

Institutionen för vattenbyggnad
Chalmers Tekniska Högskola

Department of Hydraulics
Chalmers University of Technology

Beräkning av vågkrafter

av

Lars Bergdahl



Institutionen för vattenbyggnad
Chalmers Tekniska Högskola

Department of Hydraulics
Chalmers University of Technology

Beräkning av vågkrafter

av

Lars Bergdahl

Report
Series B:1

Göteborg 1977

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	<u>Sid.</u>
1. NÅGOT OM VÅGKRAFTER	1
1.1 Inledning	
1.2 Metoder att beräkna vågkrafter	
1.3 Grunden för vågkraftsberäkningar	2
2. POTENTIALSTRÖMNING	3
2.1 Navier och Stokes rörelseekvation	
2.2 Kontinuitetsekvationen	
2.3 Rotationsfri strömning	4
2.4 Hastighetspotentialen för tvådimensionell strömning	6
2.5 Bernoullis ekvation för potentialströmning	7
3. VÅGRÖRELSENS TEORI	9
3.1 Laplace differentialekvation	
3.2 Randvillkor	10
3.3 Lösningen för en stående våg	12
3.4 Fortskridande vågor	16
3.5 Hastighetspotentialens användning	17
4. VÅGKRAFTER MOT KAJER OCH VÅGBRYTARE	20
4.1 Vågkrafter mot en vertikal kaj	
4.2 Totalreflexion	
4.3 Vågor på "grunt" vatten	21
4.4 Vågor på "djupt" vatten	22
4.5 Flacka vågor på mycket grunt vatten	23
4.6 Jämförelse med Sainflous och Gerstners metoder	24
5. VÅGKRAFTER MOT FRISTÅENDE KONSTRUKTIONER ENL. MAC CAMY OCH FUCHS	26
5.1 Metodval	
5.2 Härledning av potentialen kring en cirkulär cylindrisk pelare	
5.3 Bestämning av tryck, vågkraft, stjälpande moment och våghöjd mot cylindern	29
5.31 Tryck	
5.32 Vågkraft och stjälpande moment	30
5.33 Våghöjd intill cylindern	31

	<u>Sid.</u>
5.4 Gränsövergång till smal pelare	31
5.5 Krafter mot föremål med annan form	34
6. KRAFTER MOT FRISTÅENDE KONSTRUKTIONER ENLIGT MORISON M. FL.	37
6.1 Vågkrafter mot små cirkulära cylindrar	
6.2 Rörelsemotstånd	
6.3 Krafter i en accelererad vätska	42
6.4 Morisons formel	47
6.5 Begränsningar i tillämpningen av Morisons formel	53
6.6 Jämförelse mellan Camy-Fuchs metod och Morisons	55
7. AVSLUTNING	56
Bilaga Tabell 1 x , $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $x \tanh x$, R/L	57
Bilaga Tabell 2 $A(kr_0)$, $\alpha(kr_0)$	59
Litteraturförteckning	60
Svar till övningsuppgifter	64

1. NÅGOT OM VÅGKRAFTER

1.1 Inledning

På senare tid har det blivit alltmer aktuellt att uppföra anläggningar i områden som är utsatta för kraftig sjö. Renvattenledningar till skär-
gårdsöar, avloppstuber på oskyddade kuststräckor, fasta utsjöfyrar,
gasledningar från oljefälten i Nordsjön och borrh- och produktionsplatt-
formar för olja eller gas kräver alla en större kännedom om vågkraf-
ter än vad man tidigare behövt kräva, eftersom vågkrafterna ofta blir
av avgörande betydelse vid dimensioneringen av sådana anläggningar.

Målsättningen med denna skrift har varit, dels att ge en teoretiskt
bättre bakgrund till avsnittet om Vågbrytare i Reinius: "Hamnar
och farleder" [1] och avsnittet om Vågkrafter i Cederwall: "Vågor" [2]
dels att ge de teknologer som läst fortsättningskursen i vattenbyggnad
för V4 bättre förutsättningar att ge sig i kast med beräkning av våg-
krafter inom havstekniken (Offshoretekniken, off shore $\approx$ utanför
kusten). Det är min förhoppning att även praktiskt verksamma ingen-
jörer skall ha nytta av skriften.

Skriften behandlar endast krafter från icke brytande vågor mot kajer
och fristående konstruktioner. Flexibla konstruktioners respons på
oregelbundna vågor berörs inte alls. För sådana problem se t. ex.
ref [37] och [38].

1.2 Metoder för att beräkna vågkrafter.

Det finns två principiellt olika metoder att beräkna vågkrafter mot
anläggningar i havet, nämligen dels en metod där man tittar på
konstruktionen som helhet och med hjälp av empiriska koefficienter
beräknar den totala vågkraften, dels en metod där man analytiskt
bestämmer tryckfördelningen kring konstruktionen och sedan genom
att integrera trycken bestämmer totalkraften.

Den förra metoden enligt Morison m. fl. [3] används med fördel för
att beräkna vågkrafter mot konstruktioner i havet med måttlig ut-
sträckning i horisontalplanet, t. ex. pelare på borrhplattformar, kas-

sunfyrrar, mindre oljelagringstorn, rörledningar. Enligt metoden beräknas krafterna på hela konstruktionen utgående från hastigheter, accelerationer och tryck i en opåverkad våg i en tänkt vertikal i centrum på platsen för konstruktionen. Eftersom man då inte tar hänsyn till hastighetsskillnaderna i vågens fortplantningsriktning, bör konstruktionens diameter (ϕ) inte vara för stor i förhållande till våglängden (L). För beräkning av krafter krävs tillgång på empiriska koefficienter. Enligt [4] bör $\phi \leq 0,2 L$ om metoden skall kunna tillämpas. Se vidare kapitel 6.5. (sid. 55).

Den senare metoden används allmänt för att beräkna tryck på grund av vågor som reflekteras mot en vertikal kaj med lång utsträckning. Se kap. 4. Camy och Fuchs [5] har utvecklat denna metod för att beräkna trycken mot stående cirkulära eller elliptiska cylindrar. De tar hänsyn till reflexion mot konstruktionen och radiell spridning av de reflekterade vågorna. Beräkningarna resulterar i besselfunktioner, men om diametern ϕ är större än $1/5$ av våglängden ger dessa beräkningar noggrannare och lägre värden på den maximala vågkraften. Dessutom erhålles även våghöjder kring och tryck mot konstruktionens olika delar. Se vidare kap. 5.

1.3 Grunden för vågkraftsberäkningen.

En grundförutsättning för att kunna beräkna vågkrafter är att man kan matematiskt beskriva hastigheter, accelerationer och tryckfördelning i en våg. Detta gäller vare sig man använder Morisons metod eller Camy och Fuchs'. Genom att betrakta en vågrörelse som potentialströmning (kap. 4.5 i hydraulikkompndiet [8]) kan alla hastigheter, tryck och accelerationer i en vågrörelse beskrivas med hjälp av en enda potentialfunktion och dess derivator. I kap. 2 nedan skall vi göra en snabbrepetition av potentialströmningsteorin och i kap. 3 skall vi tillämpa den på en vågrörelse. I kap. 4, 5 och 6 skall vi sedan utnyttja resultaten för att bestämma vågkrafter enligt de inledningsvis skisserade metoderna.

2. POTENTIALSTRÖMNING

2.1 Navier och Stokes' rörelseekvation

Navier och Stokes' rörelseekvation för en inkompressibel vätska lyder för tvådimensionell strömning (se hydraulikkompndiet kap. 4 [8]).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad \dots (2.1)$$

där t är tiden

x och z rumskoordinater

u och w hastigheterna i x respektive z -led

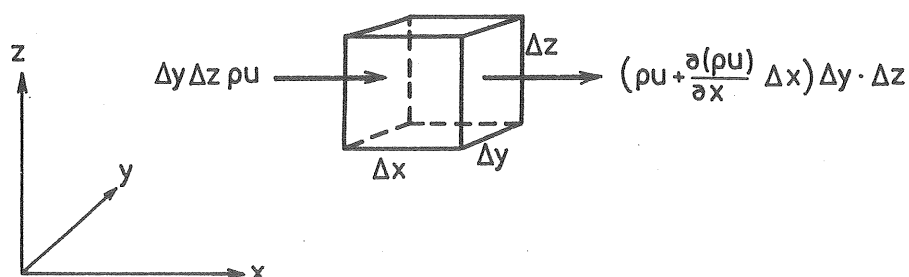
g jordaccelerationen

h en koordinat i negativ g -riktning, dvs h positiv uppåt

ρ vätskans täthet

η vätskans dynamiska viskositet

2.2 Kontinuitetsekvationen



Figur 2.1 Infinitesimal kontinuitetsbetraktelse.

Betrakta ett litet volymselement av ett flöde med tätheten ρ i ett koordinatsystem (x, y, z) med motsvarande hastighetskomponenter (u, v, w) . Av figur 2.1 framgår att det resulterande inflödet av massa kan skrivas

$$- \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad \dots (2.2)$$

Men detta massinflöde måste ju enligt principen om massans konstans vara lika med ökningen per tidsenhet av massan i volymselementet $\Delta x \Delta y \Delta z$, dvs

$$- \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad \dots (2.3)$$

vilket kan skrivas

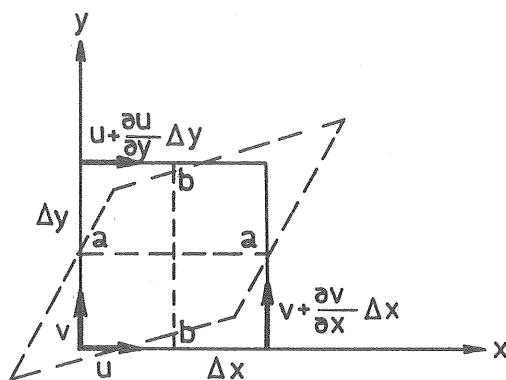
$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0 = \\ &= \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad \dots (2.4)$$

Om vätskan är inkompressibel inses att $d\rho/dt = 0$, dvs att densiteten hos en viss bestämd vätskemassa inte förändras under dess förflyttning. Observera däremot att olika delar av vätskan kan ha olika densitet t ex på grund av varierande salthalt. Detta leder till kontinuitetsvillkoren för tredimensionell respektive tvådimensionell strömning.

$$\begin{aligned} \text{3-D} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \text{2-D} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (2.5)$$

2.3 Rotationsfri strömning

Ett vätskeelements rotation kring sin tyngdpunkt uttryckes som funktion av hastighetskomponenternas gradient i x-, y- och z-led. För det tvådimensionella fall som skisserats i figur 2.2 finner vi att hastighetsdifferenserna strävar att deformera elementet. Samtidigt roterar snitten a - a och b - b moturs per tidsenhet vinklarna



Figur 2.2 Rotation och deformation av ett litet infinitesimalt vätskeelement.

$$\frac{v + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} - v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (2.6)$$

$$- \frac{u + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} - u}{\Delta y} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Rotationen, ω_z , av elementet per tidsenhet kring z-axeln definieras som medelvärdet av de två vinkelhastigheterna ovan, dvs

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \dots (2.7)$$

ω_x och ω_y erhålles på liknande sätt till

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \dots (2.8)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \dots (2.9)$$

Strömningen sägs vara rotationsfri eller irrotationell om

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

Ekvationerna (2.7) till (2.9) ger då

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots (2.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Även om strömningen är rotationsfri kan vätskeelementet undergå stora deformationer.

2.4 Hastighetspotentialen för tvådimensionell strömning

Under vilka förutsättningar existerar en kontinuerlig och deriverbar funktion $\phi(x, z, t)$ sådan att

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ w &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad \dots(2.11)$$

Ovanstående innebär att gradienten till ϕ i varje punkt skall beskriva ett flödes hastighetsvektor. Funktionen ϕ brukar därför kallas hastighetspotentialen.

Om strömningen är rotationsfri gäller enligt ekvation (2.10)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

och således att

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad \dots(2.12)$$

dvs att de blandade andraderivatorna är lika, vilket i sin tur innebär att ϕ är kontinuerlig och deriverbar med avseende på x och z .

Funktionen ϕ existerar således om strömningen är rotationsfri, och rotationsfri strömning kan därför också kallas potentialströmning.

Vidare gäller för en inkompressibel vätska enligt ekvation (2.5) kontinuitetsvillkoret

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

som med (2.11) insatt ger Laplace differentialekvation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{eller} \quad \Delta \phi = 0 \quad \dots(2.13)$$

Rotationsfri strömning hos en inkompressibel vätska beskrivs således av differentialekvationen (2.13), som är av andra ordningen och därför kräver två randvillkor för en fullständig lösning. En vågrörelse med konstant frekvens kan med god noggrannhet behandlas som potentialströmning, varvid lösningens avvikelse från den fysiska vågrörelsen bl. a. beror på de approximationer, som görs i randvillkoren. Samtidigt bör påpekas att naturlig sjö består av många vågor med olika frekvens och amplitud.

2.5 Bernoullis ekvation för potentialströmning.

För potentialströmning dvs rotationsfri strömning hos en inkompressibel vätska, gäller Navier och Stokes' rörelseekvationer (2.1). Om man för det tvådimensionella fallet för in villkoret för rotationsfri strömning $\partial u/\partial z = \partial w/\partial x$, ekv. (2.10), erhålles

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (2.14)$$

u och w är båda kontinuerliga och deriverbara och således är $\partial^2/\partial x \partial z = \partial^2/\partial z \partial x$. Om samtidigt $u \partial u/\partial x = \partial/\partial x (\frac{1}{2} u^2)$ införes erhålles

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh \right) &= \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh \right) &= \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (2.15)$$

Men kontinuitetsvillkoret (2.5) lyder $\partial u/\partial x + \partial w/\partial z = 0$, varför högerledet i ekvation (2.15) är identiskt lika med noll för en kontinuerlig inkompressibel vätska. Vi inför nu hastighetspotentialen ϕ enligt definitionen (2.11) vilken ger, om ϕ är kontinuerlig i tiden, t ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t}\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (2.16)$$

och insatt i ekvation (2.15) erhålles sedan hastighetspotentialen efter integrering med avseende på x respektive z

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh &= f_1(t, z) \\ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh &= f_2(t, x) \end{aligned} \quad \dots\dots (2.17)$$

Men ekvationerna (2.17) måste vara satisfierade samtidigt för alla punkter (x, z) i flödet, varför

$$f_1(t, z) = f_2(t, x) = f(t) \quad \dots\dots (2.18)$$

och en enda ekvation erhålles nämligen Bernoullis ekvation för en inkompressibel vätska vid rotationsfri, tvådimensionell strömning.

