\partial \phi_j(Q)}{\partial n_Q} - \phi_j \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} \right] dS_B(Q) \\ &= \begin{cases} 4\pi \phi_j(P), & \text{när } P \text{ är i det inre av } V, \quad (j=1, 2, \dots, 7) \\ 2\pi \phi_j(P), & \text{när } P \text{ är på ytan, } \quad (j=1, 2, \dots, 7) \\ 0, & \text{när } P \text{ är utanför } V, \quad (j=1, 2, \dots, 7) \end{cases} \quad (6.3.52) \end{aligned}$$

Anta nu att vätskan fortsätter in i \mathfrak{B} och att dess rörelse är given genom ϕ_j^r . Från Greens teorem har vi, när P är en punkt V utanför \mathfrak{B} ,

$$\int_{S_B} \left[-G(P, Q) \frac{\partial \phi_j^r(Q)}{\partial n_Q} + \phi_j^r(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} \right] dS_B(Q) = 0 \quad (6.3.53)$$

där $\phi_j = \phi_j^r$ på S_B .

Adderar vi (6.3.52) och (6.3.53) och sättes

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n_Q} - \frac{\partial \phi_j^r}{\partial n_Q} = 4\pi f_j \quad (6.3.54)$$

finner vi att

$$\phi_j(P) = \int_{S_B} f_j(Q) G(P, Q) dS_B(Q) \quad (6.3.55)$$

där $f_j(Q)$ är den okända källans densiteter vid Q på S

och där $G(P, Q)$ är relaterad till Greens funktion genom
(6.3.48).

Då $\partial \phi_j / \partial n$ ($j=1, 2, \dots, 7$) är känt från (6.3.12) och (6.3.19) kan den okända källans densitet $f_j(Q)$ bestämmas genom att ta den normala derivatan av (6.3.55) och så låta P närlig sig en punkt på ytan S_B . Emellertid blir $G(P, Q)$ då singulär inom integrationsområdet.

För att evaluera integralerna måste S_B delas upp i två delar, nämligen det infinitesimala elementet δS_B om P och det återstående $S_B - \delta S_B$. Vi har nu från (6.3.55) att

$$\frac{\partial \phi_j(P_B)}{\partial n_{P_B}} = -V_n + \int_{S_B - \delta S_B} \phi_j(Q) \frac{\partial G(P_B, Q)}{\partial n_{P_B}} dS_B(Q) \quad (6.3.56)$$

där $-V_n$ är bidragit till den normala hastigheten i den till δS_B nära punkten P_B pga källelementet $f_j(P_B) \delta S_B$.

Genom att betrakta fluxen genom en cylinder normal på S_B i punkten P och med oändligt liten tvärsnittsarea finner man

att $V_n = 2\pi f_j(P_B)$ (6.3.57)

och (6.3.56) kan skrivas

$$-2\pi f_j(P_B) + \int_{S_B} f_j(Q) \frac{\partial G(P_B, Q)}{\partial n_{P_B}} dS_B(Q) =$$

$$\begin{cases} = n_j(P_B), & (j=1, 2, \dots, 6) \\ = -\frac{\partial \phi_0(P_B)}{\partial n}, & (j=7) \end{cases} \quad (6.3.58)$$

som är en två-dimensionell Fredholm integralekvation av andra slaget.

En nummerisk lösning för varje ekvation får man genom att dela upp S_B i element och antaga att källdensiteten är konstant över varje flatelement.

Varje ekvation ersätts nu av linjära algebraiska ekvationer från vilka den okända källdensiteten för varje element bestäms. □

När källdensiteten är känd för varje element kan potential funktionerna ϕ_j bestämmas genom (6.3.55).

Från (6.3.47) och (6.3.55) har vi nu att fjärrfälten för strålningspotentialen eller diffektionspotentialen kan skrivas som

$$\phi_j \approx f_j(\theta) (\frac{1}{k\bar{\omega}})^{-1/2} \frac{\cosh k(x_2 + h)}{\cosh kh} e^{ik\bar{\omega}}, \quad (j=1,2,\dots,7) \quad (6.3.59)$$

där $f_j(\theta)$ är en vinkelfunktion för de utstrålande vågorna beroende på kroppars form och position, vidare är $\bar{\omega}^2 = x_1^2 + x_3^2$ och $(\bar{\omega}, \theta)$ polära koordinater om x_2 -axeln i x_1x_3 -planet.

Funktionen (6.3.59) tillfredsställer strålningsvillkoren

$$\lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} \bar{\omega}^{1/2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \bar{\omega}} - ik\phi_j \right) = 0 \quad (6.3.60)$$

Konjugaten till (6.3.59) är

$$\phi^* \approx f_j(\theta) (\frac{1}{k\bar{\omega}})^{-1/2} \frac{\cosh k(x_2 + h)}{\cosh kh} e^{-ik\bar{\omega}} \quad (6.3.61)$$

som tillfredsställer strålningsvillkoren

$$\lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} \bar{\omega}^{1/2} \left(\frac{\partial \phi_j^*}{\partial \bar{\omega}} + ik\phi_j^* \right) = 0 \quad (6.3.62)$$

dvs att konjugaten (6.3.61) representerar inkommende ringvågor.

6.1.4 Den hydrodynamiska reaktionskraften och dess moment

Vi betraktar den hydrodynamiska reaktionskraften $\mathbf{F}_R = (F_{R1}, F_{R2}, F_{R3})$ och dess moment \mathbf{M}_R som vi nu med fördel skriver som $\mathbf{M}_R = (F_{R4}, F_{R5}, F_{R6})$ se (6.3.22). Orsaken till denna kraft och dess moment är, som vi har sett, de på kroppen inducerade rörelserna pga i första hand den infallande vågen, men där beräkningarna utförs som om den infallande vågen ej fanns, dvs bara strålningspotentialen Φ_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, 6$) ingår i dessa beräkningar.

Från (6.3.22), (6.3.19) och (6.3.14) har vi att

$$\begin{aligned}
 F_{Rj} &= \rho R e \sum_{\ell=1}^6 i \omega \hat{u}_\ell \bar{e}^{i \omega t} \int_{S_B} \phi_\ell \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS \\
 &= R e \sum_{\ell=1}^6 \hat{u}_\ell \bar{e}^{i \omega t} F_{R\ell j} \\
 &= \rho R e \sum_{\ell=1}^6 \omega^2 \bar{e}^{i \omega t} \hat{\eta}_\ell \int_{S_B} \phi_\ell \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS \\
 &= -\rho R e \sum_{\ell=1}^6 \dot{u}_\ell \int_{S_B} \phi_\ell \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS
 \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

där

$$F_{R\ell j} = i \rho \omega \int_{S_B} \phi_\ell \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS \quad (\text{j}, \ell = 1, 2, \dots, 6) \tag{6.4.2}$$

är reaktionskraftens komponent (komplex) i riktningen j pga kroppens svängar i mod ℓ med den komplexa hastigheten $\hat{u}_\ell \bar{e}^{i \omega t} = 1$.

Då ϕ_l ($l=1, 2, \dots, 6$) är reell och given med $\frac{\partial \phi_l}{\partial n}|_{S_B}$
måste

$$n_l = \frac{\partial \phi_l}{\partial n}|_{S_B} = \frac{\partial \phi_l^*}{\partial n}|_{S_B} \quad (6.4.3)$$

där ϕ_l^* är konjugaten av ϕ_l . Följaktligen är

också

$$F_{Rlj} = i\rho\omega \int_{S_B} \phi_l \frac{\partial \phi_j^*}{\partial n} dS, \quad (j, l=1, 2, \dots, 6) \quad (6.4.4)$$

Om vi skriver

$$F_{Rlj} = i\rho\omega f_{Rlj} = i\omega(a_{lj} + \frac{i}{\omega}b_{lj}) = -b_{lj} + i\omega a_{lj} \quad (6.4.5)$$

där

$$f_{Rlj} = \int_{S_B} \phi_l \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS, \quad f_{Rlj}^* = \int_{S_B} \phi_l^* \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS \quad (6.4.6)$$

och där a_{lj}, b_{lj} är reella, får vi att

$$a_{lj} = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} F_{Rlj} = \rho \operatorname{Re} f_{Rlj} = \frac{\rho}{2} (f_{Rlj} + f_{Rlj}^*) \quad (6.4.7)$$

och

$$b_{lj} = -\operatorname{Re} F_{Rlj} = -\rho\omega \operatorname{Im} f_{Rlj} = -\frac{\rho\omega}{2} (f_{Rlj} - f_{Rlj}^*) \quad (6.4.8)$$

Vi skall visa i (6.5.31) att F_{Rlj} är symmetrisk i l och j ,

dvs $F_{Rlj} = F_{Rjl}$ och $F_{Rlj}^* = F_{Rjl}^*$. Härav följer att

$$a_{lj} = a_{jl}, \quad b_{lj} = b_{jl} \quad (6.4.9)$$

Reaktionskraftens j -komponent och dess moment kan nu skrivas

som

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Rj} &= Re \sum_{\ell=1}^6 \omega^2 e^{-i\omega t} \hat{\eta}_\ell (a_{j\ell} + \frac{i}{\omega} b_{j\ell}) \\ &= - \sum_{\ell=1}^6 a_{j\ell} \dot{u}_\ell - \sum_{\ell=1}^6 b_{j\ell} u_\ell = - \sum_{\ell=1}^6 a_{j\ell} \dot{u}_\ell - \sum_{\ell=1}^6 b_{j\ell} u_\ell \quad (6.4.10) \end{aligned}$$

I (6.4.10) är den symmetriska faktorn $a_{j\ell}$ i första termen en frekvensberoende koefficient för medsvängande vattenmassa då den är en faktor i en kraftkomponent som är proportionell mot accelerationen. Den symmetriska faktorn $b_{j\ell}$ i den andra termen är en frekvensberoende dämpningskoefficient eftersom $b_{j\ell}$ är en faktor i en kraftkomponent som är proportionell mot hastigheten. Från (6.4.10) har vi att $b_{j\ell}$ är dämpningskoefficienten för kraften eller momentet i riktningen j pga kroppens rörelse i mod ℓ .

Emellertid bör man lägga märke till att detta är en traditionsbunden tolkning av reaktionskraften och reaktionsmomenten som bara passar för harmonisk rörelse vid den fundamentala frekvensen ω . En riktig beskrivning av en flytande kropps rörelser som funktion av tiden kräver sannolikt en konvolution integral som då beskriver den kontinuerliga påverkan av den tidigare kroppsrörelsen på kroppens momentane rörelse.

6.1.5 Kochin funktioner

Som vi har sett tillfredsställer hastighetspotentialen Φ_0 för en fortskridande våg villkoren på den fria ytan och på botten, men inte strålningsvillkoren för utgående vågor. Varje strålningspotential ϕ_i ($i=1,2,\dots,6$) och diffractionspotentialen ϕ_7 tillfredsställer randvillkoren för den fria ytan och på botten såväl som strålningsvillkoren för utgående vågor. Även om den resulterande potentialen Φ tillfredsställer randvillkoren på kroppens yta fortsätter Φ , och också varje potentialterm som Φ är uppbyggd av, in i kroppen.

Låt S vara en sluten yta som omsluter ett område där de två funktionerna ϕ_i och ϕ_j är harmoniska. Från Greens andra identitet, som också är känd som den symmetriska formen av Greens teorem, har vi att

$$\int_S (\phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n}) dS = 0, \quad (i,j = 1, 2, \dots, 7) \quad (6.5.1)$$

Låt $S = S_B \cup F_w \cup B_w \cup \Sigma_w$, fig 6.3.2.

Pga randvillkoren (6.3.3) och (6.3.4) som ϕ_i och ϕ_j tillfredsställer, får vi inte något bidrag från den fria ytan och botten. Följaktligen reduceras (6.5.1) till

$$\begin{aligned} I(\phi_i, \phi_j) &= \int_{S_B} (\phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n}) ds = - \int_{\Sigma_w} (\phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n}) ds \\ &= - I(\phi_j, \phi_i), \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7) \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

Då konjugaterna ϕ_i^*, ϕ_j^* är harmoniska och tillfredsställer randvillkoren (6.3.3) och (6.3.4) kan (6.5.2) användas även för $I(\phi_i^*, \phi_j^*)$. Det gäller även för $I(\phi_i, \phi_j^*)$.

Om vi nu lätt $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ för ytan Σ_∞ får
vi från (6.5.2) att

$$I(\phi_i, \phi_j) = -I(\phi_j, \phi_i) = - \int_{\Sigma_\infty} (\phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n}) dS, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7) \quad (6.5.3)$$

Låt A vara en konstant. Från (6.5.2) har vi att

$$I(A\phi_i, \phi_j) = A I(\phi_i, \phi_j) \Rightarrow I(\phi_i, A\phi_j) = A I(\phi_i, \phi_j), \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7) \quad (6.5.4)$$

Vi skall skriva (6.5.3) på följande sätt,

$$\begin{aligned} I(\phi_i, \phi_j) &= - \lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} dx_2 \int_0^{2\pi} (\phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \bar{\omega}} - \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{\omega}}) \bar{\omega} d\theta \\ &= - \lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} dx_2 \int_0^{2\pi} \left\{ \bar{\omega}^{1/2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \bar{\omega}} - ik\phi_j \right) \bar{\omega}^{1/2} \phi_i - \left[\bar{\omega}^{1/2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{\omega}} - ik\phi_i \right) \right] \bar{\omega}^{1/2} \phi_j \right\} d\theta \\ &= 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7) \quad (6.5.5) \end{aligned}$$

Då både ϕ_i och ϕ_j tillfredsställer strålningsvillkoren (6.3.60) på ytan Σ_∞ och då både $\bar{\omega}^{1/2} \phi_i$ och $\bar{\omega}^{1/2} \phi_j$ är bundna på Σ_∞ (se t.ex 6.3.59) så konvergerar (6.5.5) till noll när $\bar{\omega} \rightarrow \infty$.

Eftersom ϕ_i^* och ϕ_j^* tillfredsställer de olika strålningsvillkoren på Σ_∞ , nämligen respektive (6.3.60) och (6.3.62) är (6.5.5) inte riktig för $I(\phi_i^*, \phi_j^*)$.

Eftersom ϕ_i^* och ϕ_j^* tillfredsställer strålningsvillkoren (6.3.62) finner vi att (6.5.5) är riktig även för konjugaterna ϕ_i^* och ϕ_j^* .

Låt potentialfunktionerna ϕ_i , ϕ_j vara av typen

$$\phi_i = \phi_{oi} + \psi_i, \quad \phi_j = \phi_{oj} + \psi_j \quad (6.5.6)$$

där ϕ_{oi} , ϕ_{oj} är två olika fortskridande vågor av typen (6.3.8) men med olika amplitud S_{oi} , S_{oj} och olika fortskridningsriktningar α_i , α_j och där ψ_i , ψ_j antingen är diffraktionspotentialer eller strålningspotentialer. (6.3.59). Både ψ_i och ψ_j tillfredsställer strålningsvillkoren (6.3.60).

Från (6.5.3)

$$\begin{aligned}
 I(\phi_i, \phi_j) &= - \int_{\Sigma_\infty} (\phi_{oi} \frac{\partial \phi_{oj}}{\partial n} - \phi_{oj} \frac{\partial \phi_{oi}}{\partial n}) ds \\
 &\quad - \int_{\Sigma_\infty} (\phi_{oi} \frac{\partial \psi_j}{\partial n} - \psi_j \frac{\partial \phi_{oi}}{\partial n} + \psi_i \frac{\partial \phi_{oj}}{\partial n} - \phi_{oj} \frac{\partial \psi_i}{\partial n}) ds \\
 &\quad - \int_{\Sigma_\infty} (\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial n} - \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial n}) ds \\
 &= I(\phi_{oi}, \phi_{oj}) + I(\phi_{oi}, \psi_j) + I(\psi_i, \phi_{oj}) + I(\psi_i, \psi_j), \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7) \\
 &\quad \quad \quad (6.5.7)
 \end{aligned}$$

Då både ϕ_{oi} och ϕ_{oj} är harmoniska funktioner i områden begränsade av Σ_∞ och också områden begränsade av S_B har vi från Greens teorem att den första integraltermen i (6.5.7) är lika med noll. Den sista integraltermen, som ju innehåller de två diffraktions- eller strålningspotentialerna i integranden, är lika med noll som följd av (6.5.5).. Förligen är

$$I(\phi_i, \phi_j) = I(\phi_{oi}, \phi_j) + I(\psi_i, \phi_{oj}) = I(\phi_{oi}, \psi_j) - I(\phi_{oj}, \psi_i), \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7) \quad (6.5.8)$$

Från (6.5.3), som är riktig också för $I(\phi_i, \phi_j^*)$, har vi att

$$\begin{aligned} I(\phi_i, \phi_j^*) &= - \int_{\Sigma_\infty} \left(\phi_{oi} \frac{\partial \phi_{oj}^*}{\partial n} - \phi_{oj}^* \frac{\partial \phi_{oi}}{\partial n} \right) ds \\ &\quad - \int_{\Sigma_\infty} \left(\phi_{oi} \frac{\partial \psi_j^*}{\partial n} - \psi_j^* \frac{\partial \phi_{oi}}{\partial n} + \psi_i \frac{\partial \phi_{oj}^*}{\partial n} - \phi_{oj}^* \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right) ds \\ &= - \int_{\Sigma_\infty} \left(\psi_i \frac{\partial \psi_j^*}{\partial n} - \psi_j^* \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right) ds, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7) \quad (6.5.9) \end{aligned}$$

Då både ϕ_i och ϕ_j^* är harmoniska funktioner är den första integraltermen i (6.5.9) lika med noll och alltså är

$$I(\phi_i, \phi_j^*) = I(\phi_{oi}, \psi_j^*) + I(\psi_i, \phi_{oj}^*) + I(\psi_i, \psi_j^*), \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7) \quad (6.5.10)$$

De återstående termerna i (6.5.7) och (6.5.10) kan evalueras med hjälp av den så kallade Kochin funktionen som vi skall definiera som

$$H_j(\alpha) = -\frac{k}{D} \int_{-\infty}^{\alpha} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial n} - \psi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) \frac{\cosh[k(x_2+h)]}{\cosh kh} e^{ik(x_1 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha)} ds \quad (6.5.11)$$

där

$$D = \tanh kh + kh \operatorname{sech}^2 kh = \frac{2\omega}{g} c_g \quad (6.5.12)$$

och där

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \sqrt{g E \tanh kh} \quad (6.5.13)$$

är grupp hastigheten.

Från (6.5.3) har vi att $H_j(\alpha)$ kan skrivas också som

$$\begin{aligned} H_j(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial n} - \psi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) \frac{\cosh[k(x_2+h)]}{\cosh kh} e^{ik(x_1 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha)} ds \\ &= -\frac{k}{D} I \left(\frac{\cosh[k(x_2+h)]}{\cosh kh} e^{ik(x_1 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha)}, \psi_j \right) \quad (6.5.14) \end{aligned}$$

Härav följer att

$$H_j^*(\alpha) = -\frac{k}{D} I \left(\frac{\cosh[k(x_2+h)]}{\cosh kh} e^{ik(x_1 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha)}, \psi_j^* \right) \quad (6.5.15)$$

Med hjälp av (6.5.14) kan vi skriva (6.5.8) som

$$I(\phi_i, \phi_j) = i \frac{Dg}{k\omega} \left[\sum_{o_i} H_j(\pi + \beta_i) - \sum_{o_j} H_i(\pi + \beta_j) \right] \quad (6.5.16)$$

Från (6.5.15)

$$\begin{aligned} I(\phi_{oi}, \psi_j^*) &= -i \frac{\sum_{oi} g}{\omega} \left[\frac{\cosh[k(x_1 \cos \beta_i + x_2 \sin \beta_i)]}{\cosh k h} e^{-ik(x_1 \cos \beta_i + x_2 \sin \beta_i)} \right] \psi_j^* \\ &= i \frac{Dg}{k\omega} \sum_{oi} H_j^*(\beta_i) \end{aligned} \quad (6.5.17)$$

Vidare har vi att

$$\begin{aligned} I(\psi_i, \phi_{oj}^*) &= -I(\phi_{oj}^*, \psi_i) = -[I(\phi_{oj}, \psi_i^*)]^* \\ &= i \frac{Dg}{k\omega} \sum_{oj}^* H_i(\beta_j) \end{aligned} \quad (6.5.18)$$

alltså kan (6.5.10) skrivas som

$$\begin{aligned} I(\phi_i, \phi_j^*) &= i \frac{Dg}{k\omega} \left[\sum_{oi} H_j^*(\beta_i) + \sum_{oj}^* H_i(\beta_j) \right] \\ &\quad + I(\psi_i, \psi_j^*) \end{aligned} \quad (6.5.19)$$

I både (6.5.16) och (6.5.19) är \sum_{oi}/β_i och \sum_{oj}/β_j
amplituderna och förtskridningsriktningarna för de två mono-
kromatiska vågorna ϕ_i och ϕ_j .

Vi måste nu evaluerat termen $I(k_i, \psi_j)$ i (6.5.19). Då integrationen i (6.5.14) är över \sum_{∞} insätter vi fjärrfältspotentialen (6.3.59) för ψ_j ,

$$-\frac{\partial}{\partial k} H_j(\beta) = \left[\frac{\cosh[k(x_1 + h)]}{\cosh kh} e^{ik(x_1 \cos \beta + x_3 \sin \beta)}, \frac{f_j(k)}{(k\bar{\omega})^{1/2}} \frac{\cosh[k(x_1 + h)]}{\cosh kh} e^{ik\bar{\omega}\gamma} \right] \quad (6.5.20)$$

Här är $(x_1, 0, x_3)$ koordinaterna till en punkt, vilken som helst på en linje genom origo och perpendikulär på vågkammen till den infallande vågor givna ur (6.3.8), medan $(\bar{\omega}, \alpha)$ är de polära koordinaterna till en generell punkt på vattenytan.

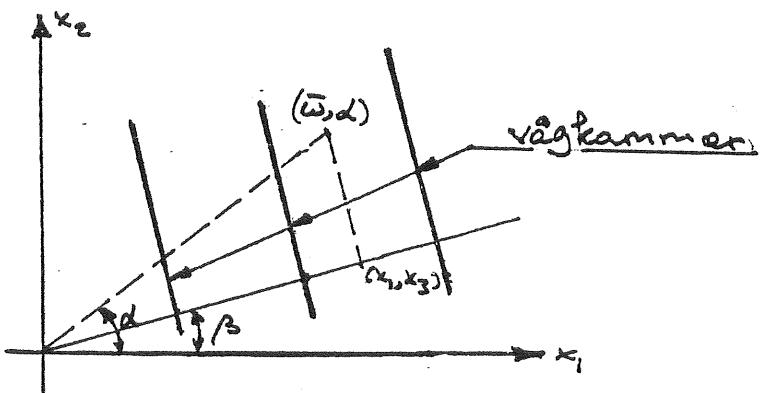


Fig 6.5.1

Från fig 6.5.1 har vi att

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \cos(\alpha - \beta) &= \bar{\omega} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= x_1 \cos \beta + x_3 \sin \beta \end{aligned} \quad (6.5.21)$$

Vi kan därför skriva (6.5.20) som

$$-\frac{\partial}{\partial k} H_j(\beta) = \left[\frac{\cosh[k(x_2+h)]}{\cosh kh} e^{ik\bar{\omega}\cos(\alpha-\beta)} \right] \frac{f_j(\alpha)}{(k\bar{\omega})^{1/2}} \frac{\cosh[k(x_2+h)]}{\cosh kh} e^{ik\bar{\omega}} \quad (6.5.22)$$

där integrationen är över Σ_∞ .

Alltså

$$H_j(\beta) = i \frac{k}{D} \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \frac{\cosh^2[k(x_2+h)]}{\cosh^2 kh} f_j(\alpha) e^{ik\bar{\omega}[1-\cos(\alpha-\beta)]} [1+\cos(\alpha-\beta)] (k\bar{\omega})^{1/2} d\alpha dh \quad (6.5.23)$$

där $(k\bar{\omega}) \rightarrow \infty$. I (6.5.23) har vi försummat en term som har $(k\bar{\omega})^{-1/2}$ som faktor därför att denna term blir noll när $(k\bar{\omega}) \rightarrow \infty$.

