CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Multi asset-optioner

Analys med hjälp av Monte Carlo-simulering

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

John Hang

David Lidström

Anton Reimbert

Matthias Ydström

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2019

Multi asset-optioner

Analys med hjälp av Monte Carlo-simulering

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Industriell ekonomi vid Chalmers
David Lidström   Matthias Ydström

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk fysik vid Chalmers

John Hang

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers
Anton Reimbert

Handledare: Simone Calogero
Examinator: Maria Roginskaya & Ulla Dinger

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2019

Förord

Till att börja med skulle samtliga författare till den här rapporten vilja tacka vår handledare Simone Calogero som har hjälpt oss under hela processen samt bidragit med inspirationen till att skriva arbetet.

Den är rapporten är resultatet av samtliga fyra författares arbete. Författarna bär tillsammans ansvaret för den analys som genomförts och rapportens övergripande kvalitet. Enskilt arbete har dock varit frekvent förekommande och varje författare har haft sina respektive huvuddelar. Den Matlab-kod som tagits fram tillsammans med härledningen av Black-Scholes-marknaden för två underliggande tillgångar, har varit ett gemensamt arbete som samtliga författare varit delaktiga i. En journal med författares individuella bidrag har även förts under arbetets gång.

Gällande de specifika ansvarsområden varje enskild författare har haft, har John Hang utvecklat den kod som använts för att beräkna premien för den asiatiska two asset-optionen. De grafer och utbetalningsfunktioner som är associerade med optionen är även de framtagna och beskrivna av John. Vidare har John haft huvudansvaret för avsnitt 2.1 respektive 2.2 och därmed skrivit den nödvändiga bakgrundsteorin som utgör fundamentet till det här arbetet. Beskrivningen av algoritmerna i kapitel 3 är även de Johns bidrag.

David Lidström har fokuserat på two asset barrier-optionen. Han har skrivit koden för prissättning av optionen, simulering av prisutvecklingen samt producerat tillhörande grafer. David har även skrivit texten i underavsnittet 2.3.3, där han beskrivit den specifika optionen och dess tillämpningsområden. Dessutom är valideringen av sampelvägarna i avsnitt 4.1 och parameteranalysen i avsnitt 4.2 Davids bidrag. Till följd av arbetet i 4.1 och 4.3, tillskrivs David även appendix B och halva appendix C.

Trots att deriveringen av Black-Scholes marknad för två underliggande tillgångar var ett gemensamt arbete, är Anton Reimbert den författare som varit mest involverad i processen kring härledningen och utvecklingen av Matlab-koden som använts för att simulera sampelvägarna. Dessutom är de grafer och utbetalningsfunktioner som är kopplade till den asiatiska best of assets or cash-optionen Antons ansvarsområde. Därutöver har Anton bidragit med diskussionen kring eventuella felkällor och föslag till vidareforskning som förs i avsnitt 5.5 och 5.6.

Slutligen har Matthias Ydström arbetat med lookback spread-optionen; utvecklat den kod som använts för att simulera optionspremien och framställt de associerade graferna. Dessutom har arbetet med att beskriva de valda optionerna i avsnitt 2.3 varit Matthias ansvarsområde, tillsammans med hur premierna för de valda optionerna beror på känslighetsparametrarna i avsnitt 4.3. Vidare har Matthias skrivit introduktionen till det här arbetet, avsnitt 4.2 samt avsnitten 5.1-5.4.

Populärvetenskaplig presentation

Dagens ekonomi har blivit allt mer global och företag är verksamma på en sammankopplad marknad som sträcker sig över samtliga världsdelar. Globaliseringen medför att handel mellan nationsgränser ökar och numera har de flesta företag inkomster i flera olika valutor, producerar produkter med råvaror från hela världen, tar lån från utländska långivare och har aktier noterade på internationella börser. Med andra ord är dagens ekonomi ytterst komplex. Den här komplexiteten bidrar till både ökade risker och möjligheter på grund av prisrörelser i allt från valutor till räntor och aktiepriser. För att skydda sig eller dra nytta av dessa rörelser kan optioner användas.

Köp- respektive säljoptioner är kontrakt som ger ägaren rätten, men inte skyldigheten, att köpa eller sälja en viss tillgång till ett förutbestämt pris. Om optionen dessutom är av europeiskt slag kan transaktionen endast ske på en förutbestämd dag som kallas slutdagen. Syftet med den här typen av kontrakt kan antingen vara ren spekulation i prisrörelser i olika tillgångar eller användas för att minimera förluster orsakade av fluktuationer i priset på tillgångar. Optioner med flera underliggande tillgångar tillåter mer komplexa lösningar i ett och samma kontrakt, vilket kan vara önskvärt både vid såväl spekulation som minimering av risk.

För att optionsmarknaden ska vara rättvis är det viktigt att optionskontrakten prissätts korrekt. En rättvis prissättning betyder i det här sammanhanget att priset varken premierar köpare eller säljare samt att det utesluter möjligheter för riskfria vinster. Grundtanken med prissättningen av optioner är att de ska kosta lika mycket som de förväntas ge i avkastning, multiplicerat med en diskonteringsfaktor som beror på räntan. Diskonteringen görs för att kompensera för den avkastning optionsköparen hade kunnat erhålla om pengarna varit placerade på ett sparkonto med en given ränta under samma tid. På det sättet ges inga möjligheter att tjäna riskfria pengar för någon aktör på marknaden och priset kan anses vara rättvist.

Enklare optioner har exakta formler i vissa modeller som direkt räknar ut det rättvisa priset. Uträkningen kan vanligtvis göras med hjälp av Black-Scholes-modellen som togs fram 1973 av Fischer Black och Myron Scholes. I modellen görs vissa antaganden om hur priset på tillgångar beter sig, vilket är en förutsättning för att formlerna för prissättningen kan tas fram. För att kunna anpassa modellen för olika tillgångars karaktäristik finns det parametrar som gör det möjligt att justera rörelserna i modellen. Till exempel representerar volatiliteten hur mycket priset på en tillgång tenderar att röra sig upp och ned.

För mer komplexa optioner går det inte alltid att ta fram några formler som räknar ut det rättvisa priset i Black-Scholes-modellen. Istället behövs andra metoder för att beräkna priset. Det här projektet använder en metod som kallas Monte Carlo-metoden. Metoden går ut på att simulera olika utfall av rörelser för de underliggande tillgångarna och sedan räkna ut hur mycket innehavaren skulle erhållit i snitt på dessa utfall. För att få fram det rättvisa priset diskonteras sedan den genomsnittliga avkastningen.

Därutöver kan Monte Carlo-metoden implementeras med hjälp av olika modeller, till exempel den geometriska Brownska rörelse-modellen och constant elasticity of variance-modellen. De nämnda modellerna har varierande grad av komplexitet och flexibilitet. Modellerna kan därmed vara mer eller mindre träffsäkra beroende på de underliggande tillgångarnas verkliga rörelser och beteende.

Sammanfattning

Multi asset-optioner är exotiska optioner utfärdade på två eller fler underliggande tillgångar. Syftet med den här rapporten är att utöka den etablerade Black-Scholes-marknaden som gäller för optioner med en enda underliggande tillgång, till en tvådimensionell Black-Scholes-marknad. Teorin implementeras sedan i Matlab för att simulera priser för fyra olika vägberoende optioner med två underliggande tillgångar. I genomförandet av simuleringen används Monte Carlo-metoden på två olika marknadsmodeller: Black-Scholes-modellen (även kallad GBR-modellen) och constant elasticity of variance-modellen (CEV-modellen). Optionerna som undersöks är asiatisk two asset-option och two asset barrier-option samt de föreslagna asiatisk best of assets or cash-option samt lookback spread-option.

Optionspremiernas känslighet och beroende av parametrarna σ_1^2, σ_2^2, ρ och γ undersöks med hjälp av Monte Carlo-simuleringen. I GBR-modellen motsvarar σ_1^2 och σ_2^2 variansen av den första respektive andra tillgången samt ρ korrelationen mellan tillgångarna. I CEV-modellen inkluderas en ytterligare parameter γ, vilken också analyseras. Dock motsvarar inte alla inmatningsparametrar i CEV-modellen deras fysiska värde. Specifikt är både σ_2^2 och ρ inte väntevärdesriktiga skattningar av variansen av den andra tillgången respektive korrelationen mellan tillgångarna.

Resultaten från simuleringen visar att den ytterligare parametern, γ, i CEV-modellen tillåter en högre grad av flexibilitet och möjliggör för en mer träffsäker anpassning av verklig data. Exempelvis påverkar parametern γ både den fysiska korrelationen och variansen så att eventuella hävstångseffekter för underliggande tillgångar kan modelleras mer korrekt än i GBR-modellen. Flexibiliteten i CEV-modellen fås dock på bekostnad av högre komplexitet i jämförelse med GBR-modellen.

Abstract

Multi-asset options are exotic options on two or more underlying assets. The purpose of this thesis is to extend the Black-Scholes theory for single asset options to the case of a two-dimensional Black-Scholes market. This theory is then applied to four specific path-dependent multi-asset options, namely, the two-asset Asian option and the two-asset barrier option together with the proposed Asian best of assets or cash option and the lookback spread option. The Monte Carlo method is used to simulate the option premiums in two different market models; the Black-Scholes model (also called the GBM model) and the constant elasticity of variance model.

The option premiums' dependence with respect to the Greeks are investigated. The Greeks included in the analysis are σ_1^2 and σ_2^2, which in the Black-Scholes model correspond to the volatility of the first and second underlying asset, respectively, and the parameter ρ, which is the correlation coefficient of the two assets. The CEV model has an additional parameter γ, which is included in the analysis. Furthermore, the input parameters σ_2^2 and ρ do not directly correspond to the sample volatility and correlation of the assets in the CEV model.

The results show that the CEV model allows for greater flexibility and could be more suitable for options with underlying assets, whose volatility have dissimilar dependence on the assets' movements. However, due to the CEV model's inherent flexibility, it is more difficult to accurately fit the input parameters to market data.

Innehåll

1 | Introduktion

Den moderna finansiella markanden föddes ur två stora händelser under 1970-talet – invigningen av en formell handelsplats för optioner i Chicago och publiceringen av den teoretiska prissättningen av optioner av Fischer Black och Myron Scholes. En öppen handelsplats för optioner innebar att instrumenten blev tillgängliga för en större andel investerare. En stor del av handeln med optioner förflyttades därmed från den tidigare stängda marknaden (ofta benämnd ”over-the-counter” eller OTC) till en publik marknad där alla kunde delta [1].

Den andra händelsen, publiceringen av Black-Scholes optionsteori, gav investerare och utfärdare ett ramverk för hur europeiska optioner på tillgångar utan utdelning kan prissättas rättvist [2]. Modellen som Black och Fischer tog fram var dock begränsad till optioner med endast en underliggande tillgång.

Multi asset-optioner är exotiska optioner med fler än en underliggande tillgång och handlas vanligtvis på OTC-marknader och inte på öppna handelsplatser. Likt optioner med en underliggande tillgång är multi asset-optioner kontrakt mellan två parter. Kontraktet stipulerar att innehavaren har rätten, men inte skyldigheten, att köpa eller sälja ett specificerat antal av den underliggande tillgången till ett förutbestämt pris (så kallad lösenpris) [3]. En konsekvens av den här typen av optioners exotiska egenskaper är att teorin för hur ett rättvist pris ska tas fram inte är lika utvecklad som för optioner med en underliggande tillgång.

Syftet med det här arbetet är därmed att expandera Black-Scholes-teorin för optioner med en underliggande tillgång till prissättningen av multi asset-optioner. I arbetet kommer Black-Scholes-priset för optioner med två underliggande tillgångar att härledas. Optionernas komplexitet gör att datorstödd simulering är nödvändig för att ta fram priset på vissa multi asset-optioner. Därmed kommer även Monte Carlo-simulering att implementeras i Matlab för att ta fram priser samt undersöka optionernas beroende på valda känslighetsparametrar.

Monte Carlo-metoden är begränsad till optioner som kan lösas på slutdagen, vilket gör att det här arbetet begränsas till europeiska optioner. För att generera steg i Monte Carlo-simuleringen kommer två olika modeller att användas och jämföras, nämligen Black-Scholes-modellen (även kallad GBR-modellen) och constant elasticity of variance-modellen (CEV-modellen).

Vidare är det här arbetet avgränsat till att undersöka fyra varianter av vägberoende multi asset-optioner, nämligen asiatiska two asset-optioner, two asset barrier-optioner samt de föreslagna asiatiska best of assets or cash-optioner och lookback spread-optioner.

I kapitel två presenteras all nödvändig bakgrundsteori för att härleda Black-Scholes-marknaden för flera underliggande tillgångar samt den fullständiga Black-Scholes marknaden i två dimensioner. En mer utförlig härledning ges i appendix A.1. Teorin för de två valda simuleringsmodellerna kommer även att redovisas. Kapitlet avslutas med beskrivningar av de fyra valda optionerna, inklusive deras utbetalningsfunktioner samt tillämpningar i verkligheten.

I kapitel tre beskrivs de metoder och algoritmer som användes för att genomföra Monte Carlo-simuleringen för de två valda modellerna (se appendix D för fullständiga beskrivningar av hur metoderna implementerades i Matlab).

Resultaten från simuleringen redovisas i kapitel fyra tillsammans med en validering av sampelvägsgenereringen, bestående av en jämförelse mellan det analytiska priset och det simulerade priset. En analys av hur optionspremierna beror på de valda känslighetsparametrarna följer sedan. De parametrar som kommer att undersökas är σ_1^2 och σ_2^2, vilka i GBR-modellen motsvarar volatiliteten av den första respektive andra tillgången. Dessutom kommer parametern ρ att undersökas, vilken motsvarar korrelationen mellan de två tillgångarna i GBR-modellen. I CEV-modellen finns det en ytterligare parameter, γ. Hur γ påverkar premier i CEV-modellen kommer att studeras i närmare detalj. Till slut följer en diskussion kring de erhållna resultaten och en slutsats dras om de två modellerna baserat på de empiriska fynden.

2 | Teoretisk bakgrund

I det här kapitlet ges en överblick av Black-Scholes modell tillsammans med en härledning av en Black-Scholes-marknad för optioner med två underliggande tillgångar. Dessutom redovisas en kort introduktion av den lokala volatilitetsmodellen samt relevant teori om de valda multi asset-optionerna. Samtliga resultat i den här rapporten är begränsade till två dimensioner, dock kan de enkelt generaliseras till dimensioner högre än två, vilket visas i appendix A.2.

