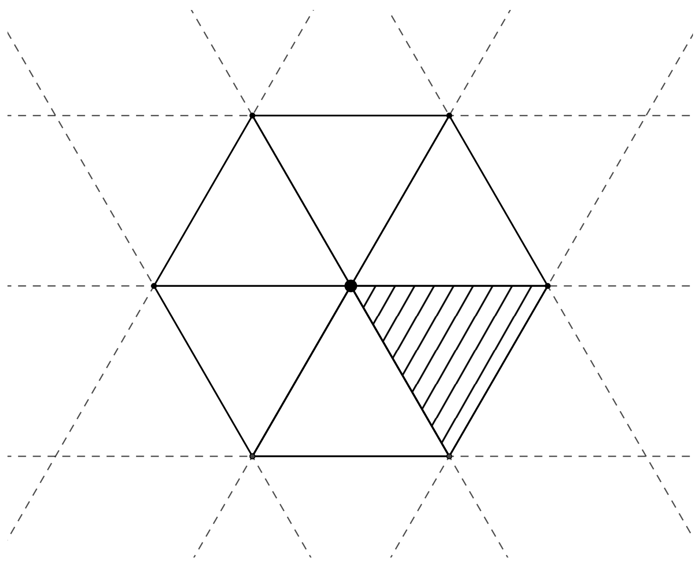
CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Klassifikation av polygoner med trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn under Dirichletrandvillkor

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Max Blom
Henrik Nordell
Oliver Thim
Jack Vahnberg



Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2019

Klassifikation av polygoner med trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn under Dirichletrandvillkor

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk fysik vid Chalmers

Oliver Thim

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Max Blom Henrik Nordell Jack Vahnberg

Handledare: Julie Rowlett Matematiska vetenskaper
Examinator: Maria Roginskaya, Ulla Dinger

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2019

Vi vill tillägna detta arbete till minnet av Brian J. McCartin, som med sitt arbete inspirerade oss stort. Vi vill också tacka vår handledare Julie Rowlett för hennes engagemang och hjälp genom hela arbetsprocessen.

Bidragsrapport

Inledning

I denna rapport kommer de individuella bidragen till arbetet diskuteras. Det som främst kommer diskuteras är ansvarsområden och arbetsprocessen. Då detta arbete inneburit att vi har funderat och diskuterat mycket är det svårt att kvantifiera exakt vilka delar varje person bidragit med till slutrapporten då alla mer eller mindre varit delaktiga i alla delar under någon tidpunkt. Vi står alltså alla bakom allt som är skrivet i alla olika delar av rapporten.

Under arbetet har vi fört loggbok, där vi kort kommenterat vad vi arbetat på för att se hur arbetet fortskridit. Vi har också hållit oss förvånansvärt bra till vår preliminära planering som angavs i planeringrapporten. Även om loggboken funnits har vi lagt mindre och mindre vikt vid den då vi som sagt i stor utsträckning jobbat tillsammans och hållit varandra uppdaterade muntligt.

Ansvarsområden

Kapitel 2 och 3

I början av arbetet delade vi upp så att Jack och Henrik hade hand om delen att härleda egenfunktionerna, det som nu är kapitel 2. Oliver och Max hade hand om klassifikationsdelen som nu är kapitel 3 i rapporten. Det huvudsakliga innehållet i dessa kapitel är alltså utformat enligt ovanstående uppdelning. Mot slutet av arbetet, och efter många revideringar, har vi också bytt runt lite för att förbättra det första preliminära innehållet. Anledningen till att vi har bytt runt är dels att alla tycker det är intressant och dels att det är bra att få ny input på vad som kan förbättras. Det har resulterat i större insikt i arbetet, och att fler fel upptäckts tidigare.

Kapitel 4

Det sista kapitlet, kapitel 4, om kopplingen mellan Weylgrupper, klassifikation och kristaller har väldigt mycket växt fram under resans gång och bit för bit har fallit på plats. Just detta kapitel är nog det vi diskuterat mest tillsammans och en stor anledning till det är att den matematiken var ganska ny för oss alla. Det var också den del av arbetet som inte på förhand var så given vad den skulle innehålla.

Även fast vi gjort mycket tillsammans har vi ändå bidragit med lite olika delar och infallsvinklar i sista kapitlet. I början höll Oliver på ganska mycket med gitter och kristallbiten, som är en del av kapitel 4. Henrik och Jack kom först in på spåret att utforska rotsystem och Weylgrupper. Max intresserade sig kanske mest för de högredimensionella bitarna av våra resonemang, vilket ledde till flera framsteg. Även fast vi inte har med så mycket konkret om klassifikation i högre dimensioner, på grund av platsbrist, gav ändå de resonemang som utvecklades viktig förståelse även för det tvådimensionella fallet.

Kreativa idéer

Om vi ändå ska försöka ge lite beröm till olika personer för specifikt konkreta idéer och prestationer så är det några saker som utmärker sig. Jack hade grundidéen till beviset för egenfunktionernas fullständighet, som är en variation på hur det visats tidigare i litteraturen. I det inledande stadiet då Oliver och Max hade hand om klassifikationskapitlet följde vi till stor del det McCartin gjort. En sak som de gjorde annorlunda var att på ett mer konkret sätt försöka motivera vilka polygoner som är strikt tessellerbara utgående från Lamés fundamentalsats och satsen om försvinnande linjer vilket ledde till speglingsprincipen och satsen om framtagande av dessa polygoner.

Henrik har bidragit med att vara den som antagligen gjort mest räkningar och faktiskt kollat att allt om egenfunktiner och egenvärden faktisk stämmer. Henrik bidrog också väldigt mycket till att vi förstod McCartins utökade klassifikationssats med dess bevis.

I övrigt måste vi alla ärligt säga att vi kommit på många av de kreativa idéerna när vi diskuterat med varandra och det är svårt att säga vilken som var den mest bidragande till en given idé. I det stora hela har vi haft bra diskussioner och vi har inte varit rädda för att ta debatter med varandra och verkligen vara ärliga med när vi inte hänger med i ett resonemang. Detta har lett till att vi hittat fel och kunnat utveckla resonemang och bevis som varit oklara.

Övriga bidrag

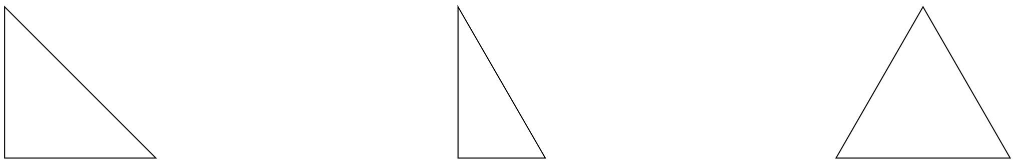
Övriga bidrag som ändå kan ses som mer individuella är att Henrik och Max har gjort de flesta bilderna i arbetet. Max har också skrivit bilagan om lösningar till den diofantiska ekvationen för att få fram vinklarna till de strikt tessellerbara polygonerna samt beviset av speglingsprincipen. Jack har skrivit den populärvetenskapliga sammanfattningen. Jack och Henrik har till störst del skrivit inledningen och syftet. Oliver har skrivit beviset till Lamés fundamentalsats och koordinatbyte till fullständighetsbevis (som ligger som bilagor) samt denna bidragsrapport.

Populärvetenskaplig presentation

Under 1780-talet spenderade Pierre-Simon Laplace, en fransk matematiker och fysiker, sin tid med att studera himlakroppars rörelse. Resultatet blev, förutom en nyanserad teori kring planeternas rörelse, även den första studien av vad som nu kallas Laplaceekvationen. Denna ekvation har sedan dess uppkommit på en rad olika områden inom fysik, med varianter som beskriver hur värme sprids och hur ljudvågor rör sig i luften.

Inom studier av Laplaceekvationen kan man intressera sig för att lösa ekvationen i olika geometriska miljöer. Vad detta innebär är att man löser ekvationen på en form, som en triangel eller en kvadrat. Anledningen till att detta är intressant är för att ofta är man intresserade av saker med olika form, som hur värme sprider sig i en lång stav eller ljud rör sig i ett runt rum.

Problemet är att det generellt sett är väldigt svårt att lösa Laplaceekvationen. Vissa former är lätta, medan andra vet man inte ens om det går. Exempel på lätta former är rektanglar, lådor, klot och torusar[I]. Men andra former, som trianglar, pyramider eller bara någon slumpmässig form är mycket svårare.



(a) Likbent rätvinklig triangel ($45° - 45° - 90°$).

(b) Halv liksidig triangel ($30° - 60° - 90°$).

(c) Liksidig triangel ($60° - 60° - 60°$).

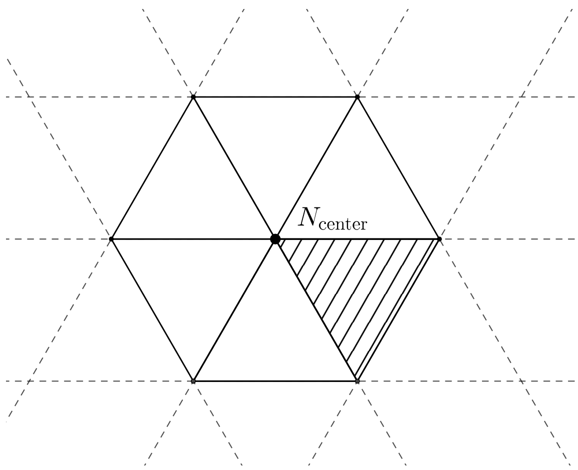
Figur 1

I vårt arbete presenterar vi en lösningsgång för Laplaceekvationen för tre olika trianglar, som vi försöker göra så enkel som möjligt. Vi gör detta genom att först lösa ekvationen på en rektangel, vilket är mycket lättare. Efter det "översätter" vi lösningen till triangeln. På så vis kan vi lösa ekvationen på en triangel genom att först lösa den på den lättare rektangeln. Hur denna översättning går till är att man "viker" en rektangel. Ifall du har en kvadrat och viker den längs diagonalen får du triangeln i figur 1a.

Eftersom många former är såpass svåra att lösa ekvationen på, så kan det vara intressant att veta vilka man kan översätta till lättare former. Detta var en fråga som Brian J. McCartin ställde år 2009, mer än 200 år efter att Laplace började studera ekvationen. McCartin lyckades visa, på ett väldigt elegant sätt, att det var endast dessa tre trianglar, rektangeln och kvadraten som gick att lösa på detta sätt (se figur 1). McCartin visade att lösningarna till en form är relaterade till om vi täcka planet med den på ett visst sätt. Vad vi menar med detta är att formen är "kaklingsbar", det vill säga om vi lägger massvis med kopior av formen brevid varandra kan vi täcka en platt yta. Precis som med ett kakelmönster vill vi att det bildas raka linjer som man kan följa från ena kanten av ytan till andra. Kvadraten är tydligt ett exempel på en sådan kaklingsbar form, men även en triangel med lika långa sidor (se figur 2).

Något som är intressant med dessa typer av kaklingar är att de liknar kristaller. Kristaller är en regelbunden struktur som studeras inom fasta tillståndets fysik. I rapporten påvisar vi en koppling mellan kristaller och formerna som vi kan lösa Laplaceekvationen på. Alltså relateras denna abstrakta ekvation till vilka sätt atomer eller molekyler kan ordna sig regelbundet. Vi får alltså en koppling mellan denna svårlösta, ganska abstrakta ekvationen och kristallbildning.
Den matematiska studien av kristaller är ett ganska utforskat fält, med flera intressanta resultat. Ett spännande resultat är att det går att bestämma vilka typer av kristaller som kan bildas i

[I]Torusar ser ut som dougnuts.



Figur 2: Exempel på kakling av en liksidig triangel.

högre dimensioner. Här pratas alltså om 3, 4, 5 eller högredimensionella kristaller. Dessa kristaller är väldigt abstrakta objekt, men kan användas för att beskriva mer komplicerade fysiska ämnen. Något som vore spännande att studera i framtiden är ifall samma koppling mellan former i högre dimensioner kan kopplas till dessa kristaller. I så fall skulle man bestämma dessa former även i högre dimensioner.

Sammandrag

Vi behandlar egenstrukturen för Laplaceoperatorn på trianglarna med vinklar (60°, 60°,60°); (30°, 60°,90°) och (45°, 45°,90°). Med hjälp av tidigare arbeten av M. Práger (1998) och M. A. Pinsky (1980) härleds egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor. Vi visar egenfunktionernas fullständighet för L_2 på respektive triangel.

Vidare presenteras ett resultat av Brian J. McCartin (2008) som klassificerar vilka polygoner som har en fullständig uppsättning så kallade *trigonometriska egenfunktioner*. Dessa polygoner är trianglarna ovan samt kvadraten och rektangeln. Vi kopplar McCartins resultat till gitter, kristaller och *Weylgrupper* genom att undersöka symmetrier som ligger till grund för klassifikationen. Pierre H. Bérard (1980) undersökte kopplingen mellan vissa typer av egenfunktioner och symmetrier och visade att alla *alkover* till Weylgrupper har trigonometriska egenfunktioner. Vi konstaterar att i $\mathbb{R}^2$ gäller även omvändningen, att alla polygoner med trigonometriska egenfunktioner är alkover till Weylgrupper.