Då

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \cosh^2[k(x_2+h)] dx_2 &= \frac{1}{2} \int_{-h}^0 1 + \cosh[2k(x_2+h)] dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{2k} \sinh 2kh \right) \end{aligned} \quad (6.5.24)$$

är

$$\frac{k}{\cosh^2 kh} \int_{-h}^0 \cosh^2[k(x_2+h)] dx_2 = \frac{1}{2} D \quad (6.5.25)$$

och (6.5.23) kan skrivas

$$H_j(\beta) = \frac{i}{2} (k\bar{\omega})^{1/2} \int_0^{2\pi} [1+\cos(\alpha-\beta)] f_j(\alpha) e^{ik\bar{\omega}[1-\cos(\alpha-\beta)]} d\alpha \quad (6.5.26)$$

där $(k\bar{\omega}) \rightarrow \infty$.

Detta har till följd att integranden oscillerar oändligt snabbt med α och därfor inte ger något tillskott till integralen, bortsett från när $1 - \cos(\alpha - \beta) = 0$. Vi kan därfor använda metoden med stationär fas när vi integrerar. Denna metod kan uttryckas på följande sätt:

Låt $f(\alpha)$ och $F(\alpha)$ vara analytiska funktioner. Om $f(\alpha)$ är stationär vid $\alpha = \beta$ i område $\beta - \varepsilon \leq \alpha \leq \beta + \varepsilon$ och som $f''(\beta) > 0$ då är

$$\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta+\varepsilon} e^{ikf(\alpha)} F(\alpha) d\alpha \simeq \frac{2\pi}{i k f''(\beta)} |F'(\beta)| e^{ikf(\beta) - i\pi/4} \quad (6.5.27)$$

när $k \rightarrow \infty$.

När $f(\alpha)$ inte har en stationär punkt i $a \leq \alpha \leq b$

då är

$$\int_a^b e^{ikf(\alpha)} F(\alpha) d\alpha \simeq \frac{F(b)}{ikf'(b)} e^{ikf(b)} - \frac{F(a)}{ikf'(a)} e^{ikf(a)} \quad (6.5.28)$$

när $k \rightarrow \infty$.

Då $f(\alpha) = \bar{\omega} [1 - \cos(\alpha - \beta)]$ är $f(\alpha)$ stationär vid $\alpha = \beta$ och då $f''(\beta) = \bar{\omega} > 0$ har vi från (6.5.27) och

(6.5.28) att

$$H_j(\beta) = \frac{i}{2} (\frac{1}{2}\bar{\omega})^{1/2} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\bar{\omega}}} 2f'_j(\beta) e^{-i\pi/4} = i\sqrt{2\pi} f'_j(\beta) e^{-i\pi/4}, \quad (\frac{1}{2}\bar{\omega}) \rightarrow \infty \quad (6.5.29)$$

Fjärrfeltpotentialen ψ_j , given genom (6.3.59), kan nu skrivas också som

$$\begin{aligned}\psi_j &\approx -\frac{i H_j(\theta)}{\sqrt{2\pi k\bar{\omega}}} \frac{\cosh[k(x_2+h)]}{\cosh kh} e^{ik\bar{\omega} - i\pi/4} \\ &\approx -\frac{H_j(\theta)}{\sqrt{2\pi k\bar{\omega}}} \frac{\cosh[k(x_2+h)]}{\cosh kh} e^{ik\bar{\omega} + i\pi/4}, \quad (k\bar{\omega}) \rightarrow \infty, (j=1,2,\dots,7) \quad (6.5.30)\end{aligned}$$

Vi sätter nu in (6.5.30) i sista termen i (6.5.19), alltså

$$\begin{aligned}I(\psi_i, \psi_j^*) &= - \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} (\psi_i \frac{\partial \psi_j^*}{\partial \bar{\omega}} - \psi_j^* \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{\omega}}) \bar{\omega} d\theta dx_2 \\ &= \frac{i}{\lambda} \int_{-h}^0 \frac{\cosh^2[k(x_2+h)]}{\cosh^2 kh} dh \int_0^{2\pi} H_i(\theta) H_j^*(\theta) d\theta \\ &= i \frac{D}{2\pi k} \int_0^{2\pi} H_i(\theta) H_j^*(\theta) d\theta \\ &= i \frac{D}{2\pi k} \int_0^{2\pi} f_i(\theta) f_j^*(\theta) d\theta \quad (6.5.31)\end{aligned}$$

och $I(\phi_i, \phi_j^*)$ kan skrivas med hjälp av Kochin funktionen som

$$\begin{aligned}I(\phi_i, \phi_j^*) &= i \frac{Dg}{2\bar{\omega}} [S_{0i} H_j^*(\beta_i) + S_{0j}^* H_i(\beta_j)] \\ &+ i \frac{D}{2\pi k} \int_0^{2\pi} H_i(\theta) H_j^*(\theta) d\theta, \quad (i,j=1,2,\dots,7) \quad (6.5.32)\end{aligned}$$

Då ϕ_i och ϕ_j tillfredsställer strålningsvillkoren
på ytan Σ_∞ har vi från (6.5.5) att F_{Rrs} given
genom (6.4.2) är symmetrisk, dvs

$$F_{Rrs} = F_{Rsr} \quad \text{och} \quad F_{Rrs}^* = F_{Rsr}^*, \quad (i,j=1,2,3,7) \quad (6.5.33)$$

Detta är den klassiska symmetrirelationen för den hydrodynamiska reaktionskraften pga tvungen rörelse av kroppen under det att vi bortser från den infallande vågen och dess diffraction, dvs vi bortser från spridningspotentialen.

Formel (6.5.37) visar att den hydrodynamiska reaktionskraftens komponent i riktning r pga kroppens rörelse i mod s med hastigheten $\hat{u}_s e^{i\omega t} = 1$ är lika med reaktionskraftens komponent i riktning s pga kroppens rörelse i mod r med hastigheten $\hat{u}_r e^{i\omega t} = 1$.

Låt kroppen ha två tvungna rörelsemot och låt de motsvarande hastighetspotentialerna vara ϕ_i och ϕ_j under det att vi bortser från den infallande vågen och dess diffraction. Från (6.4.2), (6.4.4), (6.4.8) och (6.5.31) har vi att

$$\begin{aligned} I(\phi_i, \phi_j^*) &= \int_{\Sigma_\infty} (\phi_i \frac{\partial \phi_j^*}{\partial n} - \phi_j^* \frac{\partial \phi_i}{\partial n}) dS = \frac{1}{i\rho\omega} (F_{Rij} + F_{Rij}^*) \\ &= \frac{2}{i\rho\omega} \operatorname{Re} F_{Rij} = - (f_{ij} - f_{ij}^*) \\ &= i \frac{D}{2\pi R_2} \int_0^{2\pi} H_i(\theta) H_j^*(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (6.5.34)$$

Från (6.4.8) och (6.5.34) har vi att dämpningskoefficienten

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &\text{ fås ur} \\
 b_{ij} &= -R e F_{Rij} = -\frac{\rho \omega}{2i} (f_{ij} - f_{ij}^*) \\
 &= \frac{\omega \rho D}{4\pi k} \int_0^{2\pi} H_i(\theta) H_j^*(\theta) d\theta \\
 &= \frac{\omega \rho D}{2k} \int_0^{2\pi} f_i(\theta) f_j^*(\theta) d\theta \quad (6.5.35)
 \end{aligned}$$

Då $F_{Rij} = F_{Rji}$ så är b_{ij} symmetrisk, dvs $b_{ij} = b_{ji}$.

Resultaten (6.5.35) kan kontrolleras genom att analysera energistrålningen i oändligt avstånd från kroppen, eller alternativt, arbetet utfört på kroppens yta.

Låt ϕ_1, ϕ_2 vara två spridningspotentialer. Dessa kan skrivas

$$\phi_1 = \phi_{o1} + \phi_{r1}, \quad \phi_2 = \phi_{o2} + \phi_{r2} \quad (6.5.36)$$

där de infallande vågorna, som fås ur potentialerna ϕ_{o1}, ϕ_{o2} , har amplituderna S_{o1}, S_{o2} och fortskridningsriktningarna β_1, β_2 .

Då de harmoniska potentialerna ϕ_1, ϕ_2 tillfredsställer randvillkoren på S_B, B_w, F_w kan vi använda (6.5.1) och får från (6.5.2) att

$$I(\phi_1, \phi_2) = 0, \quad I(\phi_1, \phi_2^*) = 0 \quad (6.5.37)$$

Därvid reduceras (6.5.16) till

$$\zeta_{o1} H_2(\pi + \beta_1) - \zeta_{o2} H_1(\pi + \beta_2) = 0 \quad (6.5.38)$$

och (6.5.32) till

$$\zeta_{o1} H_2^*(\beta_1) + \zeta_{o2} H_1(\beta_2) = -\frac{\omega}{2\pi g} \int_0^{2\pi} H_1(\theta) H_2^*(\theta) d\theta \quad (6.5.39)$$

Komponenten F_{Rij} , som fås ur (6.4.2), benämnes också som strålningsimpedansen. Matrisen $[F_{Rij}]$, med elementen F_{Rij} är då en strålningsimpedansmatris.

Strålningsresistansen R_{lj} är definierad som (se (6.2.44))

$$\begin{aligned} R_{lj} &= R_e F_{Rlj} = \frac{1}{2} (F_{Rlj} + F_{Rjl}^*) = \frac{1}{2} (F_{Rlj} + F_{Rjl}^*) \\ &= \frac{1}{2} i \rho \omega \int_{S_B} (\phi_l \frac{\partial \phi_j^*}{\partial n} - \phi_j^* \frac{\partial \phi_l}{\partial n}) ds \\ &= \frac{1}{2} i \rho \omega I(\phi_l, \phi_j^*) \\ &= -\frac{1}{2} i \rho \omega I(\phi_j^*, \phi_l) \end{aligned} \quad (6.5.40)$$

där

$$R_{lj} = R_{jl} \quad (6.5.41)$$

är elementen i strålningsresistansmatrisen $[R_{lj}]$.

Från (6.4.8) ser vi att strålningsresistansen $R_{\ell j}$ och
dämpningskoefficienten $b_{\ell j}$ är relaterade via

$$b_{\ell j} = -R_{\ell j} \quad (6.5.42)$$

I det efterföljande skall vi använda $b_{\ell j}$ heller än $R_{\ell j}$.

6.1.6 Den hydrodynamiska excitationskraften och dess moment

Haskinds formel

Vi betraktar den hydrodynamiska excitationskraften $\mathbf{F}_E = (F_{E1}, F_{E2}, F_{E3})$

och dess moment \mathbf{M}_E som vi nu med fördel skriver som

$$\mathbf{M}_E = (F_{E4}, F_{E5}, F_{E6}).$$

Orsaken till denna kraft och dess moment är, som vi har sett, den infallande vågen och diffraktionsvågen, dvs bara spridningspotentialen $\Phi_s = \Phi_0 + \Phi_7$ ingår i dessa beräkningar under det att kroppen antogs vara stationär.

Från (6.3.22), (6.3.12) och (6.5.2) har vi att

$$\begin{aligned}
 F_{Ej} &= \rho Re i \omega \bar{e}^{i\omega t} \int_{S_B} (\phi_0 + \phi_7) \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \\
 &= \rho Re i \omega \bar{e}^{i\omega t} \int_{S_B} \phi_s \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \\
 &= \rho Re i \omega \bar{e}^{i\omega t} \int_{S_B} (\phi_s \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_s}{\partial n}) ds \\
 &= Re \bar{e}^{-i\omega t} F_{Esj}, \quad (j=1, 2, \dots, 6)
 \end{aligned} \tag{6.6.1}$$

där

$$\begin{aligned}
 F_{E_{sj}} &= i\rho\omega \int_{S_E} \phi_s \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS \\
 &= i\rho\omega \int_{S_E} (\phi_s \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_s}{\partial n}) dS \\
 &= i\rho\omega I(\phi_s, \phi_j), \quad (j=1, 2, \dots, 6) \quad (6.6.2)
 \end{aligned}$$

är proportionell till j-komponenten av excitationskraften pga en infallande våg och diffraktionsvågen som bågge verkar på den stationära kroppen, dvs $F_{E_{sj}}$ är amplituden av excitationkraftens j-komponent.

Vi skall nu använda oss av (6.5.16). Då vi emellertid bara har en infallande våg sätter vi $\phi_{o_i} = \zeta \neq 0$, $\psi_i = \beta$ och

$\zeta_{oj} = 0$. Vidare är i (6.5.6), $\phi_i = \phi_{oi} + \psi_i = \phi_s$, $\phi_{oj} = 0$ och $\psi_j = \phi_j$. Alltså är

$$F_{E_{sj}} = F_{E_{sj}}(\beta) = -\frac{\rho g D}{k} \zeta \phi_j(\pi + \beta) \quad (6.6.3)$$

där ζ och β är respektive infallande vågs amplitud och fortskrivningsriktning.

Av (6.6.2) har vi att

$$\begin{aligned}
 F_{E_{sj}} &= i\rho\omega I(\phi_s, \phi_j) \\
 &= i\rho\omega I(\phi_o + \phi_r, \phi_j) \\
 &= i\rho\omega [I(\phi_o, \phi_j) + I(\phi_r, \phi_j)] \\
 &= i\rho\omega I(\phi_o, \phi_j), \quad (j=1, 2, \dots, 6) \quad (6.6.4)
 \end{aligned}$$

sedan ϕ_r, ϕ_j tillfredsställer strålningsvillkoren på ytan Σ_∞ .

Alltså är

$$\begin{aligned} F_{Ej} &= i\rho\omega \int_{S_B} (\phi_0 \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_0}{\partial n}) d\Omega \\ &= -i\rho\omega \int_{\Sigma_\infty} (\phi_0 \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_0}{\partial n}) ds \quad (6.6.5) \end{aligned}$$

I både (6.6.3) och (6.6.5) har vi ett uttryck för amplituden till excitationkraftens j -komponent där diffractionspotentialen ϕ_r inte ingår explicit. Integrationen över Σ_∞ är oftast att föredra framför över S_B då vi vid det första tillfället kan näja oss med den asymptotiska formen av ϕ_j och denna kommer att vara mindre komplicerad än ϕ_j vid S_B .

Väljer vi för Σ_∞ en vertikal cylinder om x_2 -axeln då är $(\bar{\omega}, \theta, x_2)$ de polära koordinaterna och

$$\begin{aligned} d\Omega &= \bar{\omega} d\theta d\phi \\ \frac{\partial}{\partial n} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \quad (6.6.6) \end{aligned}$$

Vi har då att

$$F_{Ej} = i\rho\omega \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} (\phi_0 \frac{\partial \phi_j}{\partial \bar{\omega}} - \phi_j \frac{\partial \phi_0}{\partial \bar{\omega}}) \bar{\omega} d\theta d\bar{\omega} \quad (6.6.7)$$

Relationen (6.6.3) eller alternativt (6.6.5) kallas ofta för Haskinds formel.

6.7. Effektupptagning av en svängande kropp i vågor

Från (6.3.16) och (6.3.21) har vi att hastighetspotentialen för vätskerörelsen är

$$\Phi = \operatorname{Re} \phi e^{i\omega t} \quad (6.7.1)$$

och det hydrodynamiska trycket med

$$p = \operatorname{Re} i\omega \rho \phi \bar{e}^{-i\omega t} \quad (6.7.2)$$

Kroppens effektupptagningen fås ur

$$\begin{aligned} \int_{S_B} \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds &= \frac{i\omega \rho}{4} \int_{S_B} (\phi \bar{e}^{i\omega t} - \phi^* e^{i\omega t}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \bar{e}^{i\omega t} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} e^{i\omega t} \right) ds \\ &= \frac{i\omega \rho}{4} \int_{S_B} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \bar{e}^{2i\omega t} - \phi^* \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \bar{e}^{2i\omega t} + \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (6.7.3)$$

Effektupptagningen av kroppen i medel över en period $T = 2\pi/\omega$,

är då

$$\begin{aligned} P(\hat{\omega}) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{S_B} \phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \\ &= \frac{i\omega \rho}{4} \int_{S_B} \left(\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \\ &= \frac{i\omega \rho}{4} I(\phi, \phi^*) \end{aligned} \quad (6.7.4)$$

Vi skriver den resulterande hastighetspotentialen

som

$$\Phi = \operatorname{Re} \phi e^{i\omega t} = \operatorname{Re}[(\phi_o + \phi_\gamma + \phi_r) e^{i\omega t}] \quad (6.7.5)$$

där

$$\operatorname{Re} \phi_o e^{i\omega t} = \Phi_o \quad (6.7.6)$$

är hastighetspotentialen för den infallande vågen,

$$\operatorname{Re} \phi_\gamma e^{i\omega t} = \Phi_\gamma \quad (6.7.7)$$

är hastighetspotentialen för diffraktionsvågen, och

$$\operatorname{Re} \phi_r e^{i\omega t} = \operatorname{Re} \sum_{l=1}^6 \hat{u}_l \phi_l e^{i\omega t} \quad (6.7.8)$$

är hastighetspotentialen för den utstrålade vågen. Både Φ_γ och Φ_r tillfredsställer strålningssvillkoren (6.3.60).

Alltså är

$$\begin{aligned} I(\phi, \phi^*) &= I[(\phi_o + \phi_\gamma + \phi_r), (\phi_o + \phi_\gamma + \phi_r)^*] \\ &= I(\phi_o + \phi_\gamma, \phi_o^* + \phi_\gamma^*) + I(\phi_o + \phi_\gamma, \phi_r^*) \\ &\quad + I(\phi_r, \phi_o^* + \phi_\gamma^*) + I(\phi_r, \phi_r^*) \end{aligned} \quad (6.7.9)$$

där den första av de fyra termerna är noll eftersom från (6.3.12)

$$\left(\frac{\partial \phi_o}{\partial n} + \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial n} \right) \Big|_{S_3} = 0 \quad (6.7.10)$$

och därför också

$$\left(\frac{\partial \phi_o^*}{\partial n} + \frac{\partial \phi_\gamma^*}{\partial n} \right) \Big|_{S_3} = 0 \quad (6.7.11)$$

Det förefaller naturligt att benämna

$$\begin{aligned} P_o &= \frac{i\omega\rho}{4} [I(\phi_o + \phi_7, \phi_r^*) - I(\phi_o^* + \phi_7^*, \phi_r)] \\ &= Re \frac{i\rho\omega}{2} I(\phi_o + \phi_7, \phi_r^*) \end{aligned} \quad (6.7.12)$$

för den infallande medeleffekten och

$$P_r = -\frac{i\omega\rho}{4} I(\phi_r, \phi_r^*) = \frac{D\rho\omega}{8\pi k} \int_0^{2\pi} |H_r(\theta)|^2 d\theta \quad (6.7.13)$$

för den utsrålande medeleffekten.

Från (6.7.13), där vi har använt (6.5.34) ser vi att den utstrålande medeleffekten är positiv definit.

Från (6.7.4), (6.7.9), (6.7.12) och (6.7.13) har vi nu att kropspens effektupptagning i medel över en period kan skrivas som

$$\begin{aligned} P(\hat{U}) &= \frac{i\omega\rho}{4} I(\phi, \phi^*) \\ &= \frac{i\omega\rho}{4} [I(\phi_o + \phi_7, \phi_r^*) + I(\phi_r, \phi_o^* + \phi_7^*) + I(\phi_r, \phi_r^*)] \\ &= P_o - P_r \end{aligned} \quad (6.7.14)$$

där från (6.5.4)

$$\begin{aligned} P_o &= Re \frac{i\rho\omega}{2} I(\phi_o + \phi_7, \phi_r^*) \\ &= Re \frac{i\rho\omega}{2} \sum_{\ell=1}^6 I(\phi_o + \phi_7, \phi_\ell^*) \hat{U}_\ell^* \end{aligned} \quad (6.7.15)$$

och

$$\begin{aligned}
 P_0 &= -\frac{i\rho\omega}{4} I(\phi_r, \phi_r^*) \\
 &= -\frac{i\rho\omega}{4} \sum_{\ell=1}^6 \sum_{\ell'=1}^6 I(\phi_\ell, \phi_{\ell'}^*) \hat{u}_\ell \hat{u}_{\ell'}^* \\
 &= \frac{i\rho\omega}{4} \sum_{\ell=1}^6 \sum_{\ell'=1}^6 I(\phi_\ell^*, \phi_\ell) \hat{u}_\ell \hat{u}_{\ell'}^* \tag{6.7.16}
 \end{aligned}$$

Pga randvillkoren (6.7.10) och (6.4.3) och från (6.6.4) har vi
att

$$\begin{aligned}
 I(\phi_0 + \phi_7, \phi_\ell^*) &= \int_{S_B} (\phi_0 + \phi_7) \frac{\partial \phi_\ell^*}{\partial n} dS \\
 &= \int_{S_B} (\phi_0 + \phi_7) \frac{\partial \phi_\ell}{\partial n} dS \\
 &= I(\phi_0 + \phi_7, \phi_\ell) \\
 &= I(\phi_0, \phi_\ell) \\
 &= \frac{1}{i\rho\omega} F_{E\ell} \tag{6.7.17}
 \end{aligned}$$

Alltså är

$$P_0 = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^6 F_{E\ell} \hat{u}_\ell^* \tag{6.7.18}$$

där $F_{E\ell}$, definierad i (6.6.4) är amplituden av excitations-
kraftens ℓ -komponent.

Från (6.7.16), (6.5.40) och (6.5.42) har vi att

$$P_c = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^6 \sum_{l'=1}^6 b_{ll'} \hat{u}_l \hat{u}_{l'}^* \quad (6.7.19)$$

där $b_{ll'}$ är element i 6x6 dämpningskoefficientmatrisen
matrisen $[b_{ll'}]$.

Från (6.7.18) och (6.7.19) har vi nu att (6.7.14), dvs
kroppens effektparttagning i medel över en period, är

$$\begin{aligned} P(\bar{w}) &= \operatorname{Re} \frac{1}{2} \sum_{l=1}^6 F_{Esl} \hat{u}_l^* - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^6 \sum_{l'=1}^6 b_{ll'} \hat{u}_l \hat{u}_{l'}^* \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2} \sum_{l=1}^6 F_{Esl}^* \hat{u}_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^6 \sum_{l'=1}^6 b_{ll'} \hat{u}_l \hat{u}_{l'}^* \end{aligned} \quad (6.7.20)$$

då

$$\operatorname{Re} F_{Esl} \hat{u}_l^* = \operatorname{Re} F_{Esl}^* \hat{u}_l \quad (6.7.21)$$

Låt $[F_{Esl}]$, $[\hat{u}_l]$, $[b_{ll'}]$ vara matriserna

$$F = [F_{Esl}] = [F_{Esl_1} \dots F_{Esl_6}]^T, \quad [\hat{u}_l] = [\hat{u}_1 \dots \hat{u}_6]^T = \hat{u}$$

$$b = [b_{ll'}] = [b_{ll'}^*] = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{61} & \dots & b_{66} \end{bmatrix} \quad (6.7.22)$$

och (6.7.20) kan nu skrivas som

$$\begin{aligned} P(\hat{\psi}) &= \operatorname{Re} \frac{1}{2} [F_{Ese}^*]^T [\hat{u}_\ell] - \frac{1}{2} [\hat{u}_{\ell\ell}^*]^T [b_{\ell\ell}] [\hat{u}_\ell] \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2} (\bar{F}^{*\top} \hat{\psi}) - \frac{1}{2} \hat{U}^{*\top} \bar{b} \hat{U} \end{aligned} \quad (6.7.23)$$

men då

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [F_{Ese}^*]^T [\hat{u}_\ell] &= \frac{1}{2} \left\{ [F_{Ese}^*]^T [\hat{u}_\ell] + [F_{Ese}]^T [\hat{u}_\ell^*] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [F_{Ese}^*]^T [\hat{u}_\ell] + [\hat{u}_\ell^*]^T [F_{Ese}] \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\bar{F}^{*\top} \hat{\psi} + \hat{U}^{*\top} \bar{F}) \end{aligned} \quad (6.7.24)$$

har vi också att

$$\begin{aligned} P(\hat{\psi}) &= \frac{1}{4} \left\{ [F_{Ese}^*]^T [\hat{u}_\ell] + [\hat{u}_\ell^*]^T [F_{Ese}] - \frac{1}{2} [\hat{u}_{\ell\ell}^*]^T [b_{\ell\ell}] [\hat{u}_\ell] \right. \\ &\quad \left. = \frac{1}{4} (\bar{F}^{*\top} \hat{\psi} + \hat{U}^{*\top} \bar{F}) - \frac{1}{2} \hat{U}^{*\top} \bar{b} \hat{U} \right\} \end{aligned} \quad (6.7.25)$$

Från (6.7.20), (6.7.23) och (6.7.25) har vi att kroppens effektupptagningen kan skrivas som differensen mellan två termer där den första termen representerar den infallande effekten pga den infallande vågen och den andra termen representerar utstrålad effekt. I fränvaro av den infallande vågen är den andra termen den enda termen i dessa ekvationer. Att effektupptagningen är negativt kommer av att kroppen nu arbetar som en våggenerator. Bägge termerna är lika med noll när kroppen är stationär. Alltså representerar den andra termen inte reflekterad effekt från en stationär kropp utan utstrålad effekt från den oscillerande kroppen.