2.1 Black-Scholes modell

Låt $S(t)$ beteckna priset på den underliggande tillgången vid tiden t. Prisutvecklingen av denna tillgång i en endimensionell Black-Scholes-marknad beskrivs av den stokastiska differentialekvationen (SDE)

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

där $\mu \in \mathbb{R}$ är det momentana medelvärdet av den logaritmiska avkastningen och $\sigma > 0$ är den momentana volatiliteten. Notera att både μ och σ är konstanter. Lösningen till ovanstående SDE är den geometriska Brownska rörelsen

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)},$$

där $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ är en Wienerprocess.

Betrakta nu en europeisk option på en enda underliggande tillgång med utbetalningsfunktionen $Y = g(S(T))$ och förfallotiden T. Antag att den riskfria avkastningen $r \in \mathbb{R}$ är konstant. Då ges det riskneutrala priset för optionen vid tiden $t = 0$ av

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT}\widetilde{\mathbb{E}}[Y]. \tag{2.1}$$

(2.1) är mer känd som Black-Scholes formel. Observera att väntevärdet av den diskonterade utbetalningsfunktionen antas vara i det riskneutrala sannolikhetsmåttet $\widetilde{\mathbb{P}}$ vid tiden T (se teorem A.4).

Black-Scholes marknad kan utökas till två dimensioner enligt

$$dS_1(t) = \mu_1 S_1(t)dt + \sigma_{11}S_1(t)dW_1(t) + \sigma_{12}S_1(t)dW_2(t), \tag{2.2a}$$
$$dS_2(t) = \mu_2 S_2(t)dt + \sigma_{21}S_2(t)dW_1(t) + \sigma_{22}S_2(t)dW_2(t), \tag{2.2b}$$

där volatilitetsmatrisen ges av

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Lösningen till (2.2) ges av en tvådimensionell GBR enligt

$$S_i(t) = S_i(0)e^{(\mu_i - \frac{|\sigma_i|^2}{2})t + \sigma_i \cdot W(t)}, \tag{2.3}$$

där $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2})$ för $i = 1, 2$, $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ och $\cdot$ betecknar den skalära vektorprodukten. Notera att den motsvarande volatilitetsmatrisen $\sigma = (\sigma_{ij})$ antas vara inverterbar.

Teorem 2.1. *De stokastiska variablerna $S_1(t)$ och $S_2(t)$ har den simultana täthetsfunktionen*

$$f_{S_1(t),S_2(t)}(x,y) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2t}\left(\log\frac{x}{S_1(0)}-\mu_1 t \quad \log\frac{y}{S_2(0)}-\mu_2 t\right)\cdot(\sigma\cdot\sigma^T)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\log\frac{x}{S_1(0)}-\mu_1 t\\ \log\frac{y}{S_2(0)}-\mu_2 t\end{pmatrix}\right)}{2\pi txy\sqrt{\det(\sigma\cdot\sigma^T)}}. \tag{2.4}$$

Därutöver är $\log S_1(t)$ och $\log S_2(t)$ simultant normalfördelade med medelvärdet

$$m = \left(\log S_1(0)+\mu_1 t \quad \log S_2(0)+\mu_2 t\right),$$

och kovariansmatrisen $C = t\sigma\cdot\sigma^T$.

Teorem 2.2. *Priset av en option på två underliggande tillgångar med utbetalningsfunktionen $Y = g(S_1(T), S_2(T))$ vid tiden $t = 0$ i en tvådimensionell Black-Scholes-marknad ges av*

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g\left(\lambda_1 e^{\sqrt{T}x}, \lambda_2 e^{\sqrt{T}y}\right)\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x \quad y\right)\cdot(\sigma\cdot\sigma^T)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)}{2\pi\sqrt{\det(\sigma\cdot\sigma^T)}}dxdy, \tag{2.5}$$

där

$$\lambda_i = S_i(0)\exp\left(\left(r-\frac{|\sigma_i|^2}{2}\right)T\right) \quad \text{för} \quad i = 1,2.$$

Ekvation (2.5) är även känd som Black-Scholes formel i två dimensioner.

Därmed är Black-Scholes-priset för en europeisk option på två underliggande tillgångar ekvivalent med att beräkna väntevärdet av utbetalningsfunktionen $Y = g(S_1(T), S_2(T))$ i det riskneutrala sannolikhetsmåttet, givet

$$\mu_i = r - \frac{|\sigma_i|^2}{2}$$

för $i = 1, 2$ samt den simultana täthetsfunktionen (2.4). Således är detta den tvådimensionella motsvarigheten till Black-Scholes-priset i (2.1). Fullständiga bevis av teorem 2.1 och 2.2 redovisas i appendix A.1.

2.2 Lokal volatilitetsmodell

Den lokala volatilitetsmodellen introducerar tanken av variabel volatilitet som beror av både tiden och priset på den underliggande tillgången. En av de mest framstående parametriska volatilitetsmodellerna är CEV-modellen ("constant elasticity of variance"). Priset på den underliggande tillgågen $S(t)$ vid tiden t i CEV-modellen ges av en diffusionsprocess som relaterar till följande SDE:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)^\gamma dW(t), \tag{2.6}$$

där $\mu \in \mathbb{R}$ och $\sigma \geq 0$ är drift- respektive volatilitetsparametern, och $\gamma \geq 0$ är elasticiteten. Notera att för $\gamma = 1$ reduceras CEV-modellen till den klassiska Black-Scholes-modellen med konstant volatilitet. Däremot för $\gamma = 0.5$ erhålls den icke-negativa Cox–Ingersoll–Ross-modellen, även känd som CIR-modellen. Således är CEV-modellen en mer generell beskrivning av Black-Scholes modell men med en extra parameter γ. Den här parametern aktiverar en hävstångseffekt som kan användas för att approximera formen på den implicita volatiliteten av underliggande tillgångar [4].

Betraka nu följande tvådimensonella modell:

$$dS_1(t) = rS_1(t)dt + \sigma_{11}S_1(t)d\widetilde{W}_1(t) + \sigma_{12}S_1(t)d\widetilde{W}_2(t), \tag{2.7a}$$

$$dS_2(t) = rS_2(t)dt + \sigma_{21}S_2(t)d\widetilde{W}_1(t) + \sigma_{22}S_2(t)^\gamma d\widetilde{W}_2(t), \tag{2.7b}$$

där $\widetilde{W}_i(t)$ för $i = 1, 2$ är Brownska rörelser i det riskneutrala sannolikhetsmåttet. Lösningarna till (2.7a) och (2.7b) är en geometrisk Brownsk rörelse respektive en diffusionsprocess. Dessutom ges volatilitetsmatrisen till ekvationsystemet (2.7) av

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} S(t)_2^{\gamma-1} \end{pmatrix}.$$

Notera att σ i det här fallet inte är inverterbar, förutom då $\gamma = 1$. Även om det generellt sett inte existerar någon analytisk formel för priset på den underliggande tillgången i den lokala volatilitetsmodellen, kan likväl priset bestämmas med hjälp av numeriska metoder (se algoritm 3.2).

2.3 Multi asset-optioner

Multi asset-optioner är en typ av optioner med flera underliggande tillgångar. Den här rapporten avhandlar huvudsakligen fyra olika multi asset-optioner: asiatisk two asset-option, asiatisk best of assets or cash-option, two asset barrier-option och lookback spread-option. Anledningen till att valet föll på dessa optioner är att de är vägberoende (det vill säga att premien beror på hur priset på de underliggande tillgångarna rör sig fram tills slutdagen), vilket ökar komplexiteten för prissättningen. Det bör också tilläggas att varken den asiatiska best of assets or cash-optionen eller lookback spread-optionen existerar, i den mening att det inte finns någon litteratur som behandlar de två nämda optionerna. Vidare är det endast two asset barrier-optionen som kan prissättas analytiskt. För de övriga tre optionerna måste numeriska metoder tillämpas. Följande teori kan appliceras på såväl köp- och säljoptioner, även om det endast är köpoptioner som avhandlas i den här rapporten.

2.3.1 Asiatisk two asset-option

En asiatisk option karaktäriseras av att utbetalningen bestäms av medelvärdet på en underliggande tillgång över ett visst tidsintervall. Därmed blir optionen mindre känslig för prisvariationer i den underliggande tillgången, vilket resulterar i en lägre premie jämfört med en vanlig köpoption. Denna egenskap gör asiatiska optioner populära på marknader med lågt antal köpare och säljare såsom OTC- och råvarumarknader [3].

Det aritmetiska medelvärdet för de underliggande tillgångarna $S_i(t)$ för $i = 1, 2$ definieras som

$$A_i(0, T) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} S_i(t_j), \tag{2.8}$$

där $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ är tidspartionen av intervallet $[0, T]$. Då ges utbetalningensfunktionen för en viktad asiatisk köpoption på två underliggande tillgångar av

$$Y = (\alpha A_1(0, T) + (1 - \alpha) A_2(0, T) - K)_+ , \tag{2.9}$$

där α är vikten och K är lösenpriset. Lägg märke till att utbetalningen endast avser positiva värden, vilket indikeras av plusnotationen.

2.3.2 Asiatisk best of assets or cash-option

I den asiatiska best of asset or cash-optionen bestäms utbetalningen av det största medelvärdet av två olika tillgångar över ett förutbestämt tidsintervall och en konstant kontantmängd K. Känsligheten för prisvariationer i någon av de underliggande tillgångarna blir därmed låg i likhet med den asiatiska two asset-optionen.

Utbetalningsfunktionen ges av följande uttryck:

$$Y = \max\left(A_1(0,T), A_2(0,T), K\right), \tag{2.10}$$

där $A_i(0,T)$ är det aritmetiska medelvärdet i (2.8). Eftersom utbetalningen består av tre strikt positiva värden kommer priset alltid vara större än eller lika med lösenpriset. Denna egenskap gör att optionen värderas högre än den asiatiska two asset-optionen, då premien på optionen alltid är begränsad nedåt.

En asiatisk best of asset or cash-option skulle kunna liknas vid en obligationsoption utfärdad av ett bolag. Låt säga att ett bolag med det totala värdet V ingår i ett låneavtal där bolaget ålägger sig att betala ut summan x i en inhemsk valuta eller summan y i en utländsk valuta på slutdagen. Denna typ av option kallas obligationsoption och ger ägaren av optionen rätten att välja den valuta med högst växlingskurs på slutdagen, givet att bolagets värdering V överskrider ett nominellt värde på slutdagen och är därmed tillräckligt likvit för att täcka utbetalningen [5].

Den asiatiska best of asset or cash-optionen skulle kunna användas på ett liknande sätt som en obligationsoption i en marknad där växlingskursen för valutor har hög volatilitet och betalningsmöjligheterna för bolagen är osäkra. Låt bolag B vara en texittillverkare i en tillväxtsmarknad där bolagets reella tillgångar antas ha ett värde K USD efter eventuella avskrivningar på slutdagen. Om den inhemska valutan då anses vara volatil kan bolag B utfärda en asiatisk best of asset or cash-option. Optionen fungerar på liknande sätt som en obligation för bolaget B där x är summan i den inhemska valutan och y är summan i en annan valuta med hög volatilitet. Innehavaren av optionen har då möjligheten att på slutdagen erhålla $Y = \max(A_x(0,T), A_y(0,T), K)$. Om växelkurserna för de två valutorna skulle kollapsa erhåller innehavaren åtminstone K, vilket motsvarar bolag B:s reella tillgångar.

2.3.3 Two asset barrier-option

En two asset barrier-option kännetecknas av att den ena underliggande tillgågen avgör storleken på utbetalningen och den andra tillgången avgör om optionen existerar eller ej på slutdagen. Optionens existens avgörs av om den andra tillgångens pris någon gång under löptiden träffar ett förutbestämt pris, som kallas barriären. Om barriären träffas kan optionen antingen börja eller sluta existera. Vidare kan barriären antingen vara över eller under det initiala priset på tillgången, vilket ger fyra möjliga kombinationer: upp-och-in, upp-och-ut, ned-och-in samt ned-och-ut. Om den underliggande tillgången vid något tillfälle träffar barriären och optionen upphör att existera, kommer den att stanna i det tillståndet oavsett framtida rörelser i tillgången [3].

En upp-och-ut two asset barrier-option har följande utbetalningsfunktion:

$$Y = H\left(B - \max_j(S_2(t_j))\right)(S_1(T) - K)_+, \tag{2.11}$$

där

$$H\left(B - \max_j(S_2(t_j))\right) = \begin{cases} 1, & B \geq \max_j(S_2(t_j)), \\ 0, & B < \max_j(S_2(t_j)), \end{cases}$$

är Heavisides stegfunktion och $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ är tidspartitionen av intervallet $[0,T]$. Premien för en barriäroption kommer alltid vara lägre än för motsvarande köp- eller säljoption utan barriär. Den lägre premien för en barriäroption beror på att utbetalningen är densamma som för en köp- eller säljoption, men barriären gör att sannolikheten för att erhålla en utdelning är lägre.

En two asset barrier-option lämpar sig väl för hedging. Företag vars intäkter beror av exempelvis råvarupriser och växlingskurser kan använda barriäroptioner som ett kostnadseffektivt skydd mot prisvariationer i tillgångarna. Ett exempel på detta är ett svenskt gruvbolag som säljer guld till den Amerikanska marknaden och får betalt i USD. Deras intäkter skulle därmed vara beroende av såväl guldpriset som växelkursen för SEK/USD, där företaget gynnas av ett högt guldpris och en låg växelkurs. Vanliga valutaoptioner kan skydda mot valutarisken men en two asset barrier-option med växelkursen för SEK/USD och priset på guld som underliggande tillgångar, skulle ge samma skydd till en lägre premie och kan därför vara fördelaktig [3].

I fallet ovan skulle en upp-och-ut option vara lämplig. Låt $S_1(t)$ beteckna förhållandet SEK/USD och $S_2(t)$ priset på guld. Optionen skulle då skrivas med utbetalningen $Y = (S_1(T) - K)_+$ och barriären $B > S_2(0)$. Därmed kommer optionens värde öka om SEK/USD ökar och därmed ge skydd mot valutarisken. Om $S_2(t)$ träffar barriären innebär det dock att optionen blir värdelös och skyddet försvinner. Prisrörelsen betyder emellertid även att guldpriset har gått upp, vilket kompenserar för valutaförlusten. Genom att använda en two asset barrier-option blir alltså premien lägre, och om barriären träffas kommer den eventuella förlusten av prisförändringen i en tillgång att vägas upp av vinsten från den andra tillgången [3].