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = f(t) \quad \dots\dots (2.19)$$

Funktionen $f(t)$ ovan är för vissa strömningsfall identiskt lika med noll. Detta gäller naturligtvis för stationär strömning eftersom då alla storheter i flödet är oberoende av tiden. Enligt Nagai [10] gäller detta även för fortskridande vågor, medan man för stående vågor gör denna approximation för vågor med liten amplitud.

Det är just med hjälp av ekvation (2.19) vi enkelt kan erhålla trycket, p , i varje punkt i en vågrörelse, om vi lyckas bestämma utseendet hos hastighetspotentialen, ϕ . Den totala tryckkraften mot ett föremål i vattnet erhålles sedan genom att integrera trycken över föremålets yta. Hastighetspotentialen ϕ i sin tur erhålles som tidigare nämnts genom att lösa Laplace differentialekvation $\Delta\phi = 0$, ekv (2.13), med tillämpliga randvillkor.

3. VÅGRÖRELSENS TEORI

3.1 Laplace differentialekvation

I föregående kapitel har vi funnit att om en vågrörelse i en vattenmassa kan betraktas som potentialströmning, kan vi bestämma vågrörelsens egenskaper genom att lösa Laplace differentialekvation $\Delta\phi = 0$, där ϕ är den så kallade hastighetspotentialen. Ur ϕ kan sedan erhållas till exempel hastigheterna i vertikal- och horisontal- och trycken i vattenmassan.

Laplace' differentialekvation, $\Delta\phi = 0$, och Poissons, $\Delta\phi = f(x,y)$ förekommer vid beräkning av flöde av värme, ljud och ljus, i elektricitetsläran och i byggnadsmekaniken. I hydrauliken har vi till exempel tidigare påpekat likheten mellan den elektriska strömbilden i en tunn metallfolie och den hydrauliska strömbilden i en grundvattenström. För potentialströmning i en vattenmassa har vi nu funnit att Laplace ekvation $\Delta\phi = 0$ även beskriver icke stationära förlopp, eftersom inga villkor om stationära förhållanden införts i härledningen av ekvationen (2.13).

Lösningen till Laplace' och Poissons ekvationer kan ges i form av harmoniska funktioner. För en kvadratisk fritt upplagd platta med sidlängden L erhålles till exempel nedböjningen $w_{mn}(x,y)$ som en fouieriserie ur ekv $\Delta w = p(x,y)$, där $p(x,y)$ är lasten.

$$w_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin m\pi \frac{x}{L} \cdot \sin n\pi \frac{y}{L} \dots\dots (3.1)$$

Är däremot t ex sidorna $x = 0$, $x = L$ fast inspända görs Levys ansats

$$w_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \sinh m\pi \frac{x}{L} + B_{mn} \cosh m\pi \frac{x}{L}) \sin n\pi \frac{y}{L} \dots\dots (3.2)$$

Det är tydligt att de olika randvillkoren för momentet $w''(0,y) = w''(L,y) = 0$ i det första fallet och för lutningen $w'(0,y) = w'(L,y) = 0$ i det senare fallet har stor betydelse för lösningens uppbyggnad.

På liknande sätt är det ansatsen av randvillkoren till ekvationen $\Delta\phi = 0$ i vattenytan till en vattenmassa som bestämmer utseendet på lösningen.

Beroende på hur noggrant man väljer dessa randvillkor brukar man tala om vågor med liten eller stor amplitud i förhållande till vattendjupet. Det visar sig nämligen att enkla randvillkor ger en lösning som väl beskriver vågor med liten amplitud i denna mening. För högre och brantare vågor tvingas man däremot ibland att ta till randvillkor som korrektare beskriver de verkliga randvillkoren.

Teorin för vågor med liten amplitud i förhållande till vattendjupet är trots förenklingarna mycket användbar och ger tillräcklig noggrannhet för många praktiska tillämpningar.

3.2 Randvillkor

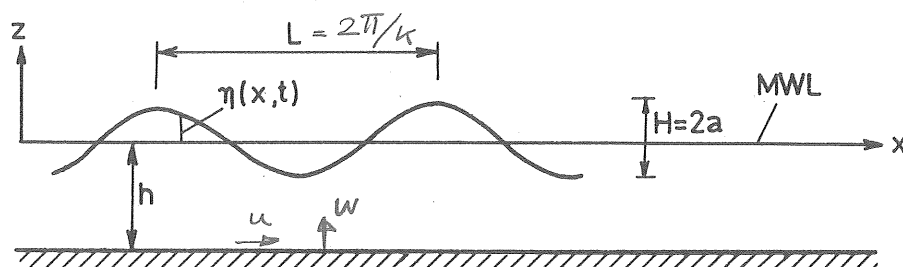


Fig. 3:1 En våg

Ett uppenbart randvillkor är att den vertikala hastigheten vid bottnen skall vara noll, dvs

Botten $\rightarrow$

$$w_{z=-h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \quad \dots \quad (3.3)$$

Ett annat randvillkor erhålles ur Bernoullis ekvation (2.19). Om vi bortser från vindkrafter i vattenytan, $z = \eta$, kan vi sätta trycket i denna konstant lika med atmosfärstrycket, som är vårt referenstryck, dvs

$$p_{z=\eta} = 0 \quad \dots \quad (3.4)$$

vilket i Bernoullis ekvation för $z = \eta$ ger

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g\eta = f(t) \quad \dots\dots (3.5)$$

Nu har vi två randvillkor, vilket borde vara tillräckligt för att lösa en andra ordningens differentialekvation, men randvillkoret (3.5) är tyvärr inte fullständigt, eftersom det innehåller vattenytans nivå η som är en okänd funktion av x och t . Vi måste alltså antaga något om vågrörelsens karaktär. För en stående våg med liten amplitud i förhållande till vattendjupet kan man iakttaga att sinuskurvan är en bra approximation av vågrörelsen i tid och rum.

$$\eta = a \sin kx \cdot \sin \sigma t \quad \dots\dots (3.6)$$

En våg enligt ekvation (3.6) är uppritad i figur 3.1. Av ekvationen (3.6) följer att vertikala hastigheten i vattenytan måste vara

$$\partial \eta / \partial t = w_{z=\eta} = -\partial \phi / \partial z \quad \dots\dots (3.7)$$

och vi ser att vi nu har tre randvillkor nämligen (3.3), (3.5) och (3.6). Dessa måste vara kompatibla eftersom endast två RV behövdes för att lösa ekvation $\Delta \phi = 0$.

Nedan kommer vi att se att de konstanter som finns inbakade i randvillkoren (3.5) och (3.6) måste stå i ett visst förhållande till varandra (ekv. (3.26) kapitel 3.3) om båda dessa randvillkor samtidigt skall vara uppfyllda.

I teorin för vågor med liten amplitud brukar man dels försumma $f(t)$ och kvadraterna av hastigheterna i Bernoullis ekvation dels ansätta randvillkoren (3.5) och (3.7) i lugnvattenytan $z = 0$ i stället för i vattenytan $z = \eta$. För fortskridande vågor är $f(t)$ alltid noll.

I noggrannare lösningar tar man hänsyn till hastighetshöjden, att randvillkoren skall ansättas i vattenytan, vindkrafter i vattenytan, $f(t) \neq 0$ (för stående vågor), att vågformen inte är sinusoidal etc.

För vågor med liten amplitud har vi då sammanfattningsvis följande förklarade randvillkor.

Den vertikala hastigheten vid botten

$$w_{z=-h} = 0 = - \frac{\partial \phi}{\partial z}_{z=-h} \quad \dots \quad (3.3)$$

Den vertikala hastigheten i medelvattenytan erhålles ur ekv. (3.7) till

$$w_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \sigma \sin kx \cdot \cos \sigma t = - \frac{\partial \phi}{\partial z}_{z=0} \quad \dots \quad (3.8)$$

Förenklingarna i Bernoullis ekvation (3.5) ger

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}_{z=0} = g\eta \quad \dots \quad (3.9)$$

Övning 3 a: Hur lyder de randvillkor som svarar mot ekvationerna (3.8) och (3.9) om randvillkoren ansätts för $z = \eta$?

3.3 Lösningen för en stående våg

Vi söker nu lösningen till ekvationen $\Delta \phi = 0$. Randvillkoret för hastigheten i vattenytan lyder för en stående våg $-\partial \phi / \partial z = w_{z=0} = a \sigma \sin kx \cdot \cos \sigma t$. För en sådan vågrörelse borde man kunna vänta sig en lösning, som består av en produkt av faktorer, som var och en endast beror av en variabel. En sådan produktlösning kan ansättas som

$$\phi = X(x) Z(z) T(t) \quad \dots \quad (3.10)$$

Det är lättare att finna en sådan lösning än att direkt försöka finna en som har formen $\phi = f(x, t, z)$ eller $\phi = f(kx - \sigma t, z)$. Vi kommer i avsnitt 3.4 att visa hur man genom att addera lösningar av typen (3.10) erhåller lösningen för en fortskridande våg.

Ekvation (3.10) ger insatt i $\Delta \phi = 0$

$$\Delta \phi = X''(x)Z(z)T(t) + X(x)Z''(z)T(t) = 0 \quad \dots \quad (3.11)$$

eller om $T(t)$, $X(x)$ och $Z(z) \neq 0$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z} = -k_1^2 \quad \dots\dots (3.12)$$

där k_1 är ett godtyckligt reellt tal.

Observera att tecknet på k_1^2 väljes så att ekvationer i X ger en sinus- eller cosinusformad lösning, eftersom vågrörelsen antas vara periodisk i x -led. Ekvationen (3.12) ger nu differentialekvationerna

$$\begin{aligned} X'' + k_1^2 X &= 0 \\ \text{och} \quad Z'' - k_1^2 Z &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots (3.13)$$

vilka har lösningarna

$$\begin{aligned} X &= A \cos k_1 x + B \sin k_1 x \\ \text{resp.} \quad Z &= C \cosh k_1 z + D \sinh k_1 z \end{aligned} \quad \dots\dots (3.14)$$

Lösningen (3.10) kan då skrivas

$$\begin{aligned} \phi &= (A \cos k_1 x + B \sin k_1 x)(C \cosh k_1 z + \\ &+ D \sinh k_1 z) \cdot T(t) \end{aligned} \quad \dots\dots (3.15)$$

Randvillkoret (3.8) för hastigheten i vattenytan ger $\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} = a \cdot \nabla \cdot \sin k \cdot x \cdot \cos \sigma t$

$$\begin{aligned} a \nabla \sin kx \cos \sigma t &= -k_1 (A \cos k_1 x + B \sin k_1 x) \\ &\quad (C \sinh k_1 0 + D \cosh k_1 0) \cdot T(t) \end{aligned} \quad \dots\dots (3.16)$$

Eftersom $\cosh 0 = 1$ och $\sinh 0 = 0$ erhålles genom att jämföra höger och vänster led

$$\begin{aligned} T(t) &= \cos \sigma t \\ A &= 0, \quad k_1 = k \quad \text{och} \quad B = 1 \\ D &= -a \sigma / k \end{aligned}$$

Randvillkoret (3.3) för hastigheten vid botten ger nu

$$0 = -k \sin kx \left(C \sinh(-kh) - \frac{a\sigma}{k} \cosh(-kh) \right) \cdot \cos \sigma t \quad \dots \quad (3.17)$$

och således

$$C = \frac{a\sigma}{k} \frac{\cosh(-kh)}{\sinh(-kh)} = \frac{a\sigma}{k} \coth(-kh) \quad \dots \quad (3.20)$$

Slutligen får vi då hastighetspotentialen genom insättning i (3.10)

$$\phi = \frac{a\sigma}{k} \left[\coth(-kh) \cdot \cosh kz - \sinh kz \right] \sin kx \cos \sigma t \quad \dots \quad (3.21)$$

Denna formel kan med hyperbolisk trigonometri ^{x)} omformas till

$$\phi = -\frac{a\sigma}{k} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin kx \cos \sigma t \quad \text{alt 2} \quad (3.22)$$

$h := \eta + h$ alt 1 *

Om vågor uppträder i ett område med mycket djupt vatten relativt våglängden, $h > 1/2 L$, kan hastighetspotentialen för den stående vågen approximeras med

$$\phi = -\frac{a\sigma}{k} e^{kz} \sin kx \cdot \cos \sigma t \quad \dots \quad (3.24)$$

Sådana vågor kallas även korta vågor.

Vill vi samtidigt uppfylla även Bernoullis ekvation enligt det förenklade randvillkoret (3.9) $\partial\phi / \partial t_z = 0 = g\eta$ erhålles ur detta och (3.22)

$$\frac{a\sigma^2}{k} \frac{\cosh kh}{\sinh kh} = g a \quad \dots \quad (3.25)$$

d v s

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad \text{eller} \quad \frac{\sigma^2 h}{g} = kh \cdot \tanh kh \quad \dots \quad (3.26)$$

x) $\sinh(-a) = -\sinh a$; $\cosh(-a) = \cosh a$
 $\sinh a \cdot \sinh b = 1/2 [\cosh(a+b) - \cosh(a-b)]$
 $\cosh a \cdot \cosh b = 1/2 [\cosh(a+b) + \cosh(a-b)]$

Hastighetspotentialen (3.22) kan då för en stående våg skrivas

$$\phi = -\frac{g a}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin kx \cos \sigma t \quad \dots \quad (3.27)$$

Detta är kanske den vanligaste skrivningen av hastighetspotentialen och vi kommer genomgående att använda ekvation (3.27).

Observera att om vi endast föreskrivit att vågrörelsen skulle vara periodisk med vågtalet k skulle vi fått oändligt många lösningar av formen

$$\phi = A_n \cosh nk(z+h) \sin n kx \cos \sigma t, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Med hjälp av fourierkoefficienterna A_n kan man beskriva en mycket komplicerad vågrörelse, men detta utvidgar i och för sig inte teorin till att gälla för vågor med stor amplitud eftersom approximationerna i randvillkoren kvarstår oförändrade.

Genom att utveckla uttrycken för randvillkoren i Taylor-serier kring $z = 0$ kan man däremot hitta en lösning som satisfierar randvillkoren (3.5) och (3.7) för $z = \eta$. Resultatet får en form liknande den ovanstående fourierserien, men koefficienterna erhålls genom att successivt förbättra randvillkoren med hjälp av de funna lösningarna. Antalet sinustermer, n , i lösningen brukar ge namn till vågteorin. En lösning med $n = 3$ kallas t ex tredje ordningens vågteori enligt Stokes. Se t ex Rundgren [11] eller Wiegel [21].

Övning 3b: Bestäm motsvarande hastighetspotential för den stående vågen om randvillkor enligt övning 3a användes.