Nyckelord: Laplace ekvation, polygoner, egenfunktioner till Laplaceoperatorn, trigonometriska egenfunktioner, alkover, Weylgrupper, klassifikation, gitter, kristaller, symmetrier, kristallografiska restriktionssatsen, tessellation.

Abstract

We consider the eigenstructure of the Laplace operator on triangles with the angles (60°, 60°,60°); (30°, 60°,90°) och (45°, 45°,90°). Using the earlier work by M. Práger (1998) and M. A. Pinsky (1980) we find eigenfunctions of the Laplace operator with Dirichlet boundary conditions. We show completeness of eigenfunctions in L_2 for each triangle.

Moreover, we present a result by Brian J. McCartin (2008) that classifies which polygons have a complete set of *trigonometric eigenfunctions*. These polygons are the triangles mentioned above, the rectangle and the square. We connect McCartins result to symmetries of lattices, crystals and Weyl groups. In 1980 Pierre H. Bérard studied the connection between different types of eigenfunctions and symmetries and proved that all *alcoves* of Weyl groups have trigonometric eigenfunctions. We point out the fact that in $\mathbb{R}^2$ the converse is also true. That is, all polygons with a complete set of trigonometric eigenfunctions are alcoves.

Keywords: Laplace equation, polygons, eigenfunctions of the Laplace operator, trigonometric eigenfunctions, alcoves, Weyl groups, classification, lattice, crystals, symmetries, crystallographic restriction theorem, tessellation.

Innehåll

1 Inledning **1**
1.1 Syfte 1
1.2 Förkunskaper 2

2 Härledning av egenfunktioner **2**
2.1 Likbent rätvinklig triangel 4
2.2 Halv liksidig triangel 5
2.3 Liksidig triangel 7
2.4 Fullständighet av egenfunktioner till trianglarna 9

3 Klassifikation av polygoner med trigonometriska egenfunktioner i $\mathbb{R}^2$ **10**
3.1 Resultat för trigonometriska egenfunktioner 10
3.2 McCartins klassifikationssats 11
3.3 McCartins utökade klassifikationssats 14

4 Koppling mellan kristaller, symmetrier och klassifikation **15**
4.1 Kristallografiska restriktionssatsen 16
4.2 Alkover och strikt tessellerande polygoner 17
4.3 Sammanfattning och framtida möjligheter 19

A Matematiska definitioner **22**

B Koordinatbyte till fullständighetsbeviset **23**

C Bevis av Lamés Fundamentalsats **25**

D Lösningar till heltalsekvationer **27**

E Figurer **27**

1 Inledning

Pierre-Simon Laplace började sina studier av vad som idag kallas Laplaceekvationen under 1780-talet. För Laplace var ekvationen relevant för att beskriva gravitationens potential, en utveckling av Newtons teorier som idag är grunden för fältet potentialteori. Laplace ekvation lyder

$$\Delta u = 0,$$

där Δ är Laplaceoperatorn som i kartesiska koordinater $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieras som

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Denna operator uppkommer i ett flertal vanliga differentialekvationer såsom vågekvationen och värmeledningsekvationen. I detta arbete är vi intresserade av egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor på en polygon D med randen ∂D. Det vill säga lösningar till

$$\begin{cases} \Delta u\,(x, y) = \lambda u\,(x, y)\,, & (x, y) \in D \\ u\,(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial D, \end{cases} \tag{1.1}$$

där u är en egenfunktion och λ är tillhörande egenvärde. Med hjälp av dessa egenfunktioner kan vi lösa ett flertal differentialekvationer, bland annat de tidigare nämnda. Att lösa ekvation (1.1) med variabelseparation funkar bra för vissa polygoner om randvillkoren också är lätthanterliga. Läsaren uppmanas att påminna sig om hur man härleder egenfunktionerna på rektangeln $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$.

För andra polygoner är det betydligt svårare att hitta egenfunktioner analytiskt och endast ett fåtal exempel existerar i litteraturen. Ett tidigt sådant exempel är Gabriel Lamés arbete från 1833 [1] i vilket han hittade egenfunktionerna på den liksidiga triangeln. Drygt 100 år senare, 1980, härledde Mark A. Pinsky samma egenfunktioner på ett alternativt sätt [2] och visade 1985 deras kompletthet [3]. Parallellt med Pinskys arbete konstruerade Pierre H. Bérard [4] egenfunktioner på en speciell typ av geometriska objekt kopplade till Weylgrupper. Bland dessa objekt återfinns den liksidiga triangeln men även andra trianglar såsom den halva liksidiga triangeln.

Merparten av detta arbete behandlar Brian J. McCartins arbete [5] som slutfördes 2011. McCartin spenderade sju år med att kompilera resultat om den liksidiga triangelns egenfunktioner. Med sitt pedagogiska grepp underlättar McCartins arbete förståelsen av Laplaceoperatorns egenfunktioner. I hans arbete presenteras också flera nya resultat. Ett intressant sådant är en sats som ger en komplett lista över de polygoner till vilka Laplaceoperatorns egenfunktioner kan uttryckas i termer av endast sinus och cosinus.

1.1 Syfte

Syftet med det här arbetet är att popularisera och belysa tidigare arbeten av Lamé, Pinsky, Práger och McCartin. Vi vill på ett tydligt och pedagogiskt sätt presentera härledningen av egenfunktioner och egenvärden till den liksidiga, halva liksidiga och likbent rätvinkliga triangeln, och påvisa deras fullständighet. Därutöver vill vi presentera McCartins klassifikationssatser, och koppla resultatet till symmetrier över gitter och Weylgrupper. Det sistnämnda bygger på Bérards [4] arbete.

1.2 Förkunskaper

Innan vi börjar ta fram egenfunktioner och egenvärden till Laplaceoperatorn kommer vi introducera några centrala definitioner, begrepp och satser som kommer genomsyra hela arbetet. Vi definierar en speciell klass av egenfunktioner till Laplaceoperatorn som kallas **trigonometriska egenfunktioner**.

Definition 1.1. *En egenfunktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sägs vara en **trigonometrisk egenfunktion** om den kan skrivas som en ändlig summa av trigonometriska funktioner enligt*

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_j a_j \sin(\boldsymbol{L}_j \cdot \boldsymbol{x} + \alpha_j) + b_j \cos(\boldsymbol{L}_j \cdot \boldsymbol{x} + \beta_j)$$

där $a_j, b_j, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$ och $\boldsymbol{L}_j \in \mathbb{R}^n$ är konstanter och $|\boldsymbol{L}_j|^2 = k^2$ för alla j och någon konstant $k \in \mathbb{R}$.

Notera att villkoret $|\boldsymbol{L}_j|^2 = k^2$ gör att $\Delta u = -k^2 u$, vilket innebär att u är en egenfunktion till Laplaceoperatorn med egenvärde $\lambda = -k^2$ givet att randvillkoren är uppfyllda.

Ett viktigt resultat för trigonometriska egenfunktioner, Lamés fundamentalsats, presenterades av Gabriel Lamé år 1866 [1] och beskriver hur en trigonometrisk egenfunktion i $\mathbb{R}^3$ beter sig kring plan på vilka egenfunktionen eller normalderivatan till egenfunktionen försvinner[I]. McCartin [5] presenterar och bevisar denna sats i $\mathbb{R}^2$. Vi presenterar en mer generell version där funktionen är definierad i $\mathbb{R}^n$. Först definierar vi begrepp som generaliserar jämn och udda.

Definition 1.2. *En funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är **symmetrisk/antisymmetrisk** om den är jämn/udda med avseende på ett givet hyperplan.*

Sats 1.1 (Lamés fundamentalsats). *Antag att $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en trigonometrisk egenfunktion till Laplaceoperatorn enligt definition 1.1, då gäller att*

1. *u är antisymmetrisk kring varje $(n-1)$-dimensionellt plan $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ på vilket u försvinner.*
2. *u är symmetrisk kring varje $(n-1)$-dimensionellt plan $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ på vilket normalderivatan $\frac{\partial u}{\partial n}$ försvinner.*

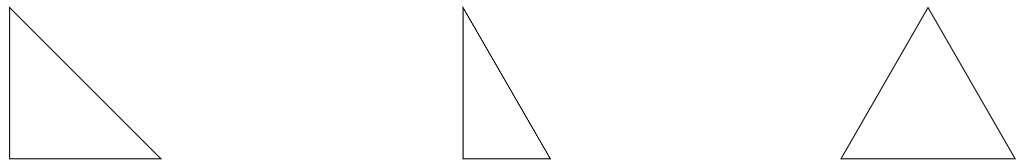
Med utgångspunkt i McCartins bevis för det tvådimensionella fallet presenterar vi ett bevis för påstående (1) i $\mathbb{R}^n$ som finns i appendix C. Påstående (2) kan visas helt analogt. Beviset görs essentiellt genom att utföra ett koordinatbyte och utnyttja trigonometriska omskrivningar. Vidare definierar vi nodlinjer.

Definition 1.3. *Vi säger att en linje $\boldsymbol{l}$ är en **nodlinje** till en funktion u om $u(x) = 0$ för alla $x \in \boldsymbol{l}$.*

2 Härledning av egenfunktioner

I detta kapitel härleder vi egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor över de tre olika trianglarna som syns i figur 3.

[I] Att en funktion försvinner, eller engelskans *vanishes*, betyder att funktionen är lika med 0.



(a) Likbent rätvinklig triangel ($45° - 45° - 90°$).

(b) halv liksidig triangel ($30° - 60° - 90°$).

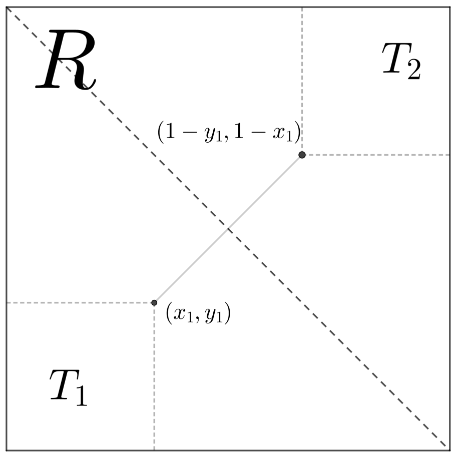
(c) Liksidig triangel ($60° - 60° - 60°$).

Figur 3

De sökta egenfunktionerna u löser per definition randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \Delta u\,(x,y) = \lambda u\,(x,y)\,, & (x,y) \in T, \\ u\,(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial T, \end{cases} \tag{2.1}$$

där T är en av de tidigare nämnda öppna trianglarna och ∂T betecknar randen av T. För att lösa randvillkorsproblemet använder vi en metod utvecklad av Práger [6] för Laplaceoperatorn över en liksidig triangel och anpassad av Damle och Peterson [7] för den likbenta rätvinkliga triangeln. Prágers metod grundar sig i konstruktionen av en **vikningsoperator** $\mathscr{F}$ som relaterar en funktion definierad på en rektangel R till en funktion definierad på en triangel T. Vikningsoperatorns definition baseras på att vissa trianglar T har symmetriegenskaper som gör att en rektangel R kan bildas genom upprepad spegling av T längs dess sidor. Som exempel på detta ses i figur 4 hur spegling i hypotenusan av den likbent rätvinkliga triangeln ger upphov till enhetskvadraten.



Figur 4: Två likbenta rätvinkliga trianglar T_1 och T_2 vars union bildar enhetskvadraten R.

Vikningen av en funktion $u : R \to \mathbb{R}$ ser i allmänhet ut som

$$\mathscr{F}u(x,y) = \sum_{i=1}^{N} c_i u(x_i, y_i), \quad u \in L_2(R),$$

där $(x,y) \in T$, $c_i \in \{1,-1\}$ och (x_i, y_i) är transformerade koordinater tillhörande triangeln T_i som uppkommer av upprepad spegling av T. Vi lämnar de triangelspecifika definitionerna av $\mathscr{F}$ och (x_i, y_i) till nästkommande avsnitt. Att vikningen av en egenfunktion på R bildar en egenfunktion på T är bevisat för den halva liksidiga triangeln [6] och likbenta rätvinkliga triangeln [7].