Från (6.5.30) har vi att $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_{ij}]$ är en reell och symmetrisk 6×6 matris, dvs

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^T = \mathbf{B}^* \quad (6.7.26)$$

Anta att \mathbf{B} är icke-singulär. Då är

$$\mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \quad (6.7.27)$$

där \mathbf{B}^{-1} , inversen till \mathbf{B} , är en reell symmetrisk och icke-singulär 6×6 matris. Alltså är $(\mathbf{B}^{-1})^{**T} = (\mathbf{B}^{-1})^T = \mathbf{B}^{-1}$ och vi kan skriva (6.7.25) som

$$\begin{aligned} P(\hat{\mathbf{U}}) &= \frac{1}{8} \mathbf{F}^{**T} \mathbf{B}^T \mathbf{F} - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{U}} - \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^*)^{**T} \mathbf{B} (\hat{\mathbf{U}} - \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{F}^*) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^{**T} \mathbf{B} \mathbf{F} - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{F})^{**T} \mathbf{B} (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (6.7.28)$$

där

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}^{**T} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{**T} \mathbf{B}^{-1} \quad (6.7.29)$$

Alltså är P ett maximum

$$\begin{aligned} P_{\max}(\hat{\mathbf{U}}) &= \frac{1}{8} \mathbf{F}^{**T} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{**T} \mathbf{B} \mathbf{F} \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}_{\text{opt}}^{**T} \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}}_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (6.7.30)$$

när

$$\hat{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{F} = \hat{\mathbf{U}}_{\text{opt}} \quad (6.7.31)$$

dvs vi har antagit att det. inte finns något bivillkor som måste tillfredsställas.

Från (6.7.25) har vi att när $\hat{W} = W_{opt}$ är den infallande medeleffekten dubbelt den utstrålande medeleffekten, dvs kröppens effektupptagning är lika med den utstrålade effekten. Med andra ord, den infallande medeleffekten delas lika mellan effektupptagning och utstrålade effekt.

Om vi har $\hat{W} = 2W_{opt}$ är $P=0$ (6.7.32)
och den infallande effekten är då lika med den utstråla-
effekten.

Om den infallande vågen har amplituden \hat{s} och fort-
skridningsriktning β är amplituden av excitations-
kraftens j -komponent given genom (6.6.3) och dämpningskoef-
ficienten genom (6.5.35). Alltså kan (6.7.20) också skrivas
som

$$P(\hat{U}) = -Re \sum_{\ell=1}^6 \frac{\rho g D}{2\pi k} \hat{s} H_\ell(\pi + \beta) \hat{u}_\ell^* - \frac{\omega_p D}{8\pi k} \sum_{\ell=1}^6 \sum_{\ell'=1}^6 \hat{u}_\ell \hat{u}_{\ell'}^* \int_0^{2\pi} H_\ell(\theta) H_{\ell'}^*(\theta) d\theta \quad (6.7.33)$$

där integralen multiplicerad med $\omega_p D / 4\pi k$ är
element i dämpningsmatrisen $[b_{ij}]$. Eftersom det kommer
att vara några värden av Θ där integralen ger
stort tillskott till integralen i (6.7.32) strålar det ut
mycket effekt precis i dessa riktningar.

Förutsätt nu att kroppen svänger endast i en mod och låt denna vara heave-mod, dvs $\ell=2$. Från (6.7.18) och (6.6.3) har vi att den infallande effekten, i medel över en period, är given genom

$$\begin{aligned} P_o &= \operatorname{Re} \frac{1}{2} F_{E_{S2}} \hat{u}_2^* = \operatorname{Re} \frac{1}{2} |F_{E_{S2}}| e^{i\theta} |\hat{u}_2| \bar{e}^{-i\theta} \\ &= \frac{1}{2} |F_{E_{S2}}| |\hat{u}_2| \cos \alpha \\ &= -\operatorname{Re} \left[\frac{\rho g D}{2k} \Im H_2(\pi + \beta) \hat{u}_2^* \right] \end{aligned} \quad (6.7.34)$$

där $\alpha = \tau - \theta$ är fasvinkeln mellan excitationskraften och kroppens rörelsehastighet och där β är fort-skridningsriktningen av den infallande vågen.

Från (6.7.19) och (6.5.35) har vi att den utstrålade medel-effekten är given genom

$$P_r = \frac{1}{2} b_{22} |\hat{u}_2|^2 = \frac{\omega \rho D}{8\pi k} |\hat{u}_2|^2 \int_0^{2\pi} |H_2(\theta)|^2 d\theta \quad (6.7.35)$$

Alltså är kroppens effektupptagningen i medel över en period given genom

$$\begin{aligned} P(\hat{u}_2) &= P_o - P_r = \frac{1}{2} |\hat{u}_2| [|F_{E_{S2}}| \cos \alpha - b_{22} |\hat{u}_2|] \\ &= -\frac{\rho g D}{2k} \operatorname{Re} \left[\Im H_2(\pi + \beta) \hat{u}_2^* \right] - \frac{\omega \rho D}{8\pi k} |\hat{u}_2|^2 \int_0^{2\pi} |H_2(\theta)|^2 d\theta \end{aligned} \quad (6.7.36)$$

Detta resultat följer också från (6.6.20) och (6.7.32).

Då den sista termen i (6.7.27), som representerar den utstrålande effekten, är negativt definit är energiextraktionen bara möjlig om den första termen är positiv och tillräckligt stor.

För en viss infallande våg är $F_{E_{S2}}$ given och $P(\hat{U}_2)$ varierer därför med $|\hat{U}_2|$ som en parabel. Maximumsvärde av $P(\hat{U}_2)$ kräver som ett villkor att $\alpha = 0$, dvs kroppens rörelsehastighet i heave måste vara i fas med den infallande vågen.

Vidare måste

$$\frac{dP(\hat{U}_2)}{d|\hat{U}_2|} = \frac{1}{2} [|F_{E_{S2}}| - 2b_{22}|\hat{U}_2|] = 0 \quad (6.7.37)$$

dvs

$$|\hat{U}_2| = \frac{1}{2} \frac{|F_{E_{S2}}|}{b_{22}} = \frac{2\pi g}{\omega} |\hat{U}| \frac{|H_2(\pi/3)|}{\int_0^{2\pi} |H_2(\theta)|^2 d\theta} \quad (6.7.38)$$

är ett annat nödvändigt villkor.

Vi har nu att det maximerade värdet av $P(\hat{U}_2)$ för en viss infallande våg är

$$P_{\max}(\hat{U}_2) = \frac{|F_{E_{S2}}|^2}{8b_{22}} = \frac{1}{2} b_{22} |\hat{U}_2|^2 = \frac{\pi^2 g^2 D}{2k\omega} |\hat{U}|^2 \frac{|H_2(\pi/3)|^2}{\int_0^{2\pi} |H_2(\theta)|^2 d\theta} \quad (6.7.39)$$

där vi har antagit att det inte finns något bivillkor som måste tillfredsställas och att

$$\alpha = \gamma - \theta, \quad |\hat{U}_2| = \frac{|F_{E_{S2}}|}{2b_{22}} \quad \text{dvs} \quad \hat{U}_2 = \frac{F_{E_{S2}}}{2b_{22}} \quad \text{då} \quad \gamma = \theta \quad (6.7.40)$$

och där vi för D kan införa grupp hastigheten c_g genom att använda (6.5.12).

Från (6.7.39) skulle man uppenbarligen kunna dra den slutsatsen att en effektiv absorbator är en kropp för vilken $|F_{E_{S2}}|$ är stor och b_{22} är liten. Så enkelt är det emellertid inte då $|F_{E_{S2}}|$ och b_{22} är relaterade till varandra.

Vi har nämligen från (6.6.3) att

$$F_{E_{S2}}(\beta - \pi) = - \frac{\rho g D}{\pi k} \oint H_2(\beta) \quad (6.7.41)$$

som insatt i (6.5.35) ger

$$\begin{aligned} b_{22} &= \frac{\omega \rho D}{4\pi k} \int_0^{2\pi} |H_2(\theta)|^2 d\theta \\ &= \frac{\omega k}{4\pi \rho g^2 D |\zeta|^2} \int_0^{2\pi} |F_{E_{S2}}(\beta - \pi)|^2 d\beta \\ &= \frac{\omega k}{4\pi \rho g^2 D |\zeta|^2} \int_{-\pi}^{\pi} |F_{E_{S2}}(\theta)|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{8\lambda P_w} \int_{-\pi}^{\pi} |F_{E_{S2}}(\theta)|^2 d\theta \end{aligned} \quad (6.7.42)$$

där λ är den infallande våglängden,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (6.7.43)$$

P_w är den infallande vågens effekttransport per längdenhet vågfront, i medel över en period,

$$P_w = C_g E = \frac{\rho g^2 D}{4\omega} |\zeta|^2 \quad (6.7.44)$$

E är den infallande vågens energi per ytenhet av vätskeytan, i medel över en period,

$$E = \frac{1}{2} \rho g |\zeta|^2 \quad (6.7.45)$$

och C_g är grupp hastigheten

$$C_g = \frac{g}{2\omega} D \quad (6.7.46)$$

Låt oss anta att den tillgängliga effekten är P_0 . När kroppens effektupptagningen P , i medel över en period, är ett maximum är verkningsgraden η given genom

$$\eta = \frac{P_{\max}}{P_0} = 2 \frac{|F_{Ez2}|^2 2 b_{22}}{8 b_{22} |F_{Ez2}|^2} = \frac{1}{2} \quad (6.7.47)$$

dvs verkningsgraden är 50 % när kroppens effektupptagning i heave är ett maximum. Det skall åter framhävas att vi har antagit att det inte finns något bivillkor som måste tillfredsställas.

Vi skall nu bestämma ekvationen för en kropps maximala effektupptagning när kroppen utsätts för en global styrning av dess rörelse.

Vi antager nu att

$$|\tilde{\psi}|^2 = \tilde{\psi}^* \tilde{\psi} \leq A^2 \quad (6.7.48)$$

och skall optimera (6.7.20), ekvationen för kroppens effektupptagning, eller en av de motsvarande ekvationerna, under förutsättning att (6.7.48) är de globala bivillkoren som måste tillfredsställas.

Antar vi att

$$\tilde{F}^* \tilde{F} \leq A^2 \quad (6.7.49)$$

så är det utan vidare klart att bivillkoren (6.7.48)

tillfredsställs genom att ta

$$\hat{U}_{opt} = \tilde{F} = \frac{1}{2} B^T F \quad (6.7.50)$$

och att $P_{max}(\hat{W})$ är given av (6.7.30).

Vi antar därför att

$$F^* T F \geq A^2 \quad (6.7.51)$$

och bestämmer extremvärdena för

$$Q(\hat{W}) = P(\hat{W}) - \frac{1}{2} \mu (\hat{W}^* T \hat{W} - A^2) \quad (6.7.52)$$

utan något bivillkor. I (6.7.52) är $P(\hat{W})$ given genom

(6.7.20) medan μ är en Lagrange multiplikator som måste

bestämmas. Då

$$\begin{aligned} \hat{W} &= [\hat{U}_1 \dots \hat{U}_6]^T = [\hat{U}_1' + i \hat{U}_1'' \dots \hat{U}_6' + i \hat{U}_6''] \\ &= [\hat{U}_1' \dots \hat{U}_6'] + i [\hat{U}_1'' \dots \hat{U}_6''] \end{aligned} \quad (6.7.53)$$

där

$$\hat{U}_\ell' = \operatorname{Re} \hat{U}_\ell, \quad \hat{U}_\ell'' = \operatorname{Im} \hat{U}_\ell \quad (6.7.54)$$

kan vi med hjälp av (6.7.20) skriva (6.7.52) som

$$\begin{aligned} Q(\hat{W}) &= \frac{1}{4} \sum_j [F_{Eij} (\hat{U}_j' - i \hat{U}_j'') + F_{Eij}^* (\hat{U}_j' + i \hat{U}_j'')] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_j \sum_k b_{jk} (\hat{U}_j' - i \hat{U}_j'') (\hat{U}_k' + i \hat{U}_k'') \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_j (\hat{U}_j' - i \hat{U}_j'') (\hat{U}_j' + i \hat{U}_j'') + \frac{1}{2} \mu A^2 \end{aligned} \quad (6.7.55)$$

En nödvändig förutsättning för maximering av $\mathcal{P}(\hat{\psi})$ under bivillkoren

$$\hat{\psi}^{*\top} \hat{\psi} = A^2 \quad (6.7.56)$$

är att

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{u}_l} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \hat{v}_l} = 0 \quad (l=1, \dots, 6) \quad (6.7.57)$$

för varje l . Deriverar vi nu (6.7.55) med avseende på den reelle delen av \hat{U}_l och närmast med avseende på den imaginära delen av \hat{U}_l så får vi följande två sätt av sex ekvationer

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2} F_{Esl} - \sum_k b_{ek} \operatorname{Re} \hat{U}_k - \mu \operatorname{Re} \hat{U}_l = 0, \quad (l=1, \dots, 6)$$

$$\operatorname{Im} \frac{1}{2} F_{Esl} - \sum_k b_{ek} \operatorname{Im} \hat{U}_k - \mu \operatorname{Im} \hat{U}_l = 0, \quad (l=1, \dots, 6) \quad (6.7.58)$$

Dessa två sätt kan skrivas som ett sätt, nämligen

$$\frac{1}{2} F_{Esl} - \sum_k b_{ek} \hat{U}_k - \mu \hat{U}_l = 0, \quad (l=1, \dots, 6) \quad (6.7.59)$$

Men från (6.7.29) är

$$F = 2B\tilde{f} \quad \text{dvs} \quad F_{Esl} = 2 \sum_k b_{ek} \tilde{f}_k \quad (6.7.60)$$

Följaktligen kan (6.7.59) skrivas som

$$\sum_k b_{ek} (\tilde{f}_k - \hat{U}_k) - \mu \hat{U}_l = 0 \quad (6.7.61)$$

eller på matrisform

$$B\tilde{f} - (B + \mu I)\hat{U} = 0 \quad (6.7.62)$$

där \mathbb{I} är enhetsmatrisen

$$\mathbb{I} = [\delta_{ij}], \quad (i,j=1, \dots, 6) \quad (6.7.63)$$

Vi har förutsatt att dämpningsmatrisen \mathbb{B} är icke-singulär. Förfäktligen är $(\mathbb{B} + \mu \mathbb{I})$ en icke-singulär 6×6 matris och (6.7.62) kan lösas med avseende på $\hat{\Psi}$,

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= \hat{\Psi}_{opt} = (\mathbb{B} + \mu \mathbb{I})^{-1} \mathbb{B} \mathbb{F} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{B} + \mu \mathbb{I})^{-1} \mathbb{F} \end{aligned} \quad (6.7.64)$$

där emellertid Lagrange multiplikatorn μ är okänd.

Genom att sätta in (6.7.64) i $\hat{\Psi}^{*T} \hat{\Psi} = A^2$ får vi

$$(6.7.65)$$

$$[(\mathbb{B} + \mu \mathbb{I})^{-1} \mathbb{B} \mathbb{F}]^{*T} [(\mathbb{B} + \mu \mathbb{I})^{-1} \mathbb{B} \mathbb{F}] = A^2 \quad (6.7.66)$$

där A^2 är en känd konstant. Men då både \mathbb{B} och \mathbb{I} är symmetriska och reella matriser och då μ är reell är

$$[(\mathbb{B} + \mu \mathbb{I})^{-1}]^{*T} = (\mathbb{B} + \mu \mathbb{I})^{-1} \quad (6.7.67)$$

Denna sättes nu in i (6.7.65) och vi får en skalärekvation nämligen

$$\mathbb{F}^{*T} \mathbb{B} (\mathbb{B} + \mu \mathbb{I})^{-2} \mathbb{B} \mathbb{F} = A^2 \quad (6.7.68)$$

som bestämmer den positiva μ .

Från (6.7.64) har vi att

$$\mathbb{F} = \hat{\mathbb{U}}_{opt} + \mu \mathbb{B}^* \hat{\mathbb{U}}_{opt} = (\mathbb{I} + \mu \mathbb{B}^{-1}) \hat{\mathbb{U}}_{opt} \quad (6.7.69)$$

där μ är känd från (6.7.68). Vi sätter nu in (6.7.69) i

(6.7.28) och har då att

$$\begin{aligned} P_{max}(\hat{\mathbb{U}}) &= \frac{1}{2} [(\mathbb{I} + \mu \mathbb{B}^{-1}) \hat{\mathbb{U}}_{opt}]^{*\top} \mathbb{B} [(\mathbb{I} + \mu \mathbb{B}^{-1}) \hat{\mathbb{U}}_{opt}] \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu^2 (\mathbb{B}^{-1} \hat{\mathbb{U}}_{opt})^{*\top} \mathbb{B} (\mathbb{B}^{-1} \hat{\mathbb{U}}_{opt}) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbb{U}}_{opt}^{*\top} (\mathbb{I} + \mu \mathbb{B}^{-1}) \mathbb{B} (\mathbb{I} + \mu \mathbb{B}^{-1}) \hat{\mathbb{U}}_{opt} \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu^2 \hat{\mathbb{U}}_{opt}^{*\top} \mathbb{B}^{-1} \hat{\mathbb{U}}_{opt} \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbb{U}}_{opt}^{*\top} (\mathbb{B} + 2\mu \mathbb{I}) \hat{\mathbb{U}}_{opt} \end{aligned} \quad (6.7.70)$$

som är en form för ekvationen för $P_{max}(\hat{\mathbb{U}})$ nära
 $|\mathbb{F}| \equiv \frac{1}{2} |\mathbb{B}^* \mathbb{F}| \geq A$.

Vi skall nu bestämma en annorlunda form för $P_{max}(\hat{\mathbb{U}})$ under samma förutsättningar som för (6.7.70). Från (6.7.69) har vi att

$$\mathbb{B} \mathbb{F} = \frac{1}{2} \mathbb{F} = (\mathbb{B} + \mu \mathbb{I}) \mathbb{U}_{opt} \quad \text{där} \quad |\mathbb{F}| \geq A \quad (6.7.71)$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}_{\text{opt}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{F} \\ \hat{\mathbf{U}}_{\text{opt}}^{*\top} &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^{*\top} (\mathbf{B} + \mu \mathbf{I})^{-1} \quad (6.7.72)\end{aligned}$$

Vi sätter in (6.7.72) i (6.7.28) och får att

$$\begin{aligned}P_{\max}(\hat{\mathbf{U}}) &= \frac{\mathbf{F}^{*\top} (\mathbf{B} + 2\mu \mathbf{I}) \mathbf{F}}{8(\mathbf{B} + \mu \mathbf{I})^2} \\ &= \frac{\mathbf{F}^{*\top} [\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{B} + \mu \mathbf{I})^{-2} \mu^2]}{8} \quad (6.7.73)\end{aligned}$$

där

$$|\hat{\mathbf{U}}| = |\frac{1}{2} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}| \geq A. \quad (6.7.74)$$

Vi skall nu använda dessa sista resultat på en kropp som svänger i heave-mod. Från (6.7.30),

$$P_{\max}(\hat{\mathbf{U}}_2) = \frac{|F_{E_{S2}}|^2}{8 b_{22}}, \quad \text{där} \quad \frac{1}{2} |b_{22}^{-1} F_{E_{S2}}| \leq A \quad (6.7.75)$$

och från (6.7.73)

$$P_{\max}(\hat{\mathbf{U}}_2) = \frac{|F_{E_{S2}}|^2}{8 b_{22}} \left[1 - \frac{\mu^2}{(b_{22} + \mu)^2} \right], \quad \text{där} \quad \frac{1}{2} |b_{22}^{-1} F_{E_{S2}}| \geq A \quad (6.7.76)$$

och där μ är bestämd från (6.7.68), dvs från

$$|F_{E_{S2}}| = 2A(b_{22} + \mu) \quad (6.7.77)$$

Låt

$$\epsilon = \frac{b_{22}}{b_{22} + \mu} \quad \text{dvs} \quad \mu = \frac{b_{22}}{\epsilon} (1 - \epsilon_{22}) \quad (6.7.78)$$

Då är

$$\epsilon = \frac{2b_{22}A}{|F_{E2}|} \quad (6.7.79)$$

och

$$\left(\frac{\mu}{b_{22} + \mu} \right)^2 = (1 - \epsilon)^2 \quad (6.7.80)$$

Alltså kan (6.7.76) skrivas som

$$P_{\max}(\hat{J}_2) = \frac{|F_{E2}|^2}{8b_{22}} [1 - (1 - \epsilon)^2], \quad \text{där} \quad \epsilon \leq 1 \quad (6.7.81)$$

och

$$P_{\max}(\hat{J}_2) = \frac{|F_{E2}|^2}{8b_{22}}, \quad \text{där} \quad \epsilon \geq 1 \quad (6.7.82)$$

Heaviside stegfunktion $H(t)$ är definierad som

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < t < \infty \\ 0 & \text{för } -\infty < t \leq 0 \end{cases} \quad (6.7.83)$$

Alltså är

$$H(1 - \epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{för } -\infty < \epsilon < 1 \\ 0 & \text{för } 1 < \epsilon < \infty \end{cases} \quad (6.7.84)$$

Genom att använda Heaviside stegfunktion (6.7.84) kan vi skriva (6.7.81) och (6.7.82) som en ekvation nämligen

$$\hat{P}_{\max}(\hat{U}_2) = \frac{F_{E\ddot{s}2}}{\omega b_{22}} [1 - H(1-\epsilon)(1-\epsilon)^2] \quad (6.7.85)$$

Om kroppen är en rotationskropp med vertikal symmetriaxel och rörelsen är en heave-rörelse måste excitationskraften $F_{E\ddot{s}2}$ vara oberoende av den infallande vågens fortskridningsriktning. Vi har därför från (6.7.42) att

$$2\pi |F_{E\ddot{s}2}|^2 = \omega b_{22} \lambda P_w \quad (6.7.86)$$

där P_w , den infallande vågens effekttransport per längdenhet vågfront, i medel över en period, är given genom (6.7.44) och där λ är den infallande vågens längd.

För en sådan kropp reduceras (6.7.85) till

$$\hat{P}_{\max}(\hat{U}_2) = \frac{\lambda P_w}{2\pi} [1 - H(1-\epsilon)(1-\epsilon)^2] \quad (6.7.87)$$

och (6.7.47) till

$$\gamma = \frac{1}{2} [1 - H(1-\epsilon)(1-\epsilon)^2] \quad (6.7.88)$$

6.1.8 Excitationskraftens överföringsfaktor

Från (6.6.3) har vi att amplituden av excitationskraftens j -komponent är given genom

$$F_{E_{Sj}} = F_{E_{Sj}}(\beta) = - \frac{\rho g D}{k} \zeta H_j(\pi + \beta) \quad (6.8.1)$$

där β är den infallande vågens fortskridningsriktning.