3.4 Förtskridande vågor

Vattenytan för en förtskridande våg kan beskrivas med en funktion $\eta(x, t) = f(kx - \sigma t)$. En viss

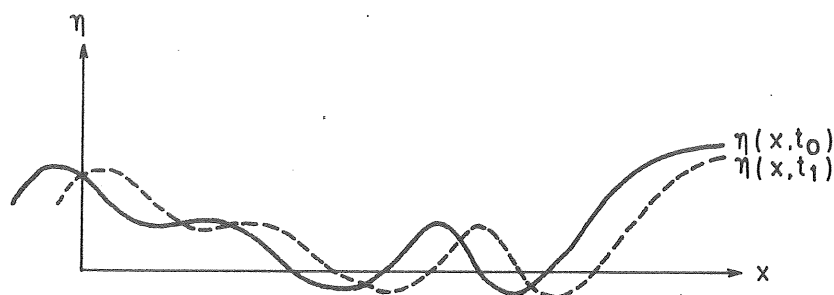


Fig. 3.2 En vågrörelse $\eta = f(kx - \sigma t)$
vid två olika tidpunkter t_0 och t_1 $t_1 > t_0$

vågform kommer då att förflytta sig med hastigheten σ/k i positiv x-led. σ/k benämnes fashastigheten.

Speciellt kan vi ansätta en sinusformad förtskridande våg

$$\eta = a \cdot \sin(kx - \sigma t) \quad \dots\dots (3.28)$$

Denna våg kan också erhållas genom att addera två fashörskjutna stående vågor t. ex.

$$\eta = a (\sin kx \cdot \cos \sigma t - \cos kx \sin \sigma t) \quad \dots\dots (3.29)$$

Hastighetspotentialen för den förtskridande vågen (3.28) eller (3.29) erhålles då ur (3.27) till

$$\phi = \frac{g a}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (\text{alt. 2}) \quad \dots\dots (3.30)$$

Här är a vågens amplitud dvs halva våghöjden, σ cirkelfrekvensen för vågperioden, k vågtalet eller cirkelfrekvensen för våglängden och h är vattendjupet. Om vågperioden tecknas T och våglängden L ges σ och k av sambanden

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad k = \frac{2\pi}{L} \quad \dots\dots (3.31)$$

Observera att vågrörelsens frekvens är det inverterade värdet av vågperioden

$$f = \frac{1}{T} \quad \dots\dots (3.32)$$

Vågens fashastighet

$$c = \frac{L}{T} = \frac{\sigma}{k} = \frac{g}{\sigma} \tanh kh = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \quad \text{Aegys formel (3.33)}$$

Om $h \geq \frac{1}{2} L$ kan $\tanh kh$ sättas till 1 och man säger att vågorna uppträder på "djupt" vatten. Då blir fashastigheten

$$c = \frac{g}{\sigma} = 1,56 T = \sqrt{1,56 L}; \quad L = 1,56 T^2 \quad \dots\dots (3.34)$$

Om däremot $h \leq 0,1 L$ kan $\tanh kh \approx kh$ och man brukar tala om vågor på "grunt" vatten. Fashastigheten blir då

$$c = \sqrt{gh} \quad \dots\dots (3.35)$$

Se vidare t. ex. Cederwall [2]

3.5 Hastighetspotentialens användning

Även om uttrycket för hastighetspotentialen för t. ex. en fortskridande våg, ekv. (3.30), ser litet obekvämt ut, finner vi snart, att det har många fördelar. Man kan ju ur ekvationen genom att derivera m. a. p. x , z eller t erhålla uttryck för hastigheter, accelerationer och tryck i alla punkter i vätskan:

$$\text{Utgå från ekv. (3.30)} \quad \phi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$$

Vågformen erhålles ur randvillkoret (3.8):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = \frac{1}{g} \frac{ag}{\sigma} \sigma \frac{\cosh k(0+h)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t) = \\ &= a \sin(kx - \sigma t) \quad \dots\dots (3.36) \end{aligned}$$

Horisontella hastigheter ur (2.11a):

$$u = - \frac{\partial \phi}{\partial x} = + \frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cdot \sin(kx - \sigma t) \quad \dots\dots (3.37)$$

Vertikala hastigheter ur (2.11b):

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{agk}{\sigma} \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \cdot \cos(kx - \sigma t) \quad \dots \quad (3.38)$$

Horisontella accelerationer ur ekv. (3.37):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = -agk \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cdot \cos(kx - \sigma t) \quad \dots \quad (3.39)$$

Vertikala accelerationer ur ekv. (3.38):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} = -agk \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \cdot \sin(kx - \sigma t) \quad \dots \quad (3.40)$$

Trycket ur ekv. (2.19), ($w^2 + u^2 = 0$):

$$\begin{aligned} p &= \rho \left(-gz + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \\ &= -\rho g z + \rho g a \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad \dots \quad (3.41) \end{aligned}$$

Dessutom kan partikelbanorna i vattnet erhållas genom att integrera ekvationerna (3.37) och (3.38) med avseende på t . Formen på dessa banor är elliptisk med storaxeln horisontell. Nära botten och på grunt vatten är lillaxeln mycket liten, vattnet oscillerar fram och åter. På djupt vatten är partikelbanorna enligt denna teori cirkulära, dvs storaxeln och lillaxeln är lika långa.

Hastigheterna, accelerationerna, trycken och partikelbanorna i en stående våg eller en våg av högre ordning med mer komplicerad hastighetspotential kan givetvis erhållas på motsvarande sätt som för den fortskridande vågen ovan.

I Reinius "Hamnar och farleder" [1] och Cederwall: "Vågor" [2] finns beskrivningar över några olika typer av vågrörelser och vilka partikelbanor som uppträder i dessa.

Exempel 3c. Beräkna det maximala trycket på botten när en våg med $L = 50 \text{ m}$ $H = 2 \text{ m}$ passerar en plats där vattendjupet är $12,5 \text{ m}$.

Ekvation (3.30) användes:

$$\phi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$$

Här blir enligt lydelsen $a = H/2 = 1 \text{ m}$, $k = 2\pi/L = \pi/25 \text{ m}^{-1} \approx 0,125 \text{ m}^{-1}$, $h = 12,5 \text{ m}$ och σ kan erhållas ur ekv. (3.26). Men det är trycket p vi är ute efter.

$$p = \rho (-gz + \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\rho gz + \rho ag \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$$

Sätt $\sin(kx - \sigma t) = 1$ och sätt in värdena ovan för $z = -h$

$$p_{\max} = +\rho g \cdot h + \rho \cdot g \frac{H}{2} \frac{\cosh 0}{\cosh kh}$$

$$p_{\max} = \rho g (h + \frac{H}{2} \frac{1}{2,48}) = \rho g (h + \frac{H}{4,96})$$

$$p_{\max} = 10^4 \cdot (12,5 + \frac{2}{4,96}) = 1,29 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Övning 3d. Beräkna den horisontella och vertikala max. hastigheten vid botten när vågen passerar.

4. VÅGKRAFTER MOT KAJER OCH VÅGBRYTARE

4.1 Vågkrafter mot en vertikal kaj

S. Nagai [10] ger i Advances in Hydrosience, Vol. 9, 1973, en utomordentlig sammanfattning över vågkrafter och speciellt rekommenderar han vissa praktiska metoder för att beräkna vågkrafterna mot en vertikal kaj vid totalreflexion. Indelningen i vågor på grunt och djupt vatten i detta avsnitt följer inte den vanliga med $h/L < 0.1$ resp. $h/L > 1/2$ utan är gjord av Nagai för just dessa vågkraftsberäkningar.

I uppsatsen beskrivs också hur vågkrafter förändras om botten sluttar upp mot vågbrytaren, och vågen endast reflekteras partiellt. Reinius [1] och Cederwall [2] anger även några metoder för att beräkna tryck från stående och brytande vågor samt för hur man dimensionerar sprängstensvågbrytare. För djupare studium se Rundgren [11] för partiellt reflekterade vågor och Hedar [12] för dimensionering av sprängstensvågbrytare.

Hos Bruun [13] eller Beach Erosion Board [26] anges praktiska, internationellt använda metoder för dimensionering av vågbrytare uppbyggda av sprängsten och gjutna patenterade betongkroppar.

4.2 Totalreflexion

Om en regelbunden fortskridande sinusvåg med långa vågkammar faller in vinkelrätt mot en vertikal kaj, vågkammarna parallella med kajen, kommer en stående våg att uppstå framför kajen. Denna våg får dubbelt så stor höjd som den infallande vågen. Om vattendjupet framför kajen är litet kommer dessutom medelvattenytan hos vågrörelsen att höjas något över lugnvattenytan vid kajen.

I figur 4.1 har en stående sinusvåg framför en kaj skisserats vid några olika tidpunkter. Vid kajväggen uppträder en buk, dvs vattenytan svänger upp och ned, mellan högsta och lägsta nivå. Max eller minpunktens läge

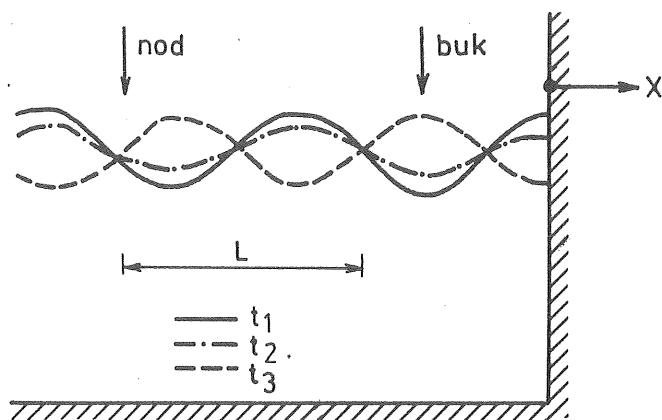


Fig 4.1 En stående våg

ligger fast där och de horisontella hastigheterna i vattnet är noll. En kvarts våglängd från kajen uppträder en nod, dvs vattenytan har konstant nivå där. Noder uppträder vidare på avstånden $-x = (\frac{\pi}{2} + n\pi)/k = (\frac{1}{4} + \frac{n}{2})L$ från kajen och bukar vid $-x = n\pi/k = \frac{n}{2}L$.

4.3 Vågor på grunt vatten ($0,135 \leq h/L < 0,35$ enl. Nagai)

Om man sätter in hastighetspotentialen för en stående våg (3.27) i Bernoullis ekvation (3.9) erhålles följande uttryck för det maximala trycket i vågens buk.

$$p_{\max} = -\rho g z + \underbrace{\rho g H \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}}_{\text{dynamiskt tryckdel}} \quad (\text{alt.??}) \quad (4.1)$$

Här är H den infallande vågens höjd. Höjden hos den stående vågen är ju $2H$ och dess amplitud således H enligt vad vi sagt tidigare.

Den vertikala fördelningen av trycket ovanför lugnvattenytan antas vara linjär med $p_{z=H} = 0$ och $p_{z=0} = \rho g H$. Det resulterande trycket erhålles då genom att integrera ekvation (4.1) från $-h$ till 0 samt addera trycket ovan lugnvattenytan.

$$P_{\max} \approx \rho g \left\{ \frac{1}{2} (h^2 + H^2) + (H/k) \tanh kh \right\} \quad \dots \quad (4.2)$$

Observera att andelen $\frac{1}{2} \rho g h^2$ är den statiska tryckkraft som existerar vid lugnvatten på platsen. Minimitrycket erhålles på motsvarande sätt till

$$P_{\min} = -\rho g z - \rho g H \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad \dots \quad (4.3)$$

och minimum av tryckkraften

$$P_{\min} \approx \rho g \left\{ \frac{1}{2} h^2 - H/k \tanh kh \right\} \quad \dots \quad (4.4)$$

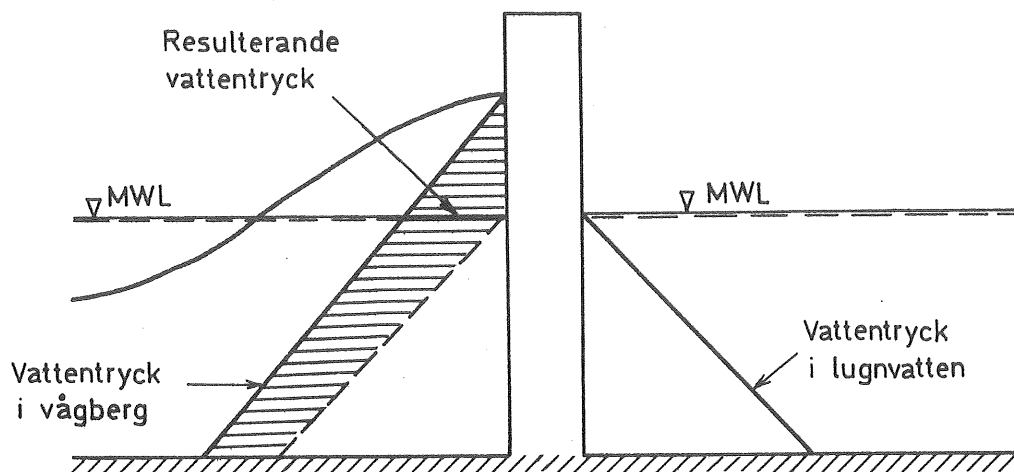


Fig 4.2 Belastningen mot en vågbrytare

Belastningen på t ex en vågbrytare blir nu skillnaden i trycket på in- och utsidan av vågbrytaren enligt figur 4.2. På samma sätt kan påfrestningarna på en kajmur ansättas om trycket antas hydrostatiskt i fyllningen bakom muren.

Ekvationerna (4.1) och (4.2) har jämförts med försöksvärden [10], och på grunt vatten inom intervallet $0,135 \leq h/L < 0,35$ befanns överensstämmelsen med de uppmätta trycken vara god även för branta vågor.

4.4 Vågor på djupt vatten ($h/L \geq 0,35$ enl. Nagai)

Hastighetspotentialen (3.27) för en stående våg erhölls genom att sätta in randvillkoren för $z=0$, ekv (3.7) och (3.8). Om vi i stället ansätter randvillkoret $p=0$ i den verkliga vattenytan $z=h$ erhålles enligt övning 3b:

$$\phi = -\frac{\sigma H}{k} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh k(h+\eta)} \cos \sigma t \cdot \sin kx \quad (\text{all!}) \quad (4.5)$$

Även här låter vi H beteckna höjden hos den infallande vågen. Om vi sätter in (4.5) i Bernoullis ekvation (3.41) och fortfarande försummar hastighetshöjden erhålles det maximala trycket till

$$p_{\max} = -\rho g z + \rho g H \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh k(h+H)} \quad \dots \quad (4.6)$$

Här är ju trycket för $z=H$ noll men för $z=0$

$$p_{\max} = \rho g H \frac{\cosh kh}{\cosh k(h+H)} \quad \dots \quad (4.7)$$

Det resulterande maxtrycket erhålles genom att integrera från $-h$ till H .

$$P_{\max} = \rho g \int_{-h}^H \left(-z + H \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh k(h+H)} \right) dz = \dots\dots (4.8)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} (h^2 - H^2) + (H/k) \tanh k(h+H) \right\} \rho g$$

Ekvation (4.6) och (4.8) gav även för branta vågor god överensstämmelse med Nagais [10] försök.