2.3.4 Lookback spread-option

Lookback-optioner är optioner med ett fixerat lösenpris och utbetalning som ger den maximala skillnaden mellan priset på en underliggande tillgång och lösenpriset som uppstår fram till slutdagen [3]. Spread-optioner är optioner som ger investerare ett verktyg för att generera en vinst på skillnaden mellan två eller flera tillgångar. Optionen betalar ut skillnaden mellan differensen av de underliggande tillgångarna och lösenpriset vid slutdagen [6]. Därmed blir den föreslagna lookback spread-optionen en kombination av en lookback-option och en spread-option med utbetalningsfunktionen vid slutdagen T, enligt

$$Y = \left(\max_j \left(|S_1(t_j) - S_2(t_j)| \right) - K \right)_+ , \tag{2.12}$$

där $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ är tidspartitionen av intervallet $[0, T]$, $S_1(t_j)$ och $S_2(t_j)$ är priserna på de underliggande tillgångarna, samt K är lösenpriset.

Optionen tillåter därmed investerare att spekulera i skillnaden i pris mellan två olika tillgångar, samtidigt som en stor del av tidsosäkerheten elimineras på grund av lookback-aspekten; optionen tar den absoluta maximala skillnaden som uppstår i intervallet fram till T.

Tillämpningen av spread-optioner är bred och förekommer på råvaru-, ränte-, valuta- samt aktiemarknader. Spread-optioner kan till exempel utfärdas på råvaror i olika steg av en förädlingsprocess. Exempelvis är spread-optioner vanligt förekommande på oljemarknader, där så kallade ”crack spreads” utfärdas på skillnaden i pris mellan råolja och bensin [6]. En crack spread är därmed ekvivalent med en europeisk köpoption på effektiviteten i en raffineringsprocess.

En lookback spread-option skulle kunna användas av en investerare som förutser en tillfällig ökning av kostnaderna för att producera bensin från råolja, men är osäker på när ökningen kommer ske. Låt $S_1(t)$ vara priset på råolja, $S_2(t)$ priset på bensin och K lösenpriset på skillnaden där $|S_1(t_0) - S_2(t_0)| < K$. I det här fallet skulle en innehavare av optionen dra nytta av en eventuell ökning av skillnaden mellan råmaterialet och den slutliga produkten. Dock är lookback spread-optioner ofta ett dyrare alternativ jämfört med många andra typer av optioner (se delavsnitt 4.3.4). Det måste därmed finnas en hög tidsosäkerhet utifrån innehaverens perspektiv samt en stor förväntad tillfällig ökning av produktionskostnaden för att rättfärdiga utfärdandet och innehavet av optionen.

3 | Simuleringsmetodik

Nedan presenteras simuleringsmetodiken som tillämpats för att generera premier på de valda optionerna. Kapitlet inkluderar genomgående beskrivningar av de två modellerna som använts för att implementerar simuleringen tillsammans med en introduktion till Monte Carlo-metoden.

3.1 Generering av sampelvägar

Låt $S_i(t_j)$ för $i = 1, 2,\ j = 1, 2, \ldots, N$ vara en tidsdiskret stokastisk process med oberoende tillskott. Detta antagande gör det möjligt att simulera tillskotten genom oberoende sampling.

Simulering av sampelvägarna i en tvådimensionell Black-Scholes-modell presenteras i algoritm 3.1. Notera att $S_1(t_j)$ och $S_2(t_j)$ är korrelerade med korrelationskoefficienten ρ. Detta är en konsekvens av att båda processerna har samma fördelning, vilken motsvarar (2.4). En uttömmande härledning av denna egenskap redovisas i appendix A.1.

Algoritm 3.1: Simulering av sampelvägar i en tvådimensionell GBR-modell

1 Låt $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_N = T$ vara en tidspartition av intervallet $[0, T]$.
2 Sätt steglängden $h = t_j - t_{j-1}$.
3 Sätt korrelationkefficienten

$$\rho = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{|\sigma_1||\sigma_2|}.$$

4 Sampelvägarna $S_1(t_j)$ och $S_2(t_j)$ erhålls via:

a) Sätt $S_i(0) \geq 0$ for $i = 1, 2$.

b) Generera oberoende Brownska rörelser $\widetilde{W}_i(t_j) \sim \mathcal{N}(0, t_j)$, $i = 1, 2,\ j = 1, 2, \ldots, N$.

c) Sätt

$$S_1(t_j) = S_1(0) \exp\Big(\Big(r - \tfrac{|\sigma_1|^2}{2}\Big)h + \sigma_1 \widetilde{W}_1(t_j)\Big),\ j = 1, 2, \ldots, N.$$

d) Sätt

$$S_2(t_j) = S_2(0) \exp\Big(\Big(r - \tfrac{|\sigma_2|^2}{2}\Big)h + \sigma_2\Big(\rho \widetilde{W}_1(t_j) + \sqrt{1-\rho^2}\, \widetilde{W}_2(t_j)\Big)\Big),\ j = 1, 2, \ldots, N.$$

Vid simulering av sampelvägarna i CEV-modellen upprepas stegen ovan i algoritm 3.2. I det här fallet erhålls priset på den underliggande tillgången vid nästa ögonblick genom summering av det nuvarande priset plus det nybildade tillskottet. Detta motsvarar Euler-Maruyama-metoden för numeriska lösningar av stokastiska differentialekvationer [7].

Algoritm 3.2: Simulering av sampelvägar i en tvådimensionell CEV-modell

1 Låt $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_N = T$ vara en tidspartition av intervallet $[0, T]$.
2 Sätt steglängden $h = t_j - t_{j-1}$.
3 Sampelvägarna $S_1(t_j)$ och $S_2(t_j)$ erhålls via:

a) Sätt $S_i(0) \geq 0$ för $i = 1, 2$.

b) Generera oberoende tillskott

$$d\widetilde{W}_i(t_j) = \widetilde{W}_i(t_j) - \widetilde{W}_i(t_{j-1}) \sim \mathcal{N}(0, h),\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, \ldots, N.$$

c) Sätt

$$S_1(t_j) = S_1(t_{j-1})(1 + rh + (\sigma_{11} d\widetilde{W}_1(t_j) + \sigma_{12} d\widetilde{W}_2(t_j))),\ j = 1, 2, \ldots, N.$$

d) Sätt

$$S_2(t_j) = S_2(t_{j-1})(1 + rh + (\sigma_{21} d\widetilde{W}_1(t_j) + \sigma_{22} S_2(t_{j-1})^{\gamma-1} d\widetilde{W}_2(t_j))),\ j = 1, 2, \ldots, N.$$

3.2 Monte Carlo-metod

Monte Carlo-metoden för prissättning av optioner presenteras i algoritm 3.3. Teorin bakom Monte Carlo-metoden grundar sig i de stora talens lag som säger att det aritmetiska genomsnittet konvergerar mot det teoretiska medelvärdet då antalet oberoende försök blir tillräckligt stort [4].

Algorithm 3.3: Monte Carlo-metoden för prissättning av optioner

1 Generera n oberoende vägar $S_i(t_j)$ för $i = 1, 2,\ j = 1, 2 \ldots, N$.
2 Bestäm utbetalningsfunktionen $Y(k)$ för varje enskild väg, $k = 1, 2, \ldots, n$.
3 Beräkna optionspriset enligt:

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} \sum_{k=1}^{n} \frac{Y(k)}{n}.$$

4 Beräkna det 95%-konfidensintervallet:

$$1.96 \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}},$$

där σ_Y är standardavvikelsen för utbetalningsfunktionen.

Betrakta en följd av oberoende identiskt fördelade slumpvariabler $\{X_i\}_{i \geq 1}$ med väntevärdet $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Enligt de stora talens lag tenderar stickprovsmedelvärdet

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

att konvergera mot μ när antalet oberoende försök $X_1, \ldots, X_n$ för slumpvariabeln X blir tillräckligt stort [8].

Den centrala gränsvärdessatsen tillämpas vid beräkning av konfidensintervallet av stickprovsmedelvärdet. Satsen visar att fördelningen hos slumpvariablen

$$\frac{\mu - \bar{X}_n}{\sigma / \sqrt{n}}$$

konvergerar mot en standard normalfördelning för tillräckligt stora n. Detta resultat kan sedan användas för att visa att det verkliga väntevärdet μ har en sannolikhet på ungefär 95% att befinna sig innanför intervallet

$$\left[\bar{X}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

där σ är standardavvikelsen. Notera att optionspremien i princip är det diskonterade medelvärdet av utbetalningen för varje enskild väg.

Vid beräkning av premierna för respektive option implementeras utbetalningsfunktionerna (2.9)-(2.12) i MATLAB. Motsvarande MATLAB-kod för varje enskild option presenteras i appendix D, tillsammans med de två funktionerna för generering av sampelvägarna i GBR- respektive CEV-modellen.

4 | Resultat

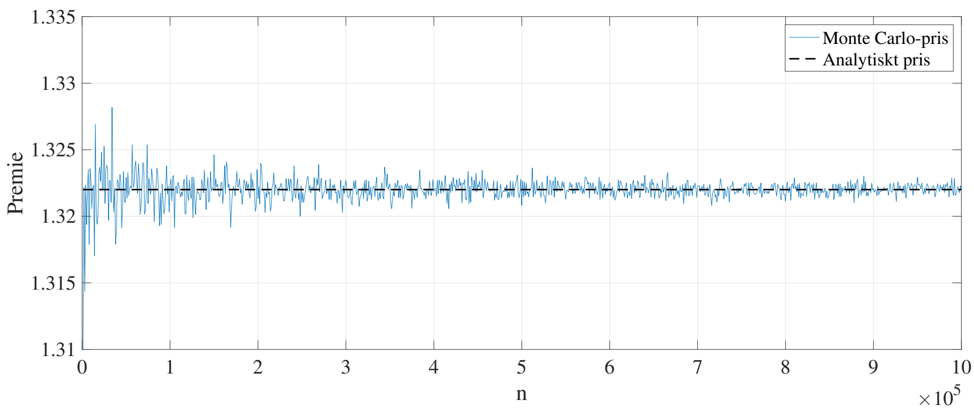
Resultaten från Monte Carlo-simuleringen redovisas i följande kapitel. Först utvärderas Monte Carlo-metodens träffsäkerhet i syfte att validera implementeringen och rättfärdiga användandet av metoden. Sedan följer en jämförelse av hur parametrarna σ_2^2 och ρ påverkar sampelvariansen (eller ekvivalent: fysiska variansen) av $S_2(t)$ respektive korrelationen mellan $S_1(t)$ och $S_2(t)$ i CEV-modellen. Slutligen presenteras resultaten från simuleringen av de valda optionernas premier och hur dessa beror på känslighetsparametrarna σ_1^2, σ_2^2, ρ och γ i både CEV- och GBR-modellen.

4.1 Validering av sampelvägsgenerering

För att validera implementeringen av Monte Carlo-metoden, eller mer specifikt framtagningen av sampelvägar för de underliggande tillgångarna, jämfördes de simulerade optionspremierna med det teoretiska priset för respektive option. Valideringen kunde endast genomföras med GBR-modellen eftersom inga explicita formler existerar för optioner i den tvådimensionella CEV-modellen. Den enda skillnaden mellan de två modellerna är dock valet av parametern γ. Därmed går det att dra slutsaster om framtagningen av sampelvägar för de båda modellerna genom att testa uteslutande för GBR-modellen.

Implementeringens träffsäkerhet testades först på en relative outperfomance-option, vilket är en icke-vägberoende option och har därmed en förhållandevis simpel explicit formel för priset (se ekvation (B.1) för den fullständiga formeln).

Figur 4.1 visar hur Monte Carlo-priset för en relative outperformance-option konvergerar mot det teoretiskt framtagna priset för stora värden på antalet genomförda simuleringar n.



Figur 4.1: Premie för en relative outperformance-option för olika n.

Monte Carlo-priset testades även mot den explicita formeln för en two asset barrier-option i (B.2) då det är den enda av de fyra valda optionerna som har en teoretisk exakt formel för premien i Black-Scholes-modellen. För vägberoende optioner är längden på tidsstegen $h = T/N$ avgöranade för att få ett träffsäkert pris. Då den teoretiska formeln antas vara kontinuerlig i tid behöver tidsstegen vara små för att representera priset väl. Simuleringarna kräver därmed stor beräkningskapacitet eftersom både n och N behöver vara tillräckligt stora. Detta är anledningen till att resultatet för two asset barrier-optionen presenteras i tabellform.

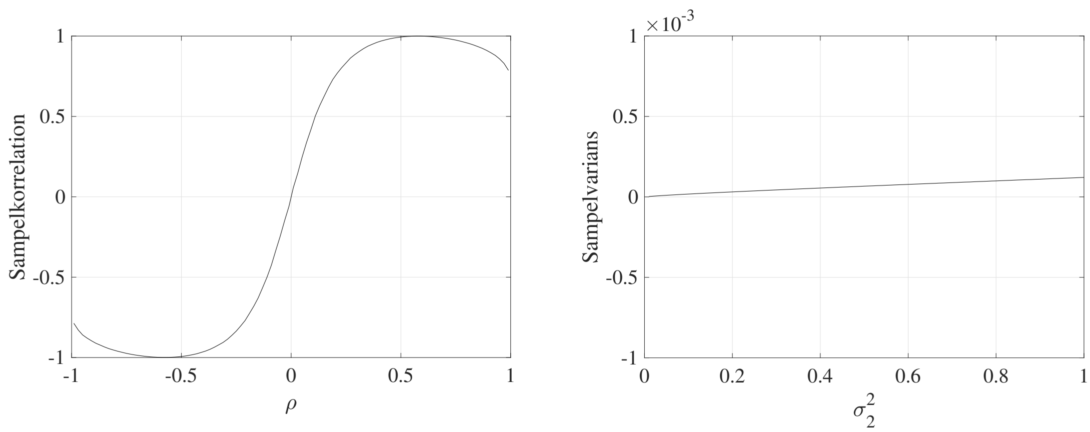
Tabell 4.1 visar att Monte Carlo-priset för two asset barrier-optionen inte är lika träffsäkert som för en relative outperformance-option. Resultatet visar dock att den framtagna premien från Monte Carlo-simuleringen avviker med 1% från det teoretiska, givet ett konfidensintervall på 95%. Resultatet är därmed tillräckligt träffsäkert för att rättfärdiga metoden och utföra parameteranalysen.

