

Beräkning av sprickbredd för konstruktioner utsatta för tvångskrafter

Betonggolv är exempel på en konstruktionstyp där tvångskrafter kan leda till en oacceptabel sprickbildning (se *figur 1*), vilket inte är estetiskt tilltalande och som i vissa fall dessutom kan leda till produktionsstörningar, beständighetsproblem och skapa en ohygienisk miljö. Därför är det viktigt att konstruktiv utformning så väl som arbetsutförande är väl genomtänkt så att sprickbildningen kan begränsas för att säkerställa avsedda funktion och beständighet. Men sprickbildningsprocessen orsakad av tvångskrafter skiljer sig från den som uppstår på grund av en yttre last och måste därför behandlas på ett annat sätt.

Genom att introducera rörelsefogar och skapa en låg friktion mot underlaget kan sprickor helt undvikas. Detta kräver dock små fogavstånd och en betong med lite krympning och helst stor krypning. Önskas istället stora fogavstånd är det möjligt att med hjälp av armering kontrollera sprickbildningen så att den hålls inom rimliga gränser. Men armering är kostsam och därför bör den mängd som föreskrivs vara baserad på beräkningar, som naturligtvis måste bygga på teoretiska modeller med realistiska antaganden.

I konstruktionsregler och handböcker (till exempel Boverkets handbok om betongkonstruktioner (BBK) och Betonghandbok Konstruktion) finns inte någon metod angiven för hur tvångskrafter ska beaktas och hur sprickbredder kan beräknas, vare sig för konventionellt armerade tvärsnitt (eller enbart stångarmering) och ”kombinationsarmerade” tvärsnitt (det



Figur 1: Exempel på oacceptabel sprickbildning.

vill säga stång- och fiberarmering). Den ”överslagsmetod” som anges i BBK (för konventionell armering) baseras istället på principen att sprickan orsakas av en yttre påkänning, istället för en inre påtvingad töjning, och att armeringen ska vara överstark, vilket innebär att den ska inte börja flyta vid sprickbildning och spänningen begränsas därför till 420 MPa (eller f_{yk} om detta är lägre). För fall där sprickbildningen orsakas av tvångskrafter kan inte denna princip användas och den leder oftast till för lite armering, vilket resulterar i oacceptabel sprickbildning.

I denna artikel presenteras en beräkningsmodell och exempel på hur den kan användas för att beräkna erforderlig armering med avseende på sprickbredds-krav för konstruktioner utsatta för tvångskrafter ges. Modellen är en vidareutveckling av en modell som professor *Björn Engström* vid Chalmers tekniska högskola har utvecklat för konventionellt armerade konstruktioner, se *Engström* (2006).

Beskrivning av sprickbildningsprocessen

Sprickbildningsprocessen orsakad av en yttre last skiljer sig från den som uppstår på grund av tvångskrafter, se *figur 2* på