4.5 Flacka vågor på mycket grunt vatten ($h/L < 0,135$ och $H/L < 0,040$)

Nagai [10] fann i sina experiment, att ej för branta vågor på "mycket grunt" vatten, $h/L < 0,135$ och $H/L < 0,040$, gav upphov till ett maxtryck i höjd med lugnvattenytan, som alltid låg mellan $\rho g H$ och $1,30 \rho g H$. Den maximala positiva amplituden vid kajen (the wave runup) var för dessa vågor mellan $1,2 H$ och $1,8 H$ medan vågorna i föregående två avsnitt endast steg till $1,1$ å $1,2 H$. För en ideellt reflekterad våg är motsvarande amplitud H .

På grundval av sina försök rekommenderar han följande för dessa vågor: Tryckfördelningen över lugnvattenytan antas vara linjär med $p=0$ vid $z = 1,30 H$ och $p = 1,30 \rho g H$ vid $z = 0$. Tryckfördelningen under lugnvattenytan ges av

$$P_{\max} = \rho g \left\{ -z + H \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh k h} + \frac{0,30 H(h+z)}{h} \right\} \dots\dots (4.9)$$

Det resulterande trycket från vattenytan till botten blir då

$$P_{\max} = \rho g \left\{ \frac{1}{2} (h^2 + (1,30 H)^2) + 0,15 H h + (H/k) \tanh k h \right\} \dots (4.10)$$

4.6 Jämförelse med Sainflous och Gerstners metoder

Nagai [10] har också jämfört sina försöksresultat med den av Reinius [1] beskrivna Sainflous metod. Nagai konstaterar att överensstämmelse mellan vågkrafterna i försöken och enligt denna metod endast råder inom ett begränsat intervall, där $0,135 < h/L < 0,20$ och $H/L < 0,035$. Om $h/L > 0,35$ är till exempel vågkraften enligt Sainflou två till tre gånger större än enligt försöken.

Gerstners metod bygger på trokoidala stående vågor (se Reinius [1]), och ger mycket komplicerade uttryck för partikelbanor och tryck. Trycket ges till exempel som en summa av tio hyperboliska termer. Enligt Nagai är överensstämmelsen med försöken god om $h/L \leq 0,50$ och H/L är mindre än ett kritiskt värde som beror av h/L . Det är dock mycket svårare att använda Gerstners metod än Sainflous eller de anvisade ekvationerna (4.1), (4.2), (4.7), (4.8), (4.9) och (4.10).

Exempel 4 a: Beräkna det maximala dynamiska trycket vid foten av en vertikal kaj på en horisontell botten och med vattendjupet 12,5 m om en våg med $L = 50$ m och $H = 2$ m totalreflekteras mot kajen. Det dynamiska trycket är $p + \rho g z = p_d$.

Eftersom $h/L = 12,50/50 = 0,25$ och således $0,135 < h/L < 0,35$ kan ekvation (4.1) användas för att beräkna trycket. Ekvation (4.1) ger då

$$\begin{aligned} p_{dmax} &= -\rho g z + \rho g H \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh k h} + \rho g z = \\ &= \rho g H \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\cosh \frac{2\pi}{L} \cdot h} = \frac{\rho g (2 \text{ m}) \cosh 0}{\cosh \left(\frac{2\pi}{50 \text{ m}} \cdot 12,5 \text{ m} \right)} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 = 0,78 \text{ m v.p.} \end{aligned}$$

(Motsvarande hastighetspotential är ekvation (3.27))

$$\phi = -\frac{g a}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh k h} \sin k x \cos \sigma t$$

Övning 4b Vad blir motsvarande tryck om våglängden är 30 m men i övrigt samma data gäller som ovan?

Övning 4c Vad blir motsvarande tryck om våglängden är 100 m?

Övning 4d

Beräkna den maximala kraften per längdenhet mot en vertikal kajmur som står på en plan horisontell botten, om vattendjupet är 5 m och kajen utsätts för en regelbunden vågrörelse med höjden 1 m och längden 25 m.

5. VÅGKRAFTER MOT FRISTÅENDE KONSTRUKTIONER ENLIGT MAC CAMY OCH FUCHS

5.1 Metodval

Som vi nämnde inledningsvis, kap 1.2, finns det i huvudsak två metoder att beräkna vågkrafterna mot t ex ett torn ute på kontinentalsockeln. Den ena metoden, Mac Camy och Fuchs' metod, innebär, att man ställer upp hastighetspotentialen, ϕ , för vågrörelser kring tornet och på ett sätt liknande det i föregående kapitel bestämmer trycken.

Den totala horisontalkraften erhålles sedan genom att integrera trycken kring tornet. Detta låter sig göras relativt enkelt för cylindriska torn med cirkulära eller ovala tvärsnitt, se kapitel 5.2, även om V.o.V.-byggarens normala matematikkunskaper inte räcker till för detta.

För föremål med mer komplicerad form t ex kvadratiske pelare tvingas man ta till grova approximationer eller numeriska metoder. Registrerings-sällskapen Det Norske Veritas [6] och Lloyd's Register of Shipping [7] har för sådana beräkningar utvecklat datorprogram, som bygger på finita elementmetoden.

I den andra metoden, Morisons metod, beräknas krafterna på hela konstruktionen utgående från de hastigheter och tryckgradienter, som skulle uppträda på platsen i en av konstruktionen opåverkad våg. Totalkraften beräknas med hjälp av empiriska koefficienter och svårigheten i denna metod är främst att välja koefficienter, samt att bestämma för vilka förhållanden metoden är lämplig. I kapitel 6 beskrivs Morisons metod utförligt.

5.2 Härledning av potentialen kring en cirkulär cylindrisk pelare

Mac Camy och Fuchs [5] ställde upp hastighetspotentialen för en vågrörelse som bestod av en infallande regelbunden vågrörelse och den reflekterade vågen från en vertikal cirkulär cylinder, se figur 5.1.

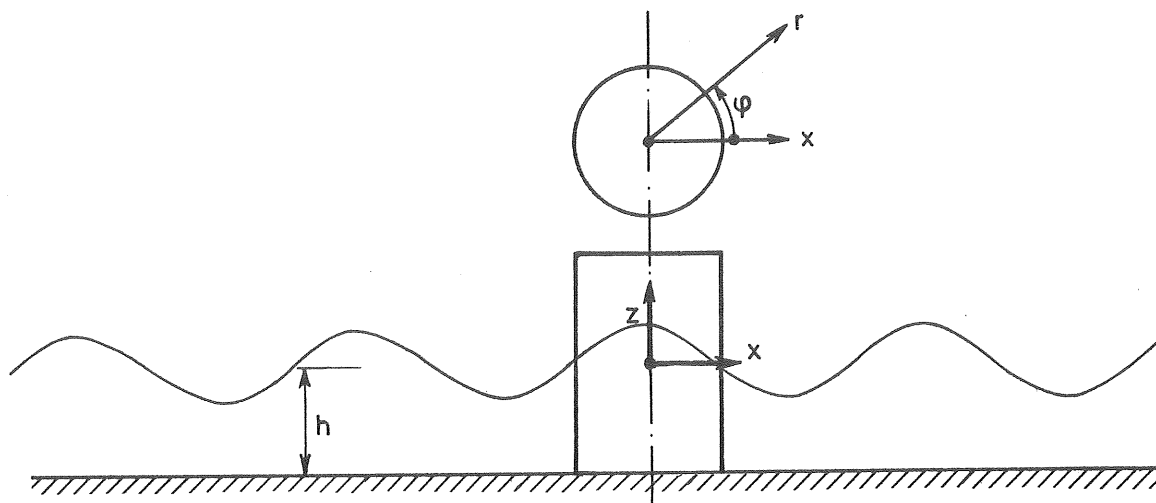


Fig 5.1 En cirkulär cylinder i en vågrörelse

Potentialen för den infallande vågen kan enligt (3.30) skrivas

$$\phi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad \dots \quad (5.1)$$

I cylindriska koordinater (r, φ, z) kan denna skrivas, se fig. 5.1,

$$\phi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kr \cos \varphi - \sigma t) \quad \dots \quad (5.2)$$

För att kunna utveckla den infallande vågen i harmoniska funktioner av radien, är det lämpligt att skriva hastighetspotentialen på komplex form.

$$\phi^i = \frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i(kr \cos \varphi - \sigma t)} \quad \dots \quad (5.3)$$

Här är hastighetspotentialen realdelen av ekvation (5.3) dvs

$$\phi = -\operatorname{Re} \phi^i \quad \dots \quad (5.4)$$

Minustecknet betyder bara att vi förskjutit vågrörelsen en halv våglängd i tid eller rum. Det har vi gjort för att framställningen skall stämma överens med [5]. Ekvation (5.3) kan skrivas

$$\phi^i = \frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \left[\cos(kr \cos \varphi) + i \sin(kr \cos \varphi) \right] e^{-i\sigma t} \quad (5.5)$$

Och denna ger oss tillfälle att utveckla cosinus och sinus i bessel-funktioner, J_n :

$$\cos (kr \cos \varphi) = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(kr) \cos 2n\varphi \quad \dots \quad (5.6)$$

$$\sin (kr \cos \varphi) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(kr) \cos (2n+1)\varphi \quad \dots \quad (5.7)$$

J_n betecknar här besselfunktioner av första slaget, se t.ex Hildebrand: Advanced Calculus for Application [22].

Ekvationerna (5.6) och (5.7) ger insatta i (5.5)

$$\begin{aligned} \phi^i &= \frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot \\ &\cdot J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr) \cos n\varphi \quad e^{-i\sigma t} \quad \dots \quad (5-8) \end{aligned}$$

Vi antar nu att den reflekterande vågen tillåter en liknande expansion, och den speciella kombination av besselfunktioner, som kan beskriva vågor, som rör sig utåt symmetriskt med avseende på φ , $\phi_r^i(\varphi) = \phi_r^i(-\varphi)$ blir

$$\phi_r^i = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\varphi \left[J_n(kr) + i Y_n(kr) \right] e^{-i\sigma t} \quad \dots \quad (5.9)$$

Y_n är en besselfunktion av andra slaget och kombinationen av besselfunktioner inom parentesen brukar kallas en hankelfunktion av första slaget $H_n^{(1)}(kr)$, och den har för stora värden på r den asymptotiska formen

$$H_n^{(1)}(kr) = \frac{2}{\pi kr} e^{i(kr - (2n-1)\pi/4)} \quad \dots \quad (5.10)$$

och således beskriver ekvation (5.9) en periodisk störning, som rör sig utåt i radiell riktning med cirkelfrekvensen σ och vågtalet k , och som försvinner då $r \rightarrow \infty$

Den totala potentialen erhålles nu genom att superponera den reflekterade vågens potential (5.9) och den infallande vågens potential (5.8). Koefficienterna A_n bestäms sedan ur villkoret att hastigheten vinkelrätt cylin-

derväggen intill denna måste vara noll, dvs $v_r = -\partial\phi / \partial r = 0$ då $r = r_0$. Reflexionen antas vara fullständig och oberoende av φ , dvs lika bra i lä som i lovert.

Resultatet av dessa beräkningar är

$$\phi_t^i = -\frac{ga}{\sigma} e^{-i\sigma t} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot \left\{ J_0(kr) - \frac{J_0'(kr_0)}{H_0^{(2)'}(kr_0)} H_0^{(2)}(kr) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \left[J_n(kr) - \frac{J_n'(kr_0)}{H_n^{(2)'}(kr_0)} H_n^{(2)}(kr) \right] \cos n\varphi \right\}$$

där $H_n^{(2)}$ är en hankelfunktion av andra slaget. (5.11)

5.3 Bestämning av tryck, vågkraft, stjälpande moment och våghöjd mot cylindern

5.31 Tryck

Genom att, som tidigare, utnyttja Bernoullis ekvation och försumma hastighetshöjderna i denna erhålles tryckfördelningen

$$p = \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho g z \quad \dots\dots (5.12)$$

Efter derivering, insättning av $r = r_0$ och förenkling erhålles trycket på cylinderns yta till

$$p^i = \rho g \frac{2a}{\pi k r_0} e^{-i\sigma t} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot \left\{ \frac{1}{H_0^{(2)'}(kr_0)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{\cos n\varphi}{H_n^{(2)'}(kr_0)} \right\} - \rho g z \quad \dots\dots (5.13)$$

Realdelen av detta uttryck är det aktuella trycket mot cylindern på nivån z .

$$p = \operatorname{Re} p^i \quad \dots\dots\dots (5.14)$$

x-komponenten av vågkraften per längdenhet av cylindern blir

$$f_x(z) = 2 r_o \int_0^\pi p \cos(\pi - \varphi) d\varphi \quad \dots\dots\dots (5.15)$$

Om $\operatorname{Re} p^i$ insättes i (5.15) erhålles

$$f_x(z) = \rho g \frac{4a}{k} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} A(kr_o) \cos(\sigma t - \alpha) \quad \dots\dots\dots (5.16)$$

där

$$\tan \alpha = \frac{J_1'(kr_o)}{Y_1'(kr_o)} \quad \dots\dots\dots (5.17)$$

och

$$A(kr_o) = \left[J_1'^2(kr_o) + Y_1'^2(kr_o) \right]^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (5.18)$$

Funktionen A och vinkeln α finns tabellerade i bilagan, tabell 2, som funktionen av kr_o . r_o är cylinderns radie och $k = 2\pi/L$ vågtalet.

5.32 Vågkraft och stjälpande moment

Den totala horisontalkraften i x-riktningen kan erhållas genom att integrera (5.16) från $-h$ till 0 , om krafter som verkar ovanför medelvattenytan $z=0$ försummas.

$$F = \int_{-h}^0 f_x(z) dz = \rho g \frac{4a}{k^2} \tanh(kh) A(kr_o) \cos(\sigma t - \alpha) \quad \dots\dots\dots (5.19)$$

Det vältande momentet kan på liknande sätt beräknas genom integration

$$M = \int_{-h}^0 f_x(z) (h+z) dz =$$

$$\frac{4}{k^3} \rho g a A(kr_o) \frac{kh \sinh kh - \cosh kh + 1}{\cosh kh} (\cos \sigma t - \alpha) \quad \dots\dots\dots (5.20)$$

Genom att jämföra (5.19) och (5.20) ser man att den senare kan skrivas

$$M = FR = F \cdot h \quad R/h \quad \dots \quad (5.21)$$

där R är momentarmen för kraften F .