Tabell 4.1: Premie för en two asset barrier-option för olika n.

n	Monte Carlo-pris	Konfidensintervall	Avvikelse teoretiskt pris
20,000	2.2735	0.1754	2.0164%
40,000	2.2691	0.0865	1.8190%
60,000	2.2731	0.0608	1.9985%
80,000	2.2470	0.0427	0.8274%
100,000	2.2584	0.0348	1.3389%

4.2 Parameteranalys av CEV-modellen

I figur 4.2 presenteras hur känslighetsparametrarna σ_2^2 och ρ förhåller sig till den fysiska variansen av den andra tillgången $S_2(t)$ respektive den fysiska korrelationen mellan de två tillgångarna. En analys av hur valet av parametern γ påverkar den fysiska variansen av $S_2(t)$ respektive den fysiska korrelationen mellan $S_1(t)$ och $S_2(t)$ ges i figur 4.3.



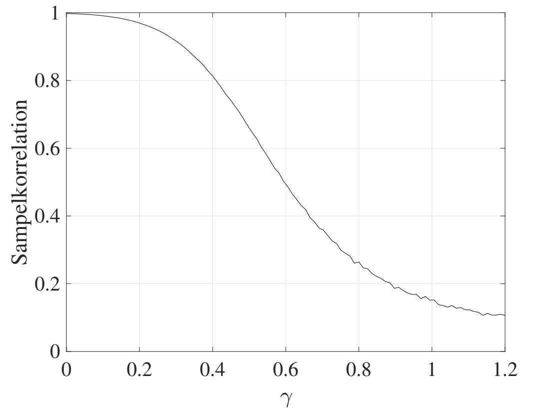
(a) Sampelkorrelation av $S_1(t)$ och $S_2(t)$ mot ρ (b) Sampelvarians av $S_2(t)$ mot σ_2^2

Figur 4.2: Värden för sampelparametrar mot inmatningsparametrar i CEV-modellen.

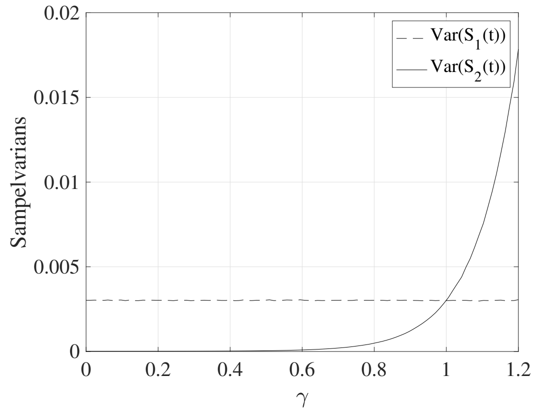
Figur 4.2a implicerar att den uppmätta korrelationen mellan de två tillgångarna i CEV-modellen är beroende på ρ. Anmärkningsvärt är att korrelationen har sitt minimum och maximum vid $\rho = -0.60$ respektive $\rho = 0.60$, vilket gör att premierna från modellerna kommer att skilja sig från varandra. För värden på ρ nära noll är den uppmätta korrelationen approximativt lika med parametern ρ, d.v.s. för $-0.20 \leq \rho \leq 0.20$ är det möjligt att använda ρ som den fysiska korrelationen.

Genom att inspektera figur 4.2b är det möjligt att utläsa att den fysiska variansen av $S_2(t)$ har ett ytterst svagt beroende på σ_2^2. Ett visst mån av linjärt beroende kan urskiljas, men värdemängden av den fysiska variansen är ej signifikant i jämförelse med intervallet för σ_2^2. Det svaga beroendet implicerar att σ_2^2 inte motsvarar den fysiska variansen av $S_2(t)$ i CEV-modellen.

Vidare visar figur 4.3a att sampelkorrelationen mellan $S_1(t)$ och $S_2(t)$ beror på valet av γ. Det samma är även sant för variansen av $S_2(t)$, vilken även påverkas av värdet på γ, som går att urskilja ur figur 4.3b. När γ ökar, minskar den fysiska korrelationen och variansen av $S_2(t)$ ökar. Ökningen av den fysiska variansen av $S_2(t)$ är exponentiell för $\gamma \geq 0.7$. Det går även att utläsa av grafen i figur 4.3b att den fysiska variansen av $S_1(t)$ inte påverkas av valet av γ.



(a) Sampelkorrelation av $S_1(t)$ och $S_2(t)$ mot γ



(b) Sampelvarians av $S_2(t)$ mot γ

Figur 4.3: Värden för sampelparametrar mot γ i CEV-modellen.

4.3 Analys av känslighetsparametrar

Under simuleringens gång varierades känslighetsparametrarna enligt tabell 4.2. För optionsspecifika parametrar $S_1(0)$, $S_2(0)$ och eventuella barriärer eller lösenpris, är dessa redovisade i kapitlet för respektive option.

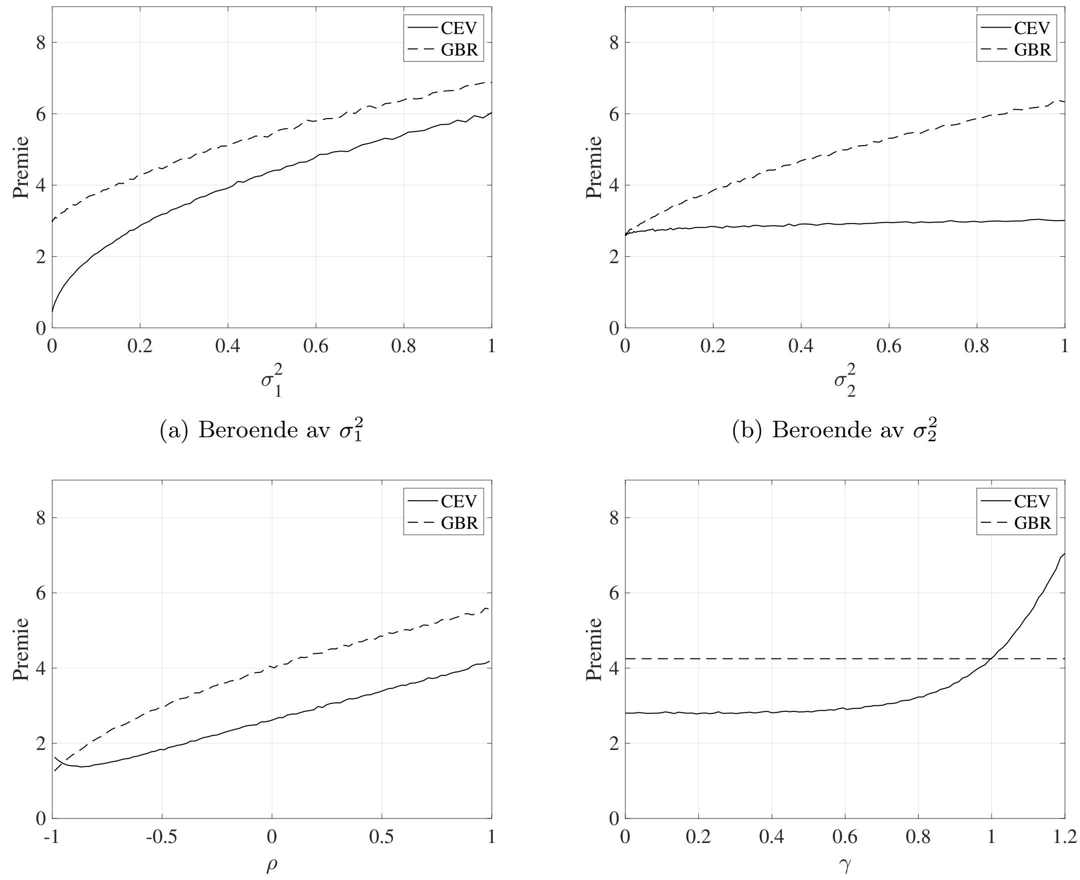
Tabell 4.2: Valda parametervärden.

Parameter	n	N	T	r	Konstanta värden	Parameterinterval
σ_1^2	100,000	1,000	1	0.02	$\sigma_2^2 = 0.30,\ \rho = 0.15,\ \gamma = 0.50$	$0 < \sigma_1^2 \leq 1$
σ_2^2	100,000	1,000	1	0.02	$\sigma_1^2 = 0.20,\ \rho = 0.15,\ \gamma = 0.50$	$0 < \sigma_2^2 \leq 1$
ρ	100,000	1,000	1	0.02	$\sigma_1^2 = 0.20,\ \sigma_2^2 = 0.30,\ \gamma = 0.50$	$-1 < \rho < 1$
γ	100,000	1,000	1	0.02	$\sigma_1^2 = 0.20,\ \sigma_2^2 = 0.30,\ \rho = 0.15$	$0 \leq \gamma \leq 1.2$

4.3.1 Asiatisk two asset-option

Resultatet från simuleringen med de givna variablerna i tabell 4.2 presenteras i figur 4.4. Variansen av den första tillgången $S_1(t)$ redovisas i figur 4.4a och grafen visar tydligt hur optionspremien för den asiatiska two asset-optionen ökar med variansen i båda modellerna. Båda kurvorna följer en aningen logaritmisk trend. Det givna värdet på γ satt till $\gamma = 0.50$, resulterar i att premien i CEV-modellen är lägre än den i GBR-modellen för samtliga värden på σ_1^2 i intervallet.

I figur 4.4b varierar σ_2^2 mellan 0 och 1 samtidigt som resterande parametrar är konstanta. Premien framtagen av CEV-modellen förändras inte i någon större utsträckning utan istället är premien relativt konstant vid 2.5. I GBR-modellen, däremot, följer premien en liknande kurva som när σ_1^2 varierade, fast med aningen lägre värden för alla σ_2^2.



(a) Beroende av σ_1^2

(b) Beroende av σ_2^2

(c) Beroende av ρ

(d) Beroende av γ

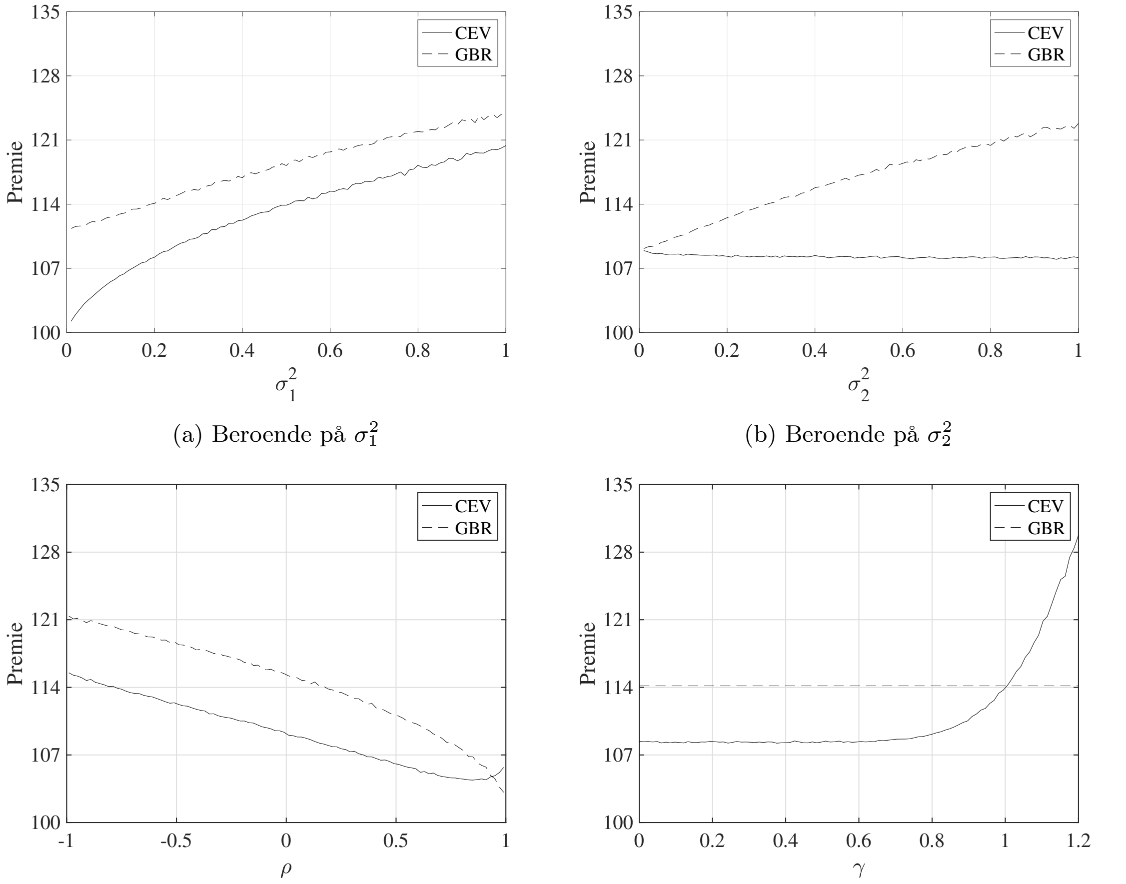
Figur 4.4: Simuleringsresultat för asiatisk two asset-option. Lösenpris $K = 50$, vikt $\alpha = 0.5$, $S_1(0) = 51$ och $S(0) = 48$.

Optionspremiens beroende på parametern ρ kan avläsas ur figur 4.4c. För de givna parametrarna avtar optionspremien för $-1 \leq \rho < -0.80$ och når en minimumpunkt vid $\rho = -0.80$. Efter det att minimumpunkten är nådd ökar premien linjärt med ρ. I GBR-modellen följer däremot premien en liknande logaritmisk kurva som återfinns i de tidigare graferna för GBR-modellen.

Slutligen, i figur 4.4d varierar γ med de andra parametrarna vid deras konstanta värden. Grafen visar tydligt hur premien från respektive modell konvergerar med varnadra vid $\gamma = 1$. För $0 \leq \gamma \leq 0.50$ är premien från CEV-modellen nästan konstant, för att sedan öka exponentiellt. Dessutom är premien från CEV-modellen lägre än den framtagen av GBR-modellen för $\gamma < 1$, och högre för $\gamma > 1$.

4.3.2 Asiatisk best of assets or cash-option

Resultaten från simuleringen av den asiatiska best of assets or cash-optionen presenteras i figur 4.5. Genom att inspektera figur 4.5a går det att se att premien ökar linjärt med variansen av den första tillgången $S_1(t)$ i GBR-modellen och logaritmiskt i CEV-modellen. Det går även att notera att premien för den asiatiska best of assets or cash-optionen är högre för samtliga värden på σ_1^2 jämfört med den asiatiska two asset-optionen. I likhet med de resultat från den asiatiska two asset-optionen genererar GBR-modellen högre premier än CEV-modellen för det givna värdet på γ.