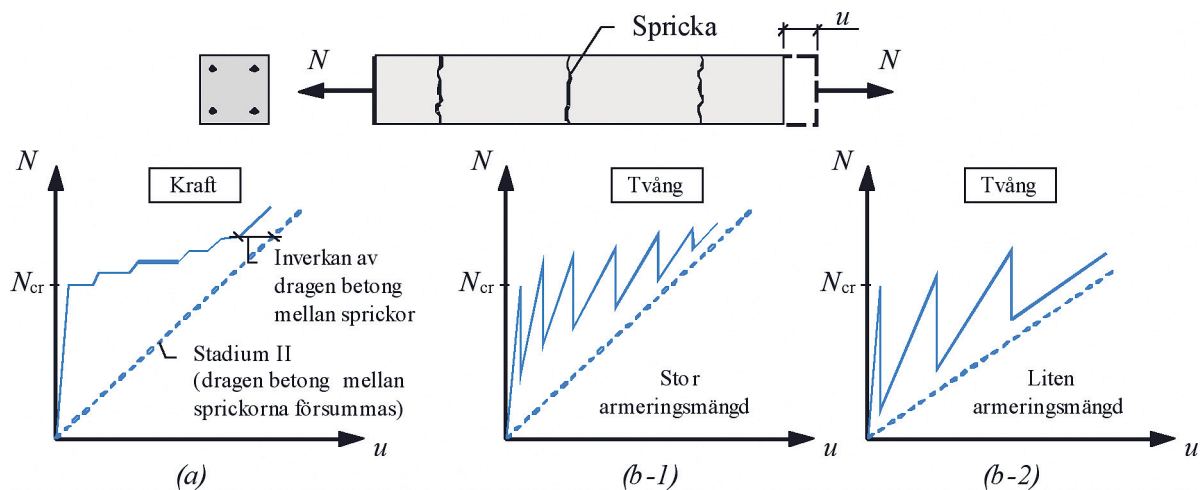
nästa sida. När sprickbildningen orsakas av en yttre last är armeringen vanligtvis dimensionerad för att kunna överföra dragkraften efter sprickbildning, och detta utan att armeringen börjar flyta. Detta innebär att belastningen kommer att orsaka en omedelbar sprickbildningsprocess (om $N > N_{cr}$) där ett antal relativt jämnt fördelade sprickor bildas. För detta fall kan minimiarmeringen (för tvärsnitt utan fiberarmering) uppskattas till exempel med metod enligt BBK och medelsprickavståndet hos det slutliga spricksystemet och sprickbredden kan beräknas enligt BBK. För ett kombinationsarmerat tvärsnitt måste metoden i BBK modifieras något och detta kan göras enligt en modell som togs fram i samband med ett examensarbete som genomfördes vid Chalmers tekniska högskola, avdelningen för betongbyggnad, se *Gustafsson & Karlsson* (2006) eller *Löfgren* (2007).

Ett annat beteende uppstår då konstruktionen utsätts för tvång. När en spricka bildas av en påtvingad förlängning sjunker kraften momentant och konstruktionens styvhet minskar. För att fler sprickor ska kunna bildas krävs att lasten åter når ett kritiskt värde (det vill säga $N > N_{cr}$), men tvångskraften är beroende av konstruktionens styvhet. Är styvheten låg så krävs det en stor förlängning innan det kritiska värdet nås och en ny spricka kan bildas, jämför (b-1) och (b-2) i *figur 2*, och detta resulterar i färre antal sprickor men större sprickbredd.

Vid sprickbildning orsakad av förhindrad rörelse blir konstruktionens längd oförändrad och, jämfört med en påtvingad förlängning, är det istället sprickbredderna som successivt tillväxer. Men förloppen är i stort sett desamma. För dessa båda fall där tvångskraften beror av konstruktionens styvhet kan principerna för beräkning av minimiarmering och sprickavstånd enligt BBK inte användas eftersom då den första sprickan bildas kan tvångskraften minska så mycket, beroende på sprickans öppning, att en ny spricka inte kan initieras eftersom tvångskraften aldrig når det kritiska läget (det vill säga $N < N_{cr}$) och rörelsebehovet är tillgodosett. Detta innebär att en annan metodik måste användas och särskilt då det ställs krav på sprickbreddsbegränsning.

Artikelförfattare är
Ingemar Löfgren,
Thomas Concrete
Group och Färdig
Betong AB.
ingemar.lofgren@tcg.nu





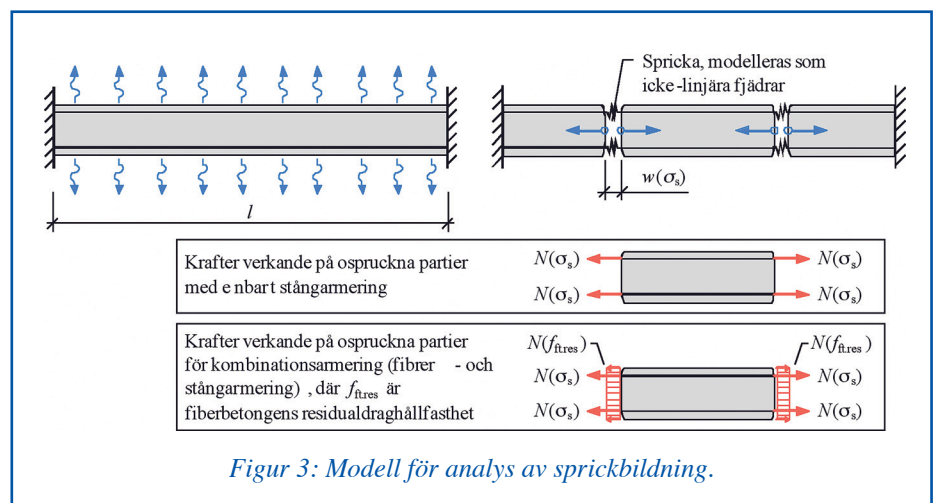
Figur 2: Samband mellan dragkraft och förlängning vid sprickbildning orsakad av: (a) yttre last och (b) av påtvingad förlängning, där (b-1) gäller för en stor armeringsmängd och (b-2) för en liten armeringsmängd. Baserad på Ghali m.fl (2002).