I bilagan tabell 1 är funktionen R/h tabellerad som funktion av kh .

$$\frac{R}{h} = \frac{kh \sinh kh - \cosh kh + 1}{kh \cosh kh} \quad \dots \quad (5.22)$$

5.33 Våghöjd intill cylindern

Vattenytans höjd kring cylindern kan erhållas ur randvillkoret

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad \dots \quad (5.23)$$

vilket med ekvation (5.11) och $r=r_0$ ger

$$\eta_{r_0}^i = \frac{a}{\pi k r_0} e^{-i\sigma t} \left\{ \frac{1}{H_0^{(2)'}(kr_0)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{\cos n \varphi}{H_n^{(2)'}(kr_0)} \right\} \quad (5.24)$$

och vattenytans höjd kring cylindern ges av realdelen av $\eta_{r_0}^i$ dvs

$$\eta_{r_0} = \operatorname{Re} \eta_{r_0}^i = a \left(1 + 4 (kr_0)^2 \cos^2 \varphi \right) \sin(\sigma t - \chi) \quad \dots \quad (5.25)$$

$$\text{där } \tan \chi = 2 kr_0 \cos \varphi \quad \dots \quad (5.26)$$

5.4 Gränsövergång till smal pelare

Om nu cylinderns diameter är tillräckligt liten i förhållande till våglängden hos de infallande vågorna går maximala horisontalkraften per längdenhet av cylindern enl. (5.16) mot

$$f_x(z) = \rho g k \pi r_0^2 \quad 2a \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\sigma t - \chi) \quad \dots \quad (5.27)$$

För små värden på argumentet kr_o gäller nämligen

$$\lim_{kr_o \rightarrow 0} J_p(kr_o) = (kr_o)^p / 2^p p! \quad \dots \quad (5.28)$$

och

$$\lim_{kr_o \rightarrow 0} Y_p(kr_o) = -2^p (p-1)! (kr_o)^p / \pi (p \neq 0) \quad \dots \quad (5.29)$$

och således

$$J'_1 = 1/2 \quad \text{och} \quad Y'_1 = 2/k^2 r_o^2 \pi \quad \dots \quad (5.30)$$

varav följer att

$$\lim_{kr_o \rightarrow 0} A(kr_o) = \lim_{kr_o \rightarrow 0} \sqrt{\frac{4k^4 r_o^4 \pi^2}{k^4 r_o^4 \pi^2 + 16}} = k^2 r_o^2 \pi / 2 \quad \dots \quad (5.31)$$

Motsvarande gränsövergång för fasförskjutningen α ger $\tan \alpha \rightarrow \infty$ dvs $\alpha = 0$.

Genom insättning i (5.16) erhålles slutligen (5.27) ovan.

I (5.27) särskiljes πr_o^2 som cylinderns volym per längdenhet och $agk \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos \sigma t$ som den horisontella accelerationen. Ekvationen (5.28) kan då för små r_o skrivas

$$f_x(z) \approx 2 \cdot V \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots \quad (5.32)$$

En jämförelse med Morisons formel ekv. (6.9) ger att $C_M = C_F + C_V = 2$, se vidare avsnitt 6.5. sidan 55.

Om vågformen ur (5.25) bestäms för små r_o erhålles

$$\eta_{r_o} \approx a \cdot \sin \sigma t \quad \dots \quad (5.33)$$

dvs den infallande vågen påverkas inte av en mycket smal cylinder.

Exempel 5. a

Beräkna den maximala totalkraften och stjälpande momentet mot en betongcylinder med diametern 20 m som står på en horisontell botten på 40 m djup. Den dimensionerande vågen är 150 m lång och 6 m hög. Bestäm också vattenytans maximala höjd vid cylinderväggen.

Lösning

Horisontalkraften erhålles ur (5.19) och det stjälpande momentet ur (5.21)

$$a = H/2 = 3 \text{ m} \quad k = 2\pi/L = 2\pi/150 \text{ m} = 0,0418 \text{ m}$$

$$kh = 0,0418 \cdot 40 = 1,67 \quad r_0 = 20 \text{ m}/2 = 10 \text{ m}$$

$$kr_0 = 0,0418 \cdot 10 = 0,42$$

Tabellerna i bilagan ger nu

$$\tanh kh = 0,940$$

$$A(kr_0) = 0,28$$

$$\alpha(kr_0) = 7,6^\circ$$

$$R/h(kh) = 0,597$$

och

$$F = \rho g \cdot \frac{4 \cdot 3}{(0,042)^2} 0,940 \cdot 0,28 \cos(\sigma t - \alpha)$$

$$F_{\max} \text{ erhålles givetvis för } \cos(\sigma t - \alpha) = 1$$

$$\therefore F_{\max} = \underline{\underline{1,8 \cdot 10^7 \text{ N}}}$$

$$M_{\max} = F R = F h \cdot R/h =$$

$$= 1,8 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot 40 \text{ m} \cdot 0,597 = \underline{\underline{4,3 \cdot 10^8 \text{ Nm}}}$$

Vattenytans maximala höjd ges av (5.25) för $\sin(\sigma t - \alpha) = 1$ och $\cos^2 \varphi = 1$ dvs växelvis på cylinderns lä- och lovarts-sida $\varphi = 0$ och π .

$$\eta_{\max} = 3 \sqrt{1 + 4(0,42)^2} = \underline{\underline{3,92 \text{ m}}} > a = 3 \text{ m}$$

En grov uppskattning [6] av det fel som begås på grund av att krafterna ovanför vattenytan försummas kan göras med hjälp av (5.16) genom att integrera mellan 0 och vattenytans nivå hos den fortskridande vågen i bredd med centrum på konstruktionen när max. kraften uppträder. Maxkraften uppträder då $\sigma t - \alpha = 0$ dvs $\alpha = \sigma t = 7,6^\circ$. Vattennivån hos den infallande vågen är då enligt (5.2) med tecken enligt anmärkningen under (5.4)

$$\eta = -a \cdot \sin(kx - \sigma t) = -a \sin(-7,6^\circ) = 0,40 \text{ m}$$

och enligt 5.16 om $\cosh k(z+h)/\cosh kh = 1$

$$\delta F = \rho g \frac{4a}{k} A(k_{r_0}) \cdot 0,4 \text{ m} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Felet i momentet blir

$$\delta M = h \cdot \delta F = 1,6 \cdot 10^7 \text{ Nm}$$

dvs fel på 2 % och 4 % i kraft respektive moment.

Övning 5. b På 50 m djup står en 75 m hög cirkulär lagringstank med radien 40 m. Tanken påverkas av en våg med våghöjden 18 m och perioden 12 s. Beräkna maxkraft, maxmoment och maxvåghöjd samt uppskatta felen i kraft och moment.

Ledning: Vågtalet k bestäms med hjälp av tabell 1 och relationen $h\sigma^2/g = hk \tanh kh$ jfr ekv. (3.33).

5.5 Krafter mot föremål med annan form

Genom att förställa axelsystemet i horisontalplanet kan man utvidga ekvationerna i avsnitt 5.2 till att gälla alla elliptiska vertikala cylindrar. [6]

I datorprogram uppbyggda på finita elementmetoder kan man låta varje del av väggarna hos en vertikal konstruktion ge upphov till reflekterade vågor och sedan superponera dess [6, 7].

För överslagsberäkningar kan man vidare approximera rektangulära tvärsnitt med elliptiska. Felet blir då relativt stort vad gäller vattenytans läge i närheten av hörnen på konstruktionen. Felet i totalkraft lär däremot bli måttligt. [6]. Längd-breddförhållandet bör inte avvika för mycket från 1, utan kan kanske tillåtas variera mellan 0.25 och 4.

Liknande metoder med lösningar i form av serier kan även åstadkommas för "tredimensionella" föremål av enkel form. Chakrabarti [14] har till exempel byggt upp lösningar för ett halvklot och en halvcylinder som ligger på botten med den välvda sidan uppåt. Matematiken blir dock ytterligare komplicerad och hastighetspotentialen erhålls i form av "fredholmsintegraler", som måste lösas numeriskt.

Exempel 5 c

I ett havsområde där de största vågorna uppträder med en bestämd fortplantningsriktning har en elliptisk cylinder utplacerats så att dess storaxel sammanfaller med fortplantningsriktningen. Cylinderns lillaxel, $2b$, är 20 m och storaxeln, $2c$, 40 m. Dess ekvation är $x^2/c^2 + y^2/b^2 = 1$. Den dimensionerande vågen har längden 150 m och höjden 6 m. Vattendjupet är 40 m. Bestäm vågkraften.

Lösning:

Gör variabelsubstitutionen $x = c \xi / b$. Ellipsens ekvation blir då

$$\xi^2 + y^2 = b^2$$

dvs en cirkel med radien b . Vågens potential blir med samma substitution för x

$$\phi = -\frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(k\xi - \sigma t)$$

där våglängden $= bL/c$ och $k = \frac{2\pi c}{bL}$

$$a = 3 \text{ m} \quad L = 150 \text{ m}, \quad c = 20 \text{ m}, \quad b = 10 \text{ m}, \quad k = \frac{2\pi \cdot 20}{10 \cdot 150} = 0,084$$

$$kh = 3,35, \quad r_0 = b = 10 \text{ m}, \quad kr_0 = 0,84$$

$$\tanh(kh) = 0,997 \approx 1,00$$

$$A(kr_0) = 0,887$$

Totalkraften på cylindern i det förvrängda vågfältet eller på ellipsen i den ursprungliga vågen erhålles nu direkt av (5.19)

$$F_{\max} = \rho g \frac{4.3}{(0,084)^2} 1,0 \cdot 0,887 = \underline{\underline{1,5 \cdot 10^7 \text{ N}}}$$

Jfr exempel 5 a

Övning 5 d

Beräkna maxkraften om den elliptiska cylindern i 5c vrids 90° i vågfältet.

6. KRAFTER MOT FRISTÅENDE KONSTRUKTIONER ENLIGT MORISON M. FL.

6.1 Vågkrafter mot små cirkulära cylindrar

I detta kapitel skall vi undersöka krafterna mot "mindre" konstruktioner utsatta för en vågrörelse. Vi har i kapitel 5, ekv. (5.33), visat att en smal cylinder inte förmår påverka formen på den infallande vågen. För det fallet kan vi antaga att kraften mot cylindern kan ansättas som en funktion av de hastigheter och den tryckgradient som skulle uppträda i vätskan om inget föremål störde strömningen. Vi kommer att visa att relativt stora föremål kan behandlas på detta sätt, om bara deras storlek inte är för stor i förhållande till våglängden, se vidare avsnitt 6.5.

Allmänt kan alla föremål som har måttlig utsträckning behandlas på detta sätt. Metoden har t ex tillämpats på rörledningar [18, 19, 20], pålar [21], bottenförlagda cisterner [23], semisubmersibles [7] och fackverk [20].

6.2 Rörelsemotstånd

En fast kropp, som med konstant hastighet rör sig genom en ideal oaccelererad vätska med oändlig utsträckning, påverkas inte av någon resulterande kraft. Att vätskan är ideal innebär att den är ickeviskös och inkompressibel. Inga skjuvkrafter uppstår således, och rörelsen kring kroppen kan beräknas som ett potentialflöde. Hastighetsfördelningen kring kroppen får i princip utseendet enligt fig 6.1. Dvs i ett litet område kring kroppen kommer vätskan att innehålla rörelseenergi. Områdets utbredning och hastigheternas storlek förändras dock inte längs kroppens väg, och ingen energi behöver tillföras, vilket således innebär att inget arbete utträttas vid kroppens förflyttning och ingen kraft krävs för rörelsen.

Om vi nu tänker oss att vi vill accelerera kroppen genom den stillastående vätskan, måste vi både öka kroppens egen rörelseenergi och rörelseenergin i vätskan kring kroppen. Hastigheterna kring kroppen i vätskan ökar ju och det område som berörs av kroppens rörelse blir större. Om kroppens volym och massa betecknas V resp m kan kraften skrivas

$$F = a m + a C V \rho \quad \dots \quad (6.1)$$

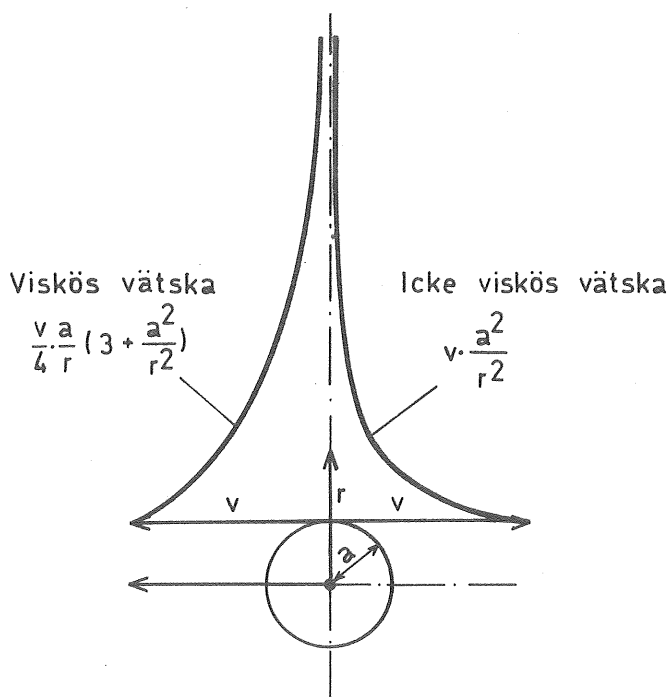


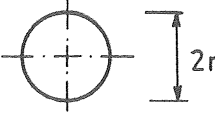
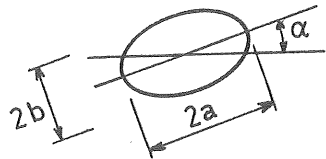
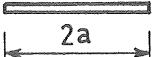
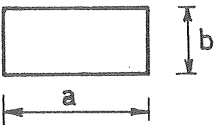
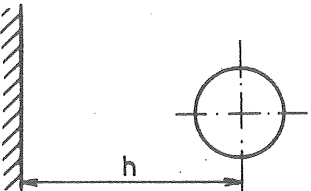
Fig 6.1 Hastighetsfördelning kring en sfär som rör sig i en ideal resp viskös vätska.

där a är kroppens acceleration, ρ vätskans täthet och C en koefficient. Termen $CV\rho$ brukar kallas added mass, vilket betyder tilläggsmassa.