(a) Beroende på σ_1^2

(b) Beroende på σ_2^2

(c) Beroende på ρ

(d) Beroende på γ

Figur 4.5: Simuleringsresultat för asiatisk best of assets or cash-option. Lösenpris $K = 75$, $S_1(0) = 100$ och $S_2(0) = 100$.

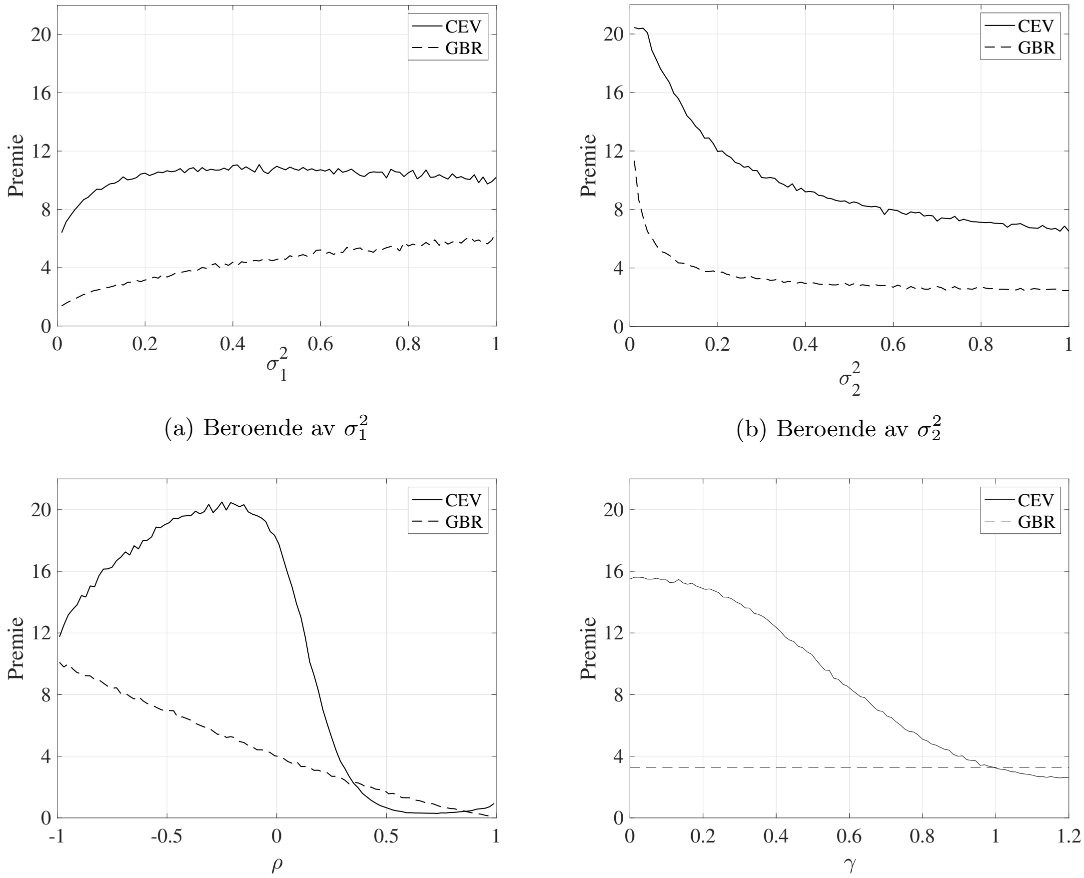
Figur 4.5b visar hur optionspremien från de två modellerna varierar med σ_2^2. Grafen visar att premien ökar linjärt med σ_2^2 i GBR-modellen, likt resultaten för σ_1^2. I CEV-modellen däremot ändras premien ytterst lite och är approximativt konstant vid 108, vilket implicerar att det är svag till inget beroende på σ_2^2 för premien i CEV-modellen.

Genom att variera parametern ρ genereras de grafer som redovisas i figur 4.5c. Grafen visar hur premien i GBR-modellen avtar för alla värden på ρ med en växande takt för högre värden på ρ. Premien i CEV-modellen är däremot avtagande för $-1 \leq \rho < 0.90$ och har en minimumpunkt vid $\rho = 0.90$, varefter premien för optionen ökar.

Hur premien för optionen beror på parametern γ presenteras i figur 4.5d. GBR-modellen visar inget beroende på γ, utan är konstant för alla värden av parametern. I CEV-modellen är premien konstant vid 108 för $0 \leq \gamma \leq 0.70$. För $\gamma > 0.70$ ökar premien exponentiellt och de båda modellerna konvergerar för $\gamma = 1$.

4.3.3 Two asset barrier-option

Simulering av premien för two asset barrier-optionen resulterade i de grafer som presenteras i figur 4.6. Som kan avläsas ur figur 4.6a följer premien i CEV-modellen en ökande logaritmisk trend för $0 \leq \sigma_1^2 \leq 0.40$. För de resterande värdena på σ_1^2 avtar premien approximativt linjärt. Motsvarande simulering med hjälp av GBR-modellen resulterade istället i en strikt ökande linjär funktion för alla



(a) Beroende av σ_1^2

(b) Beroende av σ_2^2

(c) Beroende av ρ

(d) Beroende av γ

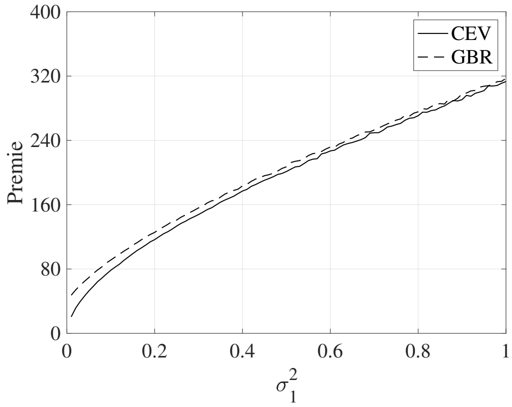
Figur 4.6: Simuleringsresultat för two asset barrier-option. Lösenpris $K = 95$, barriär $B = 110$, $S_1(0) = 100$ och $S_2(0) = 100$.

värden på σ_1^2 i intervallet. Dessutom är premien lägre i GBR-modellen jämfört med CEV-modellen för samtliga värden på σ_1^2.

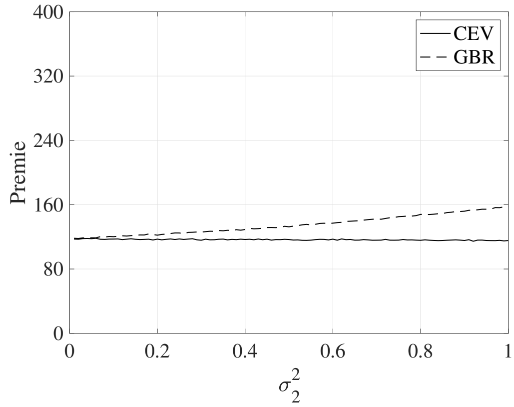
Optionens beroende på σ_2^2 redovisas i figur 4.6b. Likt beroendet på σ_1^2 är premierna högre i CEV-modellen än i GBR-modellen för alla värden på σ_2^2 i intervallet. Båda modellerna påvisar ett tydligt inverterat logaritmiskt beroende på parametern.

I figur 4.6c kan resultatet från simuleringen av premiernas beroende på parametern ρ urskiljas. GBR-modellen genererar premier som ungefärligt avtar linjärt med ρ parametern. Premien i CEV-modellen når en maximumpunkt vid $\rho = -0.20$ och ett minimum vid $\rho = 0.60$. Det går även att tyda ur figuren att CEV-modellen har två skärningspunkter med GBR-modellen, nämligen vid $\rho = 0.30$ respektive $\rho = 0.70$.

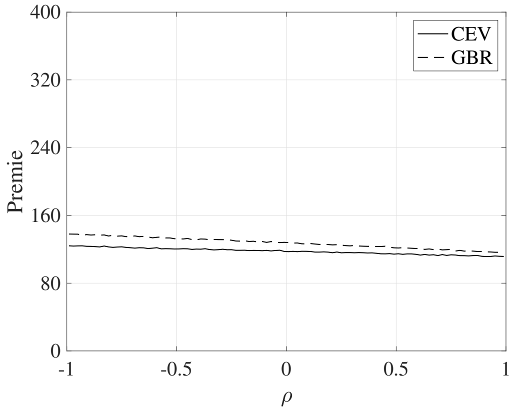
Slutligen, i figur 4.4d, presenteras resultatet från simuleringen av premiens beroende på γ. Till skillnad från den asiatiska two asset-optionen och den asiatiska best of assets or cash-optionen är premien i CEV-modellen högre än GBR-modellen för $0 \leq \gamma < 1$. De båda modellerna konvergerar dock vid $\gamma = 1$. Likt resultatet för ovanstående optioner är premien konstant i GBR-modellen.



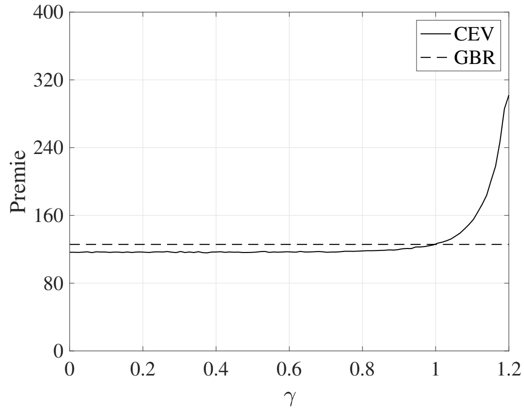
(a) Beroende av σ_1^2



(b) Beroende av σ_2^2



(c) Beroende av ρ



(d) Beroende av γ

Figur 4.7: Simuleringsresultat för lookback spread-option. Lösenpris $K = 194$, $S_1(0) = 310$ och $S_2(0) = 123$.

4.3.4 Lookback spread-option

Simulering av premien för lookback spread-optionen genom att använda CEV- respektive GBR-modellen resulterade i graferna i figur 4.7. När σ_1^2 lät varieras verkar modellerna konvergera för $\sigma_1^2 > 0.60$, vilket kan utläsas ur figur 4.7a. Båda modellerna ökar i premie med σ_1^2, först logaritmiskt för $0 \leq \sigma_1^2 \leq 0.20$ och sedan approximativt linjärt. Det går även att notera att värdemängden för premierna är stor i jämförelse med de andra undersökta optionerna redovisade i ovanstående kapitel.

Figur 4.7b visar hur premien för lookback spread-optionen varierar för olika värden på σ_2^2. Till skillnad från hur σ_1^2 påverkar premien, konvergerar inte de två modellerna. GBR-modellen är strikt ökande och CEV-modellen avtar ytterst lite. Premien är dock alltid lägre för CEV-modellen än motsvarande i GBR-modellen, likt för de andra parametrarna.

Optionspremiens beroende på ρ påvisar ett linjärt avtagande beroende för alla värden på ρ, vilket presenteras i figur 4.7c. Resultaten för CEV-modellen visar återigen lägre premier än för motsvarande värde i GBR-modellen. En ytterligare observation som kan göras är att premien i CEV-modellen avtar med en aningen lägre takt än i GBR-modellen.

När parametern γ varierades, vilket redovisas i figur 4.7d, är premien i GBR-modellen konstant och påvisar inget beroende på parametern. Premien från CEV-modellen, å andra sidan, ökar exponentiellt när $\gamma > 0.60$. Som redovisats i ovanstående kapitel konvergerar modellerna för $\gamma = 1$.

5 | Diskussion och slutsats

I den här rapporten har en Black-Scholes-marknad för två underliggande tillgångar härletts (samt generaliserats för n tillgångar) och premien för fyra olika vägberoende optioner har simulerats med hjälp av Monte Carlo-metoden. Vidare har två separata modeller för generering av sampelvägar använts, testats och jämförts med varandra, i termer av både premiers beroende på känslighetsparametrar och deras användande. Nedan följer en diskussion om de erhållna resultaten från simuleringen och en jämförelse mellan de två modellerna.

5.1 Black-Scholes marknad

Presentationen av Black-Scholes-markanden för flera underliggande tillgångar i avsnitt 2.1 visar att det är möjligt att komma fram till en explicit formel för optioner med n stycken tillgångar. Den framtagna formeln i (2.5) är dock beroende av optionens utbetalningsfunktion. Kravet på en funktion som inmatningsparameter kan leda till att vissa optioner saknar en explicit formel för priset då integralen inte kan lösas analytiskt för den givna funktionen. Avsaknaden av explicita formler för vissa optioner påvisar vikten av simulering som metod för att beräkna optionspremier. Den härledda teorin är dock fortfarande relevant för validering av simuleringsmetoderna då formler för enklare optioner kan användas som referens. Vägberoende optioner, d.v.s de optioner som har behandlats i den här rapporten, har ofta antingen en komplicerad explicit formel eller saknar en sådan helt, vilket vidare visar på betydelsen av simulering som metod.

5.2 Premiers beroende på känslighetsparametrar

Genom att inspektera de fyra optionernas beroende på känslighetsparametrarna i avsnitt 4.3 går det att notera vissa likheter mellan hur premierna ändras med specifika parametrar. En första observation som kan göras är att alla premier ökar med σ_1^2. Eftersom alla optioner som är inkluderade i det här arbetet är köpversionen av respektive option, är beroendet på σ_1^2 inte överraskande; en högre volatilitet för $S_1(t)$ ökar sannolikheten för att tillgången ska överstiga lösenpriset vid slutdagen. Beroendet på σ_1^2 förekommer dessutom i både GBR- och CEV-modellen. Då parametern i båda modellerna går att modellera som den fysiska motsvarigheten (se appendix A.1, där σ_1^2 visades vara en väntevärdesriktig skattning av variansen av $S_1(t)$) är resultatet i linje med förväntningarna.

Detsamma gäller däremot inte för σ_2^2. Parametern visade sig inte direkt motsvara variansen av den andra underliggande tillgången $S_2(t)$ i CEV-modellen; en ökning av σ_2^2 gav endast en liten ökning av variansen av $S_2(t)$ (se figur 4.2b). Den fysiska variansens svaga beroende av σ_2^2 förklarar varför alla utom en av optionernas premier är konstanta när σ_2^2 varieras. Two asset barrier-optionen är undantaget, d.v.s det är den enda som påverkades av att variera σ_2^2. Effekten på premien beror eventuellt på att barriäroptionen är känsligare för variansskillnader på grund av barriärens binära karaktär.