Vi definierar excitationskraften överföringsfaktor k_j som

$$k_j(\beta) = \frac{F_{E_{Sj}}(\beta)}{\zeta} = - \frac{\rho g D}{k} H_j(\pi + \beta) \quad (6.8.2)$$

där ζ är den infallande vågens komplexa amplitud.

Från (6.5.29), sätter vi

$$H_j(\pi + \beta) = i\sqrt{2\pi} f_j(\pi + \beta) e^{i\pi/4} \quad (6.8.3)$$

och följaktligen är

$$k_j(\beta) = - i \frac{\rho g D}{k} \sqrt{2\pi} f_j(\pi + \beta) e^{i\pi/4} \quad (6.8.4)$$

Då från (6.8.2)

$$H_j(\beta) = - \frac{k}{\rho g D} k_j(\beta - \pi) \quad (6.8.5)$$

skulle man kunna bestämma $H_j(\beta)$ experimentellt genom att mäta $k_j(\theta)$.

Från (6.5.35) har vi nu tatt dämpningskoefficienten är
given genom

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \frac{-k\omega}{4\pi\rho g^2 D} \int_0^{2\pi} k_i(\theta - \pi) k_j^*(\theta - \pi) d\theta \\ &= \frac{-k\omega}{4\pi\rho g^2 D} \int_{-\pi}^{\pi} k_i(\theta) k_j^*(\theta) d\theta \quad (6.8.6) \end{aligned}$$

där vi för D kan införa grupp hastigheten c_g genom att
använda (6.5.12).

6.1.9 Direktivitet och absorptionslängd

Direktivitet är definierad som

$$G_j(\beta) = 2\pi \frac{|K_j(\beta)|^2}{\int_{-\pi}^{\pi} |K_j(\theta)|^2 d\theta} \quad (6.9.1)$$

där $K_j(\beta)$ är excitationskraftens överföringsfaktor definierad i (6.8.2).

Från (6.7.38), (6.8.2), (6.8.6) och (6.9.1) har vi att när kroppen svänger i endast en mod ℓ är dess maximala effektupptagningen i medel över en period, given genom

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{\pi \rho g^2 D |\dot{s}|^2}{2 \hbar \omega} \cdot \frac{|K_\ell(\beta)|^2}{\int_{-\pi}^{\pi} |K_\ell(\theta)|^2 d\theta} \\ &= \frac{\rho g D}{4 \hbar \omega} |\dot{s}|^2 G_\ell(\beta) \\ &= P_w \frac{G_\ell(\beta)}{\hbar} \end{aligned} \quad (6.9.2)$$

där P_w är den infallande vågens effekttransport given genom (6.7.43) och där vi har antagit att det inte finns något bivillkor som måste tillfredsställas.

Vågens effekttransport Φ_w per längdenhet vågfront, i medel över en period, är given genom (6.7.43). Kroppens absorptionslängd $d_l(\beta)$ för mod ℓ definieras nu som förhållande mellan den av kroppen maximalt absorberade effekten och effekttransporten i vågen per längdenhet vågfront, båda i medel över en period,

$$d_l(\beta) = \frac{P_{max}}{\Phi_w} = \frac{G_l(\beta)}{k} \quad (6.9.3)$$

Från (6.7.38) och (6.7.41) har vi att absorptionslängden kan skrivas också som

$$d_l(\beta) = \frac{\lambda |F_{Ese}(\beta)|^2}{\int_{-\pi}^{\pi} |F_{Ese}(\theta)|^2 d\theta} \quad (6.9.4)$$

För en rotationskropp med vertikal symmetriaxel och där rörelsen är en heave-rörelse är excitationkraften oberoende av den infallande vågens fortskridningsriktning och (6.9.4) reduceras då till

$$d_l = \frac{\lambda |F_{Ese}|^2}{|F_{Ese}|^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (6.9.5)$$

Finnst det emellertid också bivillkor som måste tillfredsställas blir resultaten i (6.9.5) annorlunda som vi skall upptäcka. Från (6.9.3) och (6.7.86) har vi nämligen att

$$\alpha(\beta) = \frac{P_{max}(\hat{\omega}_2)}{P_W} = \frac{\lambda}{2\pi} [1 - H(1-\epsilon)(1-\epsilon)^2] \quad (6.9.6)$$

där $H(1-\epsilon)$ är Heaviside stegfunktioner definierade genom (6.7.84).

Genom att använda kända teoretiska resultat för en halvt nedsänkt sfär i heave-rörelse finner man att absorptionslängden aldrig är större än 70% av sfärens diameter när heave-rörelsens amplitud inte överstiger den infallande vågens amplitud.

För heave-rörelsen vars amplitud är upp till den dubbla av vågens amplitud finner man att maximum absorptionslängd är tillnärmelsevis 8% större än sfärens diameter. I branta vågor reduceras absorptionsförmågan och kommer knappast att överskrida 40% av sfärens diameter.

Dessa resultat står i stor kontrast till de, som erhålls när bivillkören försummas, eftersom absorptionslängden för en rotationskropp då är $\lambda/2\pi$ enligt (6.9.5).

6.2 Tillämpad teori

Den vid försöken främst tillämpade teorin för vågorna, vågenergin och energibojarnas verkningsätt i vågorna refereras i detta avsnitt. Referatet utgör huvudsakligen en sammanfattning av grupprapporterna GR:5, GR:10, GR:23 och GR:31.

6.2.1 Använda begrepp

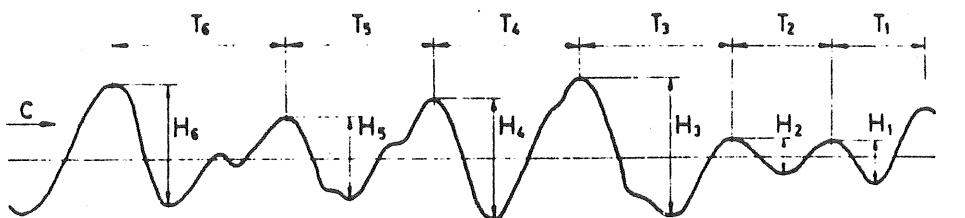
För att underlätta förståelsen av den följande texten bör vissa begrepp klarläggas.

Våghöjd H (m)

Våghöjden H är det vertikala avståndet mellan en vågtopp och efterföljande vågdal. Se figur 6.2.1 och 6.2.2.

Signifikant våghöjd H_s (m)

Signifikanta våghöjden är medelvärdet av de $N/3$ högsta våghöjderna i en lång serie om N vågor. Ofta bestäms denna ur spektrum se avsnitt 6.2.2.



Figur 6.2.1 Punktregistrering av en vågrörelse.

Vågperiod T (s)

En vågperiod är tiden mellan två på varandra följande skärningar (nollgenomgångar) uppåt av medelvattenytan. Se figur 6.2.1.

Medelvågperiod T_z (s)

Medelvågperioden eller nollgenomgangsperioden för ett vågtåg är medelvärdet av alla vågperioder T_i i vågtåget.

Frekvenser f (Hz), f_z (Hz) och ω (s^{-1})

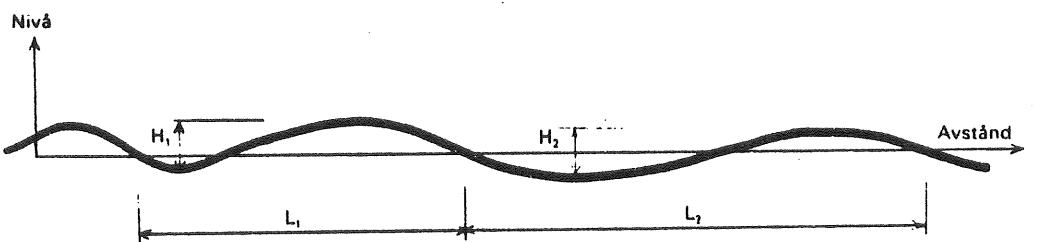
Vågornas frekvens är $f = 1/T$.

Nollgenomgångsfrekvensen är $f_z = 1/T_z$.

Vågornas vinkelfrekvens är $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

Våglängd L

Våglängden är det horisontella avståndet mellan två intilliggande skärningar med medelvattenytan med negativ lutning. Se figur 6.2.2.



Figur 6.2.2 Ügonblicksbild av ett vågtåg.

Vågenergi E (J/m^2)

Vågenergin är tidsmedeldvärdet av vågrörelsens energi per ytenhet av havet. För en sinusvåg gäller

$$E = g a^2 / 2 \quad \dots (6.2.1)$$

Vågeffekt p (W/m)

Vågeffekten är för en vågrörelse med ensartad utbredningsriktning energiflödet genom en vertikal yta parallell med vågkammarna.

För en sinusvåg gäller på djupt vatten

$$p = E L / 2T = \frac{1}{4\pi} \frac{gE}{f} \quad \dots (6.2.2)$$

För en oregelbunden vågrörelse med olika utbredningsriktning hos vågorna kan vågeffekten definieras som energiflödet in genom manteln på en vertikal infinitesimal cylinder. Vågeffekten blir

med denna definition oberoende av vågornas utbredningsriktning och kan då beräknas ur en nivåmätning i en punkt.

6.2.2 Energi- och effektspektrum.

Ett oregelbundet vågtåg som i figur 6.2.1 kan beskrivas av en summa av sinusfunktioner med hjälp av fourierserieanalys.

Vågens form erhålls av uttrycket

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(2\pi f_i t + \alpha_i) \quad \dots (6.2.3)$$

där ζ är vattenytans nivå

a_i vågkomponentens amplitud
 f_i vågkomponentens frekvens
 α_i vågkomponentens fasvinkel

Frekvenserna f_i ges av

$$f_i = i\Delta f \quad \dots (6.2.4)$$

där Δf kallas frekvensdelningen för serien.

Vågspektrum $S(f)$ (m^2/s)

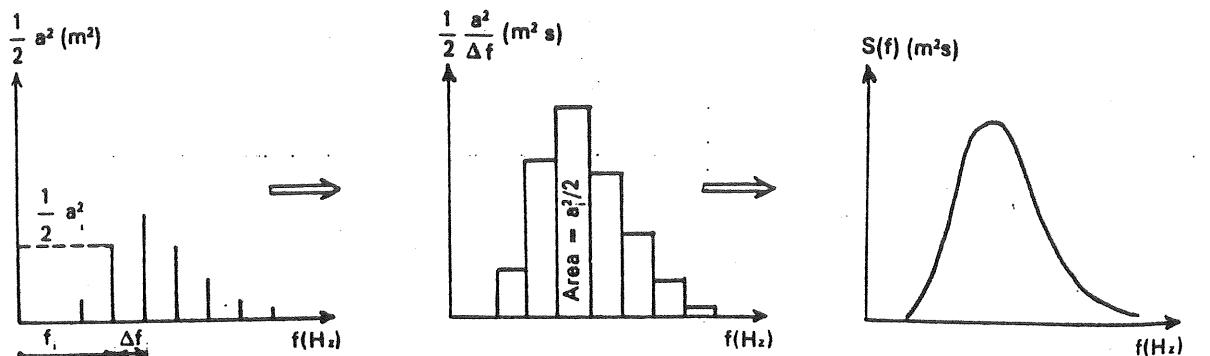
Enligt uttrycket (6.1.1) är energin för varje vågkomponent proportionellt mot kvadraten på dess amplitud men oberoende av frekvensen. Ett uttryck för vågenergins fördelning på olika frekvensband är t ex det diskreta vågspektrumet i figur 6.

där varje stapel är proportionell mot respektive komponents vågenergi $a_i^2 / \Delta f$.

Vågenergins fördelning på olika frekvensband eller dess spektraltäthet $S(f_i)$ kan bättre uttryckas med ett stapspektrum enligt figur 6.2.3. Spektraltätheten blir

$$S(f_i) = \frac{1}{2} a_i^2 / \Delta f \quad \dots (6.2.5)$$

Om frekvensdelningen Δf görs godtyckligt liten övergår $S(f_i)$ till ett kontinuerligt spektrum $S(f)$. Se figur 6.2.3c.



a) Diskret vågspektrum b) "Stapel-spektrum" c) Kontinuerligt vågspektrum

Figur 6.2.3 Illustration av begreppet vågspektrum.

Vågspektrum kan bestämmas genom mätning av vågtåg och fourieranalys av dessa eller genom att tillämpa standardspektrum som kan beräknas ur uppgift om vindstyrka, stryklängd och vindens varaktighet. Dessa är också empiriska men bygger på medelvärden från många vågtåg bildade under likartade förhållanden.

Moment

För att beskriva spektrums form används så kallade moment kring origo av $S(f)$. Det n:te momentet skrivs

$$m_n = \int_0^\infty f^n S(f) df \quad \dots (6.2.6)$$

Moment bildas vanligen för $n = -1, 0, 1$ och 2 . Dessa kan användas som uppskattningar på olika vågegenskaper. Den signifikanta våghöjden H_s kan t ex uppskattas av

$$H_{mo} = 4 \sqrt{m_0} \quad \dots (6.2.7)$$

Nollkryssningsperioden T_z uppskattas på två olika sätt

$$T_2 = m_0/m_2 < T_z < m_0/m_1 = T_1 \quad \dots (6.2.8)$$

Den totala energin i vågrörelsen kan uttryckas som

$$E = \rho g m_0 = g \int_0^\infty S(f) df \quad \dots (6.2.9)$$

där m_0 är ytan under $S(f)$. m_0 är också vattenytans $\eta(t)$ varians.

Ju högre moment som bildas ju större vikt läggs vid energin i de höga frekvenserna. Ett sätt att beskriva spektrumbredden vore därför en kvot mellan lämpliga moment av olika ordning. Longuet-Higgins har t ex föreslagit en spektrumbreddspараметer

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 \cdot m_4}} \quad \dots (6.2.10)$$

ϵ kommer att vara noll för mycket smala spektrum och närliggande 1 för mycket breda.

Effektspektrum $p(f)$ (W_s/m)

Vågeffekten kan på liknande sätt som vågenergin delas upp på frekvensband varvid erhålls ett effektspektrum eller vågeffektens spektraltäthet. Utgående från vågspektrum erhålls detta med (2.5) insatt i ekvation (1.2) till

$$p(f) = \frac{1}{4\pi} \rho g^2 f^{-1} S(f) \quad \dots (6.2.11)$$

Mellan den totala vågeffekten i en oregelbunden vågrörelse och effektspektrum gäller följande samband.

$$P = \int_0^\infty p(f) df = \frac{\rho g^2}{4\pi} m_{-1} \quad \dots (6.2.12)$$

Värdet av integralen ovan kan överslagsmässigt anges till

$0.5 H_s^2 T_z$ kW/m. Se t ex Gran (1977).

De angivna uttrycken (6.2.11) och (6.2.12) kan användas för att beräkna den totala effekten i en oregelbunden vågrörelse. Spektralfördelningen är dock felaktig eftersom effekten beräkningsmässigt har bibehållits på vågkomponenternas frekvenser. I själva verket utgörs effekten eller energitransporten i vågorna av en produkt av tryck p_d och horisontalhastighet u dvs i princip

för varje frekvens (f)

$$p(f,t) = u \cdot p_d \cdot \sin^2 2\pi ft = u \cdot p_d \frac{1}{2} (1 - \cos 4\pi ft)$$

... (6.2.13)

således ligger fysikaliskt effekten på dubbla frekvensen gentemot vågrörelsen.

För energipotentialuppskattningar är det dock praktiskt att använda vågkomponenternas frekvens då det ju är dessa vi mäter med hjälp av en nivåmätning i en punkt.

Om upptagen effekt i en vågenergiomvandlare spektralanalyseras kommer denna att ligga vid dubbla vågornas frekvens, och om verkningsgradsuppskattningar skall göras frekvensbandsvis måste först vågornas eller effektens frekvens skiftas. Det är därvid lämpligt att skifta vågeffekten till dubbla frekvensen. Se vidare kapitel 7.2.

6.2.3 Standardspektrum

Det finns många förslag till funktioner för vindgenererade vågspektrum, vilka alla baseras på jämförelser med uppmätta vågspektrum. De två vanligaste är Pierson- Moskowitz' spektrum där energin fördelar endast över frekvenserna. I verkligheten utbreder sig dock vågorna i alla riktningar inom 45° på båda sidor om vindriktningen. Ändrar vinden riktning blir riktningsspridningen än större. Riktningsspridningen kan beskrivas med riktningsspektrum vilket inte tas upp i denna rapport.

JONSWAP-spektrumet beskriver vågorna under tillväxtskedet och är något mer komplicerat än P-M spektrumet. I denna beskrivning behandlas inte JONSWAP-spektrumet.

Pierson- Moskowitz' spektrum gäller för "fullt utbildad sjö" (fully arisen sea) dvs ett tillstånd där energitillförseln till vågrörelsen balanseras exakt av energiförlusterna. Då är den enda variabeln vindens hastighet. Spektrumet gäller således endast då stryklängderna är tillräckligt stora.

Det uttryck för spektrumet som ger bäst överensstämmelse med vågdata är

$$S_{PM}(f) = 0.11 \frac{H_s^2}{T_z^4} f^{-5} \exp(-0.44 (T_z f)^{-4}) \quad \dots (6.2.14)$$

där den signifikanta våghöjden H_s och medelvågperioden T_z approximerats med $H_s \approx 4\sqrt{m_0}$ och $T_z \approx m_0/m_1$.

6.2.4 Linjär teori för NE-bojen

Den matematiska modell som hittills använts vid arbetet med utvecklingen av gruppens vågenergiboj har presenterats dels i Vågenergi i Sverige (NE 1977:4), dels utförligare i rapporten GR:10. Utgångspunkten har varit att bojen endast kan röra sig i vertikalled. Den infallande våg som sätter bojen i rörelse antas vara sinusformad.

$$\zeta(t) = \zeta_0 \cos \omega t \quad \dots (6.2.15)$$

$\zeta(t)$ vattenytans läge i vertikalled relativt medelvatten-nivån i en punkt i höjd med bojen.

t tiden

ζ_0 vågamplituden

ω vågens cirkelfrekvens $\omega = 2\pi f$

Bojens rörelse bestäms enligt teorien av en andra ordningens differentialekvation. På djupt vatten gäller

$$(m+a) \ddot{z} + (b+b_1) \dot{z} + cz = \\ = [(c-a\omega^2)^2 + (b\omega)^2]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-kD} \zeta_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad \dots (6.2.16)$$

Här är

- m masströgheten hos det svängande systemet
- a den hydrodynamiska massan (medsvängande vattenmassa)
- z bojens läge i vertikalled relativt jämviktsläget
- b den hydrodynamiska dämpningen
- b_1 dämpkonstant för det yttre dämpningen som gör att energi tas från vågorna
- c fjäderkonstanten för den hydrostatiskt återförande kraften
- k vågtalet $2\pi/L$
- D bojens sjunkdjup, avståndet från vattenytan till "kölen"
- α fasförskjutning mellan den drivande kraften och vågrörelsen.

För fjäderkonstanten c gäller att

$$c = \rho g A \quad \dots (6.2.19)$$

- där ρ är vattnets densitet
- g jordaccelerationen
- A bojens vattenlinjearea

Observera att det svängande systemet kan ha en masströghet m som är större än displacementets massa V. Detta inträffar t ex då en roterande generator används som energiupptagare.

Amplitudresponsfunktionen

Vid lösningen av differentialekvationen (6.2.16) antas att alla koefficienter är konstanta med avseende på tiden dvs differentialekvationen är linjär. Detta ger en lösning

$$\begin{aligned} z(t) &= \xi_0 \sqrt{\frac{(c - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}{(c - (m+a)\omega^2)^2 + (b+b_1)^2 \omega^2}} e^{-kD} \cos(\omega t + \psi) \\ &= z_0 \cos(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

där ψ är fasvinkeln mellan bojens hävningsrörelse och vågrörelsen.

Förhållandet $Y = z_0/\xi_0$ kallas amplitudresponsfunktionen.

Hydrodynamisk massa och dämpning

Den hydrodynamiska massan, a , och dämpningen, b , varierar både med

- o frekvensen hos rörelsen
- o kroppens form och displacement
- o vattendjupet
- o avståndet till andra begränsningar i planet

Ett sätt att beskriva frekvensberoendet finns refererat i GR:10.
(Se även Havelock 1955).

Man definierar två variabler $\mu(\omega)$ och $\varepsilon(\omega)$ som

$$\begin{aligned}\mu(\omega) &= a/(V) \\ \varepsilon(\omega) &= b/(V\omega)\end{aligned} \quad \dots (6.2.21)$$

där V är displacementets volym.

När mätresultaten jämförts med teorin har approximativt satts att μ och ε är konstanta och lika med de värdena vid resonans, $\omega = \omega_0$. En jämförelse mellan amplitudreponsfunktionen för $\mu(\omega_0)$ och $\varepsilon(\omega_0)$ konstanta och för $\mu(\omega)$ och $\varepsilon(\omega)$ ger, med Havelocks teoretiska värden, små skillnader jämfört med försöksvärdernas spridning.

Normerat

För uppskalnings- och jämförelseändamål uttrycks displacementet i våra försök med ett normerat displacement \hat{V} på så sätt att aktuell displacementsvolym divideras med volymen av ett halvklot med samma radie som bojen.

$$\hat{V} = V/(2\pi r^3/3) \quad \dots (6.2.22)$$

Jämförelser kan då direkt göras mellan bojar i olika skalor. För samma värde på \hat{V} skall t ex den vid resonans erhållna masskoefficienten μ och dämpkoefficienten ε vara lika. \hat{V} för den tidigare beskrivna halvsfären blir definitionsmässigt $\hat{V} = 1.00$.

Vattendjupets inverkan

Ekvation (6.2.18) och (6.2.20) gäller endast då vattendjupet är så stort att vågorna inte påverkas av bottnen. När vattendjupet h är mindre än halva våglängden bör faktorn e^{-kD} bytas mot faktorn

$$\frac{\cosh k(h-D)}{\cosh kh} \quad \dots (6.2.23)$$

Egensvängningsförlöppet

Vid försök, där bojen fått svänga i stillastående vatten efter att ha släppts från något begynnelseläge $z(0)$, kan svängningsekvationen enligt teorien skrivas (jfr ekv 6.2.18)

$$(m+a) \ddot{z} + b\dot{z} + cz = 0 \quad \dots (6.2.24)$$

Lösningen till denna ekvation är

$$z(t) = z(0) \cdot e^{-k_1 t} \cos(t \sqrt{\omega_0^2 - k_1^2}) \quad \dots (6.2.25)$$

där $z(0)$ är utgångsläget

$$k_1 = \frac{b}{\sqrt{c/(a+m)}} \quad \omega_0 = \sqrt{c/(a+m)}$$

ω_0 är den odämpade svängningens vinkelfrekvens. Den dämpade svängningens vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k_1^2}$

Ur registrerade egensvängningsförlöpp (se figur 7.2) har konstanterna a och b beräknats genom att perioden T och avklingen i amplitud för succesiva svängningar mätts. För ett ideellt förlöpp gäller nämligen.

$$\frac{z(n\pi/\omega)}{z((n+2)\pi/\omega)} = e^{k_1 T} \quad \dots (6.2.27)$$

för $n = 0, 1, 2 \dots$

Bojens energiupptagning

Kraften F i upphängningen antas vara proportionell mot hastigheten och då kan den momentant upptagna effekten skrivas

$$P(t) = F(t) \cdot \dot{z}(t) = b_1 (\dot{z}(t))^2 \quad \dots (6.2.28)$$

I regelbundna sinusformade vågor erhålls genom insättning av $z=z_0 \cos(\omega t + \psi)$ och integrering över ett jämnt antal perioder den ur vågorna upptagna medeffekten

$$P_{\text{med}} = \frac{b_1}{2} \omega^2 z_0^2 \quad \dots (6.2.29)$$

eller

$$\frac{P_{\text{med}}(\omega)}{\zeta_0^2} = \frac{b_1}{2} \omega^2 \cdot Y^2(\omega) \quad \dots (6.2.30)$$

där högerledet är oberoende av vågamplituden.