Sats 2.1. *Låt T vara den halva liksidiga eller likbent rätvinkliga triangeln och låt R vara respektive rektangel skapad genom upprepad spegling av T. Om v är en egenfunktion till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor på R så är vikningen $\mathscr{F}v$ en egenfunktion till Laplaceoperatorn på T.*

Bevis. Beviset bygger i huvudsak på att Δ är invariant under vissa koordinatbyten vilket visas i appendix B. Vikningen av v ges per definition av $\mathscr{F}v\,(x,y) = \sum_{i=1}^{N} c_i v\,(x_i, y_i)$. Genom att utnyttja att Laplaceoperatorn är linjär fås

$$\Delta \mathscr{F} v = \Delta \sum_{i=1}^{N} c_i v\,(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{N} c_i \Delta v\,(x_i, y_i)\,.$$

Då de transformerade koordinaterna (x_i, y_i) är reflektioner av de ursprungliga koordinaterna $(x, y) \in T$ runt någon linje följt av en translation kan vi utnyttja resultatet från korollarium B.1 som säger att

$$\Delta v\,(x_i, y_i) = \lambda v\,(x_i, y_i)\,, \quad i = 1, \ldots, N$$

vilket ger

$$\Delta \mathscr{F} v = \sum_{i=1}^{N} c_i \lambda v\,(x_i, y_i) = \lambda \mathscr{F} v.$$

Att $\mathscr{F}v$ uppfyller randvillkoren på ∂T kommer följa av definitionerna av c_i och (x_i, y_i) i respektive fall. Antingen är termerna i $\mathscr{F}v$ lika med noll vilket följer av att v uppfyller Dirichletrandvillkoret på R eller så kancellerar termerna parvis vilket följer av valet av c_i för respektive triangel. De triangelspecifika vikningsoperatorerna definieras i ekvation (2.2), (2.7) och (2.11). Alltså är $\mathscr{F}v$ en egenfunktion till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor på T och satsen är bevisad. $\square$

För att härleda egenfunktioner på T kan vi alltså lösa det betydligt enklare problemet att hitta egenfunktioner till Laplaceoperatorn på R och sedan med $\mathscr{F}$ transformera funktionerna till en lösning på T. Svårigheten ligger då huvudsakligen i att hitta en lämplig definition av $\mathscr{F}$ för varje triangel.

2.1 Likbent rätvinklig triangel

Låt T_1 vara den öppna triangeln med hörn i $(0,0)\,,(1,0)\,,(0,1)$ och T_2 den öppna triangeln med hörn i $(1,0)\,,(0,1)\,,(1,1)$. Vi relaterar T_1 till T_2 via koordinatsambandet

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 1 - y \\ y_2 = 1 - x \end{cases} \qquad (x_1, y_1) \in T_1, \quad (x_2, y_2) \in T_2.$$

Notera att $T_1 \bigcup T_2 = R$ där R är kvadraten med sidlängd 1 (se figur 4). Vi definierar vikningsoperatorn $\mathscr{F} : L_2(R) \to L_2(T_1)$ i enlighet med Damle och Peterson [7] som

$$\mathscr{F} u\,(x,y) = u\,(x_1, y_1) - u\,(x_2, y_2)\,, \quad (x,y) \in T_1. \tag{2.2}$$

Laplaceoperatorn på enhetskvadraten med Dirichletrandvillkor har de välkända egenfunktionerna

$$u_{n,m}\,(x,y) = \sin\,(\pi n x) \sin\,(\pi m y)\,, \quad n, m = 1, 2, \ldots.$$

Av ekvation 2.2 ges då egenfunktionerna $\mathscr{F}u_{n,m}$ på triangeln T_1 av

$$\mathscr{F} u_{n,m}(x,y) = \sin\,(\pi n x) \sin\,(\pi m y) - \sin\,(\pi n\,(1-y)) \sin\,(\pi m\,(1-x))\,. \tag{2.3}$$

Med hjälp av den trigonometriska identiteten $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$ kan detta uttryck förenklas till

$$\mathscr{F}u_{n,m}(x,y) = \sin(\pi nx)\sin(\pi my) + (-1)^{n+m+1}\sin(\pi ny)\sin(\pi mx)\,. \tag{2.4}$$

Vi noterar att om $n = m$ fås

$$\sin(\pi nx)\sin(\pi ny) - \sin(\pi nx)\sin(\pi ny) = 0.$$

Då nollfunktionen ej är en egenfunktion har vi alltså att egenfunktionerna utgörs av

$$\mathscr{F}u_{n,m}(x,y) = \sin(\pi nx)\sin(\pi my) + (-1)^{n+m+1}\sin(\pi ny)\sin(\pi mx)\,, \quad (x,y) \in T_1 \tag{2.5}$$

där $n, m = 1, 2, \ldots$ och $n \neq m$. Egenvärdena $\lambda_{n,m}$ är de samma som för egenfunktioner till enhetskvadraten med ett extra villkor $n \neq m$ det vill säga

$$\lambda_{n,m} = -(\pi^2 n^2 + \pi^2 m^2), \quad n, m = 1, 2, \ldots, \quad n \neq m.$$

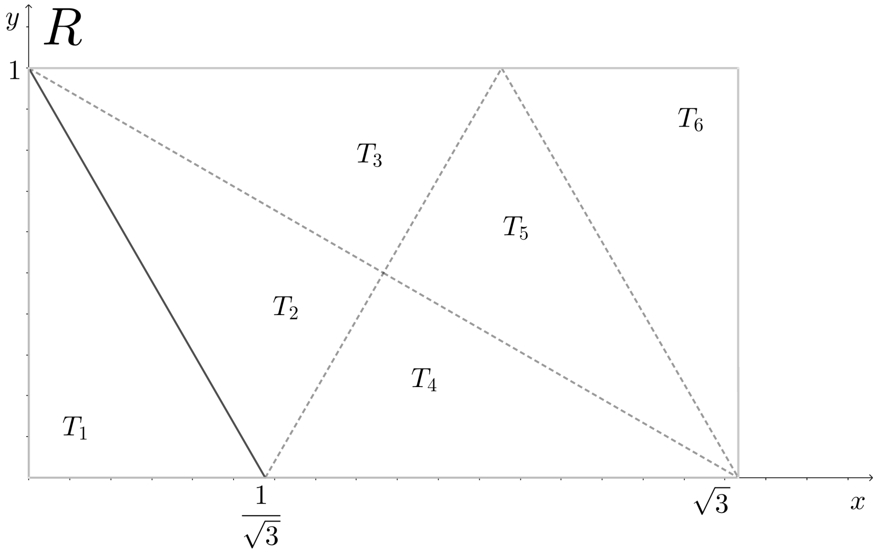
Att egenfunktionerna (2.5) löser ekvation (2.1) kan verifieras genom insättning. Egenfunktionerna uppfyller randvillkoren för $x = 0$ och $y = 0$ ty $\sin(0) = 0$. Att randvillkoret längs med hypotenusan av T_1 är uppfyllt ser vi genom att ersätta $x = 1 - y$ i ekvation (2.3).

2.2 Halv liksidig triangel

Låt nu T_1 vara den öppna halva liksidiga triangeln med hörn i $(0,0)\,, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), (0,1)$. Pragèr [6] relaterar T_1 till de öppna trianglarna $T_i, i = 2, ..., 6$ (se figur 5) via koordinatsambanden

$$\begin{gathered}
\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \end{cases} \qquad
\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\left(-x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}\right) \\ y_2 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}x + y + 1\right) \end{cases} \qquad
\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}\right) \\ y_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x + y + 1\right) \end{cases} \\
\begin{cases} x_4 = \frac{1}{2}\left(-x + \sqrt{3}y + \sqrt{3}\right) \\ y_4 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}x - y + 1\right) \end{cases} \qquad
\begin{cases} x_5 = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}y + \sqrt{3}\right) \\ y_5 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x - y + 1\right) \end{cases} \qquad
\begin{cases} x_6 = \sqrt{3} - x \\ y_6 = 1 - y \end{cases}
\end{gathered} \tag{2.6}$$

där $(x_i, y_i) \in T_i$. Notera att varje koordinatsamband motsvarar att spegla och translatera T_1. Observera även att unionen av alla trianglar $T_i, i = 1, 2, ..., 6$ bildar rektangeln $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \sqrt{3},\ 0 < y < 1\}$.



Figur 5: Halva liksidiga trianglar $T_i,\ i = 1, 2, ..., 6$ vars union bildar rektangeln R. Trianglarna $T_i,\ i = 2, ..., 6$ genereras genom att spegla och translatera T_1.

Vikningsoperatorn definieras nu som

$$\mathscr{F} u\,(x, y) = \sum_{i=1}^{6} c_i u\,(x_i, y_i) \tag{2.7}$$

där $c_i = 1$ för $i = 1, 3, 4, 6$ och $c_i = -1$ för $i = 2, 5$. Laplaceoperatorn på R har egenfunktionerna

$$u_{n,m}\,(x, y) = \sin\left(\frac{\pi n x}{\sqrt{3}}\right) \sin\,(\pi m y)\,, \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

vilket ger

$$\mathscr{F} u_{n,m}(x, y) = \sum_{i=1}^{6} c_i u_{n,m}\,(x_i, y_i)\,.$$

Efter förenkling med trigonometriska identiteter får vi att egenfunktionerna till T_1 blir

$$\begin{aligned}\mathscr{F} u_{n,m}(x, y) =& 2\sin\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right)\sin\,(m\pi y) - 2\,(-1)^{\frac{n+m}{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{3}}\,(n+3m)\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\,(n-m)\right)\\ &+2\,(-1)^{\frac{n-m}{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{3}}\,(n-3m)\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\,(n+m)\right), \quad (x, y) \in T_1\end{aligned} \tag{2.8}$$

med tillhörande egenvärden $\lambda_{n,m} = -\pi^2\left(\frac{n^2}{3} + m^2\right)$ där $n, m = 1, 2, \ldots$ och

$$0 < n < m, \quad n \neq m, \quad n \neq 3m, \quad n \equiv m \pmod 2\,.$$

Härledningen av dessa villkor är betydligt mer komplicerat än för den likbenta rätvinkliga triangeln (se Práger [6]) och vi nöjer oss därför med att förklara villkorens innebörd. Villkoren $n \neq m$ och $n \neq 3m$ medför icketrivialitet[I] vilket kan verifieras genom insättning. Om det sista kravet $n \equiv m \pmod 2$ ej uppfylls så kan det visas att termerna kancellerar och egenfunktionen blir noll. Sist gäller att för varje egenfunktion som ej uppfyller det första villkoret $0 < n < m$ kan vi byta index så att den uppfyller det.

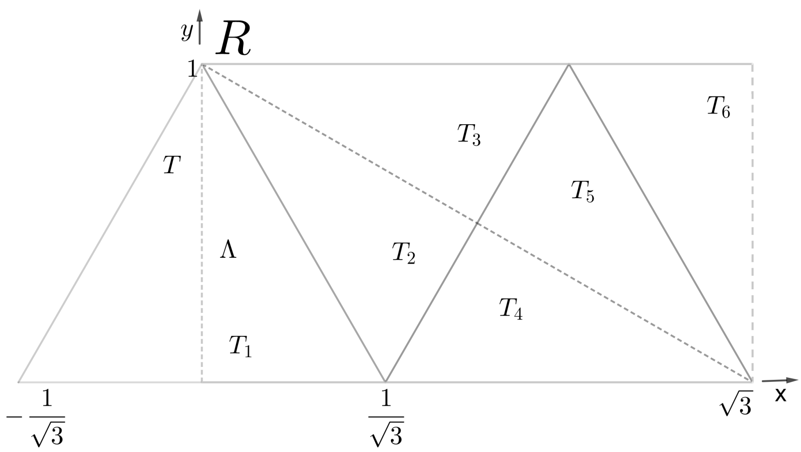
[I] Ej identiskt lika med noll ty en sådan funktion är inte en egenfunktion.

2.3 Liksidig triangel

Nu återstår att hitta egenfunktioner $u^T_{n,m}$ till Laplaceoperatorn över en liksidig triangel. Låt T vara den öppna liksidiga triangeln med hörn i $(0,1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ och $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$. För att hitta egenfunktionerna utnyttjar vi att varje funktion kan delas upp i en symmetrisk och en antisymmetrisk funktion kring någon linje[I]. De sökta egenfunktionerna kan alltså skrivas på formen

$$u^T_{n,m}(x,y) = u^s_{n,m}(x,y) + u^a_{n,m}(x,y) \tag{2.9}$$

där $u^s_{n,m}$ och $u^a_{n,m}$ är den symmetriska respektive antisymmetriska delen av $u^T_{n,m}$ kring någon linje. Uppdelningen motiverar oss att finna en lämplig linje och sedan konstruera de symmetriska och antisymmetriska delarna av egenfunktionerna var för sig. Per definition är egenfunktionerna på den halva liksidiga triangeln som ges av ekvation (2.8) noll längs med linjen $\Lambda := \{(x,y) \mid x = 0,\ 0 \leq y \leq 1\}$ (se figur 6). Om vi utökar definitionsmängden av ekvation (2.8) från T_1 till T så följer av Lamés fundamentalsats (sats 1.1) att de utökade egenfunktionerna $u^a_{n,m}$ kommer vara antisymmetriska kring Λ och dessutom vara egenfunktioner till Laplaceoperatorn på T. Vi väljer därför att dela upp $u^T_{n,m}$ kring Λ och får att den antisymmetriska delen av $u^T_{n,m}$ ges av utökningen av ekvation (2.8) med $(x,y) \in T$. Samma villkor (2.2) på indexen n,m följer direkt. För den symmetriska delen $u^s_{n,m}$ noterar vi att Lamés fundamentalsats implicerar att om $u^s_{n,m}$ är en trigonometrisk funktion vars normalderivata $\frac{\partial u_s}{\partial n} = 0$ längs med Λ så är $u^s_{n,m}$ symmetrisk kring Λ. Alltså kan vi konstruera $u^s_{n,m}$ genom att utöka en trigonometrisk egenfunktion på T_1 med Neumannrandvillkor[II] på Λ och Dirichletvillkor på de två andra sidorna. Upprepad spegling av T_1 ger upphov till rektangeln R i figur 6 där de streckade linjerna motsvarar Neumannrandvillkor och de heldragna linjerna Dirichletrandvillkor.