I GBR-modellen har σ_2^2 istället liknande påverkan som σ_1^2 har på premien. Förklaringen till det är att σ_2^2 i GBR-modellen motsvarar sampelvariansen för $S_2(t)$ (se proposition A.1), vilket gör att resultaten kan motiveras på samma sätt som för σ_1^2.

Parametern ρ i avsnitt 4.2 är inte densamma som den fysiska korrelationen mellan de underliggande tillgångarna $S_1(t)$ och $S_2(t)$ i CEV-modellen. Dock kan ρ i stort sätt tolkas som den uppmätta korrelationen för värden nära 0.

Däremot i GBR-modellen är ρ ekvivalent med sampelkorrelationen mellan de underliggande tillgångarna (se appendix A.1) och har en tydlig påverkan på premien för optionerna som undersökts. Alla optioner utom den asiatiska two asset-optionen har avtagande premier för ökande värden på ρ. Den asiatiska two asset-optionen har en högre premie för större värden på ρ eftersom utbetalningen blir större om båda tillgångarna ökar i värde. Med högre korrelation ökar sannolikheten för att tillgångarna ska röra sig i samma riktning, vilket ger potential för större utbetalning.

För two asset barrier-optionen uppstod ett specialfall. För den här optionen gäller det att om $S_1(t)$ och $S_2(t)$ rör sig i samma riktning så är det större sannolikhet att barriären träffas och att optionen är värdelös på slutdagen. Det är därför tydligt att låg korrelation är fördelaktigt, vilket kan ses på grafen i figur 4.6c, där premien minskar linjärt när ρ ökar. I CEV-modellen ökar premien initialt och når ett maximum vid $\rho = -0.20$, för att sedan gå mot 0 när ρ närmar sig 1. Det här beteendet kan förklaras med hjälp av figur 4.6a (och figur C.1), där det går att se att sampelkorrelationen har ett minimum vid $\rho = -0.60$ och att variansen av $S_2(t)$ är som minst vid $\rho = 0$. De här två sammanvägda faktorerna gör att optionens premie har ett maximum mellan deras respektive minimum. Premien i CEV-modellen går sedan mot 0 när sampelkorrelationen närmar sig 1, vilket sker vid $\rho = 0.60$.

Genom att modellera $S_1(t)$ med GBR-modellen och $S_2(t)$ med CEV-modellen samt låta $\gamma = 0.50$ resulterar det i att $S_2(t)$ får en lägre varians än $S_1(t)$. Det optimala scenariot för en upp-och-ut two asset barrier-option är att $S_1(t)$ går upp och att $S_2(t)$ går ned eller inte rör sig alls, vilket förklarar varför CEV-modellen nästan alltid har en högre premie än GBR-modellen. För de andra tre optionerna är det tvärtom, där är hög varians positivt för båda tillgångarna, vilket betyder att premien alltid är lägre för CEV-modellen.

5.3 Modelljämförelse

Resultaten från simuleringen påvisar att det finns en signifikant skillnad mellan de två modellerna. Den största skillnaden är att parametern γ inkluderas i CEV-modellen. Den här parametern har en direkt effekt på den fysiska variansen och korrelationen samt bidrar till att modellen har en högre grad av flexibilitet än GBR-modellen. Genom att inkludera γ är det möjligt att modellera variansen av priset på $S_2(t)$ som en funktion av priset i sig självt och därmed ta hänsyn till hävstångseffekter. Den här flexibiliteten gör att CEV-modellen eventuellt kan användas för att mer träffsäkert modellera tillgångar med olika karaktäristik.

För att implementera CEV-modellen ordentligt är dock valet av parametern γ av yttersta vikt. Svårigheter med att välja värdet på parametern så att den på ett lämpligt sätt följer priset på tillgången finns däremot och måste tas i beaktning. Den komplexitet som γ tillför är frånvarande i GBR-modellen, vilken inte inkluderar den parametern. Det blir således en avvägning mellan modellenkelhet och flexibilitet vid valet av modell.

Parametrarna σ_2^2 och ρ i CEV-modellen kunde visas att inte vara väntevärdesriktiga estimatorer av volatiliteten av $S_2(t)$ respektive korrelationen mellan $S_1(t)$ och $S_2(t)$. Figur C.2 samt C.3 i appendix visar tydligt att sampelvariansen och sampelkorrelationen är beroende på inmatningsparametrarna. Variansens och korrelationens beroende bidrar även de till ytterligare komplexitet när inmatningsparametrarna ska bestämmas i CEV-modellen. Återigen är GBR-modellen mindre komplex jämfört med CEV-modellen eftersom inmatningsparametrarna motsvarar de verkliga parametrarna.

5.4 Slutsats

Baserat på de resultat som presenteras i kapitel 4 och den påföljande diskussionen ovan, är det möjligt att dra slutsatser om de två modellerna. Som tidigare diskuterats tillåter CEV-modellen mer flexibilitet genom att inkludera parametern γ, vilket gör det möjligt att modellera variansens beroende av den underliggande tillgångens rörelser, även kallat hävstångseffekter. Optionerna som beskrivs i rapporten har många tillämpningar som innehåller andra underliggande tillgångar än aktier. För att på ett så korrekt sätt som möjligt kunna efterlikna rörelserna av tillgångarna och på så vis generera en rättvis premie, är CEV-modellen mer lämplig än GBR-modellen.

Den ökade flexibiliteten resulterar dock i att CEV-modellen blir mer komplex. Svårigheterna som finns med att skatta inmatningsparametrarna är större i CEV-modellen på grund av att σ_2^2 och ρ inte är väntevärdesriktiga skattningar av variansen av $S_2(t)$ och korrelationen mellan $S_1(t)$ och $S_2(t)$. Därmed krävs, för att kunna utnyttja fördelarna med CEV-modellen, betydligt mer jobb med parameterskattning jämfört med parameteranpassingen i GBR-modellen.

5.5 Felkällor

Vid simulering av CEV-modellen användes Euler-Maruyama-metoden som är en numerisk metod för att simulera stokastiska differential ekvationer [4]. En möjlig felkälla är därmed denna numeriska metod. Dock bör storleken på felet inte påverka det redovisade resultatet av simuleringarna signifikant då valideringan i avsnitt 4.2 tydligt visar att priset givet av Monte Carlo-metoden konvergerar mot det analytiska priset.

Samtliga optioner som har avhandlats i den här rapporten är vägberoende, vilket gör resultatet känsligt för val av steglängd. Med ett stort antal tidssteg exempelvis $N = 1,000$ minimeras felet. Dock tenderar beräkningstiden att öka i proportion till N. Därmed blir valet av tidssteg en avvägning mellan precision och beräkningstid.

5.6 Vidare forskning

Beräkningstiden kan minskas utan att öka konfidensintervallet genom att implementera variansreducerande metoder. Det skulle också göra det möjligt att simulera optioner med fler än två underliggande tillgångar då just beräkningstiden är den begränsande faktorn. Genom att utföra simuleringarna i ett programmeringspråk som är bättre lämpat för Monte Carlo-metoden, till skillnad från Matlab, skulle ett minskat konfidensintervall kunna ges med kortare beräkningstid.

Hur man ska kalibrera CEV-modellen med elasticitetsparametern γ för att simulera prisvariationerna för en verklig aktie eller liknande, är en frågeställning som uppkommer. Den uppmäta variansen och väntevärdet har färdiga formler till skillnad från γ-parametern. För CEV-modellen i en dimension har det utvecklats algoritmer baserade på maximum likelihood-metoden, vilket skulle kunna vidareutvecklas för modellen i den här rapporten [9].

Litteraturförteckning

[1] Capiński M, Ekkehard K. The Black–Scholes Model. Cambridge University Press. 2012;.

[2] Black F, Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The University of Chicago Press. 1973;81(3):637–654.

[3] Haug EG. The Complete Guide to Option Pricing Formulas. 2nd ed. New York, United States: McGraw-Hill; 2007.

[4] Korn R, Korn E, Kroisandt G. Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance. 1st ed. Boca Raton, United States: CRC Press; 2010.

[5] Stulz RM. Closed-From Approximations for Spread Option Prices and Greeks. Journal of Financial Economics. 1982;10(2):161–185.

[6] Li M. Closed-From Approximations for Spread Option Prices and Greeks. The Journal of Derivatives. 2008;15(3).

[7] Kloeden PE, Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. 1st ed. New York, United States: Springer; 1999.

[8] Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. New York, United States: Springer; 2003.

[9] Ballestra LV, Pacelli G. The Constant Elasticity of Variance Model: Calibration, Test and Evidence from the Italian Equity Market. Applied Financial Economics. 2011;81(3):637–654.

[10] Calogero S. Stochastic Calculus Financial Derivatives and PDE's; 2019.

A | Black-Scholes teori

I detta kapital visas en härledning av den tvådimensionella Black-Scholes-marknaden följt av en generalisering för Black-Scholes-marknader i n dimensioner.

A.1 Black-Scholes-marknad i två dimensioner

Betraka den tvådimensionella geometriska Brownska rörelsen

$$S_i(t) = S_i(0)e^{\mu_i t+\sigma_i \cdot W(t)}, \tag{A.1}$$

där $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2})$ för $i = 1, 2$, $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ och $\cdot$ betecknar den skalära vektorprodukten.

Teorem A.1. *De stokastiska variablerna $S_1(t)$ och $S_2(t)$ har simultantätheten*

$$f_{S_1(t),S_2(t)}(x,y) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2t}\begin{pmatrix}\log\frac{x}{S_1(0)} - \mu_1 t & \log\frac{y}{S_2(0)} - \mu_2 t\end{pmatrix}\cdot(\sigma\cdot\sigma^T)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\log\frac{x}{S_1(0)} - \mu_1 t \\ \log\frac{y}{S_2(0)} - \mu_2 t\end{pmatrix}\right)}{2\pi txy\sqrt{\det(\sigma\cdot\sigma^T)}}.$$

Därutöver är $\log S_1(t)$ och $\log S_2(t)$ simultant normalfördelade med medelvärdet

$$m = \begin{pmatrix}\log S_1(0) + \mu_1 t & \log S_2(0) + \mu_2 t\end{pmatrix},$$

och kovariansmatrisen $C = t\sigma \cdot \sigma^T$.

Bevis. Låt $X_i = W_i(t)/\sqrt{t} \in \mathcal{N}(0, 1)$ för $i = 1, 2$. Då definieras priset för en tillgång som

$$S_1(t) = S_1(0)e^{\mu_1 t+Y_1},\ S_2(t) = S_1(0)e^{\mu_2 t+Y_2},$$

där

$$Y_1 = \sigma_{11}\sqrt{t}X_1 + \sigma_{12}\sqrt{t}X_2,\ Y_2 = \sigma_{21}\sqrt{t}X_1 + \sigma_{22}\sqrt{t}X_2.$$

Notera att Y_1 och Y_2 är simultant normalfördelade ty slumpvariablerna är linjärkombinationer av X_1 och X_2. Därmed är väntevärdet för Y_1 och Y_2 noll och kovariansmatrisen ges då av

$$C = t\begin{pmatrix}\mathrm{Var}(Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) \\ \mathrm{Cov}(Y_2, Y_1) & \mathrm{Var}(Y_2)\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 & \sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22} \\ \sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22} & \sigma_{22}^2 + \sigma_{21}^2\end{pmatrix} = t\sigma\cdot\sigma^T. \tag{A.2}$$

Vidare ges väntevärdet för $\log S_1(t)$ och $\log S_2(t)$ av

$$m = \begin{pmatrix}\mathbb{E}[\log S_1(t)] & \mathbb{E}[\log S_2(t)]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\log S_1(0) + \mu_1 t & \log S_2(0) + \mu_2 t\end{pmatrix},$$

vilket konkluderar teoremets andra påstående.

För att härleda simultantätheten görs följande omskrivning:

$$S_1(t) \leq x \Leftrightarrow Y_1 \leq \log\frac{x}{S_1(0)} - \mu_1 t,\ S_2(t) \leq x \Leftrightarrow Y_2 \leq \log\frac{y}{S_2(0)} - \mu_2 t.$$

Detta resulterar i den kumulativa simultanfördelning

$$F_{S_1(t),S_2(t)}(x,y) = F_{Y_1,Y_2}\left(\log \tfrac{x}{S_1(0)} - \mu_1 t \quad \log \tfrac{y}{S_2(0)} - \mu_2 t\right).$$

Den motsvarande täthetsfunktionen ges då av

$$\begin{aligned} f_{S_1(t),S_2(t)}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{S_1(t),S_2(t)}(x,y) \\ &= \frac{1}{xy} f_{Y_1,Y_2}\left(\log \tfrac{x}{S_1(0)} - \mu_1 t \quad \log \tfrac{y}{S_2(0)} - \mu_2 t\right). \end{aligned}$$

Genom att applicera den simultana täthetsfunktionen för Y_1 och Y_2 på ovanstående ekvationer konkluderars därmed beviset. □

Proposition A.1. *Den stokastiska processen som ges av* (A.1) *har samma fördelning som:*

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_1(0)e^{\mu_1 t + \bar{\sigma}_1 W_1(t)} \\ S_2(t) &= S_2(0)e^{\mu_2 t + \bar{\sigma}_2(\rho W_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} W_2(t))}, \end{aligned} \tag{A.3}$$

där

$$\bar{\sigma}_i = \sqrt{\sigma_{i1}^2 + \sigma_{i2}^2}, \;\; \rho = \frac{\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2)(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2)}} \in [-1, 1].$$

Den historiska variansen för de två tillgångarna $S(t)_1$ och $S(t)_2$ är en väntevärdesriktig skattning för $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ och den historiska korrelationen är en väntevärdesriktig skattning för ρ.

Bevis. Härledningen påminner om den i teorem A.1. Väntevärdet för Y_1 och Y_2 är noll ty de är linjärkombinationer av simultant normalfördelade slumpvariabler. Vidare ges kovariansmatrisen av

$$C = t \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) \\ \mathrm{Cov}(Y_2, Y_1) & \mathrm{Var}(Y_2) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1^2 & \rho\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 \\ \rho\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 & \bar{\sigma}_2^2 \end{pmatrix},$$

vilket är ekvivalent med (A.2). Den simultana täthetsfunktionen för Y_1 och Y_2 härleds analogt med teorem A.1. Den stokastiska processen (A.1) har då samma täthetsfunktion som (A.3) vilket konkluderar teoremets första påstående.