Hydrodynamisk verkningsgrad

Vid sinusformade vågor på djupt vatten bestäms medeffekten per meter vågfront p enligt ekv 6.2.2 av uttrycket.

$$p = \frac{\zeta_0^2}{4} \rho g^2 \frac{1}{\omega} \quad \dots (6.2.31)$$

Utgående från detta kan man teckna ett uttryck för en vågenergiomvandlarens förmåga att absorbera vågornas energi. För en boj med radien r kan denna hydrodynamiska "verkningsgrad" skrivas

$$\eta = \frac{P_{\text{med}}}{p \cdot 2r} \quad \dots (6.2.32)$$

Uttrycks verkningsgraden med hjälp av amplitudresponsfunktionen fås

$$\eta = \frac{b_1 \omega^3 Y^2(\omega)}{\rho g^2 r} \quad \dots (6.2.33)$$

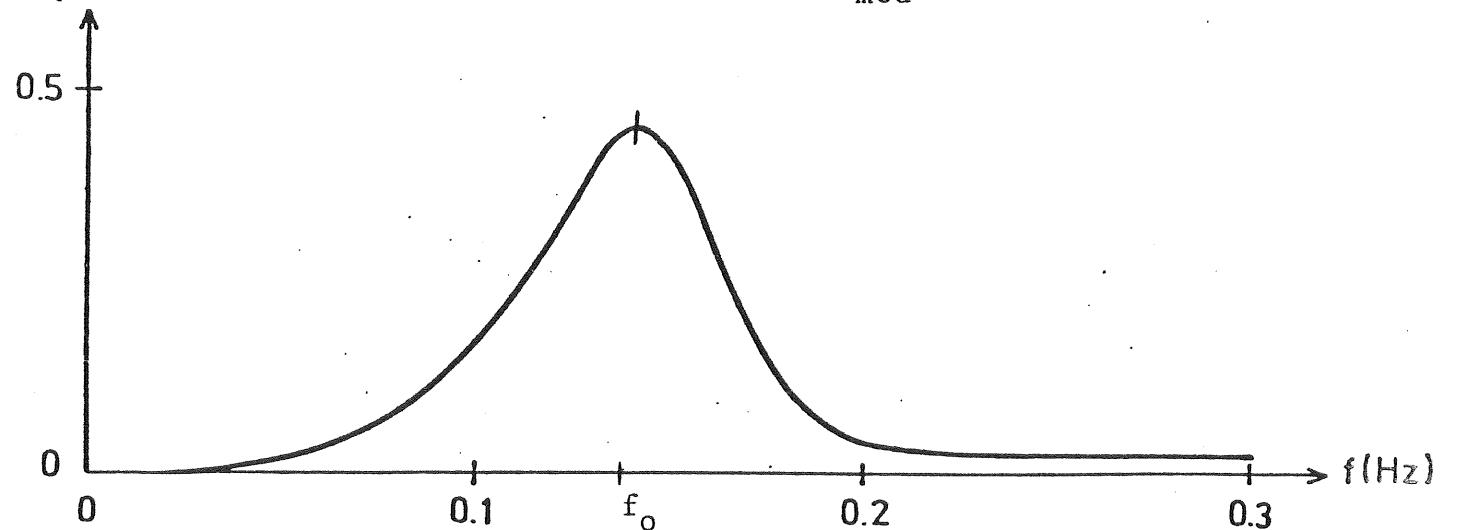
För en viss boj kan man visa att verkningsgraden har maximum med avseende på dämpningen b_1 då denna är

$$b_{10} = \epsilon \cdot \varrho V 2\pi f_0 \quad \dots (6.2.34)$$

där f_0 är resonansfrekvensen. Se figur 7.12 och 7.13, i (GR:10).

Den tillämpade definitionen av verkningsgraden kan för vissa typer av punktformiga omvandlare ge värdet över 1. Detta beror på att omvandlaren i så fall tar upp energi från en större bredd än sin egen diameter eller energi reflekterad på intilliggande omvandlare.

Produkten $2r \cdot \eta$ kan uppfattas som en transferfunktion mellan våg-
 $\eta(f)$ effekten P och den upptagna effekten P_{med} .

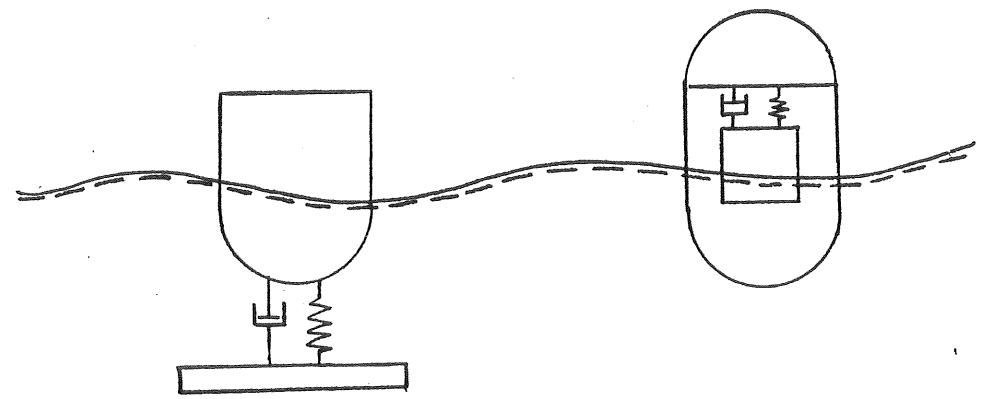


Figur 6.2.4 Verkningsgraden (f) för en boj med $\bar{V} = 0.78$ och bojdiametern 19 m ($b_1 = b_{10}$).

6.2.5 Teori för den kopplade bojen.

Vid fältförsöken visade det sig vara svårt att låta den flytande bojen arbeta mot en fast referens såsom bottnen, eftersom man då fick problem med stora förskjutningar i horisontalled och med variationer i vattenståndet. För att komma bort från dessa problem byggdes en boj med ett mothåll i form av en stor dämpskiva enligt figur 6.2.5. Den i det förra avsnittet beskrivna modellen beskriver ett sådant system dåligt eftersom även skivan kommer i svängning och således bojens absolutrörelse skiljer sig från relativrörelsen.

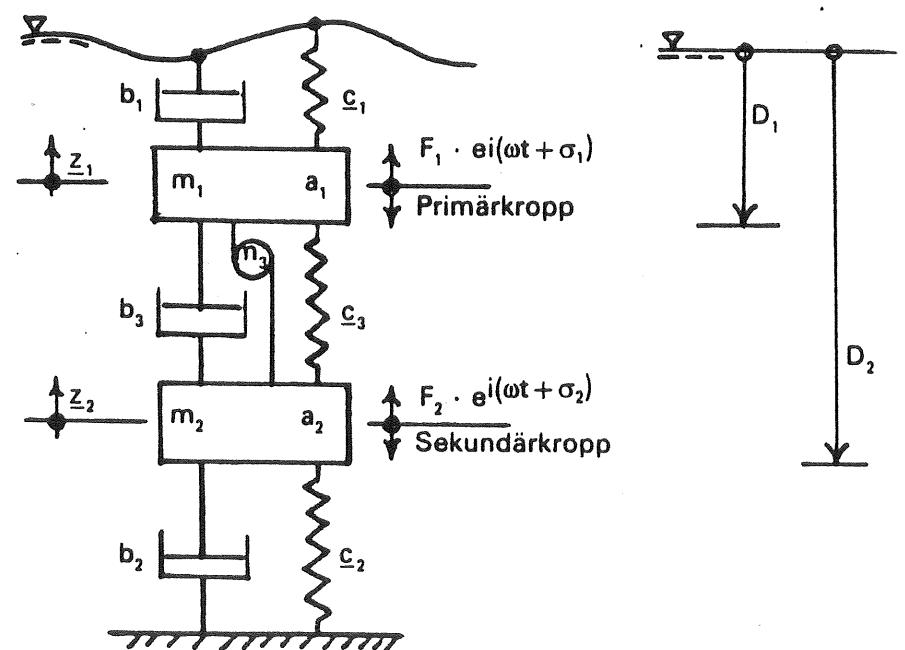
Teorin kan även behandla bojar av den typ som har provats till havs, se avsnitt 7.3 och helt inkapslade massor enligt figur 6.2.5.



Figur 6.2.5 Punktformiga omvandlare med två svängande massor.

Mekanisk modell

En mekanisk modell av systemet kan åskådliggöras med figur 6.2.6 nedan



Figur 6.2.6 Mekanisk modell för det svängande systemet.

En uppställning av rörelseekvationerna för detta system ger upphov till följande ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_3 + a_1 & -m_3 \\ -m_3 & m_2 + m_3 + a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + b_3 & -b_3 \\ -b_3 & b_1 + b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} e^{-i\omega t} \quad \dots (6.2.35)$$

eller på matrisform $\ddot{M}\ddot{X} + \ddot{B}\dot{X} + \ddot{C}X = \ddot{F}e^{-i\omega t} \quad \dots (6.2.36)$

Beteckningar

m_1 och m_2 massorna hos respektive kropp

a_1 och a_2 kropparnas hydrodynamiska massor

b_1 och b_2 kropparnas hydrodynamiska dämpning inklusive dämpare som arbetar mot fast referens såsom t ex bottnen.

c_1 och c_2 fjäderkonstanter beroende på displacementsändringar eller förankring mot fasta referenser.

x_1 och x_2 respektive kropps förskjutning från sitt jämviktsläge.

m_3 ekvivalent massa för t ex en roterande generator som sitter kopplad mellan kropparna. (Generatorns massa inkluderas i den kropp på vilken den är monterad således m_1 eller m_2)

b_3 dämpkonstant beroende på energiupptagning ur relativrörelsen mellan bojarna.

c_3 eventuell fjäderstyrhet för att bibehålla kropparnas relativläge.

F_1 och F_2 den komplexa amplituden för den drivande kraften på grund av vågorna.

Den uppställda linjära modellen kan inte annat än approximativt ta hänsyn till olinjära fenomen som t ex friktionskrafter eller arbetet hos en cylinder som arbetar mot ett konstant yttre tryck.

Odämpade egensvängningar

Systemets egensvängningar erhålls ur ekvation (6.2.35) genom att försumma dämpningen och sätta högerledet lika med noll, dvs

$$\ddot{M}\ddot{X} + CX = 0 \quad \dots(6.2.37)$$

Om denna förmultipliceras med inversen M^{-1} och harmoniska rörelser antas dvs $\ddot{X} = -\omega^2 X$ erhålls

$$(M^{-1}C - \omega^2 I) X = 0 \quad \dots(6.2.38)$$

där I är en enhetsmatris.

Genom att forma determinanten erhålls den karakteristiska ekvationen till systemet

$$\left| M^{-1}C - \omega^2 I \right| = 0 \quad \dots(6.2.39)$$

och rötterna ω_i^2 till detta ekvationssystem kallas egenvärden och ger de naturliga frekvenserna ω_i för systemet. Genom att sätta in ω_i i ekvation (6.2.38) erhålls egenmoderna till systemet. För det givna systemet med två frihetsgrader finns två egenfrekvenser och två egenmoder. Egenmoderna X_i sänder som på en arbitrar konstant till systemet kan mera direkt erhållas såsom kolumnvektorerna till den adjungerade matrisen $\text{adj}(M^{-1}C - \omega_i I)$. Se vidare t ex Thomson (1972).

Den drivande kraften

Det är lämpligt att skriva den drivande kraften på komplex form.
Om vågpotentialen på djupt vatten ges såsom

$$\phi = \frac{\zeta_0}{\omega} g e^{kz - i\omega t} \quad \dots (6.2.40)$$

så ges vågformen av

$$\zeta = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\zeta_0 \omega e^{-i\omega t} \quad \dots (6.2.41)$$

vattnets vertikalhastighet är

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -\zeta_0 \omega^2 e^{kz - i\omega t} \quad \dots (6.2.42)$$

vertikalaccelerationen är

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = i \zeta_0 \omega^2 e^{kz - i\omega t} \quad \dots (6.2.43)$$

och det dynamiska trycket är

$$p_d = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -i \zeta_0 \rho g e^{kz - i\omega t} \quad \dots (6.2.44)$$

I ekvationerna ovan är ϕ , ζ , w , \dot{w} och p_d alla komplexa storheter och realdelarna av dessa betyder motsvarande fysikaliska storheter t ex ges vågformen av

$$\operatorname{Re} \zeta = \zeta_0 \sin(-\omega t)$$

Samma beteckningar används som tidigare.

Den drivande kraften i högerledet i ekvation (6.2.35) är

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} e^{-i\omega t} = \begin{bmatrix} (-b_1 \omega + i(a_1 \omega^2 - c_1)) e^{-kD_1} \\ -b_2 \omega + i(a_2 + \rho V_2) \omega^2 e^{-kD_2} \end{bmatrix} \zeta_0 e^{-i\omega t} \quad \dots (6.2.45)$$

där D_1 och D_2 definieras i figur (6.2.6) och V_2 är den mindre kroppens deplacementsvolym.

Av uttrycket (6.2.45) framgår att kraftamplituderna F_1 och F_2 är komplexa och att de således är fasförskjutna i förhållande till

vågrörelsen. Deras fasförskjutning är också olika, ty förhållandet mellan deras real- och imaginärdelar är olika. Uttrycket (6.2.45) kan omformas till

$$\begin{bmatrix} F \\ F_2 \end{bmatrix} e^{-i\omega t} = \begin{bmatrix} f_1 \cdot e^{i\varphi_1} \\ f_2 \cdot e^{i\varphi_2} \end{bmatrix} e^{-i\omega t} \quad \dots (6.2.46)$$

där φ_1 och φ_2 är respektive fasvinkel och f_1 och f_2 är $|F_1|$ respektive $|F_2|$.

Lösning av rörelseekvationen

Gensvaret på den harmoniska excitationen $F e^{-i\omega t}$ måste vara en harmonisk svängning $X = (x_1; x_2)^* e^{-i\omega t}$. Detta ger $\ddot{X} = -\omega^2 X$ samt $\dot{X} = -i\omega X$.

Insatt i (6.2.36) erhålls

$$[-\omega^2 M - i\omega B + C] X = F e^{-i\omega t} \quad \dots (6.2.47)$$

Varav X eller $(x_1, x_2)^*$ kan lösas genom att förmultiplicera med inversen till parentesen i vänsterledet. Detta ger

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [C - \omega^2 M - i\omega B]^{-1} \begin{bmatrix} f_1 & e^{i\varphi_1} \\ f_2 & e^{i\varphi_2} \end{bmatrix} \quad \dots (6.2.48)$$

Ur denna erhålls sedan de komplexa komponenterna x_1 och x_2 . Deras relativrörelse $[Re(x_1 - x_2)]$ sin ωt och medleffekt

$$p = \frac{1}{T} \int_0^T b_3^T [Re(x_1 - x_2) \cdot \sin \omega t]^2 dt \quad \dots (6.2.49)$$

I grupprapport GR:23 har ovanstående härledning genomförts på ett något annorlunda sätt.

6.2.6 Energiupptagning i oregelbunden sjö.

Effekt utan begränsning av momentaneffekten

Om vi accepterar systemets linearitet så ges den av en NE-boj med radien r vid varje frekvens upptagna medeffekten av

$$P(f) = 2r\eta(f)p(f) = 2r \cdot \eta(f) \frac{\rho g^2}{4\pi} f^{-1} \cdot S(f) \quad \dots(6.2.50)$$

eller med ekvation (6.2.33) och $\omega = 2\pi f$ insatta

$$P(f) = 4\pi^2 b_1 Y^2(2\pi f) f^2 \cdot S(f) \quad \dots(6.2.51)$$

$P(f)$ är då ett spektrum för den uttagna effekten och transferfunktionen mellan denna och vågspektrum blir

$$T^2(f) = 4\pi^2 b_1 Y^2(2\pi f) \cdot f^2 = \frac{r\rho g^2}{2\pi} \eta(f) f^{-1} \quad \dots(6.2.52)$$

Transferfunktionen $T(f)$ kan bestämmas med teoretiska eller empiriska värden på μ och ϵ vilket ger amplitudreponsfunktionen $Y(f)$ alternativt kan $\eta(f)$ eller $T(f)$ mätas direkt genom modellförsök.

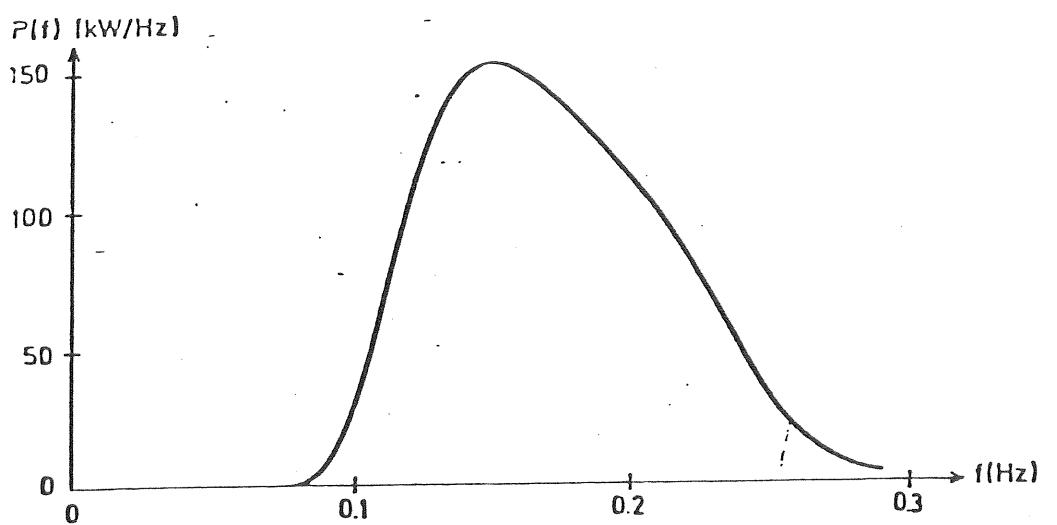
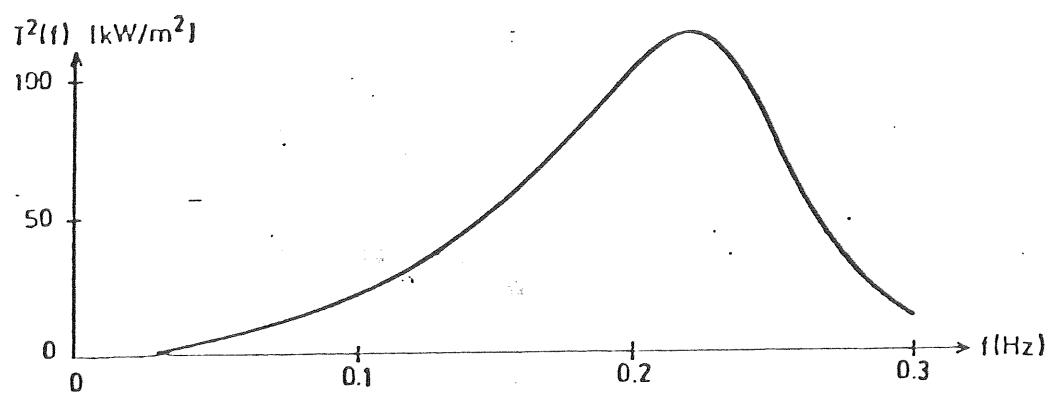
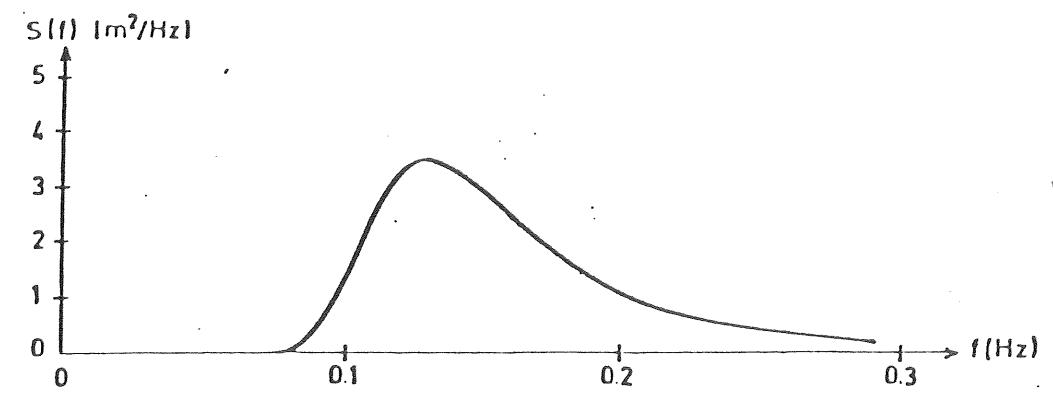
I figur 6.2.7 har vågspektrum $S(f)$, transferfunktionen $T^2(f)$ och spektrum över upptagen effekt $P(f)$ uppritats för en boj med $\hat{V}=0.78$ och diametern 7.5 m under vissa vågförhållanden. Koefficienterna för bojen är de som erhållits vid modellförsök enligt tabell 7.4 och 7.5.

Den totalt upptagna effekten kan sedan skrivas

$$P_{med} = \int_0^\infty T^2(f) S(f) df \quad \dots(6.2.53)$$

För de förhållanden som redovisas i figur 6.2.7 är infallande effekt per längdenhet vågfront $p = 16.2$ kW/m och av bojen upptagen effekt $P_{med} = 17.0$ kW. Verkningsgraden beräknad på bojens diameter blir 14%.

Av förskjutningen mellan kurvan $S(f)$ och $T^2(f)$ framgår att verkningsgraden borde kunna förbättras genom att bättre anpassa bojen till vågspektrum.



Figur 6.2.7 Vågspektrum $S(f)$, transferfunktion $T^2(f)$ och spektrum över absorberad effekt $P(f)$ för en boj av typ I och $\varnothing 7.5$ m vid signifikanta våghöjden 2.25 m och medelperioden $T_z = 6$ s.

6.3 Teoretisk analys av petropumps slang.

Som underlag för arbetet med petropumpskraftverket har en teoretisk analys av petropumpen gjorts. Resultaten från analysen ger slutna uttryck för pumpad volym som funktion av förlängning av slangen och kraft vid pumpning (mot olika tryck) som funktion av förlängning.

Dessa samband används sedan i den teoretiska analysen av kraftverket.

Hittills gjorda jämförelser med försöksresultat visar att de teoretiska uttrycket för pumpen är riktiga men att vissa korrigeringar måste göras som tar hänsyn till slangstyrhetens variation med förlängningen hos slangen.

6.4 Optimering av boj

I det följande redovisas resultat från optimeringsberäkningar av en vågkraftsboj. Optimeringarna har syftat till att genom variation av vissa parametrar åstadkomma så hög medelverkningsgrad som möjligt när bojen arbetar i ett givet vågklimat, Hoburgen 1975.

Följande tre optimeringskriterier har tillämpats:

- resonansfrekvensoptimering varvid resonansfrekvensen och därmed skalfaktorn varieras för en viss modellboj så att bästa medelverkningsgrad erhålls. Denna optimering bestämmer således bojens diameter. Se figur 6.4.1.
- massoptimering som innebär en begränsad ändring av djupgåendet (genom barlastning) i 6 timmarsintervall. Utföres för olika diameter.
- dämpningsoptimering som innebär variation av generatordämpningen i 6 timmarsintervall. Utföres för olika diameter.