Figur 6: Liksidig triangel T och halva liksidiga trianglar T_i, i=1,2,...,6. De streckade/heldragna linjerna motsvarar Neumann- respektive Dirichletrandvillkor. Rektangeln $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \sqrt{3},\ 0 < y < 1\}$ består av unionen av T_i, $i = 1, ..., 6$.

[I] För en funktion av en variabel kan vi t.ex. skriva $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, där första delen är symmetrisk och andra är antisymmetrisk med avseende på 0.

[II] $\frac{\partial u_s}{\partial n} = 0$ längs med randen.

Egenfunktionerna till Laplaceoperatorn på R med blandade randvillkor som beskrivna i figur 6 ges av

$$u_{n,m} = \cos\left(\frac{\pi n x}{\sqrt{3}}\right)\sin\left(\pi m y\right), \quad m > 0,\ n \geq 0. \tag{2.10}$$

Vi vill nu hitta en lämplig vikning. Práger [6] definierar en ny vikningsoperator som

$$\mathscr{F}u\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{6} c_i u\left(x_i, y_i\right) \tag{2.11}$$

där $c_i = 1$ för $i = 1, 4, 5$ och $c_i = -1$ för $i = 2, 3, 6$. (x_i, y_i) är som i ekvation (2.6). Applicerar vi $\mathscr{F}$ på (2.10) och förenklar fås

$$\begin{aligned} u^s_{n,m}(x,y) = \mathscr{F}u_{m,n}\left(x,y\right) = 2\cos\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right)&\sin\left(m\pi y\right) \\ + 2\left(-1\right)^{(m+n)/2}\cos\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{3}}\left(n+3m\right)\right)&\sin\left(\frac{\pi y}{2}\left(n-m\right)\right) \\ - 2\left(-1\right)^{(n-m)/2}\cos\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{3}}\left(3m-n\right)\right)&\sin\left(\frac{\pi y}{2}\left(n+m\right)\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Vilket ger egenvärdena $\lambda_{n,m} = -\pi^2\left(\frac{n^2}{3} + m^2\right)$. Práger [6] härleder följande villkor för indexen n, m

$$0 \leq n < m, \quad n \neq m, \quad n \equiv m \pmod{2}.$$

Precis som ovan så medför villkoren $n \neq m$ och $n \equiv m \pmod{2}$ icketrivialitet. Vi kan verifiera detta genom att utnyttja att egenfunktionerna är trigonometriska. Lamés Fundamentalsats ger då att $\mathscr{F}u^s_{n,m}$ är både symmetrisk och antisymmetrisk om den är noll längs med Λ. Då den enda funktionen som är både antisymmetrisk och symmetrisk är nollfunktionen får alltså inte $\mathscr{F}u^s_{n,m}$ vara noll längs med Λ. Genom att sätta $x = 0$ i ekvation (2.12) och använda trigonometriska identiteter följer de två villkoren. Det första villkoret, $0 \leq n < m$, har samma innebörd som vi tidigare påpekat vid ekvation (2.2).

Vi utökar nu definitionsmängden av $u^s_{n,m}$ från T_1 till T och erhåller då enligt Lamés fundamentalsats en symmetrisk funktion kring Λ på T. Den liksidiga triangelns egenfunktioner respektive egenvärden ges alltså enligt ekvation (2.9) av $u^T_{n,m} = u^s_{n,m} + u^a_{n,m}$ samt $\lambda_{n,m} = -\pi^2\left(\frac{n^2}{3} + m^2\right)$ med villkoren $0 \leq n < m, \quad n \neq m, \quad n \equiv m \pmod{2}$.

I litteraturen förekommer ofta den liksidiga triangelns egenvärden på en alternativ form

$$\lambda_{n,m} = -\left(\frac{16\pi^2}{27}\right)\left(m^2 + n^2 - mn\right),$$

med villkoren

$$m + n \equiv 0 \pmod{3}, \quad m \neq 2n, \quad m \neq 2n,$$

som visades av Pinsky [2]. Det kan visas att Pinskys egenvärden är ekvivalenta med Prágers om ett indexbyte görs. Notera också att konstanten framför kan skilja sig beroende på triangelns dimensioner. En direkt fördel med Prágers egenvärden är att de alltid har samma form som egenvärdena för den vikta rektangeln.

2.4 Fullständighet av egenfunktioner till trianglarna

Givet en mängd egenfunktioner $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ till någon av trianglarna i kapitel 2 vill vi veta om mängden är fullständig i $L_2(T)$[I]. T betecknar här någon av de *öppna* trianglarna i föregående kapitel, det vill säga T innehåller inte sin rand ∂T. Innan vi visar fullständigheten ger vi några definitioner.

Definition 2.1. *Vi säger att två funktioner u och w är* ***ortogonala*** *på ett område Ω om $\langle u, w\rangle_{L_2(\Omega)} = 0$, där $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(\Omega)}$ är den inre produkten i $L_2(\Omega)$.*

Definition 2.2. *En mängd funktioner $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ är* ***fullständiga*** *i $L_2(T)$ om det för alla $v \in L_2(T)$ finns konstanter $a_i,\ i = 1, 2, \ldots$ så att*

$$\lim_{n\to\infty} ||v - \sum_{i=1}^{n} a_i u_i||_{L_2} = 0,$$

där $||\cdot||_{L_2}$ är L_2-normen.

Vi visar att egenfunktionerna är fullständiga likt Práger [6] med några variationer. För att göra detta definierar vi först **förlängningsoperatorn** $\mathscr{P} : L_2(T) \to L_2(R)$ som

$$\mathscr{P}v\,(x_i, y_i) = c_i v\,(x, y)\,, \quad v \in L_2\,(T)$$

där c_i och (x_i, y_i) är som i respektive transformer (2.3), (2.7) och (2.11). Förlängningsoperatorn utökar en funktion $v : T \to \mathbb{R}$ genom det givna koordinatsambandet mellan (x_i, y_i) och (x, y). Notera att $\frac{1}{N}\mathscr{F}\,(\mathscr{P}v) = v$, för $v \in L_2\,(T)$. Förlängningsoperatorn kan alltså i någon bemärkelse betraktas som vikningsoperatorns invers. Vi är nu redo att bevisa egenfunktionernas fullständighet.

Sats 2.2. *Låt $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en bas av ortogonala egenfunktioner till Δ på $L_2\,(R)$. Då gäller att $\{\mathscr{F}\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en fullständig mängd egenfunktioner till Δ på T.*

Bevis. För att visa att $\{\mathscr{F}\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ utgör fullständig mängd låter vi $v \in L_2\,(T)$ vilket ger att $\mathscr{P}v \in L_2\,(R)$. Eftersom $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ utgör en ortogonal bas till $L_2\,(R)$ kan vi skriva

$$\mathscr{P}v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathscr{P}v, \phi_n\rangle_{L_2(R)}\,\phi_n,$$

där $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(R)}$ är inre produkten i $L_2(R)$. Genom att sedan vika denna funktion fås

$$\mathscr{F}\,(\mathscr{P}v) = \mathscr{F}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathscr{P}v, \phi_n\rangle_{L_2(R)}\,\phi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathscr{P}v, \phi_n\rangle_{L_2(R)}\,\mathscr{F}\phi_n,$$

ty $\mathscr{F}$ är linjär. Vi noterar också att $\langle \mathscr{P}v, \phi\rangle_{L_2(R)} = \langle v, \mathscr{F}\phi\rangle_{L_2(T)}$, vilket fås genom

$$\langle \mathscr{P}v, \phi\rangle_{L_2(R)} = \sum_{i=1}^{N} \langle c_i v\,(x, y)\,, \phi\,(x_i, y_i)\rangle_{L_2(T)} = \left\langle v\,(x, y)\,, \sum_{i=1}^{N} c_i \phi\,(x_i, y_i)\right\rangle_{L_2(T)} = \langle v, \mathscr{F}\phi\rangle_{L_2(T)}\,.$$

Slutligen används att $\frac{1}{N}\mathscr{F}\,(\mathscr{P}\,(v)) = v$ vilket ger

$$v(x, y) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} \langle v, \mathscr{F}\phi_n\rangle_{L_2(T)}\,\mathscr{F}\phi_n(x, y), \quad (x, y) \in T, \tag{2.13}$$

och alltså är $\{\mathscr{F}\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ en fullständig mängd egenfunktioner. □

[I] L_2 tillsammans med dess inre produkt och norm definieras i appendix A

Fullständighet på den liksidiga triangeln följer från satsen ovan samt att de antisymmetriska egenfunktionerna är fullständiga för de antisymmetriska funktionerna i $L_2(T)$ och de symmetriska egenfunktionerna är fullständiga för de symmetriska funktionerna i $L_2(T)$.

I detta kapitel har vi nu härlett egenfunktioner till den liksidiga, likbent rätvinkliga och halva liksidiga triangeln och bevisat att dessa egenfunktioner är fullständiga i $L_2(T)$ för respektive öppen triangel T. Vi observerar sist att de härledda egenfunktionerna är trigonometriska (enligt definition 1.1), vilket är en observation som kommer bli viktig i nästa kapitel.

3 Klassifikation av polygoner med trigonometriska egenfunktioner i $\mathbb{R}^2$

I McCartins arbete från 2008 [5] presenterar och bevisar han två satser som han kallar "Classification Theorem" och "Extended Classification Theorem". Vi kallar dem här klassifikationssatsen och utökade klassifikationssatsen. Dessa satser klassificerar vilka polygoner i två dimensioner som har en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor.

Vi kommer i detta kapitel sammanfatta och presentera delarna i McCartins bevis för klassifikation i $\mathbb{R}^2$, med fokus på att lyfta fram och betona de koncept och idéer som ligger till grund för beviset. McCartin angriper problemet genom att börja med en stor mängd möjliga polygoner och framför sedan argument som utesluter fler och fler tills det bara är några kvar. Vi kommer istället konstruera de möjliga polygonerna genom att använda egenskaper hos trigonometriska egenfunktioner. Utöver McCartins arbete [5] kommer vi även luta oss mot tidigare arbeten av Pinsky [2, 3] och Práger [6].

3.1 Resultat för trigonometriska egenfunktioner

Innan vi kan presentera och bevisa klassifikationssatsen måste vi etablera några viktiga resultat som gäller för trigonometriska egenfunktioner (definition 1.1). Vi presenterar och bevisar dessa för $\mathbb{R}^n$ då de har enkla generaliseringar. Vi kommer dock bara betrakta klassifikation i $\mathbb{R}^2$.

Lemma 3.1 (Försvinnande linjer). *Om en funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en trigonometrisk egenfunktion och är noll på ett segment av en linje, så är den noll på hela linjen.*

Bevis. Antag funktionen är noll på linjesegmentet $\Omega' = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + r\boldsymbol{w},\ w \in \mathbb{R}^n,\ r \in (a, b)\}$ och hela linjen ges av $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + r\boldsymbol{w},\ w \in \mathbb{R}^n,\ r \in (a, b)\}$. Vi kan då definiera en funktion enligt

$$f(r) := u(\boldsymbol{x}_0 + r\boldsymbol{w}) \equiv 0, \quad r \in (a, b).$$

Om vi betraktar r som en komplex variabel noteras att $f(r) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definierar en holomorf funktion. Då $f(r) \equiv 0$ för alla $r \in (a, b)$ följer det enligt identitetsprincipen för holomorfa funktioner [8, s.151] att $f(r) \equiv 0$ för alla $r \in \mathbb{C}$, och speciellt för alla $r \in \mathbb{R}$, vilket ger att $u \equiv 0$ på linjen Ω. $\square$

Lemma 3.1 säger att trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn på en polygon med Dirichletrandvillkor kommer vara noll längs med alla linjer som sammanfaller med polygonens sidor.

Korollarium 3.1. *Om en funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en trigonometrisk egenfunktion, och är noll på en öppen delmängd av ett $(n-1)-$dimensionellt plan är den noll på hela planet.*

Bevis. Låt Π' vara en öppen delmängd av ett $n-1$ dimensionellt plan $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ sådant att $u(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ för alla $\boldsymbol{x} \in \Pi'$. Om vi tar en godtycklig punkt $p \in \Pi$ kan vi hitta en linje Ω som uppfyller att $p \in \Omega$ och det finns ett linjesegment $\Omega' \subset \Omega$ så att $\Omega' \subset \Pi'$, ty Π' är öppen. Lemma 3.1 ger nu att $u(p) = 0$, och då p var godtyckligt vald följer det att $u(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ på hela planet Π. □

Korollarium 3.1 säger alltså att principen om försvinnande linjer i lemma 3.1 går att generalisera till godtycklig dimension, där en trigonometrisk egenfunktion kommer försvinna på ett helt plan om den försvinner på en del av planet. Detta skulle kunna användas om man vill undersöka klassifikation i högre dimensioner.