Givet den stokastiska processen (A.3) där $S_1(t), S_2(t) \in [0, T]$, $\tau = t - t_0$ är ett godtyckligt delintervall och $h = t_i - t_{i-1}$ är steglängden. Den historiska variansen ges då av

$$\bar{\sigma}_\tau^2 = \frac{1}{h(n-1)} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2,$$

där R_i för $i = 1, 2$ är den logaritmiska avkastningen och $\bar{R}$ är medelvärdet av den logaritmiska avkastningen enligt:

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \log \frac{S(t)}{S(t_0)}, \;\; R_i = \log \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}.$$

För $S_1(t)$ fås följande:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{(1)} &= \frac{1}{n}(\mu_1(t - t_0) + \bar{\sigma}_1(W_1(t) - W_1(t_0))) = \mu_1 h + \frac{\bar{\sigma}_1}{n}(W_1(t) - W_1(t_0)), \\ R_i^{(1)} &= \mu_1(t_i - t_{i-1}) + \bar{\sigma}_1(W_1(t_i) - W_1(t_{i-1})) = \mu_1 h + \bar{\sigma}_1(W_1(t_i) - W_1(t_{i-1})). \end{aligned}$$

Skattningsvariansen för $S(t)_1$ ges då av

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\tau,1}^2 &= \frac{1}{h(n-1)} \sum_{i=1}^n (R_i^{(1)} - \bar{R}^{(1)})^2 \\ &= \frac{\bar{\sigma}_1^2}{h(n-1)} \sum_{i=1}^n (W_1(t_i) - W_1(t_{i-1}) - \frac{1}{n}(W_1(t) - W_1(t_0)))^2 \\ &= \frac{\bar{\sigma}_1^2}{h(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n (W_1(t_i) - W_1(t_{i-1}))^2 - \frac{1}{n}(W_1(t) - W_1(t_0))^2 \right). \end{aligned}$$

Notera att väntevärdet av $(W(t)-W(s))^2$ motsvarar variansen av det oberoende tillskottet $(W(t)-W(s))$ enligt

$$\mathbb{E}[(W(t)-W(s))^2] = \text{Var}[W(t)-W(s)] = t-s,$$

vilket ger upphov till

$$\mathbb{E}[\bar{\sigma}^2_{\tau,1}] = \frac{\bar{\sigma}_1^2}{h(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1}) - \frac{1}{n}(t-t_0)\right) = \frac{\bar{\sigma}_1^2}{h(n-1)}(t-t_0)(1-\frac{1}{n}) = \bar{\sigma}_1^2.$$

Uträkningarna för $S_2(t)$ utförs på linkande sätt:

$$\bar{R}^{(2)} = \mu_2 h + \frac{\bar{\sigma}_2}{n}(\rho(W_1(t)-W_1(t_0)) + \sqrt{1-\rho^2}(W_2(t)-W_2(t_0))),$$
$$R_i^{(2)} = \mu_2 h + \bar{\sigma}_2(\rho(W_1(t_i)-W_1(t_{i-1})) + \sqrt{1-\rho^2}(W_2(t_i)-W_2(t_{i-1}))),$$

vilket resulterar i skattningsvariansen för $S(t)_2$ enligt

$$\bar{\sigma}^2_{\tau,2} = \frac{1}{h(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i^{(2)}-\bar{R}^{(2)})^2.$$

$W_1(t)$ och $W_2(t)$ är oberoende normalfördelade slumpvariabler med väntevärde $\mu = 0$ ty

$$\mathbb{E}[W_1(t)W_2(t)] = \mathbb{E}[W_1(t)]\mathbb{E}[W_2(t)] = 0.$$

Därmed är väntevärdet av skattningsvariansen för $S_2(t)$

$$\mathbb{E}[\bar{\sigma}^2_{\tau,2}] = \frac{\bar{\sigma}_2^2}{h(n-1)}nh(\rho^2+(1-\rho^2))(1-\frac{1}{n}) = \bar{\sigma}_2^2.$$

Sedan introduceras Pearsons korrelationskoefficient

$$\rho_\tau = \frac{\frac{1}{h(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i^{(1)}-\bar{R}^{(1)})(R_i^{(2)}-\bar{R}^{(2)})}{\sqrt{\frac{1}{h(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i^{(1)}-\bar{R}^{(1)})^2}\sqrt{\frac{1}{h(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i^{(2)}-\bar{R}^{(2)})^2}},$$

följt väntevärdena av respektive term

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{\frac{1}{h(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i^{(1)}-\bar{R}^{(1)})^2}\right] = \bar{\sigma}_1,\ \mathbb{E}\left[\sqrt{\frac{1}{h(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i^{(2)}-\bar{R}^{(2)})^2}\right] = \bar{\sigma}_2$$

och

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{h(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i^{(1)}-\bar{R}^{(1)})(R_i^{(2)}-\bar{R}^{(2)})\right] = \frac{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2}{h(n-1)}nh(1-\frac{1}{n})\rho = \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\rho.$$

Alltså är den historiska korrelationen

$$\mathbb{E}[\rho_\tau] = \frac{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\rho}{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2} = \rho$$

en väntevärdesriktig skattning för ρ. Motsvarande gäller för de historiska variansera för tillgångarna $S(t)_1$ och $S(t)_2$ d.v.s de är väntevärderiktiga skattningar för $\bar{\sigma}_1$ och $\bar{\sigma}_2$.

□

Teorem A.2. *(Radon-Nikodýms teorem). Låt $\mathbb{P}$, $\widetilde{\mathbb{P}}$: $\mathcal{F} \to [0,1]$ vara två sannolikhetsmått och låt $\mathbb{E}[\cdot]$ beteckna väntevärdet i dessa mått. Då är $\mathbb{P}$ och $\widetilde{\mathbb{P}}$ ekvivalenta om och endast om det existerar en slumpvariabel $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ sådan att $Z > 0$, $\mathbb{E}[Z] = 1$ och $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[Z\mathbb{I}_A]$.*

Proposition A.2. *Låt $\{W_2(t)\}_{t\geq 0}$ och $\{W_2(t)\}_{t\geq 0}$ beteckna Brownska rörelser i sannolikhetsmåttet $\mathbb{P}$. Givet $\theta \in \mathbb{R}$ och $T > 0$, då är sannolikhetsmåttet $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[Z\mathbb{I}_A]$ ekvivalent med $\mathbb{P}$.*

Bevis. Definiera funktionen

$$Z(t) = e^{-\theta_1 W_1(t) - \theta_2 W_2(t) - \frac{t}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2)},$$

där $W_1(t)$ och $W_2(t)$ är Brownska rörelser, medan θ_1 och θ_2 är konstanter. Enligt teorem A.2 är $Z(t) > 0$ ty den är en exponentialfunktion. Därmed är väntevärdet av $Z(t)$ vid $t = T$

$$\mathbb{E}\left[Z(T)\right] = e^{-\frac{T}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)} \mathbb{E}\left[e^{-\theta_1 W_1(T) - \theta_2 W_2(T)}\right]. \tag{A.4}$$

Notera att $W_i(T) \sim \mathcal{N}(0, T)$ och $Y_i = W_i(T)/\sqrt{T}$ för $i = 1, 2$. Således kan uttrycket (A.4) skrivas på formen:

$$\mathbb{E}[Z(T)] = e^{-\frac{T}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)} \mathbb{E}\left[e^{-\theta_1 \sqrt{T} Y_1 - \theta_2 \sqrt{T} Y_2}\right].$$

Då är Y_1 och Y_2 standardnormalfördelade ty

$$\theta_1 \sqrt{T} Y_1 + \theta_2 \sqrt{T} Y_2 = X, \;\; X \sim \mathcal{N}(0, T(\theta_1^2 + \theta_2^2)).$$

Följaktligen kan (A.4) skrivas på formen

$$\mathbb{E}[Z(T)] = e^{-\frac{T}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)} \mathbb{E}\left[e^{-X}\right].$$

Enligt *Law of the unconscious statistician* kan det tidigare uttrycket skrivas som

$$\mathbb{E}[Z(T)] = \frac{e^{-\frac{T}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)}}{2\pi\sqrt{T(\theta_1^2+\theta_2^2)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2T(\theta_1^2+\theta_2^2)} - x\right) dx = 1.$$

Alltså enligt Radon-Nikodýms teorem är $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[Z\mathbb{I}_A]$ ekvivalent med $\mathbb{P}$.

$\square$

Teorem A.3. *(Girsanovs teorem i två dimensioner). Låt $\{W_1(t)\}_{t\geq 0}$ och $\{W_2(t)\}_{t\geq 0}$ beteckna Brownska rörelser i sannolikhetsmåttet $\mathbb{P}$. Givet $\theta \in \mathbb{R}$ och $T > 0$, låt $\widetilde{\mathbb{P}}$ vara det ekvivalenta sannolikhetsmåttet till $\mathbb{P}$. Definiera den stokastiska processen $\{\widetilde{W}(t)_i\}_{t\geq 0}$ som*

$$\widetilde{W}_i(t) = W(t)_i + \theta_i t \quad \textit{för} \quad i = 1, 2.$$

Då är $\{\widetilde{W}(t)_i\}_{t\geq 0}$ Brownska rörelser i sannolikhetsmåttet $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Proposition A.3. *För alla $\theta \in \mathbb{R}$ och $T > 0$ har den tvådimensionella geometriska Brownska rörelsen i* (A.1) *följande simultantäthet i sannolikhetsmåttet $\widetilde{\mathbb{P}}$:*

$$\widetilde{f}_{S_1(t),S_2(t)}(x, y) = \frac{1}{2\pi t x y \sqrt{\det(\sigma \cdot \sigma^T)}} \exp\left(-\frac{1}{2t} A^T \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot A\right), \tag{A.5}$$

där matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \log \frac{x}{S_1(0)} - (\mu_1 - \theta \cdot \sigma_1)t \\ \log \frac{y}{S_2(0)} - (\mu_2 - \theta \cdot \sigma_2)t \end{pmatrix}.$$

Bevis. Betrakta de geometriska Brownska rörelserna (A.1) och antag att de är i sannolikhetsmåttet $\mathbb{P}$. Utför sedan variabelsubstitutionen $W_i(t) = \widetilde{W}_i(t) - \theta_i t$ vilket resulterar i

$$S_i = S_i(0) e^{(\mu_i - \theta\cdot\sigma_i)t + \sigma_i \cdot \widetilde{W}(t)} \quad \text{för} \quad i = 1, 2,$$

där $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ och $\widetilde{W}(t) = (W_1(t) + \theta_1 t, W_2(t) + \theta_2 t)$. Enligt Girsanovs teorem i två dimensioner är variabeln $W_i(t)$ är en Brownsk rörelse i sannolikhetsmåttet $\widetilde{\mathbb{P}}$ ty $\mathbb{P}$ är ekvivalent med $\widetilde{\mathbb{P}}$. Därmed är även simultantätheten i de två sannolikhetsmåtten ekvivalenta, vilket skulle visas.

$\square$

Teorem A.4. *Sannolikheten $\widetilde{\mathbb{P}}$ är riskneutral om och endast om $\theta = q$,*

$$q = \frac{\mu - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{\mu}.$$

Genom att ersätta $\theta = q$ i (A.5) erhålls simultantätheten för den tvådimensionella geometriska Brownska rörelsen i det riskneutrala sannolikhetsmåttet $\widetilde{\mathbb{P}}$:

$$\hat{f}_{S_1(t),S_2(t)}(x,y) = \frac{1}{2\pi txy\sqrt{\det(\sigma \cdot \sigma^T)}} \exp\left(-\frac{1}{2t} A^T \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot A\right),$$

där matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \log \frac{x}{S_1(0)} - (r - \frac{|\sigma_1|^2}{2})t \\ \log \frac{y}{S_2(0)} - (r - \frac{|\sigma_2|^2}{2})t \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

Det riskneutrala priset på en tillgång i en tvådimensionell Black-Scholes-marknad ges då av:

$$S_i = S_i(0) e^{(r - \frac{|\sigma_i|^2}{2})t + \sigma_i \cdot \widetilde{W}(t)},$$

där $\sigma_i = \big(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}\big)$ och $\widetilde{W}(t) = \big(\widetilde{W}(t)_1, \widetilde{W}(t)_2\big)$ för $i = 1, 2$.

Teorem A.5. *Priset av en option på två underliggande tillgångar med payoff-funktionen $Y = g(S_1(T), S_2(T))$ vid tiden $t = 0$ i en tvådimensionell Black-Scholes-marknad ges av*

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g\Big(\lambda_1 e^{\sqrt{T}x}, \lambda_2 e^{\sqrt{T}y}\Big) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{2\pi\sqrt{\det(\sigma \cdot \sigma^T)}} dxdy,$$

där

$$\lambda_i = S_i(0) \exp\Big(\Big(r - \tfrac{|\sigma_i|^2}{2}\Big)T\Big) \quad \textit{för} \quad i = 1, 2.$$

Denna är även känd som Black-Scholes formel i två dimensioner.

Bevis. Väntevärdet av $g((S_1(T), S_2(T))$ i det riskneutrala sannolikhetsmåttet $\widetilde{\mathbb{P}}$ ges av:

$$\widetilde{\mathbb{E}}[g((S_1(T), S_2(T))] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x,y)}{2\pi xyT\sqrt{\det(\sigma \cdot \sigma^T)}} \exp\left(-\frac{1}{2T} A^T \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot A\right), \tag{A.7}$$

där A är matrisen i (A.6). Inför sedan variablerna

$$x = \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\log \frac{x}{S_1(0)} - (r - \frac{|\sigma_1|^2}{2})T\right), \ y = \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\log \frac{y}{S_2(0)} - (r - \frac{|\sigma_2|^2}{2})T\right),$$

och utför omskrivningarna

$$x = S_1(0) e^{x\sqrt{T} + (r - \frac{|\sigma_1|^2}{2})T}, \ y = S_2(0) e^{y\sqrt{T} + (r - \frac{|\sigma_2|^2}{2})T}.$$

Insättning av ovanstående variabler i (A.7) ger följande:

$$\widetilde{\mathbb{E}}[g((S_1(T), S_2(T))] = \int_0^\infty \int_0^\infty g\Big(S_1(T) e^{\sqrt{T}x}, S_2(T) e^{\sqrt{T}y}\Big) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot (\sigma \cdot \sigma^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{2\pi\sqrt{\det(\sigma \cdot \sigma^T)}} dxdy,$$

där

$$S_1(T) = S_1(0) \exp\Big(\Big(r - \frac{|\sigma_1|^2}{2}\Big)T\Big), \ S_2(T) = S_2(0) \exp\Big(\Big(r - \frac{|\sigma_2|^2}{2}\Big)T\Big).$$

Då är

$$\Pi_{\mathrm{Y}}(0) = e^{-rT} \widetilde{\mathbb{E}}[g((S_1(T), S_2(T))].$$

□

A.2 N-dimensionell Black-Scholes-marknad

Det riskneutrala priset på en tillgång i en N-dimensionell Black-Scholes-marknad ges av:

$$S_i = S_i(0)e^{(r-\frac{|\sigma_i|^2}{2})t+\sigma_i\cdot\widetilde{W}(t)},$$

där $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}\ldots, \sigma_{iN})$ för $i = 1, 2, \ldots, N$ och $\widetilde{W}(t) = (\widetilde{W}_1(t), \widetilde{W}_2(t), \ldots, \widetilde{W}_N(t))$.