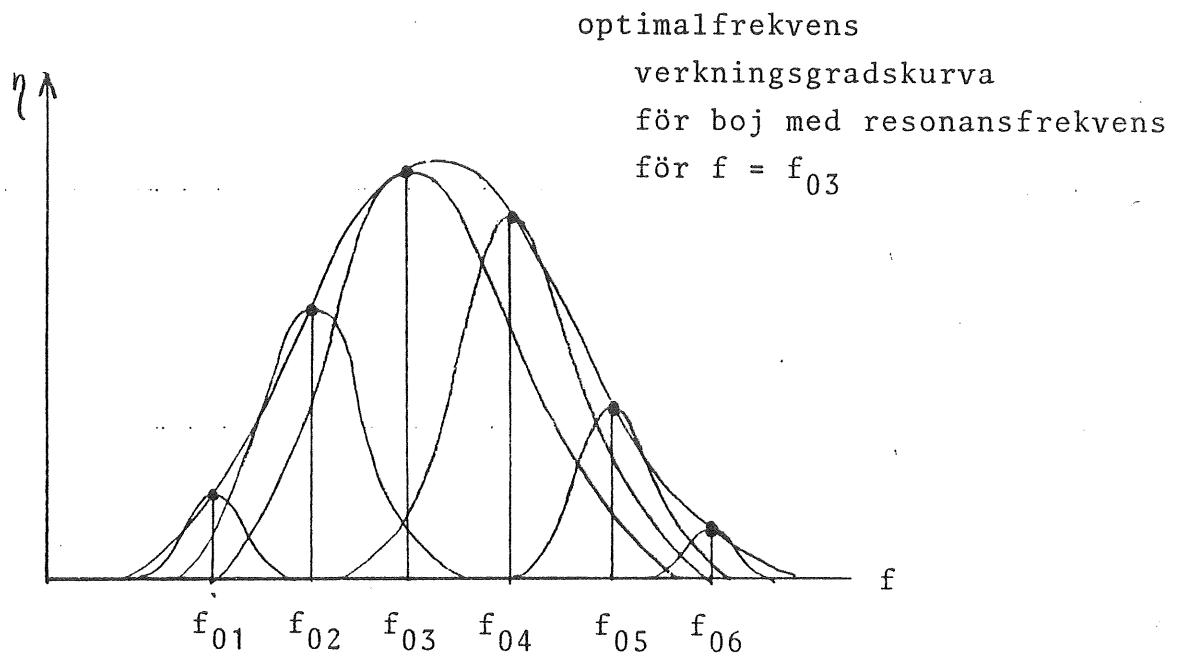
Vid optimeringen har den statistiska metod som beskrivs i kapitel 6.5.2 använts för att beräkna energiproduktionen från bojen. Någon hänsyn till klippningens återkoppling på bojrörelsen har dock inte tagits.

Dämpkonstanten k_b

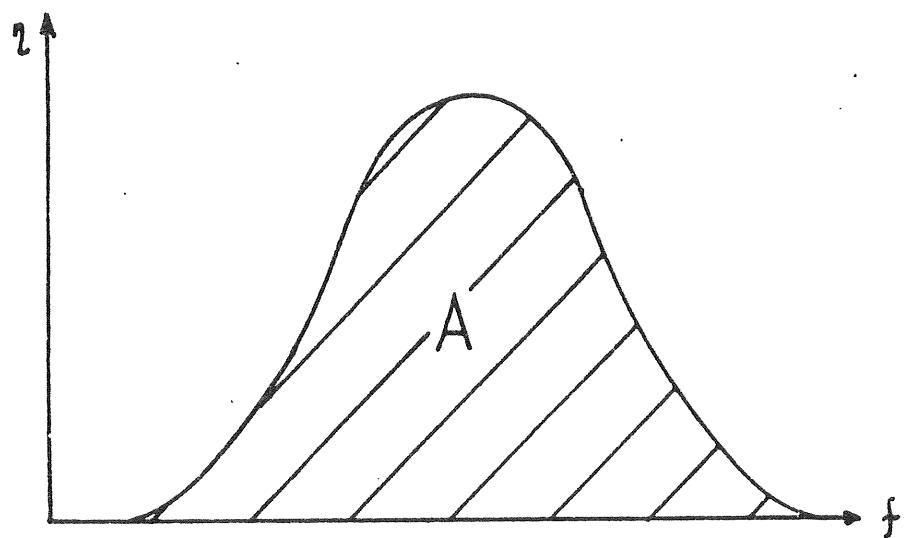
Verkningsgraden för en vågboj beräknas ur uttrycket:

$$\eta = b_1 \cdot \frac{\omega^3}{\rho g^2 \cdot r} \cdot \frac{(c - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}{(c - (m + a)\omega^2)^2 + (b + b_1)^2 \omega^2} \cdot e^{-2kD} \quad \dots (6.4.1)$$

Som ett mått på bojens effektivitet i en oregelbunden vågsituation kan man använda ytan A under verkningsgradskurvan (se figur 6.4.2). Av formeln framgår att ytan A påverkas av den yttre dämpningen b_1 . Det visar sig också att ytan kan maximeras map b_1 . Varje bojtyp - representerad av specifika värden på r, c, m och D samt frekvensoberoende värden på a och b - har sin optimala yttre dämpning b_1 map maximum av ytan A.



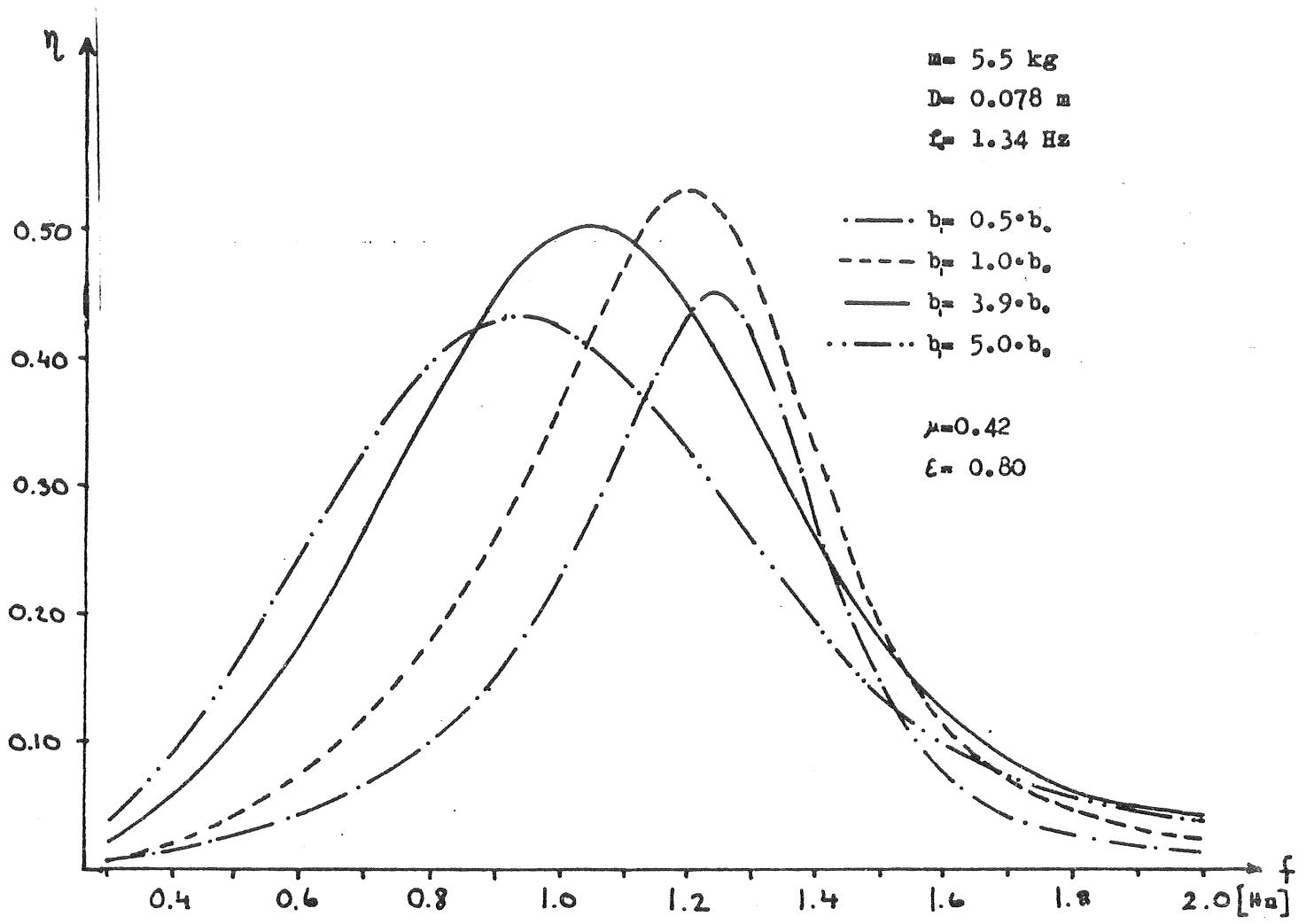
Figur 6.4.2 Resonansfrekvensoptimering. f_{01} - f_{06} utgör resonansfrekvenser för olika stora bojar.



Figur 6.4.1 Beräkning av ytan under η -grafen.

Den yttre dämpningen b_1 skrivs som produkten optimala dämpningen b_0 vid bojens egenfrekvens och dämpfaktorn k_b .

$$b_1 = k_b \cdot b_0 = k_b \cdot 2\pi f_0 \cdot \varepsilon \cdot m \quad \dots (6.4.2)$$



Figur 6.4.3 Verkningsgradskurvans utseende vid olika värden på dämpkonstanten k_b . Modellboj typ II 5.5 kg.

Enligt formeln för den hydrodynamiska verkningsgraden är det alltså möjligt att påverka verkningsgraden för en given frekvens genom att variera den yttre dämpningen.

Om $k_b = 1$ fås maximal verkningsgrad för bojens egenfrekvens dvs:

$$k_b = 1 \Rightarrow b_1 = 2\pi f \cdot \varepsilon m$$

$$f = f_0 \Rightarrow b_1 = b_0 = 2\pi f_0 \cdot \varepsilon m$$

Är $k_b > 1$ förskjuts verkningsgradstoppen mot en lägre frekvens än egenfrekvensen.

Är $k_b < 1$ förskjuts verkningsgradstoppen mot en högre frekvens än egenfrekvensen.

$$k_b > 1 \Rightarrow \eta_{\max} \text{ för } f < f_0$$

$$k_b = 1 \Rightarrow \eta_{\max} \text{ för } f = f_0$$

$$k_b < 1 \Rightarrow \eta_{\max} \text{ för } f > f_0$$

Genom att ändra den yttre dämpningen, dvs variera k_b , kan alltså dels toppen på verkningsgradskurvan förskjutas dels arean under η -kurvan ändras.

För en 5.5 kg modellboj fås maximal yta under verkningsgradskurvan för $k_b = 3.4$.

Dvs

$$k_b = 3.4 \Rightarrow b_1 = k_b \cdot b_0 = 3.4 \cdot b_0 \Rightarrow \int \eta(f) df = A^{\max}$$

Skalning till fullskala

När optimal verkningsgradskurva är bestämd skall modellbojen skalas upp till fullskala enligt Froudes modellregler. Dessa säger:

$$\alpha_L = \left(\frac{f_m}{f_{p_0}}\right)^2 \quad \dots (6.4.3)$$

$$f_p = \sqrt{\alpha_L} \quad \dots (6.4.4)$$

$$r_p = \alpha_L \cdot r_m \quad \dots (6.4.5)$$

$$m_p = \alpha_L^3 \cdot m_m \quad \dots (6.4.6)$$

här är α_L = skalfaktorn. Index p anger prototyp och index m anger modell. f_m anger frekvensen för den valda verkningsgradskurvans topp och f_{p_0} , prototypens optimalfrekvens.

Eftersom prototypens resonansfrekvens och därmed också skalfaktorn ändras genom att k_b ändras blir bojens massa beroende av k_b .

minskning av $k_b \Rightarrow$ ökning av $\alpha_L \Rightarrow$ ökning av massan.

ökning av $k_b \Rightarrow$ minskning av $\alpha_L \Rightarrow$ minskning av massan.

Om alltså k_b ökas till det värde som ger maximal yta under verkningsgradskurvan förbättras den totala verkningsgraden. Samtidigt minskar bojens optimala massa för en given vågsituation.

Optimeringen utgår från de resultat som erhållits vid undersökningar av bojar i laboratorium, se kapitel 7.1. Således har en 5.5 kg modellboj med diametern 30 cm, skalats upp till fullskaleförhållanden mha Froudes modellregler. Optimering av massa och dämpning har gjorts mha en matematisk modell.

För att inte generatorns magnetiseringseffekt skall vara större än producerad effekt krävs en starteffekt P_{st} . Klippeffekten P_{kl} , som är den största effekt generatoren kan ge, införs för att inte kraftverket ska bli överdimensionerat. Stora effekter förekommer ju ytterst sällan. Starteffekten har valts till 5 kW och klippeffekten till 150 kW. Den relativt höga klippeffekten beror på att skillnaden mellan maximal medeleffekt och maximal momentan effekt ($=P_{kl}$) under ett sextimmarintervall är så stor. Maxeffekten 150 kW är alltid minst 3 ggr större än medeleffekten i det studerade exemplet. Verkningsgraden definieras som

$$\eta = \frac{\text{energi ut ur bojen (efter generator)}}{\text{infallande vågenergi per bojbredd}}$$

Den utförda optimeringen grundar sig på vågdata för farvattnen utanför Hoburgen. Dessa har genom hindcasting beräknats ur vinduppgifter för 1975. Sålunda har H_s , T_z beräknats för var sjätte timme. Timförekomsten av H_s , T_z visas i ett scatterdiagram i figur 6.4.4.

Resonansfrekvensoptimering

Resonansfrekvensoptimering innebär att optimal boj ger störst verkningsgrad vid viss resonansfrekvens. Se figur 6.4.1. Optimal boj för Hoburg 1975 vid denna typ av optimering blir:

massa	=	187.5 ton
diameter	=	9.7 m
f_0	=	0,18 Hz
energiprod	=	142 MWh/år
η_{tot}	=	20 %
dämpning	=	303 kNs/m

Konstruktionsmässigt innebär resonansfrekvensoptimering att alla parametrar hålls konstanta under hela året.

Massoptimering

Massoptimering innebär att vi för varje sextimmarsintervall varierar bojens massa. Bojens diameter bestäms av vald resonansfrekvens (skalfaktor). Resonansfrekvensen ändras sedan steg för steg och vid varje sådant steg undersöks om under varje H_s - T_z -situation vilken massa som ger bäst verkningsgrad. Massan varieras genom att vatten pumpas in i eller ut ur bojen varigenom även djupgåendet ändras. I detta fall har det minsta djupgåendet begränsats till det som motsvaras av 5.5 kg modellboj. För varje H_s - T_z -situation provas, om verkningsgraden kan förbättras genom att massan ändras med ett eller flera steg ($\Delta M = 0,5$ ton - 5 ton). Bojens dimensioner och dämpning är således bestämda medan massan kan varieras, vilket kräver en del extra utrustning.

Den massoptimerade bojens diameter blev samma som vid frekvensoptimeringen.

Detta beror på att den resonansfrekvensoptimerade bojen redan har minsta tillåtna djupgående och att en ökning av massan (=djupgåendet) alltid ger försämrat verkningsgrad vid oförändrad dämpning).

Dämpoptimering

Dämpoptimering innebär att den yttre dämpningen varieras så att verkningsgraden blir så hög som möjligt. Ändringen görs var sjätte timme om så är gynnsamt. Konstruktionsmässigt innebär för exempelvis ett hydrauliskt system varierad dämpning att arbetstrycket ändras. Bojens massa är däremot konstant.

Även den dämpoptimerade bojens data blev samma som för den frekvensoptimerade bojen. Vid ett såpass högt värde på k_b ($= 3.4$) ger variation av dämpningen mycket liten inverkan. Trots att dämpningsoptimering är gynnsam för små värden på k_b (< 3) är totalverkningsgraden högre när $k_b = 3.4$ och dämpningen hålls konstant, se figur 6.4.7 och 6.4.9.

Slutsatser

Ovan nämnda datorberäkningar ger entydiga resultat: energiproduktionen förbättras inte, vare sig bojen har enbart variabel massa eller enbart variabel dämpning.

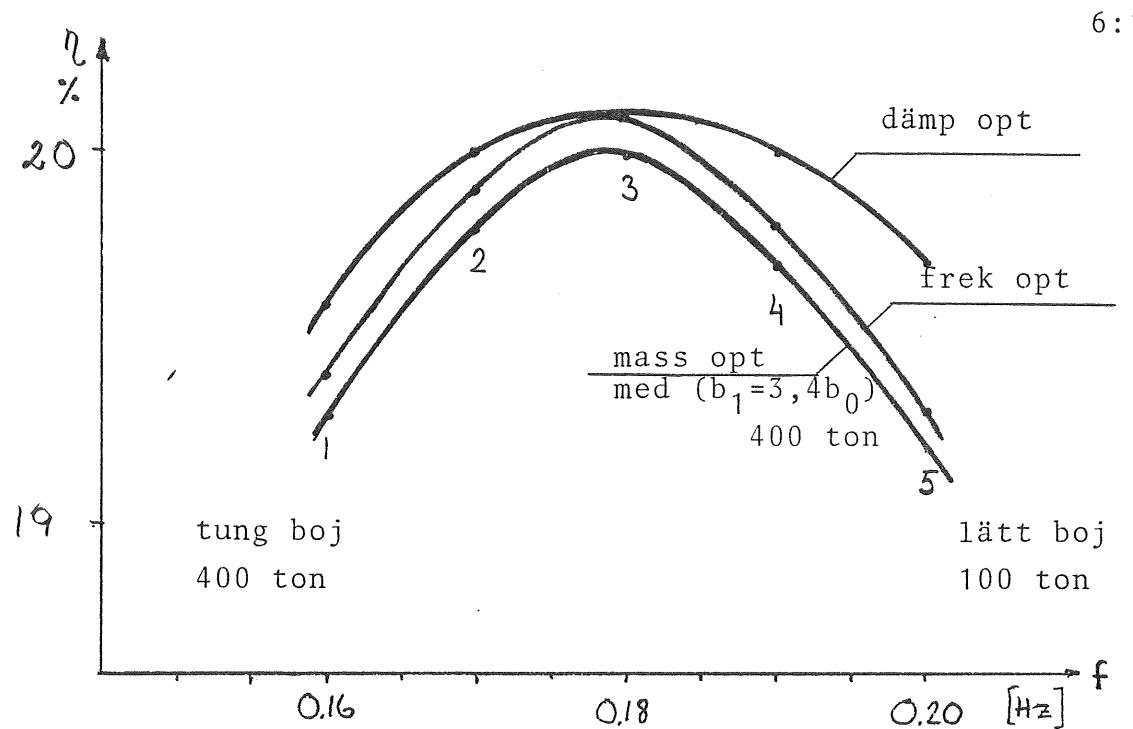
Att variation av massan inte ger någon inverkan beror på att bojens djupgående i beräkningarna inte fick bli mindre än djupgåendet hos en uppskalad 5.5 kg modellboj. Optimal verkningsgrad map djupgåendet (massan) erhålls nämligen teoretiskt när detta är noll. En förbättring skulle kanske ha åstadkommits genom en massminskning genom minskat djupgående men den matematiska modellen tillåter inte detta. (Modellförsök för massor < 5.5 kg saknas).

Det bör betonas att ovanstående slutsats inte har beaktat de eventuella positiva effekter som en samtidig förändring av massa och dämpning skulle innebära.

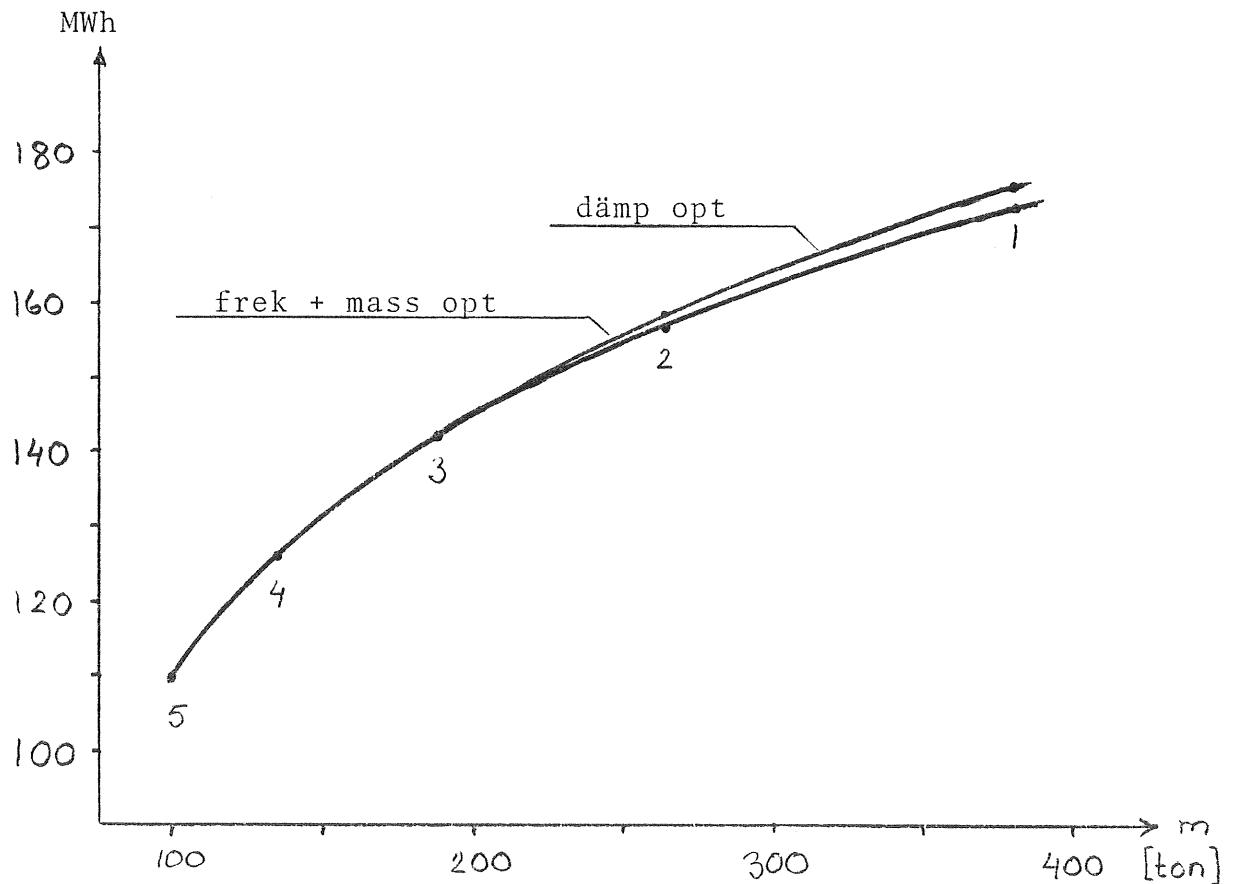
Beräkningarna baserar sig på H_s - T_z -situationer var sjätte timme och säger således ingenting om inverkan av att optimera momentant (våg-till-våg).

Den slutsats som kan dras av undersökningarna är att ett bojkraftverk bör optimeras med avseende på resonansfrekvens och inte ha, vare sig variabel massa eller dämpning utan istället ha en konstant hög dämpning. Resonansfrekvensoptimering görs för varje tänkt lokaliseringsort. Det återstår dock att undersöka inverkan av dels samtidig variation av massa och dämpning, dels våg-till-våg variation av dämpningen.