Lamés fundamentalsats (sats 1.1) och lemmat om försvinnande linjer (lemma 3.1) är essentiellt det som alla argument i beviset för klassifikationssatsen kommer bygga på, och är därför väldigt centrala resultat som läsaren uppmanas lägga på minnet.

3.2 McCartins klassifikationssats

Då vi nu har etablerat resultaten gällande trigonometriska egenfunktioner i föregående avsnitt är vi redo att börja bygga upp beviset till McCartins klassifikationssats. Innan själva satsen presenteras kommer vi presentera några fler delresultat och koncept, som väsentligen är att dela upp beviset i mindre delar som presenteras var för sig.

McCartins klassifikationssats säger vilka polygoner i $\mathbb{R}^2$ som har en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor och vi vill således studera egenskaperna hos dessa polygoner.

Enligt Lamés Fundamentalsats gäller att en trigonometrisk egenfunktion kommer vara antisymmetrisk kring varje kant i polygonen ty vi har Dirichletrandvillkor. Detta gör att egenfunktionen på ett entydigt sätt måste kunna utökas till att vara definierad på hela $\mathbb{R}^2$ genom att upprepat spegla funktionens värde i kanterna, vilket görs av McCartin [5]. För att detta ska gå att göra sätter det krav på polygonen. Polygonen måste genom upprepad spegling i kanterna kunna täcka hela planet, vilket kallas att polygonen måste kunna **tessellera** planet.

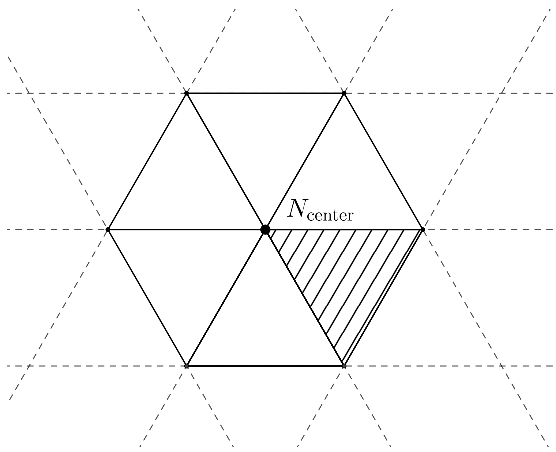
Definition 3.1. ***Tessellation*** *är en utfyllnad av ett plan med geometriska figurer utan överlapp eller mellanrum.*

Lemmat om försvinnande linjer (lemma 3.1) ger att utökningen av egenfunktionen kommer vara noll längs med alla linjer som sammanfaller med kanter till polygoner i tessellationen. Vi kallar linjen som sammanfaller med en kant i polygonen **utökningen** av den kanten.

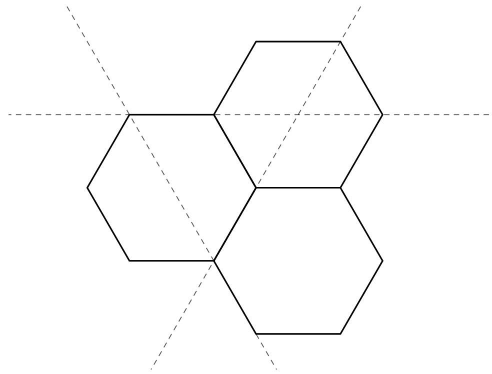
Nu när vi definierat utökningen av en kant kan vi också definiera en mer restriktiv typ av tessellering kallad **strikt tessellering**.

Definition 3.2. *Vi säger att en polygon är* ***strikt tessellerande*** *om den kan tesselleras via spegling i kanter, samt att samtliga utökningar av kanter endast sammanfaller med andra utökningar av kanter till polygoner i tessellationen.*

I figur 7a visas ett exempel på en strikt tessellerande polygon, nämligen den liksidiga triangeln. I figur 7b visas ett exempel på en polygon som är tessellerande men ej strikt tessellerande. Anledning till att vi studerar strikt tessellerbarhet är för att de ytterligare krav som polygonen måste uppfylla kan härledas från lemma 3.1 och Lamés fundamentalsats (sats 1.1).



(a) Spegling runt en sida ger upphov till tessellation för en liksidig triangel. I figuren syns en liksidig triangel (streckad), samt uppspegling runt ett hörn N_{center}. Notera att utökningen av alla kanter endast sammanfaller med kanter till polygoner i tessellationen.



(b) Den regelbundna hexagonen är ett exempel på en polygon som är tessellerande men inte strikt tessellerande. Notera att utökningen av kanterna skär genom insidan i de övriga hexagonerna.

Figur 7

Egenskapen att en polygon är strikt tessellerande relaterar till dess inre vinklar. Från figur 7a kan vi se att upprepad spegling kommer leda till att genom varje hörn (exempelvis N_{center}) kommer det finnas ett antal linjer, vilka är de som sammanfaller med sidor i de speglade och den ursprungliga polygonen. Vinkeln mellan dessa linjer kommer vara exakt samma som den vinkeln i den ursprungliga streckade triangeln tillhörande det hörnet N_{center}. Vi kan likna detta vid att vinkeln har "roterats runt" ett varv. Detta sätter alltså krav på innervinklarna för en strikt tessellerande polygon. I följande sats formaliseras detta resonemang.

Sats 3.1 (**Speglingsprincipen**). *En polygon är strikt tessellerande om och endast om alla inre vinklar är på formen* $\frac{\pi}{a}$*, där* $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$*.*

Bevis. Låt P_n beteckna en polygon med n hörn, och låt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vara dess inre vinklar.

Välj ett godtyckligt inre hörn med innervinkel α_j. Låt $\mathcal{R}_{\alpha_j}$ vara mängden rotationer som genereras av α_j. I en tessellation får vi inte ha tomrum eller överlapp, och därmed måste gruppen $\left(\mathcal{R}_{\alpha_j}, \circ\right)$ vara cyklisk och ha ändlig ordning. Då får vi att α_j är på formen $\frac{2\pi}{a}$ med $a \in \mathbb{N}$. Kravet på att samtliga kantutökningar endast sammanfaller med varandra ger att rotation med vinkeln π måste vara i $\mathcal{R}_{\alpha_j}$, ty alla kanter i ett hörn måste gå att utöka ty polygonen är strikt tessellerande. Detta motsvarar en rotation med π. Det här ger att $\alpha_j = \frac{\pi}{a}$ för något $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Vi tar bort $a = 1$ ty en inre vinkel på π är inte intressant.

Tillämpas argumentet på alla inre vinklar får vi att spegling runt samtliga hörn inte ger överlapp eller hål. Argumentet är rekursivt, då vi kan spegla upp runt ett hörn, och sedan välja ett nytt hörn och upprepa. Därmed måste alla vinklar kunna skrivas på formen krävt av satsen.

Vidare har vi att givet att vinklarna är på formen $\frac{\pi}{a}$, där $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ följer vi bara resonemanget baklänges och får att även omvändningen gäller. $\square$

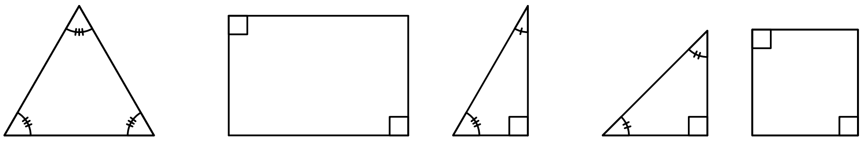
Speglingsprincipen kan nu användas tillsammans med vinkelsumman för en polygon för att explicit bestämma vilka polygoner som är strikt tessellerbara. Då vinkelsumman för en polygon med n hörn är $\pi\,(n-2)$ för $n \geq 3$ får vi ekvationen

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} = n-2, \quad n \geq 3, \tag{3.1}$$

där $a_j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ och $\alpha_j = \frac{\pi}{a_j}$ är vinkeln i hörn j. Därmed har vi en direkt metod för att hitta strikt tessellerande polygoner.

Vi utnyttjar denna metod och presenterar de strikt tessellerande polygonerna i nedanstående sats.

Sats 3.2 (**Strikt tessellerbara polygoner**). *De enda polygonerna i $\mathbb{R}^2$ som är strikt tessellerande är; rektanglar och kvadrater samt liksidiga, halva liksidiga och likbenta rätvinkliga trianglar. Dessa polygoner visas i figur 8.*



Figur 8: De enda polygoner som har en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor. Det är också de enda strikt tessellerbara polygonerna. I figuren betecknas vinklarna som rät eller med ett, två eller tre streck som motsvarar $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{\pi}{3}$.

Bevis. Vi börjar med att betrakta polygoner med $n \geq 5$ hörn. Vinkelsumman för en polygon med n hörn är som nämnt tidigare $\pi\,(n-2)$ då $n \geq 3$. Medelvinkeln v för en polygon med n hörn blir

$$v = \frac{\pi\,(n-2)}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n} \geq \pi - \frac{2\pi}{5} > \frac{\pi}{2}, \text{ då } n \geq 5.$$

Detta betyder att minst en vinkel måste vara större än $\frac{\pi}{2}$, vilket gör att inga polygoner med $n \geq 5$ hörn kan vara strikt tessellerande enligt speglingsprincipen (sats 3.1).

Vidare undersöker vi polygoner med $n = 4$ hörn. Låt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ beteckna vinklarna i fyrhörningen. Om fyrhörningen är strikt tessellerande måste enligt sats 3.1 vinklarna vara på formen

$$\alpha_j = \frac{\pi}{a_j}, \quad a_j \in \{2, 3, 4, ...\} \text{ för } j = 1, 2, 3, 4.$$

Då vinkelsumman i en fyrhörning är 2π fås enligt ekvation (3.1)

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 2,$$

vilken endast har lösningarna $a_j = 2$ för $j = 1, 2, 3, 4$ (se appendix D). Detta betyder att polygonen är en rektangel, med kvadrat som specialfall.

Slutligen betraktar vi polygoner med $n = 3$ hörn och betecknar vinklarna $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. På samma sätt som för fyrhörningen måste, enligt sats 3.1, vinklarna vara på formen

$$\beta_j = \frac{\pi}{b_j}, \quad b_j \in \{2, 3, 4, ...\} \text{ för } j = 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

Vinkelsumman i en trehörning är π vilket enligt ekvation (3.1) ger

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} = 1$$

som endast har lösningarna $(b_1, b_2, b_3) = (3,3,3), (2,3,6)$ och $(2,4,4)$ (se appendix D). Enligt ekvation (3.2) motsvarar detta vinklarna

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ och } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

vilket är vinklarna för den liksidiga, halva liksidiga respektive likbent rätvinkliga triangeln. Vi har alltså visat att de enda polygonerna i $\mathbb{R}^2$ som är strikt tessellerbara är de som nämns i satsen och därmed är beviset klart. □

Anledningen till varför strikt tessellerbara polygoner är intressanta är att det visar sig att de är just dessa som har en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner i $\mathbb{R}^2$.

Definitionen av strikt tessellerbar motiverades av egenskaper hos trigonometriska egenfunktioner, sats 1.1 och lemma 3.1. Kopplingen mellan strikt tessellerbara polygoner och polygoner som har en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn förklaras av klassifiktionssatsen, som formulerades och bevisades av Brian J. McCartin [5].

Sats 3.3 (Klassifikationssatsen, Brian J. McCartin 2008). *De enda polygoner som har en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor är rektangeln, kvadraten, den liksidiga triangeln, halva liksidiga triangeln samt likbent rätvinkliga triangeln (se figur 8).*

Bevis. Låt P vara en godtycklig polygon. Antag att det finns fullständig uppsättning $B = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ av trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor på P.

Antag nu att P *ej* är strikt tessellerande. Om vi nu tar en godtycklig egenfunktion $u \in B$ kommer den enligt Lamés fundamentalsats (sats 1.1) vara antisymmetrisk kring respektive sida på polygonen P på grund av randvillkoren. Genom att upprepat spegla polygonen längs dess sidor kommer tillslut en linje som sammanfaller men någon av de speglade polygonernas sidor hamna på insidan av P, då den ej är strikt tessellerande. Detta implicerar att u måste vara noll längs den linjen enligt lemma 3.1. I och med att vi tog en godtycklig egenfunktion u följer det att det gäller för alla $u \in B$. Detta motsäger att B är en fullständig uppsättning, då det betyder att alla funktioner som kan bildas genom linjärkombinationer av $u \in B$ kommer vara noll längs denna linje. Om B ska vara fullständig måste alla funktioner i $L_2(P)$ kunna bildas genom linjärkombinationer, vilket nu inte är fallet. Detta ger att antagandet att P *ej* är strikt tessellerande inte kan vara korrekt.