Släpper vi nu kravet på en ideal vätska uppträder ju även det från hydraulikstudierna välkända hydrodynamiska rörelsemotståndet, vilket som bekant beror på en i strömningsriktningen varierande tryckfördelning kring kroppen och skärkrafter mot dess yta. Den totala kraft som krävs för att vid hastigheten v accelerera kroppen genom vätskan blir då

$$F = a m + a \cdot C_V V \rho + C_D \rho \frac{v^2}{2} A \quad \dots\dots (6.2)$$

Här är A kroppens största tvärsnittsarea vinkelrätt strömningen. C_V i ekvation (6.2) har inte nödvändigtvis samma värde som C i ekvation (6.1), eftersom vi inte längre har en ideal vätska. C kan beräknas teoretiskt för olikformade kroppar, se t ex [16], medan däremot värdet av C_V måste bestämmas empiriskt. Några värden på C finns i tabell 2 nedan. C eller C_V kallas koefficienten för "added mass" och C_D kallas rörelsemotståndskoefficienten eller ibland släpkraftskoefficienten.

Tvådimensionell kropp		C	rörelse	Volym (m ²)
Cirkulär stav		1	$\updownarrow$	πr^2
Elliptisk stav		$\frac{b}{a} \sin^2 \alpha + \frac{a}{b} \cos^2 \alpha$	$\updownarrow$	πab
Platt stav		1	$\updownarrow$	πa^2
Rektangulär stav		a/b 0,1 0,18 0,2 0,31 0,5 0,67 1 1,19 2 2,15 5 4,75 10 8,95	$\updownarrow$	ab
Tredimensionell kropp				
Sfär		0,5	$\updownarrow$	$4\pi r^3/3$
Sfär på avståndet h från en vägg		$0,5 \left(1 + \frac{3}{16} \frac{r^3}{h^3}\right)$ $0,5 \left(1 + \frac{3}{8} \frac{r^3}{h^3}\right)$	$\updownarrow$ $\longleftrightarrow$	

Tabell 6. 2: Värden på koefficienten C enl Handbook of Ocean and Underwater Engineering [17] eller Theory of Seakeeping [37]

För att utvidga användningen av ekvation (6.2) till accelerationen av en kropp genom en vätska med konstant hastighet får vi iaktta, att accelerationerna i den första termen måste räknas relativt ett jord-fast system, medan accelerationerna och hastigheten i de två senare termerna skall räknas relativt vätskan. Beteckna de två sistnämnda med a_r och v_r . Då kan vi skriva ekvation (6.2)

$$F = a m + a_r C_V V \rho + C_D \rho v_r \left| v_r \right| \frac{1}{2} A \quad \dots\dots (6.3)$$

Om strömningen kring kroppen är osymmetrisk kring rörelseriktningen eller kroppen själv är osymmetrisk kommer en lateral kraft eller lyftkraft att påverka kroppen. Detta är till exempel fallet för en flygplansvinge som i sig själv är krökt. Se hydraulikkompndiet [8]. Även en rörledning som ligger på eller nära en plan botten kommer på grund av den osymmetriska hastighetsfördelningen att påverkas av en sådan kraft. Lyftkraften brukar skrivas

$$F_L = C_L \rho \frac{1}{2} v_r^2 A \quad \dots\dots (6.4)$$

där alltså F_L verkar vinkelrätt v_r , och A brukar anges som den största tvärsnittsarean vinkelrätt strömningen, dvs samma area som i ekvationerna (6.2) och (6.3).

Tecknet och storleken på lyftkraften är omdiskuterade. Yamamoto [29] anger att lyftkraften är uppåtriktad på en rörledning då denna sluter tätt mot botten men nedåtriktad när en mycket liten spalt existerar under ledningen. Risk skulle således föreligga att en rörledning skulle slå mot botten t o m om den angrips av en stationär ström, $u = \text{konst}$. Om storleken av C_L se vidare tabell 6.7, sid 54.

Exempel 6 a

En ubåt startar från stillastående uppför en flod. Ställ upp ekvationen för ubåtens läge och bestäm dess terminalhastighet om propellerkraften är konstant 177 kN. Följande värden på koefficienter kan användas $C_V = 0,3$, $C_D = 2$. Ubåtens längd är 10 m och dess diameter 2,5 m och volymen antas vara $V = 45 \text{ m}^3$. Flodvattnets hastighet är 1 m/s. Ubåtens massa är ρV .

Lösning:

Drivkraften är konstant = F .

Ekvation (6.3) ger då

$$F = a_m + a_r C_v V_\rho + C_D \rho v_r \left| v_r \right| \frac{1}{2} A$$

men flodvattnets hastighet är konstant, varför $a = a_r = dv/dt$ och $v_r = v + 1 \text{ m/s} \geq 0$.

$$\therefore F = \frac{dv}{dt} \rho V (1 + 0,3) + 2 \rho (v + 1)^2 \frac{1}{2} A$$

$$\frac{dv}{F - \rho A (v + 1)^2} = \frac{1}{\rho V \cdot 1,3} dt$$

Genom att integrera mellan 0 och v resp 0 och t erhålles $v = f(t)$. Med insatta siffror erhålles enligt Standard Mathematical Tables, formen 97.

$$\int_0^v -\frac{1}{6} \arg \tanh \frac{v+1}{-6} = 8,37 \cdot 10^{-2} \int_0^t t$$

vilket ger

$$v = \left[6 \tanh \left\{ 0,504 t + \arg \tanh (1/6) \right\} - 1 \right] \text{ m/s}$$

och terminalhastigheten blir 5,0 m/s, eftersom $\tanh \rightarrow 1$ då $t \rightarrow \infty$.

Terminalhastigheten kan även erhållas direkt ur ekv. för F ovan genom att sätta $dv/dt = 0$.

U-båtens läge som funktion av tiden erhålles sedan genom att integrera hastigheten över tiden. Sätt $x = 0$ till startpunkten och x och v positiva åt samma håll. Då erhålles

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t v dt = \\ &= \int_0^t \left[6 \cdot \tanh \left\{ 0,504 t + \arg \tanh (1/6) \right\} - 1 \right] dt = \\ &= \left[\frac{6}{0,504} \ln \frac{\cosh \left\{ 0,504 t + \arg \tanh (1/6) \right\}}{\cosh \arg \tanh (1/6)} - t \right] \text{ m} \end{aligned}$$

Kontroll $t = 0$ ger $x = 0$

Övning 6b

En ihålig stålsfär med diametern 1 m och vikten 300 kg drivs med hjälp av en vevstake i en sinusformad fram- och återgående rörelse. Ställ upp ett uttryck för axialkraften i vevstaken som funktion av tiden. $C_D = 0,4$ antas konstant, C_V sätts till 0,5 enligt tabell 6.2. Rörelsens period är 2π s och amplituden 1 m. Rörelsen startar i yttre ändläget. Bestäm också maximum av kraften i vevstaken.

6.3 Krafter i en accelererad vätska

En kropp som är nedsänkt i en accelererad vätska påverkas av tryckgradienten i denna. Så är förhållandet t ex i en vågrörelse där ju hastigheterna ändras periodiskt med tiden. En avgränsad del av en accelererad ideal vätska påverkas enligt $P = a \cdot m$ av en kraft i x-led, u är vätskans hastighet, övriga beteckningar enligt figur 6.3.

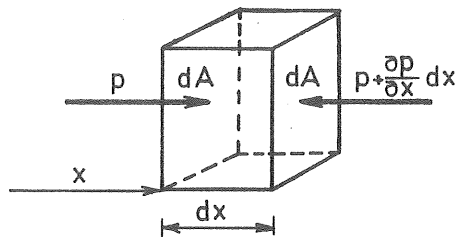


Fig. 6.3 Vätskeelement.

$$dP = \left\{ -p(x) - \frac{\partial p}{\partial x} dx + p(x) \right\} dA = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \rho dx \cdot dA$$

$$P = \int_V -\frac{\partial p}{\partial x} dV = \int_V \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \rho dV \approx \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \rho \cdot V \dots\dots (6.5)$$

Om vi nu istället för den avgränsade vätskevolymen sänker ned en fast kropp i tryckfältet, bör ju även denna påverkas med en kraft proportionell mot vätskans **acceleration**. Kraftens storlek bör däremot bli förändrad eftersom **accelerationen** och tryckfältet påverkas av den fasta kroppen. Kraften P eller Froude-Krylov-kraften kan då skrivas

$$P = C_F \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \rho V \quad \dots\dots (6.6)$$

där C_F inte har något vedertaget namn, u är vätskans hastighet relativt ett jordfast system, och ρV är den undanträngda vätskans massa.

Kraften P har samma karaktär som displacementskraften och antas verka oberoende av kroppens rörelser, varvid C_F ges olika värden för skilda strömningsfall.

Den totala kraften i en accelererad vätska mot en stillastående kropp ansätts då som

$$K = C_V \cdot \rho V \frac{\partial u}{\partial t} + C_D \rho \frac{1}{2} A |u| u + C_F \rho V \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots (6.7)$$

där den första termen beror av påverkan av kroppen på hastighetsfördelningen kring kroppen, se ekv (6.3), den andra på skjuvspänningen och tryckfördelning vid stationär strömning, och den tredje på tryckfältet i vätskan. Ekvationen (6.7) kan skrivas om till

$$K = C_D \rho \frac{1}{2} A u |u| + (C_V + C_F) \rho V \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots (6.8)$$

Summan av C_V och C_F kallas av Wiegel [21] för masskoefficienten. Ett bättre och numera mer frekvent namn är tröghetskoefficienten. Den brukar betecknas C_M dvs $C_M = C_V + C_F$. Se tabell 6.6.

Exempel 6 c

En rörledning ligger fast förankrad på botten av en havsvik. Den utsätts för vågor med våghöjden 4 m och längden 100 m. Vågorna anses sinusformade. Vattendjupet är 10 m och rörets diameter 2 m.

$$C_{Mx} = 3,3 \quad C_{Mz} = 2 \quad C_{Dx} = C_{Dz} = 0,5 \quad C_L = 4$$

Beräkna vågkrafterna i horisontalld, x , resp vertikalled, z .

Tabell 6. 6 Masskoefficienten C_M uppmätt vid fältförsök med vertikala pålar. Från Wiegel [21].

Wave	F_{SWL} (lb)	H (ft)	T (sec)	C_M	Wave	F_{SWL} (lb)	H (ft)	T (sec)	C_M	Wave	F_{SWL} (lb)	H (ft)	T (sec)	C_M
46	—	8.1	15.4	—	96	40.6	9.5	12.3	3.3	146	27.8	7.6	14.3	3.3
47	11.6	8.0	13.2	1.2	97	29.0	9.1	15.2	3.0	147	13.9	10.0	12.4	1.1
48	23.2	8.5	12.0	2.1	98	29.0	10.6	14.8	2.5	148	48.1	9.3	10.1	3.2
49	23.2	8.5	13.5	2.3	99	17.4	7.3	14.8	2.2	149	29.0	8.2	14.8	3.2
50	29.0	11.5	14.5	2.3	100	52.3	11.0	14.1	4.1	150	34.8	9.0	12.5	3.2
51	23.2	7.5	15.3	3.0	101	17.4	9.1	13.6	1.6	151	58.0	11.0	12.9	4.3
52	17.4	10.2	12.2	1.3	102	34.8	8.2	14.0	3.6	152	46.4	10.0	14.1	4.0
53	52.2	10.0	13.0	4.3	103	23.2	8.0	13.5	2.4	153	48.7	9.5	14.6	4.6
54	11.6	6.0	12.0	1.5	104	23.2	10.5	15.2	2.1	154	81.2	10.6	14.0	8.6
55	46.4	11.5	14.2	3.5	105	23.2	9.2	11.7	1.8	155	30.7	8.0	12.2	3.0
56	34.8	11.0	14.4	2.9	106	31.9	10.0	15.0	2.9	156	40.6	8.6	12.2	2.9
57	52.2	12.5	14.5	3.7	107	29.0	7.5	14.2	3.4	157	44.1	11.3	13.4	3.3
58	43.5	11.5	13.5	3.2	108	40.6	10.3	14.5	3.5	158	13.3	8.7	15.2	1.4
59	40.6	12.2	15.0	3.0	109	17.4	12.0	16.9	1.5	159	31.9	10.2	13.9	2.7
60	11.6	8.0	14.4	1.6	110	23.2	9.3	17.0	2.5	160	26.1	7.0	13.0	3.0
61	26.1	8.0	12.0	2.3	111	11.6	8.5	13.7	1.4	161	31.3	10.4	13.0	2.4
62	11.6	5.2	10.0	1.4	112	23.2	7.0	9.8	2.1	162	39.5	7.0	12.8	4.5
63	26.1	9.0	12.2	2.2	113	29.0	7.3	12.7	3.2	163	27.3	10.2	13.4	2.2
64	29.0	8.5	14.3	3.0	114	34.8	9.0	15.2	3.6	164	26.7	6.0	14.0	3.8
65	29.6	6.2	15.7	4.7	115	13.4	9.0	15.1	1.4	165	34.8	7.6	14.7	4.1
66	37.7	9.5	11.0	2.8	116	31.9	8.3	13.1	3.1	166	26.7	10.0	14.8	2.4
67	17.4	8.0	11.0	1.5	117	12.8	10.8	14.1	1.0	167	23.2	10.8	15.4	2.0
68	31.9	8.5	11.8	2.8	118	45.3	11.5	11.0	2.7	168	34.5	9.0	15.2	3.6
69	13.3	6.0	12.5	1.8	119	11.6	7.5	11.4	1.1	169	24.9	9.0	15.8	2.7
70	34.8	9.0	13.9	3.3	120	41.7	11.0	12.0	2.8	170	26.7	7.0	13.8	3.3
71	29.0	8.5	16.2	3.4	121	26.1	7.0	13.7	3.2	171	34.7	8.5	14.5	3.7
72	17.4	9.2	15.0	1.8	122	33.7	9.6	12.8	2.9	172	36.6	10.5	14.6	3.1
73	29.0	9.5	13.2	2.5	123	36.0	7.5	14.8	4.3	173	34.7	10.6	14.9	3.0
74	40.6	10.0	15.4	3.9	124	45.3	8.1	13.6	4.8	174	53.9	9.2	15.5	5.6
75	11.6	9.0	12.3	1.0	125	29.0	10.0	15.3	2.7	175	17.4	6.0	12.3	2.2
76	31.9	8.2	13.9	3.3	126	30.2	11.0	14.5	2.5	176	23.2	5.6	14.3	3.7
77	29.0	6.6	11.9	3.3	127	36.0	10.0	15.3	3.4	177	30.2	8.0	13.0	3.1
78	37.7	8.0	12.0	3.8	128	37.7	8.8	15.7	4.1	178	31.9	7.1	11.3	3.2
79	27.8	9.2	13.2	2.5	129	16.6	10.0	12.8	1.5	179	40.6	8.0	13.3	4.2
80	37.7	10.3	13.5	3.1	130	29.0	10.0	13.5	2.5	180	38.9	10.0	12.4	3.0
81	29.0	10.6	11.8	2.0	131	17.4	8.0	13.3	1.8	181	49.3	9.5	12.2	3.6
82	11.6	8.0	11.2	1.0	132	30.1	11.5	13.0	2.1	182	17.4	9.6	13.7	1.5
83	23.2	6.2	10.4	2.4	133	40.6	10.2	13.7	3.7	183	39.4	10.0	10.1	2.4
84	29.0	7.5	12.6	3.1	134	36.5	9.3	11.7	2.8	184	27.9	5.1	8.7	2.9

^a Feb. 13, 1954; roll 51; 24" test pile; $S = 33'$; d varied from 48' to 46'.