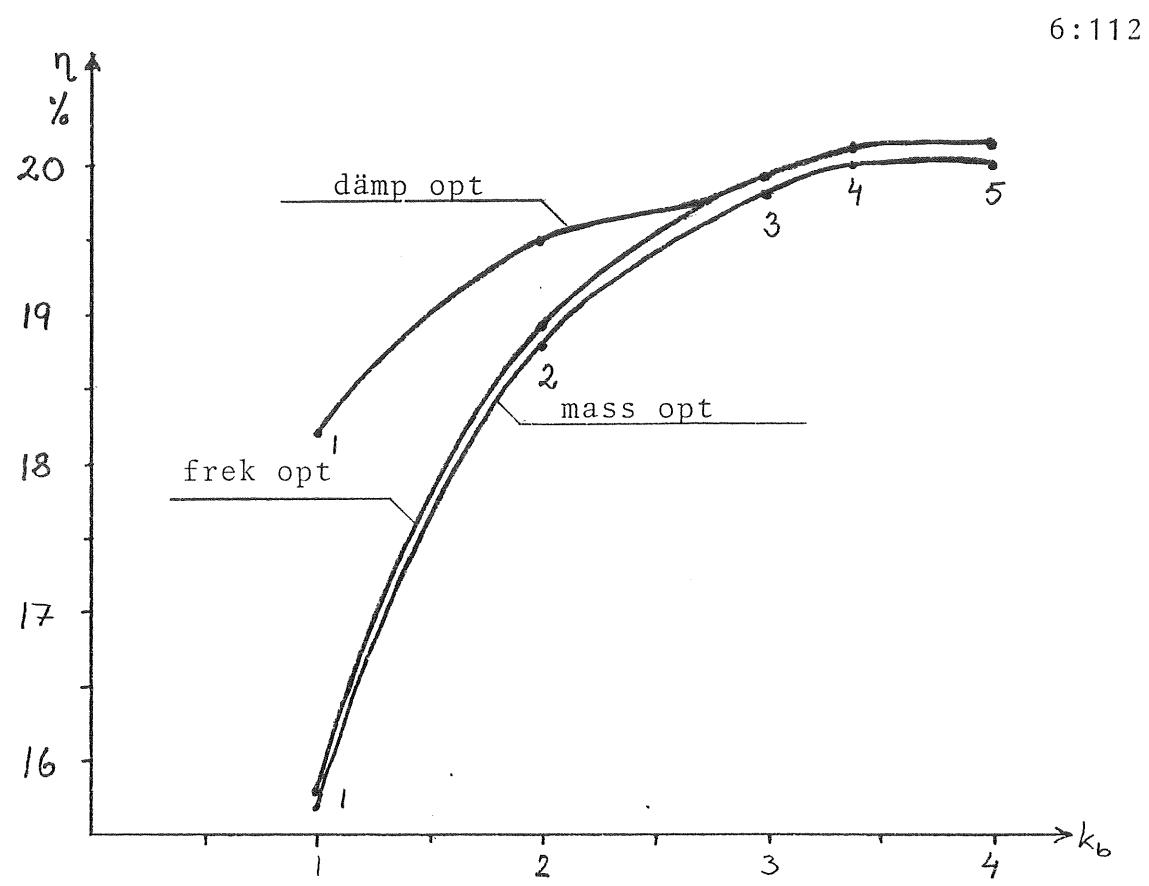
I figur 6.4.5 till 6.4.9 redovisas en jämförelse mellan de olika sättten att optimera och i figur 6.4.11 till 6.4.15 visas exempel på en datorkörning.



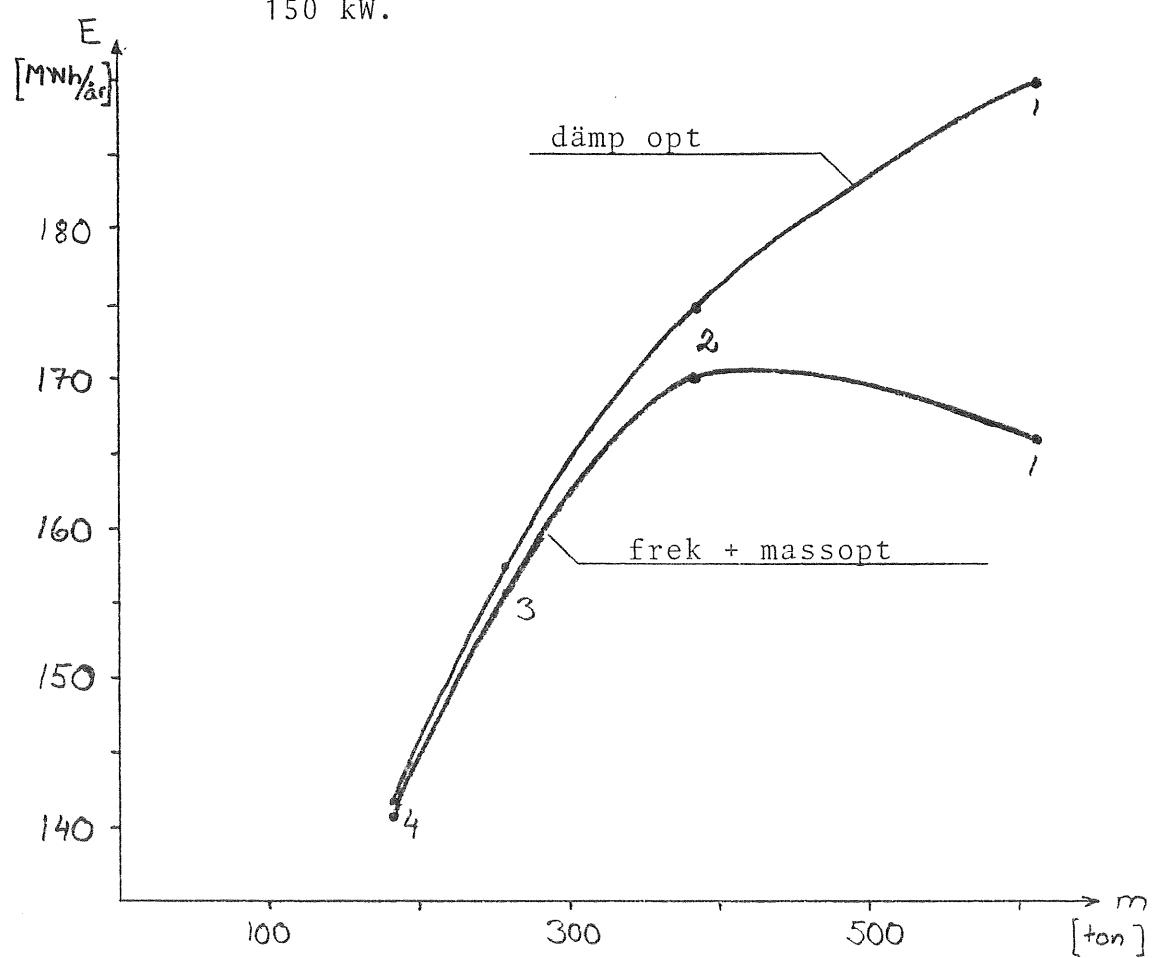
Figur 6.4.5 Verkningsgraden som funktion av resonansfrekvensen, med start- och klippeffekt 5 respektive 150 kW.



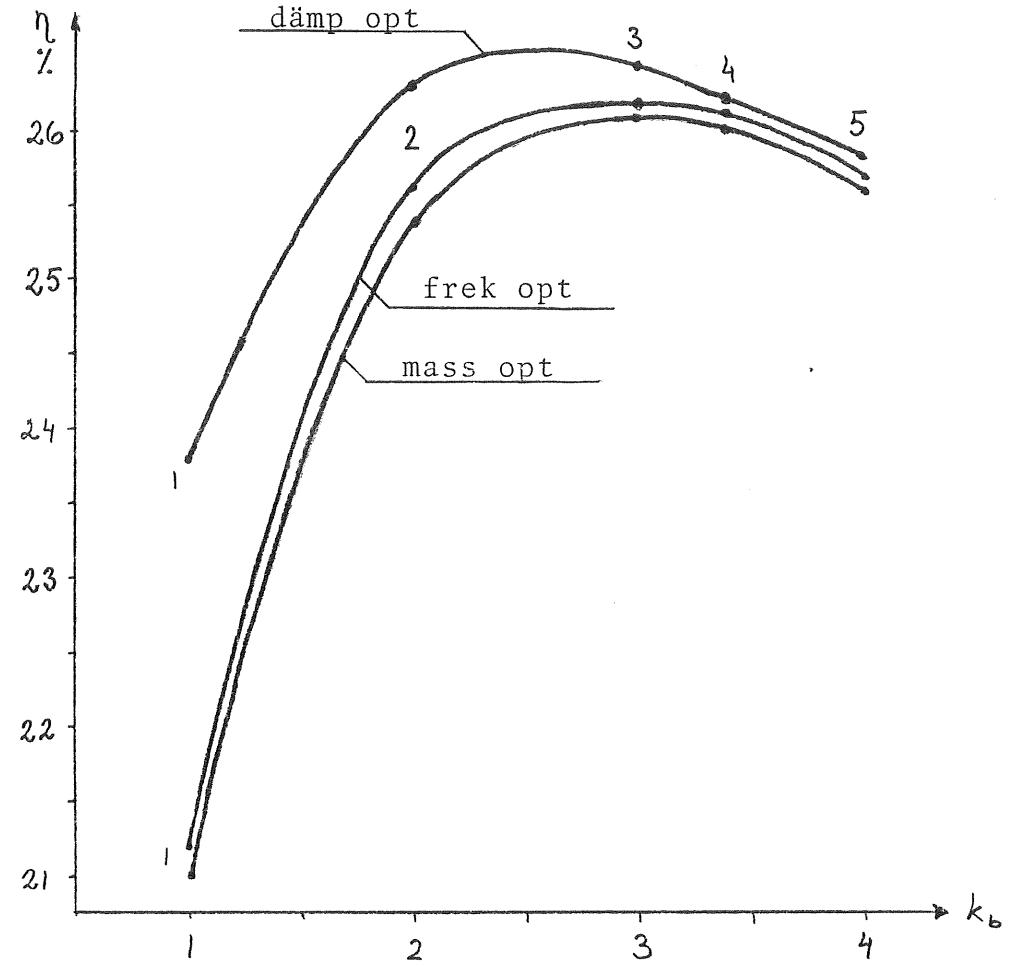
Figur 6.4.6 Energiproduktionen som funktion av massan. Med start- och klippeffekt.



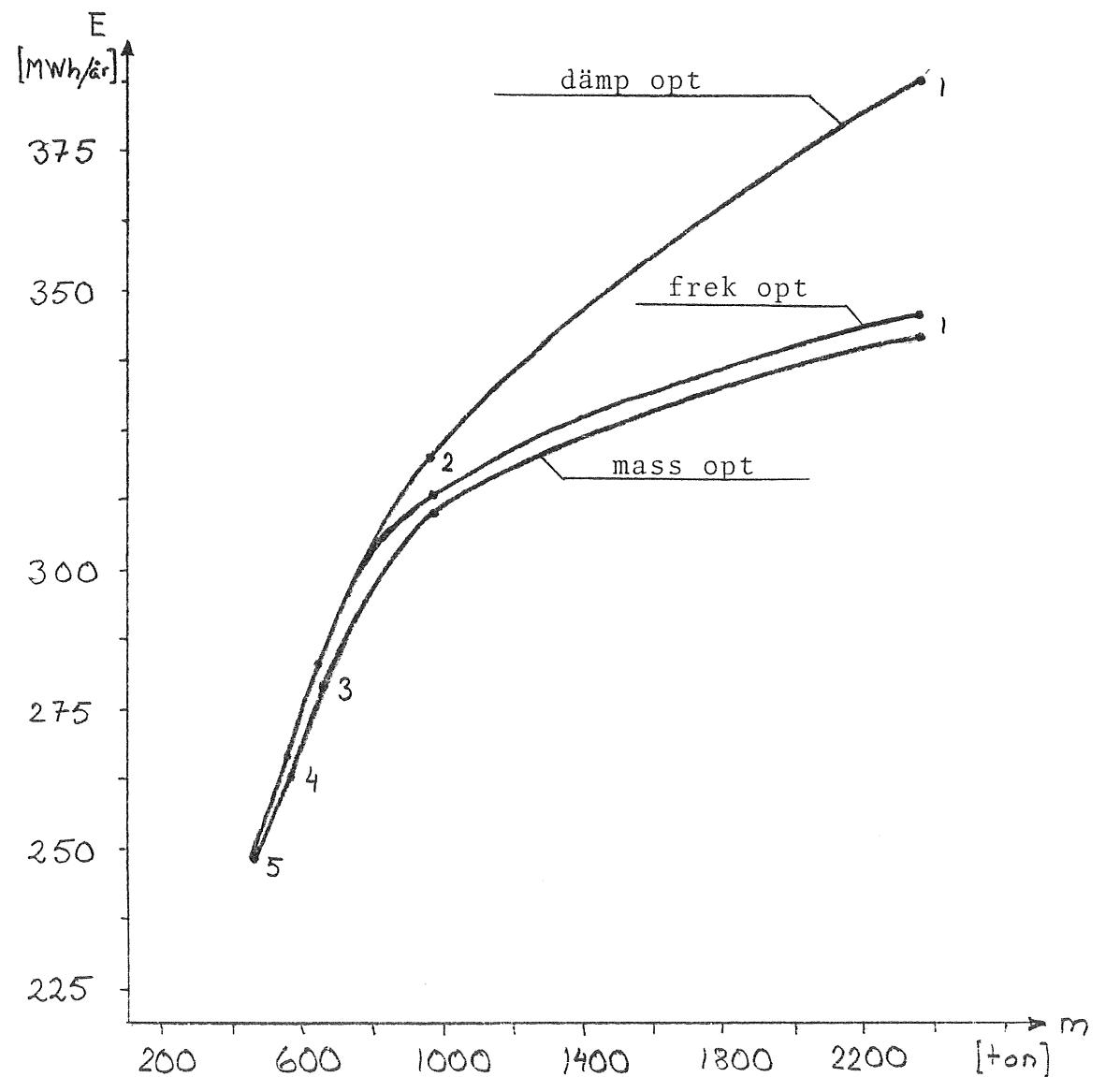
Figur 6.4.7 Verkningsgraden som funktion av basdämpningen
 $(b_1 = k_b \cdot b_0)$ med start- och klippeffekt 5 resp
150 kW.



Figur 6.4.8 Energiproduktionen som funktion av massan, med
start- och klippeffekt som i figur 6.4.7.



Figur 6.4.9 Verkningsgraden som funktion av basdämpningen
 $(b_1 = k_b \cdot b_0)$ utan begränsning start och klippeffekt.



Figur 6.4.10 Energiproduktionen som funktion av massan utan begränsning start och klippeffekt.

BOJDIMENSIONERING - DÄMPOPTIMERING

MÅSTALLE: 1 RR: 1975

INDATA

MODELLBOJ: GRUNDSKALA M = 5.5 KG
 MY = 0.8N
 EPS = 0.42 Hz
 F0 = 1.34 Hz
 FD = 0.08 m
 KB-SKAL = 3.4
 KB-STEG = 0.1

VALD RESONANSFREKVENS I FULLSKALA = 0.18 Hz

VALD STARTEFFEKT = 5.0 KW

VALD KLIPPEFFEKT = 15.0 KW

VALD STÅNGLÅND = 4.0 N

VALD MEKANISK VERKNINGSGRAD = 0.75

VATTNETS DENSITET = 1013. KG/M³

RESULTAT

SKADEFAKTORN ALFA = 32.4 J
 BOJENS DIAMETER = 32.9-7 M
 BOJENS DJUP/GÅENDE = 2.5 M
 BOJENS MASSA = 187.5 TON
 TOTALT INFÄLLLEN VÄGENERGI = 705.77 MWH/BOJAREDD
 MAXIMAL INFÄLLLEN MED EFFEKT = 80.57 KW/BOJ
 MAXIMAL VÄGHÖJD = 8.56 M
 HOJENS ENERGI PRODUKTION, METOD EM = 142.97 MWH
 BOJENS MED EFFEKT, METOD EM = 16.24 KW
 BOJENS VERKNINGSGRAD, METOD EM = 3.201 H
 BOJENS INKOPPLINGSTID, METOD EM = 87.46 H
 BOJENS UTHYTJNINGSGRAD, METOD EM = 0.998
 BOJENS ENERGI PRODUKTION, METOD VB = 138.09 MWH
 BOJENS MED EFFEKT, METOD VB = 23.27 KW
 BOJENS VERKNINGSGRAD, METOD VB = 99.96 H
 BOJENS INKOPPLINGSTID, METOD VB = 59.34 H
 BOJENS UTHYTJNINGSGRAD, METOD VB = 0.673
 ANDEL AV BOJHÄVNINGARNA DÄ BOJENS
 HÄVNING ÄR STÖRRE AN STÅNGLÅNDEN = 0.995
 STÅNGEN VAR FOR KORT VID: 2679. HÄVNINGAR
 BOJEFF UTAN HÄNSYN TILL KLIPPN = 19.5 KW
 ENERGIPROD UTAN HÄNSYN T KLIPPN = 170.7 MWH
 ANTAL GRÄNGER SOM KR ANDRADES = 10.

Figur 6.4.11 Dämpoptimering.

HS

(M)

4.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.4	2.2	3.0	3.8	4.6	5.4	6.2	7.0	7.8	8.6	8.0	7.0	6.0	5.0	4.0	3.0	2.0

Figur 6.4.12 Effektmatrix, dämpoptimering.

ENERGIMATRIS

MATSTÄLLE: 1 MR: 1975

ENHET: 100KWH/BOJ

HS

(M)

4.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1.4	2.2	3.0	3.8	4.6	5.4	6.2	7.0	7.8	8.6	9.4	10.2	11.0	11.8	12.6	13.4	14.2	15.0	15.8

Figur 6.4.15 Energimaträs dämpoptimering.

6:117

DÄMPMATRIS

MÄTSTÄLLE: 1 RR: 1975

 100*DÄMPFAKTORN (KB)

HS (M)	4.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.4	1.4	2.2	3.0	3.8	4.6	5.4	6.2	7.0	7.8	8.6	9.2	10.0	10.8	11.6	12.4	13.2	14.0	14.8	15.6

Figur 6.4.14 Dämpföförändringsmatris, dämpoptimering.

1000*ATA
*****HS
(m)

4.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1.4	2.2	3.0	3.8	4.6	5.4	6.2	7.0	7.8	8.6	1.2														

Figur 6.4.15 Verkningsgradsmatris, dämpoptimering.

6.5 Energiproduktionsberäkning

6.5.1 Inledning

Hur stor energiproduktionen blir från en kraftverksboj, är givetvis en central frågeställning för vågnergiforskningen. Arbetet har varit inriktat på att ta fram en teoretisk formel. En rad idéer har prövats och förkastats. Av dessa kan det vara av värde att nämna spektrummetoden, som utgör grunden för de metoder som redovisas i det följande.

Spektrummetoden innebär att bojens upptagna medeleffekt (P_{in}) bestäms som

$$P_{in} = b_1 \cdot \int_0^{\infty} S(\omega) \cdot Y^2(\omega) \cdot \omega^2 \cdot d\omega \quad \dots (6.5.1)$$

b_1 dämpkonstant för den pålagda dämpningen

S vågornas spektrum

Y bojens amplitudresponsfunktion

ω bojens spektralkomponenters vinkelhastighet

Denna metod har använts i GR:16 (1:a upplagan) GR:29 och "Vågenergi i elsystemet". (Skeppstedt & Nilsson, KTH 81) med den modifieringen att en momentan klippeffekt (P_k) och en starteffekt (P_m) införas. Den förra för att skydda generatoren, den senare för att ta hänsyn till bl a generatorns magnetiseringseffekt som överstiger dess genererade vid små vågor. Matematiskt har dessa behandlats enligt

$$P_{in} > P_k \Rightarrow P_{in} = P_k \quad \dots (6.5.2)$$

$$P_{in} \leq P_m \Rightarrow P_{in} = 0$$

Spektrummetoden med effektbegränsning enligt ovan innebär att effekten och energin överskattas med uppåt 100%, eftersom medeleffekten beräknas utan hänsyn till klippningen av den momentana effekten. Överskattningen kan inses av att om effekten momentant aldrig överstiger P_k , måste medeleffekten alltid bli lägre än P_k . Man kan också beakta att bojen vänder rörelseriktning 2 gånger för varje våg och då under ansenlig tid, relativt vågperiodtiden,

genererar mycket låga effekter.

I GR:31 presenteras en metod som med en statistisk modell kopplar ihop ekv 6.5.1 i frekvensplanet med en analys i tidplanet, vari- genom effektbegränsningarna kan hanteras på ett bättre sätt. I det följande presenteras denna metod kortfattat.

6.5.2 Den statistiska modellen

Genom ekv 6.5.1 kan bojhastighetens varians σ_v^2 bestämmas genom att dividera P_{in} med b_1 .

Havsytans vertikalhastighet är, enligt t ex Honda (1976), med mycket god approximation normalfördelad.

Därav följer att, eftersom transferfunktionen Y för bojen antages linjär måste också bojhastigheten vara normalfördelad.

En min (P_m) och en maxeffekt (P_k) innebär att dämpningen varierar enligt

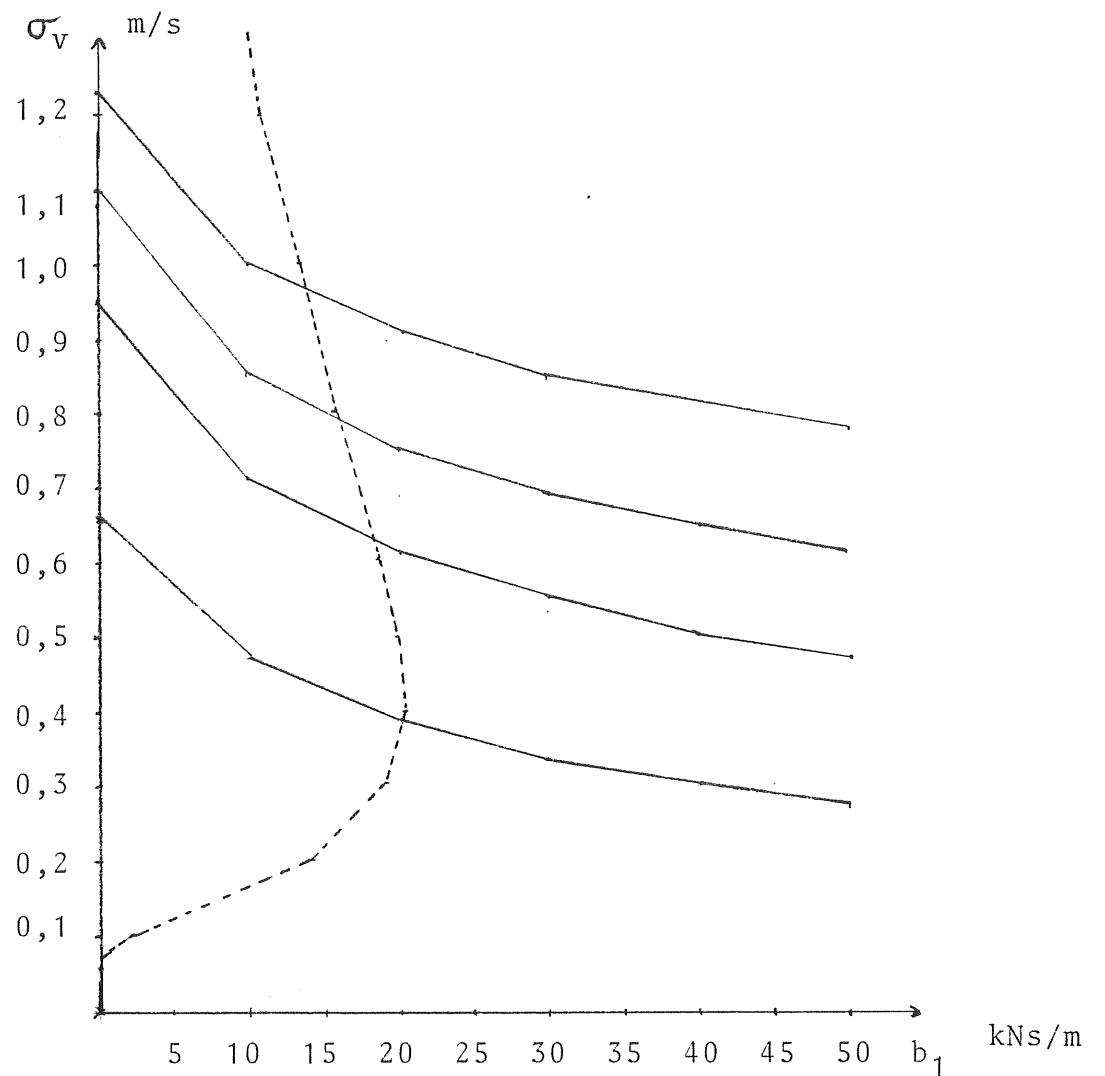
$$\begin{aligned} b_1(v) &= 0 & v \leq v_m \\ b_1(v) &= b_1 & v_m < v \leq v_k \\ b_1(v) &= \frac{P_k}{v^2} & v > v_k \end{aligned} \quad \dots (6.5.3)$$

v_m den hastighet då $P_{in} = P_m$

v_k den hastighet då $P_{in} = P_k$

I och med att dämpningen ej längre är konstant är ej heller Y i ekv 6.5.1 en linjär transferfunktion och bojhastighetens sannolikhetsfördelning kan ej längre anses som känd.