Alltså, en polygon med en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner måste vara strikt tessellerande. Enligt sats 3.2 är det endast polygonerna som visas i figur 8 som har denna egenskap. I kapitel 2 visades att alla dessa har en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner och därmed är beviset klart.

□

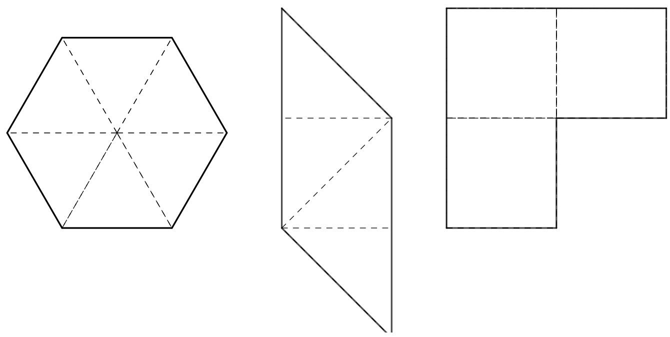
Klassifikationssatsen ger en ekvivalens mellan polygoner som är strikt tessellerande och polygoner som har en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor.

3.3 McCartins utökade klassifikationssats

Klassifikationssatsen ger oss svar på vilka polygoner som har en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn. En naturlig följdfråga är till vilka polygoner som Laplaceoperatorn har *någon* trigonometrisk egenfunktion. McCartin [5] formulerade 2008 en sats som besvarar denna fråga. Satsen följer av de resultat som etablerats i föregående avsnitt samt det faktum att en egenfunktion till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor endast kan ha ändligt många interna nodlinjer [9].

Sats 3.4 (Utökade klassifikationssatsen, Brian J. McCartin 2008). *De enda polygoner som har någon trigonometrisk egenfunktion till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor är de polygoner som består av en sammanhängande mängd skapad genom spegling av någon av de fem polygonerna som förekommer i klassifikationssatsen.*

Bevis. Antag att vi har en trigonometrisk egenfunktion u till Laplaceoperatorn som är noll längs med sidorna på en polygon $\mathcal{P}$. Då u har ett ändligt antal interna nodlinjer i $\mathcal{P}$ kan vi hitta en sammanhängande delmängd $\tilde{\mathcal{P}}$ av $\mathcal{P}$ sådan att u inte har några interna nodlinjer i $\tilde{\mathcal{P}}$ och är lika med noll på randen av $\tilde{\mathcal{P}}$. Om vi definierar $\tilde{u}$ som restriktionen av u till $\tilde{\mathcal{P}}$ så följer att $\tilde{\mathcal{P}}$ måste vara någon av de strikt tessellerbara polygonerna i figur 8. Då vi i detta fallet vet att $\tilde{u}$ ej har någon nodlinje i $\tilde{\mathcal{P}}$ skulle vi få en motsägelse om $\tilde{\mathcal{P}}$ ej är strikt tessellerande med samma argumentation som i beviset till klassifikationssatsen, då en nodlinje skulle skära insidan av $\tilde{\mathcal{P}}$. Enligt Lamés Fundamentalsats (sats 1.1) kan $\tilde{u}$ utökas utanför $\tilde{\mathcal{P}}$ genom spegling i sidorna till $\tilde{\mathcal{P}}$. Detta betyder att $\mathcal{P}$ måste bestå av upprepade speglingar av någon av polygonerna i figur 8 runt deras sidor. I figur 9 visas exempel på polygoner $\mathcal{P}$ med någon trigonometrisk egenfunktion. □



Figur 9: Exempel på polygoner som har någon trigonometrisk egenfunktion. Dessa är uppspeglingar av strikt tessellerbara polygoner.

I detta kapitel har vi presenterat och bevisat McCartins klassifikationssatser. Vi har sett att de argument som ligger till grund för bevisen är till stor del väldigt geometriska och bygger på specifika symmetrier. I nästa kapitel kommer vi utforska mer hur klassifikationssatsen och dessa speciella polygoner kan kopplas till andra områden inom matematik, men även inom fysik.

4 Koppling mellan kristaller, symmetrier och klassifikation

En intressant aspekt av klassifikationssatsen är att den kopplar egenfunktionerna till Laplaceoperatorn över en domän till domänens geometriska egenskaper. Följer vi beviset av klassifikationssatsen (sats 3.3) ser vi att de geometriska egenskaper som en fullständig uppsättning av trigonometriska egenfunktioner kräver ger i stort sett hela beviset.

Med grund i observationen att polygonens geometriska egenskaper bestämmer om en fullständig uppsättning av trigonometriska egenfunktioner är möjlig, skall vi i detta kapitel utforska dessa geometriska egenskaper närmare. En koppling läsaren kanske redan har gjort är att tesselleringen av våra polygoner liknar ett gitter[I], något som används för att beskriva kristaller i fasta tillståndets fysik. Därutöver har polygonerna vissa symmetrier, som studeras inom gruppteoretiska sammanhang. Vi skall därför göra ett kort besök till kristallografi och gruppteori, och

[I]För exempel på gitter se appendix E

göra kopplingar mellan dessa områden. På så vis drar vi ett par intressanta paralleller mellan klassifikationssatsen, gruppteori och matematiken bakom fysiska kristaller.

4.1 Kristallografiska restriktionssatsen

Inom fasta tillståndets fysik studeras som det låter fasta ämnen. Nästan alla ämnen bildar någon form av regelbunden struktur i sin fasta fas, vilket kallas kristall. Hur dessa kristaller ser ut beror på ämnets fysiska egenskaper, men det noterades tidigt (se Kittel [10]) att det bara verkar finnas ett fåtal möjliga kristallstrukturer. Anledningen till detta är att kristallen måste ha vissa symmetrier.

Vi beskriver kristaller med hjälp av gitter, som kan definieras på flera sätt. Vi använder Zygmunds definition [11].

Definition 4.1 (**Gitter**). *Låt Γ vara en delgrupp till $\mathbb{R}^n$ under addition. Vi säger att Γ är ett **gitter** om det finns en bas $B = (b_1, \ldots, b_n)$*[I] *till $\mathbb{R}^n$ sådant att*

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R}^n \mid \gamma = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n,\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Vi vill nu studera olika symmetriegenskaper hos gitter. Med **symmetri** menar vi en transformation som bevarar gittret, det vill säga en transformation $A : \Gamma \to \Gamma$. Enligt definitionen är gitter invariant under translation med heltalsmultiplar av basvektorerna, så vi intresserar oss bara av rotations- och speglingssymmetrier. Kristallografiska restriktionssatsen är en sats som säger vilka möjliga ordningar på symmetrier som kan finnas i gitter.

Sats 4.1 (**Kristallografiska restriktionssatsen i $\mathbb{R}^2$**). *Låt ordningen av en transformation A vara det minsta heltalet n sådan att $A^n = I$, där I är identiteten, och låt $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ vara ett gitter. Då är möjliga ordningar på symmetritransformationer 2,3,4 och 6.*

Bevis. För att en transformation A skall bevara Γ har vi att $A\gamma \in \Gamma$ för alla $\gamma \in \Gamma$. Väljer vi att uttrycka A:s matrisrepresentation i basen som definierar gittret kommer den ha endast har heltalselement, enligt definitionen av gitter. Därav följer att spåret av A[II] är ett heltal. Därutöver har vi för en rotationsmatris i $\mathbb{R}^{2\times 2}$ att $\operatorname{Tr}(A) = 2\cos\theta$, där θ är rotationsvinklen. Det följer då att de enda möjliga rotationerna är med vinklarna π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{3}$, vilket motsvarar ordningarna 2,3,4 respektive 6. Notera att speglingar har ordning 2, vilket färdigställer beviset. $\square$

Liknande resonemang fungerar för $\mathbb{R}^3$, där enda skillnaden blir att rotationens spår är $1 + 2\cos\theta$ och samma möjliga ordningar erhålls.

I beviset för kristallografiska restriktionsatsen använder vi ett liknande argument som i speglingsprincipen (sats 3.1). Det båda bevisen bygger på är ett krav på en transformation att vara cyklisk ($A^n = I$), där kristallografiska restriktionen utnyttjar att ett gitter är en mängd diskreta punkter. Speglingsprinsipen utnyttjar restriktionen som kommer från lemma 3.1 om försvinnande linjer. Vi får en korrespondens att möjliga vinklarna i strikt tessellerande polygoner är π dividerat med möjliga ordningar till symmetrier i gitter.

Om alla kristaller i två och tre dimensioner kan beskrivas av gitter skulle kristallografiska restriktionssatsen ge alla möjliga symmetrier i kristaller. Det finns såklart undantag, och alla kristaller kan inte perfekt beskrivas av gitter i alla fall inte i den traditionella meningen. I en studie från 1984, som senare resultarade i ett nobelpris, visar Shechtman, Blech, Gratias, och Cahn att vissa kristallstrukturer påvisar aperiodiskt beteende[III] [12]. Dessa aperiodiska kristaller

[I]Notera att $b_1, \ldots, b_n$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$. I detta kapitel kommer vi inte använda någon explicit vektornotation för att skilja på vektorer och skalärer utan det kommer framgå av sammanhanget.

[II]senare skrivet som $\operatorname{Tr}(A)$

[III]Med aperiodiskt betyder att strukturen inte har någon translationsinvarians.

kallas kvasikristaller, och kan alltså inte beskrivas med de traditionella translationsinvarianta gittren. För att beskriva dessa krävdes andra metoder, bland annat att studera gitter av högre dimensioner än två och tre.

För att få fram kristallografiska restriktionen i högre dimensioner, alltså möjliga symmetriordningar för gitter, finns en generell formulering av kristallografiska restriktionssatsen. Beteckna mängden av $n \times n$ heltalsmatriser med determinant ± 1 som $GL(n, \mathbb{Z})$. Beteckna också ordningen av en transformation A med $Ord(A)$. De möjliga ordningarna i n dimensioner ges då av

$$Ord_n := \{m \in \mathbb{N} \mid \exists A \in GL(n, \mathbb{Z}) \text{ med } Ord(A) = m\}.$$

Med hjälp av Eulers totientfunktion ϕ uttrycker vi den kristallografiska restriktionen.

Definition 4.2. ***Eulers totientfunktion*** *betecknas* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ *och definieras som följer.* $\phi(n)$ *är antalet positiva heltal mindre än eller lika med* n *som är relativt prima med* n.

Sats 4.2 (**Kristallografiska restriktionssatsen i** $\mathbb{R}^n$).

$$Ord_n = \{m \mid \phi(m) \leq n\}.$$

Denna sats bevisas av Schwarzenberger [13] och Hiller [14]. Speciellt är $Ord_2 = \{2, 3, 4, 6\}$ [15], vilket stämmer överens med kristallografiska restriktionssatsen i $\mathbb{R}^2$.

Kristallografiska restriktionen ger alltså en begränsning på symmetrier för ett gitter i $\mathbb{R}^n$. Detta sätter i sin tur också begränsningar på symmetrier i kvasikristaller, då kvasikristaller beskrivs av högredimensionella gitter.

4.2 Alkover och strikt tessellerande polygoner

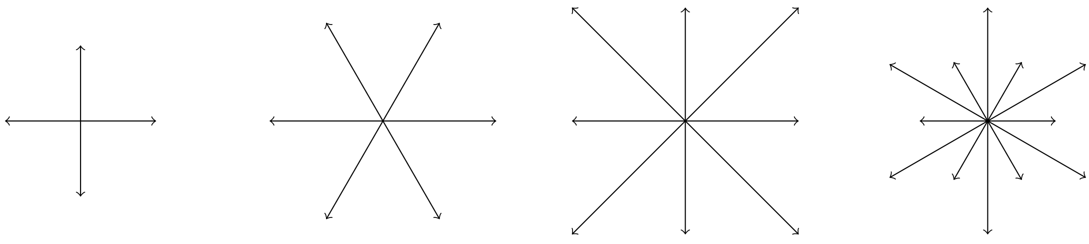
I detta avsnitt kommer vi studera symmetrier lite djupare, vilket vi gör med grupper. P. H. Bérard visade 1980 [4] en direkt koppling mellan *Weylgrupper* och trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn. I artikeln konstrueras egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor på en speciell typ av geometriska objekt som kallas *alkover*. Alkover uppkommer från Weylgrupper som i sin tur definieras i termer av ett så kallat *rotsystem*. Det visar sig att egenfunktionerna till alkover är trigonometriska, och är därför av intresse att undersöka i relation till klassifikationssatsen. Målet med detta avsnitt är att definiera och förklara alkovbegreppet för att koppla Bérards arbete till vårt.

Låt $\langle \alpha, \beta \rangle := 2(\alpha, \beta) / (\beta, \beta)$, där $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ och $(\cdot, \cdot)$ vara skalärprodukten i $\mathbb{R}^n$. Notera att vi använt denna notationen tidigare för L_2-skalärprodukten, men för resten av arbetet kommer vi använda denna nya definition.