Vid sprickbildning orsakad av tvång är armeringsbehovet beroende av material-egenskaper och konstruktiv utformning som exempelvis täcksikt och fogavstånd. För armering med f_{yk} lika med 500 MPa gäller generellt att om armeringsinnehållet är för lågt ($\rho = A_{st} / A_c \leq 0,2$ procent) så kommer armeringen att flyta, en stor spricka bildas och tvångskraften sjunker så mycket att inga nya sprickor kan bildas. Om armeringsinnehållet är stort ($\rho > 0,8$ procent) kommer ett flertal relativt små sprickor att bildas och sprickbredden kommer att vara mindre än 0,4 mm om armeringen placeras tätt och har liten diameter. För måttliga armeringsmängder (0,4 procent $< \rho < 0,8$ procent) så orsakar sprickbildningen en styvhetsminskning, tvångskraften sjunker och den resulterande sprickbredden kan antingen vara acceptabel oacceptabel. Det kan påpekas att miniarmering enligt BBK 04 ofta hamnar i intervallet 0,4 procent $< \rho_{min} < 0,8$ procent, och i dessa fall är det gynnsamt att tillsätta fibrer till betongen. Fiberarmeringen ökar materialets "seghet", vilket leder till en ökad styvhet under sprickbildningsprocessen och som resulterar i tätare sprickavstånd och mindre sprickbredd.

Beräkningsmodell för analys av sprickbildningsprocessen

Engström (2006) presenterar en modell för att analysera sprickbildningsprocessen vid förhindrad rörelse. Modellen har modifierats av Löfgren (2007) för att inkludera effekten av fiberarmering. I Engströms modell betraktas sprickan som en fjäder som beskriver sambandet mellan sprickbredd och stålspänning, se figur 3. Sprickinitiering kontrolleras med ett kraftvillkor och ett deformationsvillkor används för att kontrollera om rörelsebehovet har tillgodosetts. Rörelsebehov kan bero på betongens krympning eller temperaturrörelse.

Sprickbredden är beroende av påkänningen i stålet, vidhäftningen mel-



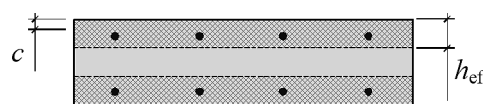
Figur 3: Modell för analys av sprickbildning.

lan betongen och armeringen samt den effektiva betongarean och kan beräknas med sambandet enligt ekvation (1), se formelruta på sidan 37, där ϕ är stängdiametern (med ϕ i mm), σ_s är påkänningen i armeringen, f_{cm} är medeltryckhållfastheten, E_s är armeringens elasticitetsmodul, E_c är betongens elasticitetsmodul och A_{ef} är den effektiva betongarean och denna beräknas som

$$A_{ef} = h_{ef} \cdot b$$

där h_{ef} är den del av dragzonen som har samma tyngdpunkt som den vidhäftande armeringen, se figur 4.

I stället för att ställa upp en jämviktsekvation som görs vid en yttre last används deformationsvillkor enligt ekvation (2), där l är konstruktionens längd, ϵ_{ce} är betongens elastiska deformation (av belastning), ϵ_{cc} är betongens krypdeformation,



Figur 4: Definition av effektiv höjd, se även figur 4.5.5a-d i BBK 04 eller figur 7.1 i EK 2.

n är antalet sprickor, w är sprickbredden, ϵ_c är betongens rörelsebehov (till exempel ϵ_{cs} för krympningen) och u är eventuell stödförskjutning vid ofullständigt tvång.