Men i den statistiska metoden antages att bojhastighetens av- vikelse från normalfördelningen är försumbar, och att σ_v ur ekv 6.5.1 enligt ovan, ej påverkas av effektbegränsningen enligt ekv 6.5.2.



Figur 6.5.1 Heldragna kurvor är $\sigma_v(b_1)$ ur ekv 6.5.1 för olika vågsituationer, streckade kurvan är $b_1(\sigma_v)$ ur ekv 6.5.8.

Som ett argument för detta visas (figur 6.5.1) v som funktion av b_1 ur ekv 6.5.1 för några energimässigt intressanta vågsituationer. Beräkningen gäller den boj som presenterades tillsammans med linjära generatorn i GR:16.

Medeleffekten P_{in} under en vågsituation kan då tecknas

$$P_{in} = \int_0^{\infty} b_1(v) \cdot v^2 \cdot p(v) \cdot dv \quad \dots (6.5.4)$$

$p(v)$ hastighetens frekvensfunktion

Insättning av 6.5.3 i 6.5.4 ger

$$P_{in} = \int_{v_m}^{v_k} b_1 \cdot v^2 \cdot p(v) \cdot dv + P_k \int_{v_k}^{\infty} p(v) \cdot dv \quad \dots (6.5.5)$$

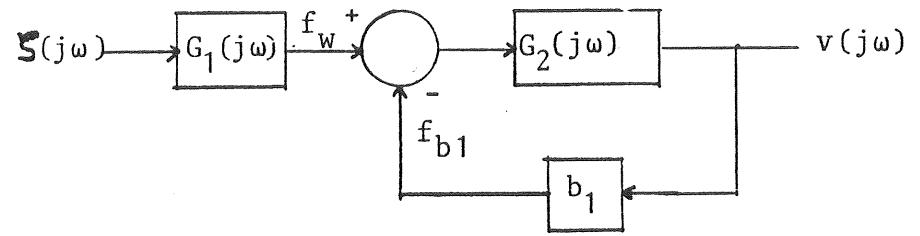
Detta sätt att beräkna effekten (och energiproduktionen) ger ca 50% lägre värden än spektrum metoden.

Den underskattnings man gör av σ_v (och troligtvis även av effekten) då den lägre dämpningen i intervallet $v > v_k$ ej får inverka på beräkningen kan åtgärdas genom att olinjäriteten i dämpningen approximeras med en konstant. Detta kan göras på flera sätt. Ett presenteras i nästa avsnitt.

Approximation av dämpningens olinjäritet.

Om dämpningen från generatorn betraktas som en återkoppling, av bojens hastighet till den drivande kraften från vågorna (se figur 6.5.2) kan approximation av olinjäriteten införas som medför att en ekvivalent dämpkonstant $b_{1\text{rms}}$ gånger v (ur ekv 6.5.1) ger kraftens spridning f (se ekvation 6.5.6 nedan)

$$b_{1\text{rms}} = \frac{\sigma_f}{\sigma_v} \quad \dots (6.5.6)$$



Figur 6.5.2 Blockschema för bojkraftverk. $G_1(j\omega)$ överför vattnets hastighet $\zeta(j\omega)$ till en kraft $f_w(j\omega)$ som verkar på bojen. $G_2(j\omega)$ är överföringsfunktionen mellan kraft och bojhastighet $v(j\omega)$. Bojens hastighet återkopplas med blocket b_1 som representerar generatorns dämpning (kraften f_{b1}) av bojrörelsen. För G_1 och G_2 :s explikativa uttryck hänvisas till GR:31.

Enligt definition av spridning är

$$\sigma_f = \sqrt{E[(f_{b1} - E[f_{b1}])^2]} \quad \dots (6.5.7)$$

$E[x]$ väntevärdet av en variabel x
 f_{b1} dämpkraften ($f_{b1} = b_1 \cdot v$)

Ur ekv. 6.5.3, 6.5.6 och 6.5.7 kan $b_{1\text{rms}}$ bestämmas som

$$\begin{aligned} b_{1\text{rms}} = & b_1 \cdot (2 \cdot P(x_k) - 2 \cdot x_k^4 \cdot (1-P(x_k)) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot (x_k^3 - x_k) \cdot e^{-\frac{x_k^2}{2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot x_m \cdot e^{-\frac{x_m^2}{2}} - \\ & - 2 \cdot P(x_m))^{1/2} \end{aligned} \quad \dots (6.5.8)$$

$P(x)$ Normalfördelningsfunktionen
 x_k kvoten v_k/σ_v
 x_m kvoten v_m/σ_v

Ekvation 6.5.8 förutsätter att bojhastigheten är normalfördelad.

Med ekvationerna 6.5.1 och 6.5.8 finns det två oberoende villkor som relaterar v och b_1 till varandra. Båda måste gälla. I figur 6.5.1 är även ekvation 6.5.8 inritad (streckad).

Skärningspunkterna ger bojens hastighetsspridning för respektive vågsituation.

Metoden är förknippad med en del fel, vilka tas upp till diskussion i det följande avsnittet.

Resultat

Enligt den så kallade spektrummetoden ger bojen, beskriven i GR:16, ca 35 MWh netto. Den statistiska metoden utan hänsyn till klippningens påverkan på σ_v ger ca 18 MWh. Slutligen ger metoden med en konstant som approximation av olinjäritetens återverkan på σ_v resultatet ca 23 MWh. Om ingen klippning införes erhålls ca 35 MWh, dvs samma som för spektrummetoden. (Bojen i GR:16 är lågt dämpad och uppnår aldrig P_k i medeleffekt).

Ovanstående resultat är mest att betrakta som exempel för att relatera de olika metoderna till varandra. Innan slutsatser kan dras om fullskalekraftverks energiproduktion bör en optimering av bojstorlek och dämpning genomföras.

Om man studerar relationen mellan klippeffekt och medeleffekt kan konstateras att den senare alltid är mindre än 50% av den förra, utom i de allra största vågorna, då detta värde kan överskridas med någon enstaka %. Relationen påverkas av valet av P_k (Generatorns storlek) så att den ökar med minskande P_k , men mycket lite, varför ovanstående gäller för alla ekonomiskt rimliga val av generatorer.

Metodens fel

En energiproduktionsberäkning enligt de någon av nu beskrivna metoderna avviker från verkligheten främst av ett skäl:

Bojens rörelseekvation har linjäriserats, och förenklats. T ex kan nämnas, att den med bojen medsvängande vattenmassan har antagits vara konstant, att den hydrodynamiska dämpningen och generatorns dämpning antagits variera proportionellt mot hastigheten.

Ytterligare en felkälla är vågspektrum, som kan vara en mer eller mindre bra beskrivning av de verkliga vågorna.

Den matematiska behandlingen av dämpningens olinjäritet på grund av effektbegränsningen ger ej något nämnvärt fel (mindre än 5% utom i de största vågsituationerna). Detta har visats genom att en simulerings i tidplanet av bojens rörelse då den dämpas enligt ekvation 6.5.3. För närmare beskrivning av denna simulerings hänvisas till GR:31.

En kvantifiering av felet på grund av den förenklade rörelse-ekvationen och vågspektrum görs bäst genom att jämföra med mätresultat från modellförsök i sjö och hav. Detta kommer att göras under den följande etappen av vågenergiforskningsen.

6.6 Frekvensanalys inom vågenergin

6.6.1 Bakgrund

Vid analys av signalförlopp vid mätningar inom vågenergin är det ofta av intresse att studera frekvensegenskaperna hos de undersökta signalerna. Frekvensanalysen kan visa vid vilka frekvenser den undersökta signalen domineras, vidare kan överföringsfunktionen för ett undersökt objekt bestämmas och ur denna eventuella resonansfrekvenser. Effektspektrum kan bestämmas, vilket är ett vedertaget sätt att beskriva olika vågsituationer. Sammanfattningsvis ger frekvensanalysen en mer fullständig bild av ett mätförlopp inom vågenergin än vad bara en undersökning i tidsplanet skulle ge.

6.6.2 Den diskreta Fouriertransformen

Vid frekvensanalys med datorbaserade mätsystem användes den diskreta Fouriertransformen. Innan den definieras skall kortfattat beskrivas dess bakgrund.

För kontinuerliga, ej med dator mätta (samplade), tidssignaler kan vanliga Fourierserier användas för att bestämma övertonerna till en grundton, som i mätsammanhang antas vara den ton vars periodtid motsvaras av mättiden eller del därav. Kontinuerlig Fourieranalys brukar ej utföras på mätningar. Det vanligaste förfarandet är att en frekvensanalysator användes, vilken kan beskrivas som en bandpass filterbank med justerbar mätfrekvens. Genom att mäta effektivvärdet vid olika frekvenser kan en uppskattning av frekvenskomponenterna erhållas.

För tidsdiskreta, samplade, tidssignaler kan denna analys ske i en dator efter mätningen. Motsvarande till de tidigare nämnda kontinuerliga Fourierserierna är i ett samplat system den diskreta Fouriertransformen, definierade enligt nedan, om x_n är en sampelad tidsserie med samplingstiden T_s :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n T_s} \quad (1)^*)$$

*) Ekvationerna i avsnitt 6.6 följer en separat nummerserie från (1) till (17).

Dess invers är:

$$x_n = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega \quad (2)$$

Till skillnad från den kontinuerliga, ej samplade Fourierserien är här funktionen $X(\omega)$ kontinuerlig med perioden 2π .

6.6.3 Autokorrelationsfunktion_och_effektspektrum

Om korrelationsfunktionen, $R(k)$, definieras som:

$$R(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i x_{i+k} \quad (3)$$

dvs, väntevärdet av succesiva förskjutningar med antal steg, k , av tidsfunktion x_i 's produkt med x_{i+k} , kan effektspektrum för tidsignalen x_n definieras som:

$$S(\omega) = T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{-jk\omega T_s} \quad (4)$$

På motsvarande sätt som Fouriertransformen ovan bildar effektspektrum och autokorrelationsfunktionen ett Fouriertransformpar och inverstransformen ger då autokorrelationsfunktionen.

Effektspektrum kan ses som, om den uppmätta signalen var en spänning över ett 1 ohm motstånd, så är ytan under effektspektrum den utvecklade medleffekten. Enheten för effektspektrum är i detta fall V^2/Hz .

6.6.4 Fast_Fourier_Transform_(FFT)

Effektspektrum kan bestämmas med enbart Fourierkomponenterna, som kan erhållas ur en snabb Fouriertransform algoritm kallad Fast Fourier Transform. På detta sätt, med hjälp av en FFT-algoritm, kan effektspektrum mycket snabbare bestämmas, än att först bestämma autokorrelationsfunktionen för tidsserien. Autokorrelationsfunktionen kan i sin tur bestämmas ur effektspektrum med en invers FFT.

Att effektspektrum kan uttryckas i Fourierkomponenterna kan ses om ekvation (3) insättes i ekvation (4):

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \frac{T_s}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n X_{n+k} e^{-jk\omega T_s} = \\
 &= \frac{T_s}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j\omega n T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n+k} e^{-j\omega(n+k)T_s} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Variabelbyte i sista summan från $n+k=m$ ger:

$$S(\omega) = \frac{T_s}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j\omega n T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{-j\omega m T_s} \quad (6)$$

Efter insättande av ekvation (1) i ekvation (6) fås:

$$S(\omega) = \frac{T_s}{N} X^*(\omega) X(\omega) = \frac{T_s}{N} |X(\omega)|^2 \quad (7)$$

där * betecknar konjugat.

Tidigare bestämdes effektspektrum för samplade signaler genom att först autokorrelationsfunktionen beräknades varefter en Fouriertransform av en avkortad autokorrelationsfunktion utfördes. Detta förfarande är emellertid tidsödande och efter mitten på 1960-talet då Cooley och Tukey publicerade en algoritm som med antal mätdata som en potens av två, varvid tidsödande beräkningsarbete vid Fouriertransformering kan reduceras, övergick effektspektrumbestämningarna till att ske med ekvation (7). Denna algoritm för Fourierkomponentbestämning kallas för Fast Fourier Transform (FFT) och förekommer i ett otal varianter. Algoritmerna brukar bygga på att i de komplexa multiplikationer med sinus och cosinus som fås då:

$$X_n e^{-j\omega n T_s} = X_n (\cos \omega n T_s - j \sin \omega n T_s) \quad (8)$$

behövs endast cosinus- och sinus-värden bestämmas en gång då de upprepas med stigande n .

Förenklingen av Fouriertransformen brukar ske på två sätt; decimering i tid respektive decimering i frekvens. Indata sorteras nu på olika sätt för att förenkla beräkningsarbetet.

Fast Fourier Transform förkortar beräkningstiden avsevärt. En ordinär Fouriertransform av N punkter kräver N^2 operationer, medan en FFT kräver $N+N^2\log N$ operationer. För en indataserie med 1024 punkter medföljer det en beräkningsreducering från 200 till 1.

6.6.5 Överföringsfunktion

Med hjälp av effektspektra för in- och utsignalen till t ex en vägkraftboj kan dess överföringsfunktion bestämmas. Om in- och uteffektspektra är baserade på lägessignaler från vågor respektive en boj brukar överföringsfunktionen kallas amplitudoperator. Överföringsfunktionen definieras som:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} \quad (9)$$

Där $H(\omega)$ är överföringsfunktionen och $S_y(\omega)$ är effektspektrum ut från objektet och $S_x(\omega)$ är effektspektrum in.

Nackdelen med ett förfarande enligt ovan är att om brus introduceras mellan in- och ut-signalen påverkar detta bestämningen av överföringsfunktionen. Som exempel kan nämnas att om en båt passerar vägkraftbojen och svallvågorna påverkar bojen men inte vagmätaren blir överföringsfunktionen fel. För att ta bort detta beroende av att inga signaler får adderas efter insignalen kan överföringsfunktionen bestämmas enligt:

$$H(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega)} \quad (10)$$

Där $S_{xy}(\omega)$ är effektspektrum för korskorrelationen mellan in- och utsignal. Den kan bestämmas enligt:

$$S_{xy} = \frac{T}{N} X^*(\omega) Y(\omega) \quad (11)$$

Där $X^*(\omega)$ är konjugatet av insignalens Fouriertransform och $Y(\omega)$ är utsignalens Fouriertransform.

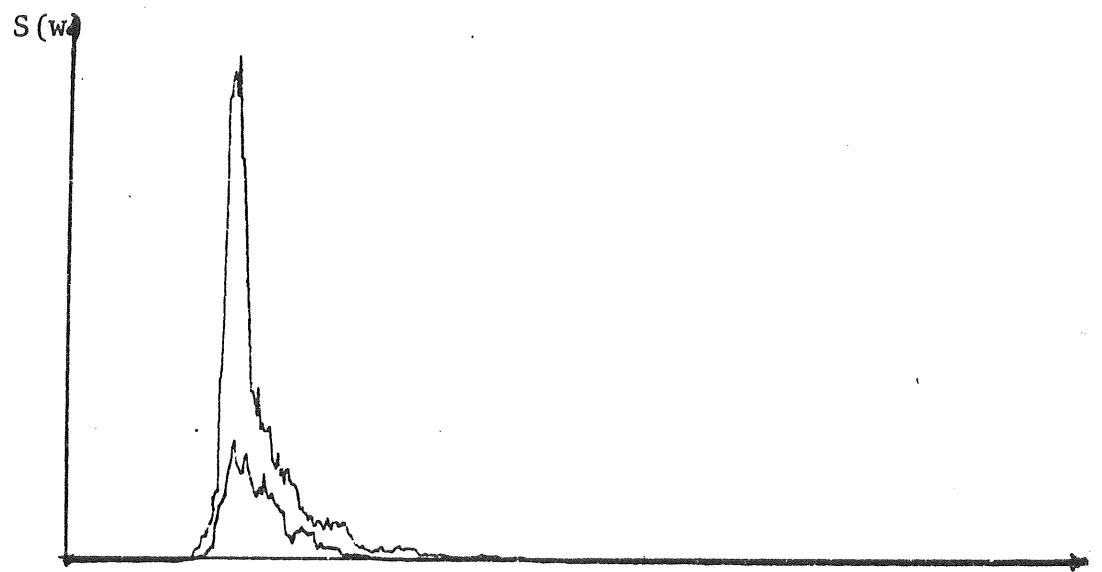


fig 6.6.1 Effektspektra för olika vågsituationer.

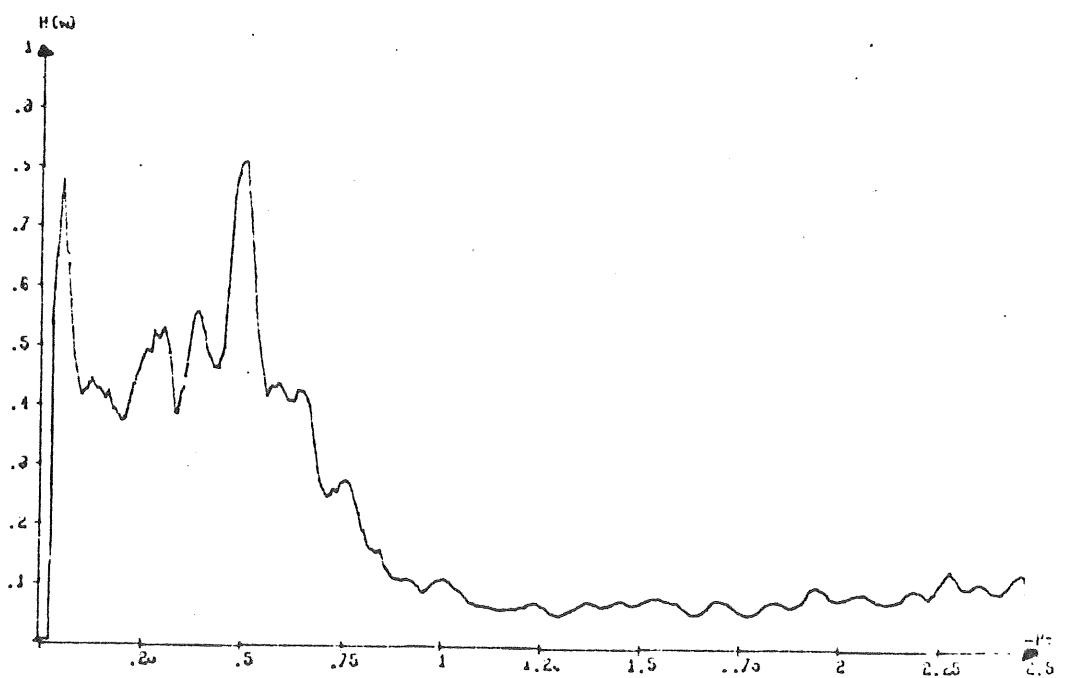


fig 6.6.2 Exempel på en överföringsfunktion (amplitudoperator).

Fördelen med att bestämma överföringsfunktionen med hjälp av kors-effektspektrum är att den är störningsberoende och att fasen erhålls för överföringsfunktionen i motsats till ekvation (9) där endast beloppet bestämmes.

6.6.6 Reducering av felet i spektralskattningen

Eftersom definitionen av effektspektrum bygger på oändliga serier som i mätsammanhang approximeras med ändliga, introduceras fel. Två stycken fel introduceras; det ena är att variansen i skattningen av effektspektrum är stor, det andra är att medelvärdet av skattningen är fel.

För att reducera detta fel kan både den uppmätta tidsserien behandlas innan Fouriertransformen och den erhållna spektralskattningen behandlas.

Tidsserien, med N datapunkter, kan behandlas med ett cosinusfönster så att datuserien får en mjuk start och slut. Detta elimineras felaktigt höga frekvenser ur spektrum.

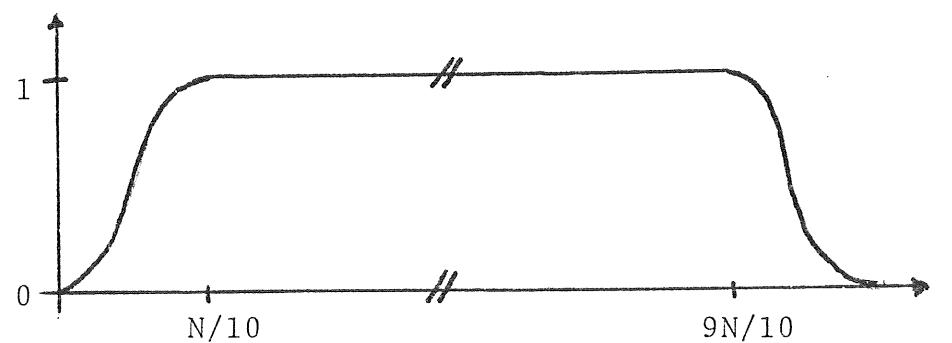


fig 6.6.3 Cosinusfönster för tidsserien.

Denna behandling medför att effektspektrum måste skalias med faktorn $1/0.875$.

En obehandlad spektralskattning har stor varians, för att reducera denna kan flera metoder användas. Om tidsserien delas upp i k delar kan dessa behandlas var för sig varefter medelvärdet på dessa spektra bestämmes:

$$S_s = \frac{1}{K}(S_1 + S_2 + \dots + S_K) \quad (12)$$

Variansreduceringen blir här:

$$\text{var } S_s = \frac{1}{K} \text{ var } S \quad (13)$$

Om däremot spektrum på hela tidsserien bestämmes kan variansen reduceras genom att ett lopande medelvärde bestämmes i spektrum. T ex $2k$ närliggande spektralpunkter får bilda medelvärde för mittpunkten.

$$S_s(n) = \frac{1}{2k+1} (S(n-k) + S(n-k+1) + \dots + S(n) + \dots + S(n+k)) \quad (14)$$

Variansreduceringen blir här:

$$\text{var } S_s = \frac{1}{2k+1} \text{ var } S \quad (15)$$

Tyvärr introducerar dessa variansreducerande metoder, som bör användas, ett medelvärdesfel i skattningen om effektspektrum inte är konstant i det frekvensintervall medelvärden tas respektive konstant under den grova frekvensuppdelning som fås genom att behandla tidsserier i delar.

6.6.7 Spektralupplösning

Till skillnad från kontinuerliga Fourierserier, där frekvensspektrum uttryckes som multiplar av en grundton så är frekvensupplösningen i den diskreta Fouriertransformen beroende av antalet mätpunkter och tiden mellan varje mätpunkt, samplingstiden. Frekvensupplösningen är om antalet mätpunkter är N och samplingstiden T_s :

$$\omega_k = \frac{2\pi}{NT_s} \quad (16)$$

Eftersom det krävs minst två punkter per period för den högsta frekvensen, enligt samplingsteoremet, så är den maximala frekvensen som effektspektrum kan representera:

$$\omega_{\max} = \frac{\omega_k}{2} \quad (17)$$

De övriga spektralpunkter bär ingen extra information då spektrum är symmetriskt.

Om samplingstiden väljs för lågt uppkommer en effekt som kallas aliasing, dvs högre frekvenser tolkas som lägre när tidsserien uppmätttes med enbart en samplingspunkt per period. Detta igenkännes med att effektspektrum är avhugget vid ω_{\max} . För att undvika denna effekt bör samplingsteorenet följas, för en okänd signal är det nödvändigt med lågpassfiltrering.

6.7 Referenser

Gran, S. (1977): Estimates of Wave Power at the Coast of Norway
DnV report No 77-570.

Schwartz & Shaw:
"Signal processing: discrete spectral analysis, detection and estimation", 1975

Schwartz:
"Information, transmission, modulation and noise", 1970

Blinchikoff:
"Filtering in the time and frequency domains", 1976

IEEE Transactions on audio and electroacoustics, vol AU-15;
No 2, June, 1967 (Specialnummer om Fouriertransform och FFT)

NE 1981:16 Akvatisk energi

NE 1977:4 Vågenergi i Sverige

Se även grupprapporterna GR:5, GR:10, GR:11, GR:13, GR:14, GR:16,
GR:20, GR:23, GR:24, GR:25, GR:31, GR:32, GR:36.