Lösning:

Ekvation (6.8) ger

$$K_x = C_{Dx} \rho \frac{1}{2} A u |u| + C_{Mx} \rho V \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$K_z = C_{Dz} \rho \frac{1}{2} A w |w| + C_L \rho \frac{1}{2} A u^2 + C_{Mz} \rho V \frac{\partial w}{\partial t}$$

Hastigheter och accelerationer i den opåverkade vågen i höjd av rörcentrum sätts in i ekvationerna.

Vågens potential är enligt ekv. (3.30)

$$\phi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$$

Sätt $x = 0$ i vattenytan vertikalt ovanför rörcentrum. Då erhålles enligt ekv. (3.37) ff

$$u = -\frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin \sigma t$$

$$\partial u / \partial t = -agk \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos \sigma t$$

$$w = -\frac{agk}{\sigma} \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \cos \sigma t$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = agk \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \sin \sigma t$$

$$H = 4 \text{ m} \quad a = 2 \text{ m} \quad L = 100 \text{ m} \quad k = 2\pi/L = 0,0628/\text{m} \quad h = 10 \text{ m}$$

$$\text{Ekv. 3.26 ger} \quad \sigma = \sqrt{gk \tanh kh} = \sqrt{gk \cdot 0,5545} = 0,525/\text{s}, \quad kh = 0,628$$

$$agk/\sigma = 1,232/0,025 = 2,35 \text{ m/s} \quad agk = 2 \cdot 9,81 \cdot 0,0628 = 1,232 \text{ m/s}^2$$

$$C_{Dx} \rho \frac{1}{2} A = 0,5 \cdot 10^3 \frac{1}{2} 2 = 500 \text{ kg/m}^2 \quad (A = 2 \text{ m}^2/\text{m})$$

$$C_{Mx} \rho V = 3,3 \cdot 10^3 \pi \cdot 1^2 = 10370 \text{ kg/m} \quad (V = \pi 1^2 \text{ m}^3/\text{m})$$

$$C_{Dz} \rho \frac{1}{2} A = 0,5 \cdot 10^3 \frac{1}{2} 2 = 500 \text{ kg/m}^2$$

$$C_L \rho \frac{1}{2} A = 4 \cdot 10^3 \frac{1}{2} \cdot 2 = 4000 \text{ kg/m}^2$$

$$C_{Mz} \rho V = 2 \cdot 10^3 \pi 1^2 = 6200 \text{ kg/m}$$

$$\cosh kh = 1,2038 \quad \sinh kh = 0,6701$$

$$\cosh k(-9+10) = 1,00 \quad \sinh k(-9+10) = 0,0628$$

$$u = -1,95 \sin \sigma t \text{ m/s} \quad \partial u / \partial t = -1,02 \cos \sigma t \text{ m/s}^2$$

$$w = -0,123 \cos \sigma t \text{ m/s} \quad \partial w / \partial t = 0,0643 \sin \sigma t \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned} \therefore K_x &= -500 \cdot 1,95^2 \sin \sigma t \left| \sin \sigma t \right| - 10370 \cdot 1,02 \cos \sigma t = \\ &= -1900 \sin \sigma t \left| \sin \sigma t \right| - 10600 \cos \sigma t \text{ N/m} \end{aligned}$$

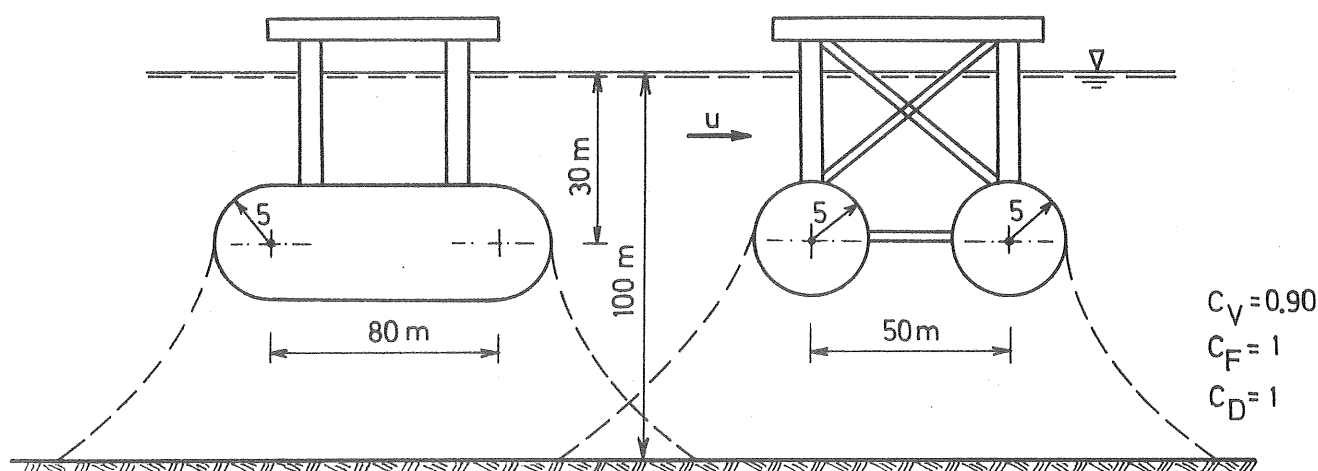
$$\begin{aligned} \therefore K_z &= -500 \cdot 0,123^2 \cos \sigma t \left| \cos \sigma t \right| + 4000 \cdot 1,95^2 \sin^2 \sigma t \\ &+ 6280 \cdot 0,0643 \sin \sigma t = -7,5 \cos \sigma t \left| \cos \sigma t \right| + \\ &+ 15200 \sin^2 \sigma t + 404 \sin \sigma t \approx \\ &15 \cdot 10^3 \sin^2 \sigma t \text{ N/m} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad K_x = -1,9 \cdot \sin \sigma t \left| \sin \sigma t \right| - 10,6 \cos \sigma t \text{ kN/m}$$

$$K_z = 15 \sin^2 \sigma t \text{ kN/m}$$

Övning 6 d.

En prospekteringsrigg för oljeborrning är monterad på en så kallad semisubmersible enligt figur. Beräkna den i tiden maximala horisontalkraften på dess bärcroppar för en från sidan kommande våg. Vågens längd är 400 m, dess höjd 20 m och dess period 16 s. Vattendjupet och data för flytkropparna enligt figur. Antag att semisubmersiblen är mycket styvt uppankrad. $g = 10 \text{ m/s}^2$. Bärcropparna behandlas som en enhet vilket anses tillåtet eftersom $60 \text{ m} < 0,2 L$



6.4 Morisons formel

En summering av alla krafter som verkar på en rörlig kropp nedsänkt i en accelererad vätska vars rörelse motverkas av en upplagsreaktion R , ger följande ekvation.

$$R = -\ddot{x} m + C_V \rho V \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \ddot{x} \right) + C_F \rho V \frac{\partial u}{\partial t} + C_D \rho \frac{A}{2} (u - \dot{x}) |u - \dot{x}| \quad \dots \quad (6.9)$$

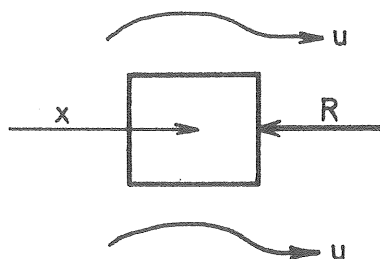


Fig. 6.4 En kropp som fasthålls i en accelererad vätskeström.

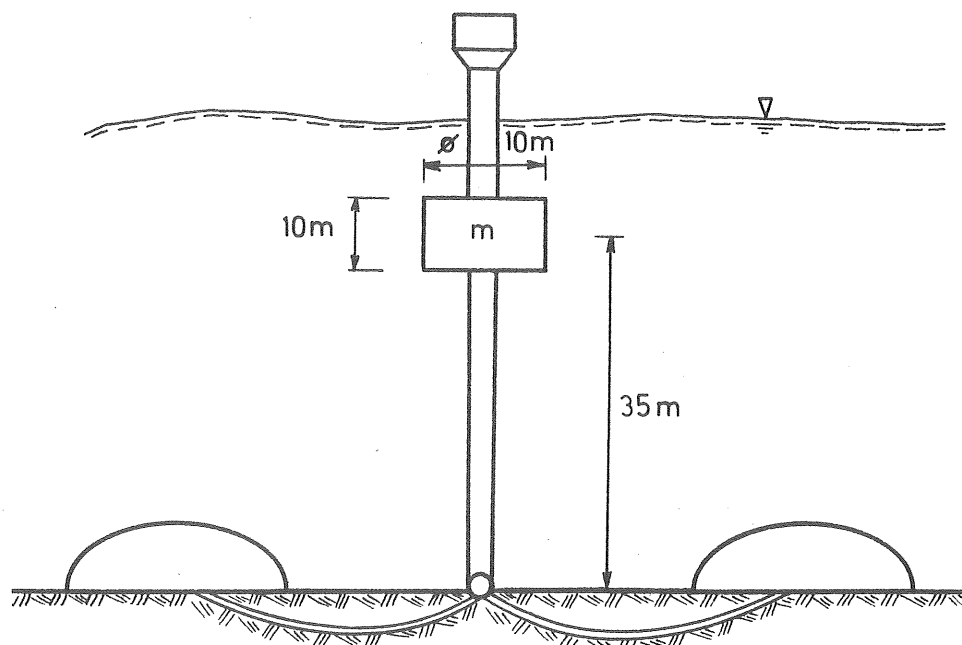
Ekv (6.9) brukar kallas Morisons formel. Beteckningarna i (6.9) har successivt införts i föregående avsnitt men definieras återigen här

x	är kroppens lägeskoordinat
$\dot{x}, \ddot{x}$	dess hastighet och acceleration
$u, \partial u / \partial t$	vattnets hastighet och acceleration
V	kroppens volym
A	kroppens tvärsnitt vinkelrätt u och x .
C_v	koefficienten för added mass ekv. (6.2)
C_F	kraftkoefficient pga tryckfältet ekv. (6.6)
C_D	rörelsemotståndskoefficient, se [8].

Morisons m.fl. [3] insats bestod egentligen i att man tillämpade ekvation (6.8) på en påle på begränsat vattendjup.

Exempel 6 e.

I Biscayabukten har en anläggning enligt figur valts för att distribuera olja till båtar från oljelagringscisterner på havsbotten. Djupet från MWL sätts till 50 m och en dimensionerande våg i trakten anses vara 300 m lång och ha en våghöjd på 12 m. Tornet är ledat.

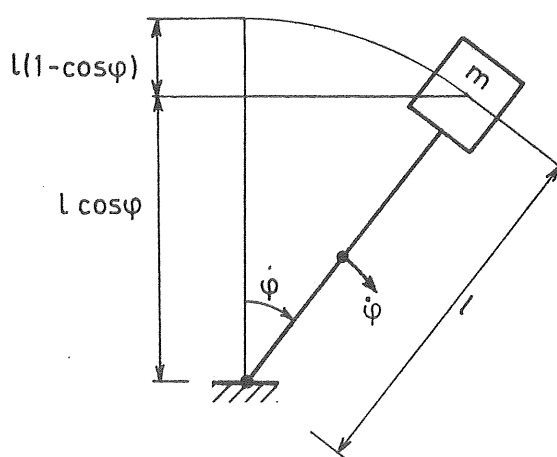


infäst vid botten och dess massa och volym anses (i detta övnings-exempel) vara koncentrerade till den cylinderformiga utbyggnaden på tornet. Massan är 400 ton.

- i) Bestäm tornets egenfrekvens och försumma därvid rörelsemotståndet
- ii) Bestäm vågornas period T .
- iii) Sätt upp ekvationen för tornets svängning i den aktuella vågrörelsen.

Lösning

- i) Upp- och nervänd pendel



Potentiell energi i förhållande till det översta läget

$$W_p = (\rho g V - mg) l (1 - \cos \varphi)$$

Rörelseenergi i förhållande till $v = 0$

$$W_k = (m + \rho V C_v) \cdot \frac{v^2}{2} = (m + \rho V C_v) \frac{(l \dot{\varphi})^2}{2}$$

Total energi

$$(\rho g V - mg) l (1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} (m + C_v \rho V) l^2 \dot{\varphi}^2 = \text{konst} = C$$

$$g (\rho V - m) l \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} (m + C_v \rho V) l \dot{\varphi}^2 = C$$

$$\text{Antag små vinklar} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} \approx \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Lös den homogena ekvationen, vilken ger frekvensen om det finns någon, C bestämmer maxutslaget

$$\ddot{\varphi} = i \sqrt{\frac{(\rho V - m) g}{(m + C_V \rho V) r}} \varphi = i K \varphi$$

$$\ln \varphi = i K + C_2 \quad \varphi = C_3 e^{(iK + C_2) t}$$

$\therefore K =$ cirkelfrekvensen hos eigensvängningen

$$\rho = 1035 \text{ kg/m}^3 \quad C_V = 1$$

$$m = 400 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 \text{ m}^3 = 790 \text{ m}^3$$

$$l = 35 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \sigma = K &= \sqrt{\frac{(1035 \cdot 790 - 400 \cdot 10^3) \cdot 9,81}{(400 \cdot 10^3 + 1 \cdot 1035 \cdot 790) \cdot 35}} = \\ &= \sqrt{\frac{(818 - 400) 10^4}{(400 + 818) \cdot 10^3 \cdot 35}} = \sqrt{\frac{4180}{42 \cdot 600}} = \sqrt{0,0983} = 0,313/\text{s} \end{aligned}$$

$$f = \sigma/2\pi = 0,050 \text{ Hz} \quad T = 20 \text{ s}$$

Svar: Egenfrekvensen är 0,05 Hz

Egenperioden är 20 s

$$\text{ii) } L = 300 \text{ m} \implies k = \frac{2\pi}{L} = 0,021/\text{m} \quad \left. \vphantom{\frac{2\pi}{L}} \right\} = kh = 1,05$$

$$h = 50 \text{ m}$$

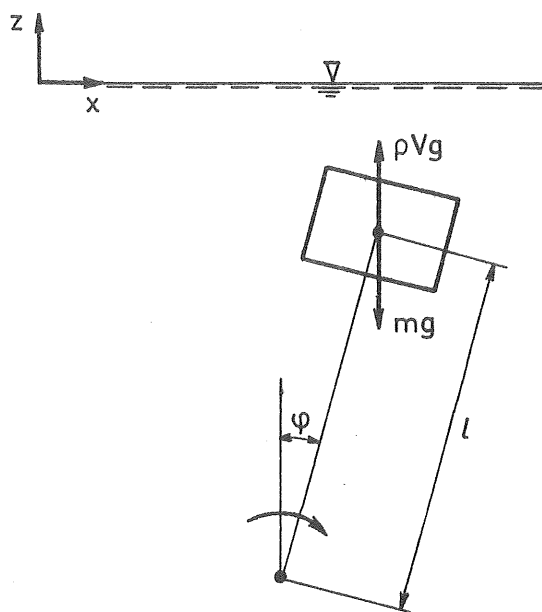
$$H = 12 \text{ m} \implies a = 6 \text{ m} \quad \tanh 1,05 = 0,847$$

$$\text{ekv. (3.26)} \implies \sigma = \sqrt{gk \tanh kh} = 0,417/\text{s} \quad f = 0,0663 \text{ Hz}$$