Teorem A.6. *Den simultana täthetsfunktionen för $S_1(t), S_2(t), .., S_N(t)$ ges av:*

$$f_{S_1(t),S_2(t),\ldots,S_N(t)}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{x_1x_2\ldots x_N\sqrt{(2\pi t)^N\det(\sigma\cdot\sigma^T)}}\exp\Big(-\frac{1}{2t}A^T\cdot(\sigma\cdot\sigma^T)^{-1}\cdot A\Big).$$

där

$$A = \begin{pmatrix} \log\frac{x_1}{S_1(0)} - \mu_1 t \\ \log\frac{x_2}{S_2(0)} - \mu_2 t \\ \vdots \\ \log\frac{x_N}{S_N(0)} - \mu_N t \end{pmatrix}.$$

Teorem A.7. *Priset av en option på N underliggande tillgångar med payoff-funktionen $Y = g(S_1(T), S_2(T), ..., S_N(T))$ vid tiden $t = 0$ i en N-dimensionell Black-Scholes-marknad ges av:*

$$\Pi_Y(0) = \int_{\mathbb{R}}\cdots\int \frac{g\Big(\lambda_1 e^{\sqrt{T}x_1}, \ldots, \lambda_N e^{\sqrt{T}x_N}\Big)}{2\pi\sqrt{\det(\sigma\cdot\sigma^T)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\Big(x \quad \ldots \quad y\Big)\cdot(\sigma\cdot\sigma^T)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ y\end{pmatrix}\right)dx_1\ldots dx_N,$$

där

$$\lambda_i = S_i(0)\exp\Big(\Big(r - \tfrac{|\sigma_i|^2}{2}\Big)T\Big) \text{ för } i = 1, 2, \ldots, N.$$

B | Explicita formler för optionspremier

Nedan redovisas samtliga analytiska formler för optionspremier som har använts i det här arbetet.

B.1 Relative outperformance-option

Premien för en relative outperformance-option vid $t = 0$ ges av [3]:

$$\Pi_Y(0) = \frac{S_1(0)}{S_2(0)}\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-) \tag{B.1}$$

där

$$d_\pm = \frac{\log \frac{S_1(0)}{KS_2(0)} + \left(\hat{r} \pm \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}\right)T}{|\sigma_1 - \sigma_2|\sqrt{T}}$$

och

$$\hat{r} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|^2}{2} + \left(\frac{|\sigma_2|^2}{2} - \frac{|\sigma_1|^2}{2}\right).$$

B.2 Upp-och-ut two asset barrier-option

Premien för en upp-och-ut two asset barrier-option vid $t = 0$ ges av [10]:

$$\begin{aligned}\Pi_Y(0) = S_1(0)e^{-rT}&\left[M(d_1, e_1, -\rho) - \exp\left(\frac{2(\mu_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)\log\frac{B}{S_2(0)}}{\sigma_2^2}\right)M(d_3, e_3, -\rho)\right] \\ - Ke^{-rT}&\left[M(d_2, e_2, -\rho) - \exp\left(\frac{2\mu_2\log\frac{B}{S_2(0)}}{\sigma_2^2}\right)M(d_4, e_4, -\rho)\right],\end{aligned} \tag{B.2}$$

där

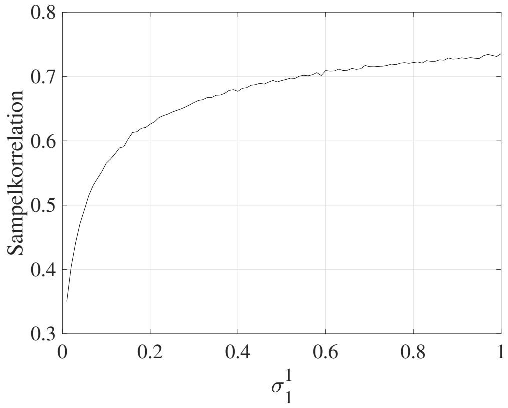
$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\log\frac{S_1(0)}{K} + (\mu_1 + \sigma_1^2)T}{\sigma_1 T}, & d_2 &= d_1 - \sigma_1\sqrt{T}, \\
d_3 &= d_1 + \frac{2\rho\log\frac{B}{S_2(0)}}{\sigma_2\sqrt{T}}, & d_4 &= d_2 + \frac{2\rho\log\frac{B}{S_2(0)}}{\sigma_2\sqrt{T}}, \\
e_1 &= \frac{\log\frac{B}{S_2(0)} - (\mu_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)T}{\sigma_2\sqrt{T}}, & e_2 &= e_1 + \rho\sigma_1\sqrt{T}, \\
e_3 &= e_1 - \frac{2\log\frac{B}{S_2(0)}}{\sigma_2\sqrt{T}}, & e_4 &= e_2 - \frac{2\log\frac{B}{S_2(0)}}{\sigma_2\sqrt{T}}, \\
\mu_1 &= -\frac{\sigma_1^2}{2}, & \mu_2 &= -\frac{\sigma_2^2}{2},
\end{aligned}$$

och

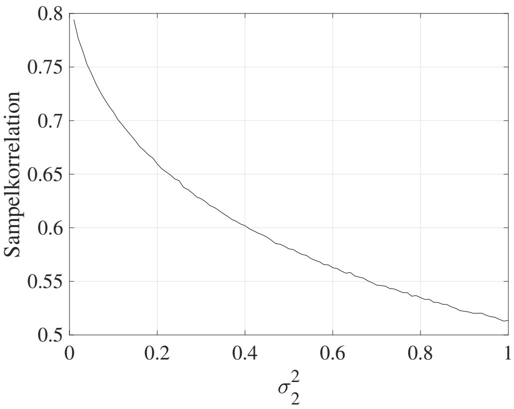
$$M(a, b, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b}\exp\left[\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right]dxdy,$$

vilken är sannolikhetsfuktionen för en bivariat normalfördelning.

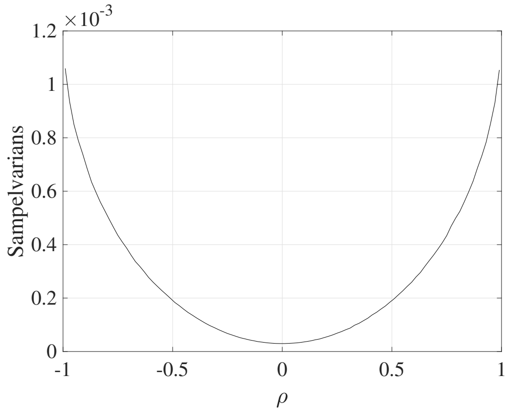
C | Parameteranalys av CEV-modellen



(a) Sampelkorrelation mot σ_1^2



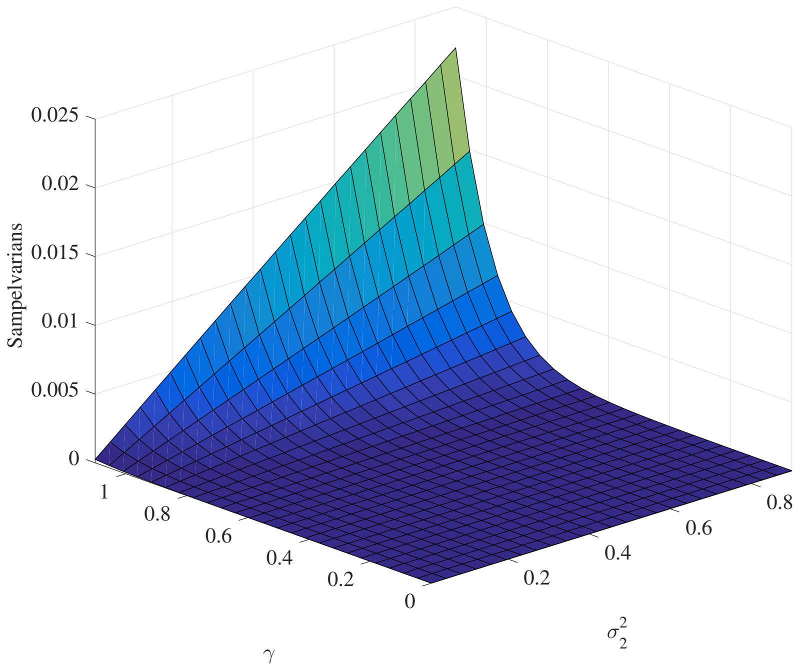
(b) Sampelkorrelation mot σ_2^2



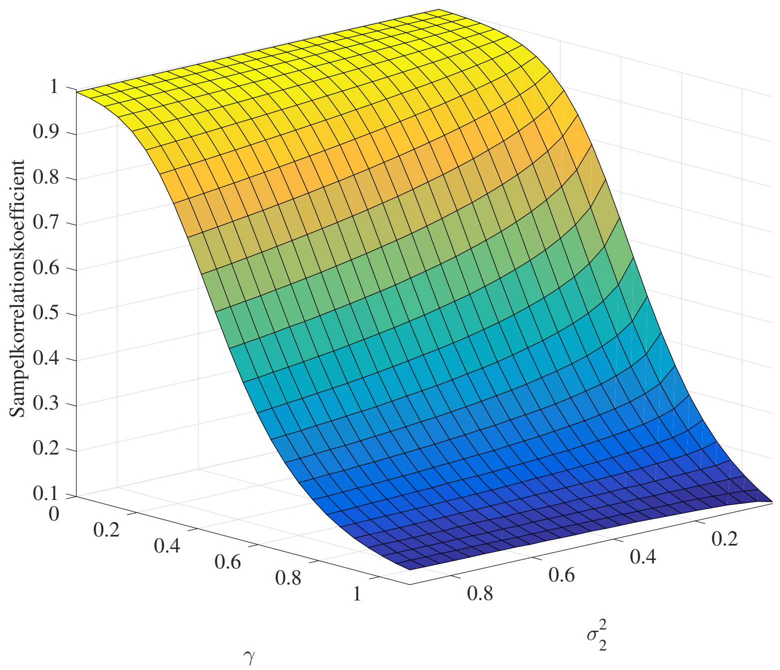
(c) Sampelvarians mot ρ

Figur C.1: Sampelparametrar mot inmatningsparametrar i CEV-modellen.

Sampelvariansen av $S_2(t)$ är beroende av både ρ och σ_2^2, och ökar med σ_2^2. Dock är sampelvariansen vid $\gamma = 0.50$ liten med ett minimum då $\rho = 0$, vilket implicerar ett svagt beroende på γ.



Figur C.2: Sampelvarians som en funktion av γ och σ_2^2.



Figur C.3: Sampelkorrelation koefficient som en funktion av γ och σ_2^2.

D | Matlab-kod

I det här avsnittet presenteras Matlab-koden som har använts för att simulera de olika optionspremierna.

D.1 Payoff-funktioner

Hur utbetalningsfunktionerna togs fram och det initiala priset beräknades redovisas i följande del.

D.1.1 Asiatisk two asset-option

```
function [payOff] = PayOffTwoAssetAsian(path,weight,K)

    weightedSum = weight*path(:,:,1) + (1-weight)*path(:,:,2);

    payOff = max(0,mean(weightedSum)-K);

end
```

D.1.2 Asiatisk best of assets or cash-option

```
function [payOff] = PayOffAsianBestOfAssetsOrCash(path,K)

    N = length(path(:,:,1),1);

    mean1 = mean(path(:,:,1));
    mean2 = mean(path(:,:,2));

    values = [mean1; mean2; K*ones(N,1)];

    payOff = max(0,values);

end
```

D.1.3 Lookback spread-option

```
function [payOff] = PayOffLookbackSpread(path,K)

    difference = abs(path(:,:,1)-path(:,:,2));

    payOff = max(0,difference-K);

end
```

D.1.4 Two asset barrier-option

```
function [payOff] = PayOffTwoAssetBarrier(path,K,B)

    n = length(path(:,:,1),2);

    payOff = zeros(1,n);

    for i = 1:n
        if max(path(:,i,2)) >= B
            payOff(i) = 0;
        else
            payOff(i) = max(0,path(end,i,1)-K);
        end
    end

end
```

D.2 Generering av sampelvägar med GBR-modellen

```
function [path] = StockPaths(s,sigma,r,T,N,n)

    h   = T/N;
    q   = ones(N,n);
    rho = sigma(1,:)*sigma(2,:)'/(norm(sigma(1,:))*norm(sigma(2,:)));

    W1 = sqrt(h)*randn(N,n);
    W2 = sqrt(h)*randn(N,n);

    sigma1 = norm(sigma(1,:));
    sigma2 = norm(sigma(2,:));

    path1 = s(1)*exp((r - sigma1^2/2)*h.*cumsum(q)...
        + sigma1*cumsum(W1));
    path2 = s(2)*exp((r - sigma2^2/2)*h.*cumsum(q)...
        + sigma2*(rho*cumsum(W1) + sqrt(1 - rho.^2)*cumsum(W2)));

    path(:,:,1) = [s(1)*ones(1,n);path1];
    path(:,:,2) = [s(2)*ones(1,n);path2];

end
```

D.3 Generering av sampelvägar med CEV-modellen

```
function [path] = CEVPaths(s,sigma,gamma,r,T,N,n)

    h  = T/N;

    path1 = zeros(N,n); path1(1,:) = s(1);
    path2 = zeros(N,n); path2(1,:) = s(2);

    dW1 = sqrt(h)*randn(N,n);
    dW2 = sqrt(h)*randn(N,n);

    for i = 2:N
        path1(i,:) = path1(i-1,:).*(1 + r*h...
            + (sigma(1,1)*dW1(i,:) + sigma(1,2)*dW2(i,:)));
        path2(i,:) = path2(i-1,:).*(1 + r*h + (sigma(2,1)*dW1(i,:)))...
            + sigma(2,2)*path2(i-1,:).^(gamma).*dW2(i,:);
    end

    path(:,:,1) = path1;
    path(:,:,2) = path2;

end
```