Som ett alternativ till stödförskjutningen u kan graden av tvång R introduceras. Graden av tvång kan bestämmas enligt ekvationerna (3) och (4), där S är stödens sammanlagda styvhet, vilken bestäms av ekvation (5), där N är normalkraften och u är stödens totala förskjutning se ekvationerna (6), (7) och (8), där A_s är armeringens tvärsnittsarea och φ_{ef} är det effektiva kryptalet.

Detta innebär att responsen under sprickbildningsskedet kan kontrolleras med hjälp av deformationsvillkor enligt ekvation (9), där $N(\sigma_s)$ är den kraft som verkar på ospruckna partier, n är antalet sprickor och ϵ_c är rörelsebehovet (negativ töjning orsakad av till exempel temperatursänkning eller krympning).

Den kraft som verkar på de ospruckna partierna, $N(\sigma_s)$, kan beräknas enligt ekvation (10).

För att en ny spricka ska kunna bildas krävs att den kraft som verkar på de ospruckna partierna, $N(\sigma_s)$, är större än den kraft, N_1 , som erfordras för att initiera en ny spricka (inom effek-

Formelruta:

$$w(\sigma_s) = 0,420 \cdot \left(\frac{\phi \cdot \sigma_s^2}{0,22 \cdot f_{cm} \cdot E_s \cdot \left(1 + \frac{E_s}{E_c} \cdot \frac{A_s}{A_{ef}} \right)} \right)^{0,826} + \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot 4 \cdot \phi \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ce} \cdot l + \varepsilon_{cc} \cdot l + n \cdot w + \varepsilon_c \cdot l + u = 0 \quad (2)$$

$$R = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cR}} = \frac{\text{påtvungad töjning}}{\text{påtvungad töjning vid fullständigt tvång}} \quad (3)$$

$$R = \frac{\sigma_c / E_c}{\sigma_c \cdot \left(\frac{1}{E_{c,ef}} + \frac{A_1}{S \cdot l} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{E_{c,ef} \cdot A_1}{S \cdot l}} \quad (4)$$

$$S = \frac{N}{u} \quad (5)$$

$$A_1 = A_c + (\alpha_{ef} - 1) \cdot A_s \quad (6)$$

$$E_{c,ef} = \frac{E_c}{1 + \varphi_{ef}} \quad (7)$$

$$\text{och } \alpha_{ef} = \frac{E_s}{E_c} \cdot (1 + \varphi_{ef}) \quad (8)$$

$$\frac{N(\sigma_s) \cdot l}{E_c \cdot A_1} \cdot (1 + \varphi_{ef}) + n \cdot w(\sigma_s) + R \cdot \varepsilon_c \cdot l = 0 \quad (9)$$

$$N(\sigma_s) = \sigma_s \cdot A_s \quad (10)$$

$$N_1 = f_{ctm} \cdot (A_{ef} + (\alpha_{ef} - 1) \cdot A_s) \quad (11)$$

$$N(\sigma_s, f_{ft, res}) = \sigma_s \cdot A_s + f_{ft, res} \cdot (A_c - A_s) \quad (12)$$

tiv betongarea). Den kraft som erfordras för att initiera en ny spricka, N_1 , kan beräknas enligt ekvation (11), där f_{ctm} är betongens medeldraghållfasthet

För ett kombinationsarmerat tvärsnitt, fiberarmering i kombination med konventionell armering, kan den kraft som verkar på de ospruckna partierna beräknas som summan av bidragen från stång- och fiberarmering (se figur 3) enligt ekvation (12), där $f_{ft, res}$ är residualdraghållfastheten för fiberarmerad betong (för konventionell betong är $f_{ft, res}$ är lika med 0).

Engströms modell har jämförts med försöksresultat från *Nejadi & Gilbert* (2004) och den modifierade versionen för fiberarmerad betong, har jämförts med *Niemann* (2004). Båda dessa jämförelser tyder på att modellen ger rimliga resultat, både vad gäller sprickbredd och antal sprickor, men beräkningsmodellen har brister. I modellen beaktas inte in-

verkan av friktion och eventuell vidhäftning mot underlaget. Vidhäftning och/eller friktion gör att sprickor initieras med ett kortare avstånd eftersom att ytterligare dragspänningar byggs upp tack vare detta. Vilket innebär att modellen kan anses vara på "säker sida". Inverkan av vidhäftning och/eller friktion skulle kunna introduceras, men gör beräkningarna betydligt mer omfattande. En annan 'brist' är att

den inte inkluderar alla tidsberoende effekter, till exempel hållfasthetstillväxt och krympningens och krympningens utveckling med tiden samt att det uppstår en fuktgradient som orsakar en ojämn krympning. Modellen bygger på att iterationer genomförs (antalet sprickor ökas till dess att $N(\sigma_s) < N_1$) och passar därför bäst för datorberäkningar, men modellen kan enkelt implementeras i till exempel Excel eller MathCad för en automatisk beräkning, men modellen går även att förenkla för handberäkningar, se *Engström* (2006).