Definition 4.3 (**Rotsytem**). *Vi säger att en mängd vektorer* $R \subset \mathbb{R}^n$ *är ett* ***rotsystem*** *om de uppfyller följande axiom:*

1. *R är ändlig, spänner upp $\mathbb{R}^n$ och innehåller inte* 0.
2. *Om $\alpha \in R$ så är $-\alpha \in R$ och inga andra skalärmultiplar av α tillhör R.*
3. *R är sluten under reflektion över planen vars normal är $\alpha \in R$.*
4. *Om $\alpha, \beta \in R$ så gäller $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$*

Med denna definition kan vi utforska vissa typer av symmetrier, och vi uttrycker dessa symmetrier med hjälp av vad som kallas Weylgrupper. Möjliga rotsystem i $\mathbb{R}^2$ visas i figur 10 [16].



$A_1 \times A_1$ $\qquad$ A_2 $\qquad$ B_2 $\qquad$ G_2

Figur 10: Möjliga rotsystem i $\mathbb{R}^2$.

Definition 4.4 (**Weylgrupp**). *Låt σ_α beteckna speglingen över planet som har $\alpha \in R$ som normal, det vill säga:*

$$\sigma_\alpha : v \mapsto v - \langle v, \alpha \rangle \alpha.$$

*Då har vi att mängden av σ_α för alla $\alpha \in R$ genererar en grupp under sammansättning. Vi kallar en sådan grupp för en **Weylgrupp** och betecknar den $\mathcal{W}$.*

När vi definierat Weylgrupp kan vi gå vidare med att definiera alkov.

Definition 4.5 (**Alkov**). *Låt $\mathcal{H}$ vara mängden av alla affina hyperplan $H_{\alpha,k}$ associerade med Weylgruppen $\mathcal{W}$ till rotsystemet R, det vill säga:*

$$H_{\alpha,k} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (v, \alpha) = k\}, \quad \alpha \in R,\ k \in \mathbb{Z}.$$
$$\mathcal{H} = \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in R, k \in \mathbb{Z}\}$$

*Vi kallar en sammanhängande mängd A i $\left(\mathbb{R}^n - \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\right)$ för en **alkov**.*

Ett sätt att tänka på en alkov är en polygon som cykliskt återvänder till sin startpunkt efter reflektion med alla σ_α i en Weylgrupp $\mathcal{W}$. Ett exempel på en alkov visas i figur 11.

Från definitionen ser vi att i $\mathbb{R}^2$ tessellerar planet och är slutna under spegling. Detta påminner om de strikt tessellerande polygonerna vi konstruerade i föregående kapitel. Det visar sig att de tvådimensionella alkoverna är exakt samma som de strikt tessellerande polygonerna. Vi åskådliggör detta genom att studera alkovernas innervinklar i nedanstående sats.

Sats 4.3. *Låt R vara ett rotsystem, med tillhörande Weylgrupp $\mathcal{W}$ och alkov A. Då kan vinklarna mellan kanterna i A endast vara $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ eller $\frac{\pi}{2}$.*

Bevis. Möjliga vinklar i alkoven kommer enligt definitionen av alkov vara samma som möjliga vinklar mellan rötter i R. Låt α och β vara två rötter i R och låt θ beteckna vinkeln mellan rötterna. Då har vi enligt definitionen av rotsystem att

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 2\frac{|\alpha|}{|\beta|} \cos\theta \in \mathbb{Z},$$

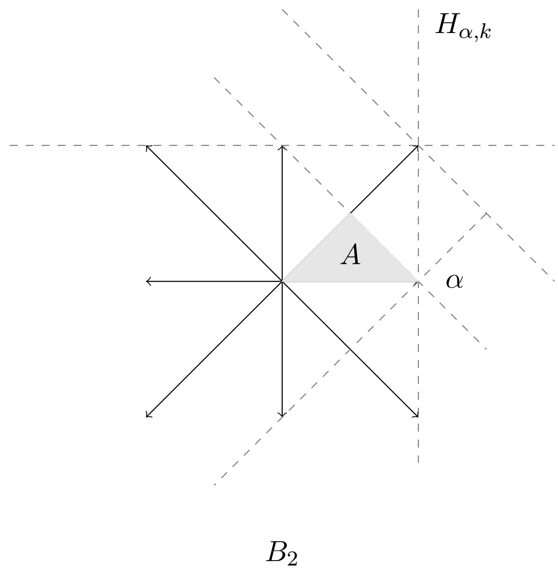
och analogt för $\langle \beta, \alpha \rangle$. Multiplicerar vi $\langle \alpha, \beta \rangle$ med $\langle \beta, \alpha \rangle$ fås

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4\cos^2\theta \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

Vi kommer endast betrakta vinklar mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$, för vinklar större än $\frac{\pi}{2}$ kan inte vara alkovvinklar. Vi har alltså att de enda möjliga vinklarna θ måste uppfylla $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ samt ekvation (4.1), vilket ger vinklarna nämnda i satsen. $\square$

Av satsen ovan och sats 3.2 följer att de möjliga alkoverna i $\mathbb{R}^2$ är samma som polygonerna i klassifikationssatsen. Alltså har alkover och endast alkover en fullständig uppsättning av trigonometriska egenfunktioner i $\mathbb{R}^2$.

Bérard [4] visade 1980 att alla alkover i $\mathbb{R}^n$ har en fullständing uppsättning trigonometriska egenfunktioner, men inte omvändningen. Vi visade ovan att omvändningen gäller i $\mathbb{R}^2$ genom att koppla samman Bérards och McCartins arbeten. I högre dimensioner skulle en möjlighet att bevisa omvändingen vara att generalisera klassifikationssatsen (sats 3.3) till högre dimensioner genom att använda Lamés fundamentalsats 1.1 samt korollarium 3.1 som är generaliseringen av lemma 3.1 om försvinnande linjer.



Figur 11: Alkoven A tillhörande Weylgruppen $\mathcal{W}$ av rotsystemet B_2. $H_{\alpha,k}$ är hyperplanet som har $\alpha \in B_2$ som normal. Notera att A är en likbent rätvinklig triangel.

4.3 Sammanfattning och framtida möjligheter

Vi inledde detta arbete med att härleda egenfunktioner för liksidiga, halva liksidiga och likbent rätvinkliga trianglar, och visade deras fullständighet. Därefter presenterade vi McCartins klassifikationssats, och den utökade klassifikationssatsen. Resultatet är att endast polygonerna i figur 8 har en fullständig uppsätting trigonometriska egenfunktioner med Dirichletrandvillkor.

I detta avslutande kapitel belyste vi kopplingar mellan klassifikationsatsen, kristaller och alkover genom att studera dess symmetrier. Slutligen vill vi nu formulera dessa resultat om kopplingar som en sista sats.

Sats 4.4. *Låt $\Theta = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$ vara mängden av möjliga innervinklar till polygoner med en fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor. Låt $\Phi = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$ vara mängden möjliga innervinklar till alkover i $\mathbb{R}^2$ och låt $N = \{2, 3, 4, 6\}$ vara mängden av möjliga symmetriordningar till gitter i $\mathbb{R}^2$. Då har vi att $\Theta = \Phi = \{\frac{\pi}{n} \mid n \in N\}$.*

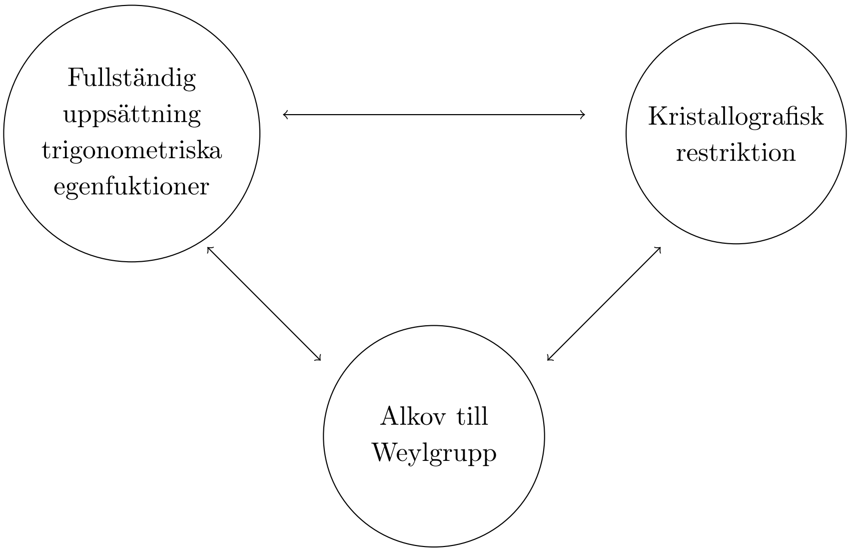
Satsen följer av de resultat som etablerades tidigare i arbetet, och en överblick över kopplingarna visualiseras i figur 12.

Mot bakgrund av diskussionen i slutet av förra avsnittet samt korrespondensen mellan alkover och polygoner med fullständig uppsättning trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor i $\mathbb{R}^2$ formulerar vi en förmodan.

Förmodan 4.1. *Alkover och endast alkover är de polytoper*[I] *med en fullständig uppsättning av trigonometriska egenfunktioner till Laplaceoperatorn med Dirichletrandvillkor* $\mathbb{R}^n$.

Om denna förmodan är sann binder den samman Laplaceoperatorn med Weylgrupper i godtycklig dimension. Resultatet hade varit en spännande koppling mellan påtagligt abstrakta objekt som alkover och egenfunktioner till Laplacoperatorn.

Utöver att försöka bevisa denna förmodan kan det vara intressant att utnyttja Lamés fundametalsats och konceptet av klassifikation för att studera närbesläktade differentialoperatorer.



Figur 12: I figuren visualiseras kopplingarna som etablerats i detta sista kapitel.

[I]En begränsad mängd som löser ekvationen $Ax \leq b$, där $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $b \in \mathbb{R}^m$. Detta är den naturliga generaliseringen av en polygon i godtycklig dimension.

Referenser

[1] G. Lamé. “Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres”. I: *Journal de l’Ecole Polytechnique* 22 (1833), s. 194–251.

[2] Mark A. Pinsky. “The Eigenvalues of an Equilateral Triangle”. I: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 11.5 (1980), s. 819–827.

[3] Mark A. Pinsky. “Completeness of the eigenfunctions of the equilateral triangel”. I: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 16.4 (1985), s. 848–851.

[4] Pierre H. Bérard. “Spectres et groupes cristallographiques I: Domaines euclidiens.” I: *Inventiones mathematicae* 58 (1980), s. 179–200.

[5] Brian J. McCartin. *Laplacian Eigenstructure of the Equilateral Triangle.* Hikari LTD, 2011, s. 1–28, 52–59.

[6] M. Práger. “Eigenvalues and Eigenfunctions of the Laplace Operator on an Equilateral Triangle”. I: *Applications of Mathematics* 43.4 (1998), s. 311–320.

[7] A. Damle och G. C. Peterson. “Understanding the Eigenstructure of Various Triangles”. I: *SIAM Undergraduate Research Online* 3 (1 2010), s. 187–208.

[8] M. Beck m. fl. *A First Course in Complex Analysis.* 1.52. Orthogonal Publiching L3C, 2016.

[9] P. Bérard och B. Helffer. “Nodal sets of eigenfunctions, Antonie Stern’s results revisited”. I: *Séminaire de théorie spectrale et géométrie* 32 (2014), s. 1–37.

[10] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics.* Wiley, 2004.

[11] A. Zygmund. *Trigonometric Series.* 2. utg. Först publicerad i Warszawa 1935. Cambridgre University Press, 2002.

[12] D. Shechtman m. fl. “Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry”. I: *Phys. Rev. Lett.* 53 (20 1984), s. 1951–1953.

[13] R. L. E. Schwarzenberger. *N-dimensional crystallography.* 1. utg. Pitman, 1985.

[14] H. Hiller. “The Crystallographic Restriction in Higher Dimensions”. I: *Acta Crystallographica* 541-544.A41 (1985).

[15] J. Bamberg, G. Cairns och D. Kilminster. “The Crystallographic Restriction, Permutations, and Goldbach’s Conjecture”. I: *The American Mathematical Monthly* 110.3 (2003).

[16] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* 1. utg. Springer, 1972.

[17] D.A. Salamon. *Measure and Integration.* EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society, 2016.

A Matematiska definitioner

Definition A.1 (Hilbertrummet L_2). *Låt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vara ett måttrum. Betrakta en mätbar funktion $f : X \to \mathbb{R}$. L_2 normen är*

$$||f|| := \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

En funktion kallas L_2-integrerbar om den är mätbar och $||f|| < \infty$. Mängden av dessa funktioner betecknas

$$\mathcal{L}_2 := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ är } \mathcal{A}\text{-mätbar och } ||f|| < \infty\}.$$

Inför ekvivalensrelationen

$$f \sim_\mu g \iff f = g \quad \mu - \text{nästan överallt}$$

och bilda kvotrummet $L_2 := \mathcal{L}_2 / \sim_\mu$. Genom att definiera inre produkten som

$$L_2 \times L_2 \to \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_X fg d\mu. \tag{A.1}$$

blir L_2 ett Hilbertrum med inre produkten i ekvation (A.1) *[17].*

B Koordinatbyte till fullständighetsbeviset

I detta avsnitt presenteras resultat som motiverar varför Δ kan verka på transformerade koordinater i viknings- och förlängningsoperatorern i kapitel 2.