Exempel på effekten av påverkande parametrar

Det är ett antal parametrar som påverkar sprickbildningsprocessen. Den pådrivande mekanismen är betongens krympning medan antalet sprickor och sprickbredden beror på följande parametrar:

- Graden av tvång.
- Krympningens storlek.
- Betongens draghållfasthet och effektiva elasticitetsmodul.
- Täcksiktens tjocklek.
- Armeringsinnehållet och armeringsdiameter.
- Vidhäftningen mellan betong och armering.
- Fiberbetongens residualdraghållfasthet (vilken bland annat beror på typ och mängd av fiber).

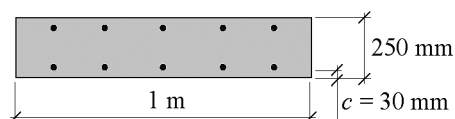
I det följande exemplet analyseras sprickbildningen i en platta som krymper, men där rörelsen är förhindrad. Geometri och grundläggande indata kan ses i *figur 5*. Några av de inverkan parametrarna har undersökts med beräkningsmodellen implementerad i ett Excelprogram utvecklat av artikelförfattaren, se *Löfgren* (2007b).

Inverkan av krympningens storlek på sprickbredden redovisas i *figur 6 på nästa sida*. Effekten av en ökad krympning är i allmänhet liten. Den har ingen effekt vid armeringsinnehåll större än 0,5 procent medan den har en viss negativ inverkan för ett litet armeringsinnehåll mindre eller lika med 0,4 procent. Inverkan av graden av tvång redovisas ej, men vid en analys visar sig det att den har en liknande effekt som krympningen. Är graden av tvång

tillräckligt lågt spricker inte konstruktionen till följd av krympning, men vid ett ökat tvång uppstår sprickor. Graden av tvång har dock en begränsad inverkan på sprickbredden, i praktiken leder det till en minskning av betongens krympdeformation, det vill säga $R \cdot \varepsilon_{cs}$, där R varierar mellan 0 och 1.

I *figur 7* visas inverkan av armeringsinnehåll och armeringsdiameter och i *figur 8* samband mellan stålspänning och sprickbredd. Av *figur 7*

En dubbelarmerad platta 10 meter lång och betong C 30/37.



Indata

Graden av tvång: $R = 1,0$

Betongens draghållfasthet: $f_{ctm} = 2,90 \text{ MPa}$ ($f_{ctk} = 2,0 \text{ MPa}$)

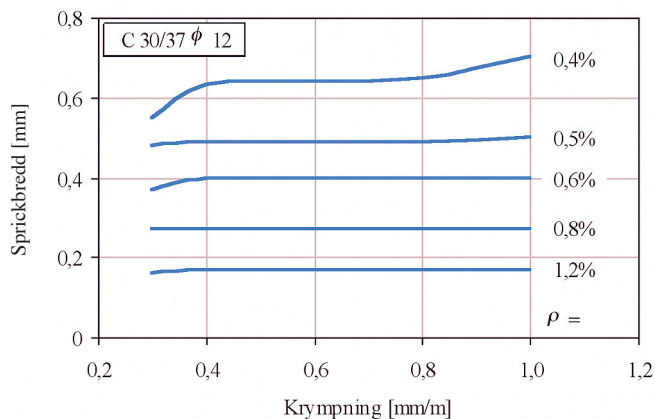
Betongens tryckhållfasthet: $f_{cm} = 38 \text{ MPa}$ ($f_{cck, cyl} = 30 \text{ MPa}$)