Sats B.1. *Givet en funktion* $v(\xi,\eta)\,,\ (\xi,\eta)\in T$ *som är* C^2 *definiera en ny funktion* $f(\phi(\xi,\eta),\psi(\xi,\eta)) := v(\xi,\eta)$*, då gäller*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=\alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}\right) \qquad \phi,\psi\in C^1(T)$$

för något $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0$ *om*

$$1.\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^2=\alpha,\quad 2.\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2=\alpha,\quad 3.\ \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0.$$

Bevis. Beviset bygger helt och hållet på kedjeregeln. Beräkningarna utförs bara för ξ och är helt analoga för η.

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}=\frac{\partial f}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+\frac{\partial f}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}$$

och med användning av kedjeregeln igen fås

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial\phi\partial\psi}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial\psi\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$$

om då $f\in C^2$ så är $v\in C^2$ och de blandade andraderivatorna därför tas i vilken ordning som helst. Uttrycket för $\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}$ fås analogt och det ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=&\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2\right]+\\&+2\frac{\partial^2 f}{\partial\psi\partial\phi}\left[\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right].\end{aligned}$$

Enligt definitionen så är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}$$

vilket ger att precis villor 1,2 och 3 måste gälla för att likheten i satsen ska gälla. □

Lemma B.1. *Givet ett koordinatsamband*

$$\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ 2ab & b^2-a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}$$

där $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ *och* $a^2+b^2=\alpha\neq 0$*. Som symboliserar spegling av* (ξ,η) *i linjen genom origo med riktningskoefficient* (a,b) *följt av en translatering med* (c,d) *gäller*

$$1.\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)^2=\alpha,\quad 2.\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2=\alpha,\quad 3.\ \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0.$$

Bevis. Beviset utförs genom att identifiera de olika derivatorna i uttrycket för avbildningen och verifiera att identiteterna stämmer. □

Korollarium B.1. *Om v och f är definierade som i sats B.1 och sambandet mellan (ϕ, ψ) och (ξ, η) är som i lemma B.1 då gäller*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \right).$$

Bevis. Detta resultat följer direkt av sats B.1 tillsammans med det givna koordinatbytet. $\square$

C Bevis av Lamés Fundamentalsats

Innan vi börjar beviset presenterar vi ett Lemma.

Lemma C.1. *Om*

$$\sum_{j\in I} m_j \sin\left(\boldsymbol{G}_j \cdot \boldsymbol{x} + \phi_j\right) = 0, \tag{C.1}$$

för alla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ och $m_j \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{G}_j \in \mathbb{R}^n, \phi_j \in \mathbb{R}$, för $j \in I$ så är det ekvivalent med att antingen

1. *$m_j = 0$, för alla $j \in I$.*

2. *Det finns en partition av I i delmängder $I_k := \{j \in I : \boldsymbol{G}_j = \boldsymbol{G}_k$ eller $-\boldsymbol{G}_j = \boldsymbol{G}_k\}$ $k = 1, ..., p$ för vilka det gäller att $\sum_{j\in I_k} m_j \sin\left(\boldsymbol{G}_j \cdot \boldsymbol{x} + \phi_j\right) = 0$, för alla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Bevis. Om $m_j = 0$ för alla $j \in I$ är $\sum_{j\in I} m_j \sin\left(\boldsymbol{G}_j \cdot \boldsymbol{x} + \phi_j\right) = 0$, för alla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, så ena implikationen följer direkt.

För att visa andra implikationen betraktar vi summan över ett delintervall I_k. Med trigonometriska formler kan vi skriva om så vi får

$$\sum_{j\in I_k} m_j \sin\left(\boldsymbol{G}_j \cdot \boldsymbol{x} + \phi_j\right) = M_k \sin\left(\boldsymbol{G}_k \cdot \boldsymbol{x} + \Phi_k\right).$$

Detta ger alltså att villkoret i fall 2 är ekvivalent med att $M_k = 0$ för alla $k = 1, ..., p$. Summan i ekvation (C.1) kan då reduceras till

$$\sum_{j\in I} m_j \sin\left(\boldsymbol{G}_j \cdot \boldsymbol{x} + \phi_j\right) = \sum_{k=1}^{p} M_k \sin\left(\boldsymbol{G}_k \cdot \boldsymbol{x} + \Phi_k\right).$$

Om vi Fouriertransformerar summan i högerledet ovan och inte bryr oss om konstanter som är samma i alla termer fås

$$\sum_{k=1}^{p} M_k \left(\delta\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{G}_k\right) e^{\mathbf{i}\Phi_k} - \delta\left(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{G}_k\right) e^{-\mathbf{i}\Phi_k}\right).$$

δ är i detta fallet Diracs deltafunktion i $\mathbb{R}^n$. Om vi nu antar att villkoret $M_k = 0$ för alla k inte gäller kommer inte summan ovan kunna vara 0 för alla $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ och därmed kommer inte summan (C.1) kunna vara 0 för alla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Vilket medför att $M_k = 0$ för alla k.

□

Om vi ska tolka detta lemmat mer intuitivt så säger det att sinusvågor med olika frekvens inte kan ta ut varandra överallt då de garanterat kommer vara ur fas på något ställe. Med detta känt är vi nu mogna att bevisa Lamés fundamentalsats.

Bevis av Lamés Fundamentalsats

Bevis. Vi kommer endast bevisa första fallet i satsen då vi i detta arbete endast betraktar Dirichletrandvillkor. Beviset för den andra delen kommer vara helt analogt.

Bevisidén är att först byta koordinatsystem från $\boldsymbol{x}$ till $\boldsymbol{y}$, där en y_1 är ortogonal mot planet Π, och planet Π definieras av $y_1 = 0$. Koordinatbytet definieras av den ortogonala matrisen M enligt $\boldsymbol{y} = M\boldsymbol{x}$. Egentligen kan vi behöva lägga till en konstant också, men den kan vi bara baka in i a_j och b_j. Vi får då

$$u(\boldsymbol{y}) \equiv u(\boldsymbol{x}) = u\left(M^{-1}\boldsymbol{y}\right) = \sum_{j\in I} a_j \sin\left(\boldsymbol{L}_j \cdot M^{-1}\boldsymbol{y}\right) + b_j \cos\left(\boldsymbol{L}_j \cdot M^{-1}\boldsymbol{y}\right), \tag{C.2}$$

och $u\,(0, y_2, ..., y_n) \equiv 0$, då Π definieras av att $y_1 = 0$. Vi definierar nu $\boldsymbol{G}_j$ enligt

$$\boldsymbol{G}_j \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{L}_j \cdot M^{-1}\boldsymbol{y}.$$

Då M är ortogonal betyder det att $|\boldsymbol{G}_j| = |\boldsymbol{L}_j| = \mathit{konst}$ och sambandet ges explicit av $\boldsymbol{G}_j = M^{-1}\boldsymbol{L}_j$. Med notationen $\boldsymbol{G}_j = \left(G_j^1, G_j^2, ..., G_j^n\right)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ och lite trigonometriska formler[I] kan (C.2) skrivas som

$$\begin{aligned} u\,(\boldsymbol{y}) = \sum_{j \in I} \sin\left(G_j^1 y_1\right) \left[a_j \cos\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right) - b_j \sin\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right)\right] + \\ + \cos\left(G_j^1 y_1\right) \left[a_j \cos\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right) + b_j \sin\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right)\right]. \end{aligned} \tag{C.3}$$

$u\,(0, y_2, ..., y_n)$ kan nu uttryckas

$$\begin{aligned} 0 = u\,(0, y_2, ..., y_n) &= \sum_{j \in I} [a_j \cos\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right) + b_j \sin\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right)] = \\ &= \sum_{j \in I} m_j \sin\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k + \phi_j\right). \end{aligned}$$

m_j och ϕ_j är konstanter som går att relatera till a_j och b_j. Det gäller alltså att

$$\sum_{j \in I} m_j \sin\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k + \phi_j\right) = 0, \quad \forall \boldsymbol{y} = (0, y_2, ..., y_n) \in \Pi, \tag{C.4}$$

Om vi nu använder lemma C.1 för har vi att termerna i ekvation (C.4) måste kancellera i grupper $I_k := \{j \in I : (0, G_j^2, \ldots, G_j^n) = \boldsymbol{G}_k \text{ eller } -(0, G_j^2, \ldots, G_j^n) = \boldsymbol{G}_k\}$. Då vi vet att $|\boldsymbol{G}_j| = \mathit{konst}$ för alla $j \in I$ måste det för $j \in I_k$ gälla att $(G_j^1)^2 = \mathit{konst} - \left[(G_j^2)^2 + \cdots + (G_j^n)^2\right] = \mathit{konst}$. G_j^1 är alltså oberoende av j då $j \in I_k$. Kalla $G_j^1 = G_k^1$ för $j \in I_k$. Detta ger att andra termen i summan i ekvation (C.3) kan skrivas

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in I_k} \cos\left(G_j^1 y_1\right) \left[a_j \cos\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right) + b_j \sin\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right)\right] = \\ &\cos\left(G_k^1 y_1\right) \sum_{j \in I_k} \left[a_j \cos\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right) + b_j \sin\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right)\right] = 0, \end{aligned}$$

ty summan är 0. Då detta gäller för alla I_k eliminerar det hela den andra termen i serien i ekavtion (C.3), och kvar blir

$$u\,(\boldsymbol{y}) = \sum_{j \in I} \sin\left(G_j^1 y_1\right) \left[a_j \cos\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right) - b_j \sin\left(\sum_{k=2}^{n} G_j^k y_k\right)\right]$$

som är tydligt antisymetrisk över hyperplanet definierat av $y_1 = 0$. Beviset är därmed klart. □

[I] $a\sin(x+y) + b\cos(x+y) = \sin(x)[a\cos(y) - b\sin(y)] + \cos(x)[a\sin(y) + b\cos(y)]$.

D Lösningar till heltalsekvationer

Vi betraktar ekvation 3.1 given av

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} = n - 2.$$

För enkelhets skull löser vi ekvationen genom att testa möjliga kombinationer. Det här kan göras i ett ändligt antal steg, ty det räcker med att undersöka $a_1 = 1, 2, \ldots$ och $a_{j+1} = a_j, a_j + 1, \ldots$ och terminera vid första funna lösning för varje steg. Det här är inser vi då om värdet på ett a_j ökar kommer även a_{j+1} öka, och därmed får vi att de givna termerna endast blir mindre när vi fortsätter att öka. Vi kan dock se på det ur ett annat perspektiv. Genom att förlänga med $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ får vi

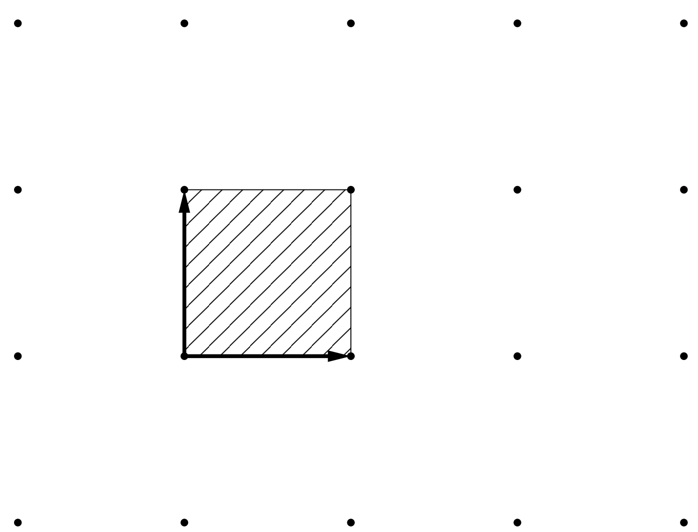
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j \neq k} a_j \right) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \, (n-2)$$

för $a_k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Då vi har att $a_j,\ j = 1, \ldots, n$ finns som faktor i högerledet, ger förkortning med a_j att $a_j \mid a_1 \cdot \ldots \cdot a_{j-1} \cdot a_{j+1} \cdot \ldots \cdot a_n$. Det betyder att det alltid finns par (a_i, a_j) som inte är relativt prima. Det här ger att element i $\{a_1, \ldots, a_n\}$ får högst vara relativt prima med $n-1$ andra tal. Lösningarna kommer då att finnas i mängden

$$\mathrm{SOL}_2 := \{m \in \mathbb{N} \ : \ \phi(m) \leq 2\}$$

som vi ser är likt den kristallografiska restriktionen i dimension 2. Det här kan vara en möjlig koppling att se på i högre dimensioner.

E Figurer



Figur 13: Här visas ett exempel på ett gitter. Två basvektorer är också utritade. Den så kallade enhetscellen i gittret är markerat med streckat.