Betongens elasticitetsmodul: $E_{cm} = 33 \text{ GPa}$

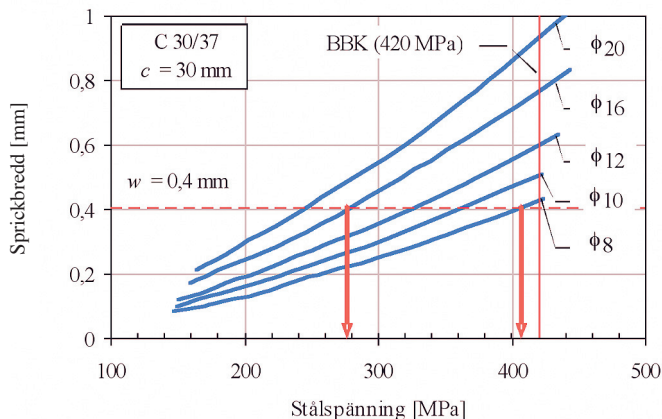
Krympning: $\varepsilon_{cs} = 0,5 \%$

Krypital: $\varphi_{ef} = 2,5$

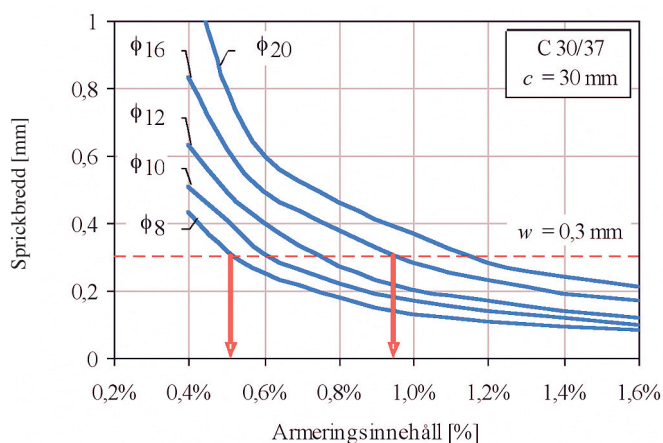
Figur 5: Indata för beräkningsexempel.



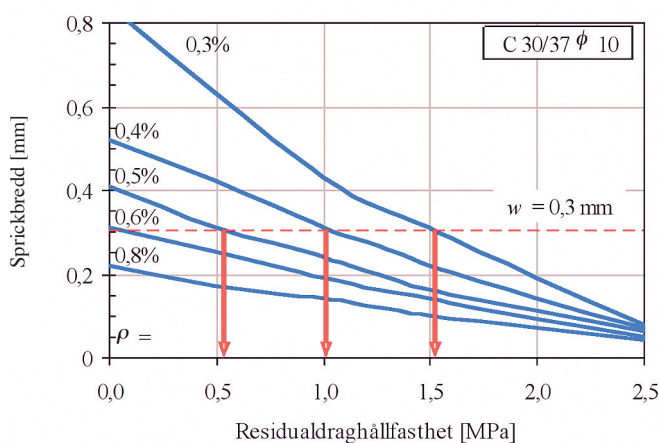
Figur 6: Inverkan av krympningen på sprickbredd för armering med diameter 12 mm.



Figur 8: Samband mellan stålspänning och sprickbredd för olika stångdiametrar.



Figur 7: Inverkan av armeringsinnehåll och diameter på sprickbredd.



Figur 9: Inverkan av residualdraghållfastheten för exemplet med $\phi 10$ (exempel på värden på f_{fres} kan fås i Löfgren, 2006).

framgår tydligt vikten av tillräckligt armeringsinnehåll och vikten av att ha stänger med en liten diameter. För sprickbredd 0,3 mm krävs 0,5 procent armeringsinnehåll för $\phi 8$ (motsvarar $s = 100$ mm) eller 0,95 procent för $\phi 16$ ($s = 210$ mm). Som kan ses i figur 8 så är det en stor skillnad mellan till exempel $\phi 8$ och $\phi 16$ vad gäller den spänning som kan tillåtas för att begränsa sprickbredden till mindre än 0,4 mm. För $\phi 8$ är 400 MPa acceptabelt, vilket kan jämföras med $\phi 16$ där spänningen måste begränsas till cirka 280 MPa (jämför med 420 MPa enligt BBK).

Slutligen redovisas i figur 9 inverkan av residualdraghållfastheten hos fiberarmering på sprickbredden. Ett kombinationsarmerat tvärsnitt (fibrer och stänger) är en effektiv sprickarmering. Särskilt vid ett litet armeringsinnehåll mindre än 0,4 procent fås en stor effekt och det är möjligt att uppnå en sprickbredd mindre 0,3 mm med betydligt reducerad mängd konventionell armering. En ytterligare effekt av reducerat armeringsinnehåll är att dess diameter kan minskas vilket ger en effektivare sprickarmering. Dessutom kan täcksiktet minskas, vilket leder till ett minskat effektivt tvärsnitt och en lägre

spricklast. Det bör dock påpekas att den totala mängden armering (fibrer och stänger) ökar, men det kan å andra sidan vara möjligt att ersätta stänger med ett standardnät och därmed skapa en kostnadseffektiv armering.

Sammanfattning och slutsatser

En beräkningsmodell framtagen av Engström, se Engström (2006), för att analysera sprickbildningsprocessen och beräkna sprickbredden i konstruktioner utsatta för förhindrad rörelse har presenterats. Modellen har kompletterats av Löfgren (2007) för att kunna analysera effekten av fiberarmering. Beräkningsmodellen gör det möjligt att undersöka de parametrar som påverkar sprickbildningen och den resulterande sprickbredden. Dessa parametrar är betongens materialegenskaper (krympning, krypning, elasticitetsmodul, draghållfasthet), armeringens materialegenskaper (elasticitetsmodul och flytspänning), armeringens dimension vid häftningsegenskaper, konstruktionens dimensioner och graden av tvång. Betongens krympning är den pådrivande mekanismen som orsakar sprickor, men krympningens storlek är inte huvudorsak

ken till hur stora sprickbredderna kan förväntas bli i ett betonggolv med stora fogavstånd. Detta innebär emellertid inte att storleken på betongens krympning är betydelselös utan det är viktigt att begränsa dess storlek inom rimliga gränser. För att erhålla en sprickbredd mindre än 0,3 mm krävs en relativt stor mängd armering (beroende på stångdiameter 0,5 procent $< \rho < 1,2$ procent). Ett kombinationsarmerat tvärsnitt (fibrer och stänger) är en effektiv sprickarmering, mängden konventionell armering kan reduceras (till 0,3 procent $< \rho < 0,5$ procent) och med en minskad mängd kan stångdiametern minskas, vilket gör armeringen effektivare som sprickarmering. ■

Referenser

BBK 04: Boverkets handbok om betongkonstruktioner. Karlskrona, Boverket 2004.

Betonghandbok Konstruktion, utgåva 2, AB Svensk Byggtjänst och Cementa AB, Örebro, 1990.

Engström, B. (2006): *Restraint crack-ing of reinforced concrete structures*. Undervisningsmaterial Institutionen för

bygg- & miljöteknik, Chalmers tekniska högskola.

Ghali, A., Favre, R. & Elbadry, M. (2002): *Concrete Structures – Stresses and Deformations*. 3rd ed, Spon Press, London.

Gustafsson, M. & Karlsson, S. (2006): *Fiberarmerade betongkonstruktioner – Analys av sprickavstånd och sprickbredd*. Examensarbete 2006:105, avdelningen för bygg- och miljöteknik, Chalmers tekniska högskola, Göteborg, Sverige. (se <http://documents.vsect.chalmers.se/CPL/exjobb2006/ex2006-105.Pdf>)

Löfgren I. (2006): *Fiberarmerad betong – materialprovning och strukturanalys baserad på brottmekanik*. Bygg & teknik, nummer 7, 2006, s. 46–52.

Löfgren, I. (2007): *Fiberarmerad Betong*. Kursmaterial Färdig Betong-skolan, Göteborg.

Löfgren, I. (2007b): Beräkningsprogram för analys av sprickbildning, utvecklat åt AB Färdig Betong, Göteborg.

Nejadi, S. & Gilbert, R. I. (2004): *Shrinkage Cracking In Restrained Reinforced Concrete Members*. Uniciv Report No. R-433, University of New South Wales, Sydney, Australia, 92 pp.

Niemann, P. (2004): *Gebrauchsverhalten von Bodenplatten aus Beton unter Einwirkungen infolge Last und Zwang*. Dissertation an der TU Braunschweig, Heft 545 des DAFStb.