Svar: $T = 1/f = 15,9 \text{ s} \approx 16 \text{ s}$

ANM. Tornets egenfrekvens ligger nära vågrörelsens frekvens och risk för resonans föreligger. De utförda tornen är gjorda med barlasttankar så att tornets massa kan ändras och att man på detta sätt ändrar egenfrekvensen.

iii)



$F = a \cdot m$ tillämpad på en kropp som svänger liksom en pendel påverkad av ett moment M ger

$$J \ddot{\varphi} = M$$

där J är masströghetsmomentet. $J = l^2 \cdot m$

Enligt Morisons formel (6.9) blir det drivande momentet $M =$

på grund av tyngden	$mg l \cdot \sin \varphi$
- " - uppdriften	$-\rho V g \cdot l \cdot \sin \varphi$
- " - added mass	$+C_V V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} - l \ddot{\varphi} \right) l$
- " - tryckfältet	$+C_F \frac{\partial u}{\partial t} \rho V \cdot l$
- " - rörelsemotstånd	$+C_D \rho \frac{A}{2} (u - l \dot{\varphi}) u - l \dot{\varphi} l$

Vertikala krafter på grund av vågrörelsen försummas.

Svar: $l^2 m \ddot{\varphi} = (m - V\rho) gl \sin \varphi + C_M V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} - l \ddot{\varphi} \right) l$

$$+ C_F \frac{\partial u}{\partial t} \rho V l + C_D \rho \frac{A}{2} (u - l \dot{\varphi}) |u - l \dot{\varphi}| l$$

6.5 Begränsningar i tillämpningen av Morisons formel

Morisons formel ekvation (6.9) ger oss möjlighet att beräkna krafter mot alla föremål nedsänkta i vatten dels om föremålens utsträckning inte är för stor, dels om vi känner koefficienterna C_V , C_F och C_D (och C_L). Enligt t ex Johnson [4] skall konstruktionens utsträckning i fortplantningsriktningen inte vara större än cirka $1/5$ av våglängden. Om man samtidigt påpekar att våglängden hos de dimensionerande vågorna i t ex Nordsjön är 300-500 m är ju denna inskränkning måttlig. Se vidare tabell sid 55.

Besvärligare är att man för föremål med komplicerad form inte känner koefficienterna i ekvationen tillräckligt väl. Även för fall där det finns utförda modellförsök kan släp- och lyftkraftskoefficienterna ifrågasättas, eftersom man i modellförsöken kanske inte haft samma turbulensgrad eller legat inom ett helt annat område för Reynolds tal än vad som motsvarar verkligheten. De värden som Johansson [19] anger för C_D vid $Re < 10^4$ reduceras till exempel av Janson [18] vid rördimensionering till 25 % av det angivna om $Re > 5 \cdot 10^5$. Se tabell 6.7.

Tabell 6.7 Koefficienter i ekvationerna (6.8) och (6.9) för en rörledning på en plan horisontell botten enligt olika källor. d = rörets diameter, y = avståndet från rörets underkant till botten.

Modellförsök, Johansson [19]

y/D	Re	C_L	C_{D_x}	C_{M_x}	C_{M_z}
0	$8 \cdot 10^3$	4	2	3,3	1,7
0,25		0	1,1	2,4	1,9
1		0	1,1	2,0	3,0

Stationär ström, rekommendationer Tørum [20]

0	10^5	0,8	0,7
---	--------	-----	-----

Dimensioneringsrekommendationer Janson [18]

0	$5 \cdot 10^5$	4	0,5	3,3	0
0,25		0	0,33	2	0
1		0	0,33	2,	0

Potentialflödesteori, Yamamoto [29]

0	--	4,5	-	3,3	3,3
0,03		-7,8	-	2,6	2,6
0,25		-0,6	-	2,3	2,3
0,50		-0,2	-	2,2	2,2
1,0		0	-	2,1	2,1

Modellförsök, Yamamoto [29]

0,03	$2 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^4$	-7,8	-	-	4,2
0,50				2,1	

6.6 Jämförelse mellan Camy-Fuchs metod och Morisons.

En jämförelse mellan Camy och Fuchs analytiska metod och Morisons överslagsformel (6.9) ger för en cirkulär cylinder med liten diameter relativt våglängden att $C_M = 2,0$, se ekv (5.32) sid 32. Vi skall nu undersöka hur stora fel man gör om man tillämpar Morisons formel på mycket stora föremål. Enligt Camy och Fuchs' metod erhålles för en vertikal cylinder en kraft per längdenhet

$$f_x(z) = \rho g \frac{4a}{k} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} A(kr_0) \cos(\alpha t - \alpha) \dots\dots (5.16)$$

Denna kan omformas till

$$f_x(z) = A(kr_0) \frac{4}{\pi(r_0 k)^2} \frac{\cos(\sigma t - \alpha)}{\cos \sigma t} \rho V \frac{\partial u}{\partial t} \dots\dots (6.10)$$

där $V = \pi r_0^2$ är kroppens volym per längdenhet och $\partial u / \partial t$ accelerationen för den fortskridande vågen i centrum för konstruktionen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g a k \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos \sigma t \dots\dots (6.11)$$

Om Morisons formel (6.7) och Camy och Fuchs' metod skall ge samma maxkraft för en stor stel cylinder, där släpkraften kan försummas, måste

$$C_V + C_F = C_M \approx A(kr_0) \frac{4}{\pi(r_0 k)^2} \frac{\cos 0}{\cos \alpha} \dots\dots (6.12)$$

I tabell 6.8 är redovisat några värden på C_M enligt (6.12). Det framgår av denna tabell att så länge som $kr_0 < 0,6$ är avvikelser i kraften endast 5 % om $C_M = 2$ användes, medan avvikelserna blir mycket stora för konstruktioner med större radier relativt våglängden. $kr_0 = 2\pi r_0 / L = 0,6$ motsvarar ungefär den tidigare nämnda gränsen att diametern bör vara mindre än 0,2 x våglängden.

Tabell 6.8 C_M som funktion av kr_0 enligt ekvation (6.12)

kr_0	0	0,1	0,3	0,6	0,9	1,2
C_M	2,00	2,02	2,07	1,96	1,61	1,18

Om man tillämpar Morisons formel över denna gräns kommer man således att göra en allt större övervärdering av de krafter som verkar på cylindern. Släpkrafterna kommer samtidigt att få allt mindre betydelse. Observera dock att dessa är fasförskjutna en kvarts period i tiden jämfört med accelerationstermerna, varför de mera sällan inverkar på dimensioneringen av större konstruktioner.

7. Avslutning

Nu är vi formelmässigt rustade för att bestämma krafter på borrhullformar i Nordsjön. Jag hoppas att ni också har fått litet förståelse för vilka typer av krafter som verkar på sådana konstruktioner.

Det förtjänar emellertid åter igen att påpekas, att vi har idealiserat vågörelserna i denna skrift. Vi har hela tiden antagit, att botten är horisontell, att vågorna har liten branthet och liten våghöjd relativt djupet, att de är regelbundna, att de inte bryter och att de totalreflekteras. För t. ex. sluttande bottenar och lutande vågbrytare bör man således anlita anvisad speciallitteratur.

Ett annat stort problemområde, som nästan inte berörts alls i denna skrift, är bestämningen av vågklimatet och val av riskkriterier. Ole Houmb har i en serie föreläsningar för doktoranderna i vattenbyggnad vid CTH gått igenom grunderna för detta problemområde [9]. För mindre hav och skärgårdsområden är de metoder som utarbetats av Bretschneider [1, 2, 25] antagligen tillfyllest.

BILAGA, TABELL 1

X	SINH X	COSH X	TANH X	X*TANH X	R/h (x=kh)
.02	.0200	1.0002	.0200	.0004	.5000
.04	.0400	1.0008	.0400	.0016	.5001
.06	.0600	1.0018	.0599	.0036	.5001
.08	.0801	1.0032	.0798	.0064	.5003
.10	.1002	1.0050	.0997	.0100	.5004
.12	.1203	1.0072	.1194	.0143	.5006
.14	.1405	1.0098	.1391	.0195	.5008
.16	.1607	1.0128	.1586	.0254	.5011
.18	.1810	1.0162	.1781	.0321	.5013
.20	.2013	1.0201	.1974	.0395	.5017
.22	.2218	1.0243	.2165	.0476	.5020
.24	.2423	1.0289	.2355	.0565	.5024
.26	.2629	1.0340	.2543	.0661	.5028
.28	.2837	1.0395	.2729	.0764	.5032
.30	.3045	1.0453	.2913	.0874	.5037
.32	.3255	1.0516	.3095	.0990	.5042
.34	.3466	1.0584	.3275	.1113	.5048
.36	.3678	1.0655	.3452	.1243	.5053
.38	.3892	1.0731	.3627	.1378	.5059
.40	.4108	1.0811	.3799	.1520	.5066
.42	.4325	1.0895	.3969	.1667	.5072
.44	.4543	1.0984	.4136	.1820	.5079
.46	.4764	1.1077	.4301	.1978	.5086
.48	.4986	1.1174	.4462	.2142	.5094
.50	.5211	1.1276	.4621	.2311	.5102
.52	.5438	1.1383	.4777	.2484	.5110
.54	.5666	1.1494	.4930	.2662	.5113
.56	.5897	1.1609	.5080	.2845	.5127
.58	.6131	1.1730	.5227	.3031	.5136
.60	.6367	1.1855	.5370	.3222	.5145
.62	.6605	1.1984	.5511	.3417	.5154
.64	.6846	1.2119	.5649	.3615	.5164
.66	.7090	1.2258	.5784	.3817	.5174
.68	.7336	1.2402	.5915	.4022	.5184
.70	.7586	1.2552	.6044	.4231	.5195
.72	.7838	1.2706	.6169	.4442	.5205
.74	.8094	1.2865	.6291	.4656	.5216
.76	.8353	1.3030	.6411	.4872	.5223
.78	.8615	1.3199	.6527	.5091	.5239
.80	.8881	1.3374	.6640	.5312	.5251
.82	.9150	1.3555	.6751	.5536	.5263
.84	.9423	1.3740	.6858	.5761	.5275
.86	.9700	1.3932	.6963	.5988	.5287
.88	.9981	1.4128	.7064	.6216	.5299
.90	1.0265	1.4331	.7163	.6447	.5312
.92	1.0554	1.4539	.7259	.6678	.5325
.94	1.0847	1.4753	.7352	.6911	.5338
.96	1.1144	1.4973	.7443	.7145	.5352
.98	1.1446	1.5199	.7531	.7380	.5365
1.00	1.1752	1.5431	.7616	.7616	.5379

BILAGA (forts)

X	SINH X	COSH X	TANH X	X*TANH X	R/h (x=kh)
.2	.201	1.020	.197	.039	.502
.4	.411	1.081	.380	.152	.507
.6	.637	1.185	.537	.322	.514
.8	.888	1.337	.664	.531	.525
1.0	1.175	1.543	.762	.762	.538
1.2	1.509	1.811	.834	1.000	.552
1.4	1.904	2.151	.885	1.239	.568
1.6	2.376	2.577	.922	1.475	.585
1.8	2.942	3.107	.947	1.704	.602
2.0	3.627	3.762	.964	1.928	.619
2.2	4.457	4.568	.976	2.147	.636
2.4	5.466	5.557	.984	2.361	.653
2.6	6.695	6.769	.989	2.571	.669
2.8	8.192	8.253	.993	2.779	.684
3.0	10.018	10.068	.995	2.985	.698
3.2	12.246	12.287	.997	3.189	.712
3.4	14.965	14.999	.998	3.392	.725
3.6	18.285	18.313	.999	3.595	.737
3.8	22.339	22.362	.999	3.796	.748
4.0	27.290	27.308	.999	3.997	.759
4.2	33.336	33.351	1.000	4.198	.769
4.4	40.719	40.732	1.000	4.399	.778
4.6	49.737	49.747	1.000	4.599	.787
4.8	60.751	60.759	1.000	4.799	.795
5.0	74.203	74.210	1.000	5.000	.803
5.2	90.633	90.639	1.000	5.200	.810
5.4	110.701	110.705	1.000	5.400	.816
5.6	135.211	135.215	1.000	5.600	.823
5.8	165.148	165.151	1.000	5.800	.829
6.0	201.713	201.716	1.000	6.000	.834
6.2	246.373	246.375	1.000	6.200	.839
6.4	300.922	300.923	1.000	6.400	.844
6.6	367.547	367.548	1.000	6.600	.849
6.8	448.923	448.924	1.000	6.800	.853
7.0	548.316	548.317	1.000	7.000	.857
7.2	669.715	669.715	1.000	7.200	.861
7.4	817.992	817.992	1.000	7.400	.865
7.6	999.097	999.098	1.000	7.600	.869
7.8	1220.300	1220.301	1.000	7.800	.872
8.0	1490.478	1490.478	1.000	8.000	.875
8.2	1820.474	1820.474	1.000	8.200	.878
8.4	2223.532	2223.532	1.000	8.400	.881
8.6	2715.828	2715.828	1.000	8.600	.884
8.8	3317.119	3317.120	1.000	8.800	.886
9.0	4051.539	4051.539	1.000	9.000	.889
9.2	4948.560	4948.560	1.000	9.200	.891
9.4	6044.184	6044.185	1.000	9.400	.894
9.6	7382.383	7382.383	1.000	9.600	.896
9.8	9016.862	9016.862	1.000	9.800	.898
10.0	11013.220	11013.220	1.000	10.000	.900

BILAGA, TABELL 2

kr_0	$A(kr_0)$	$\alpha(kr_0)$	kr_0	$A(kr_0)$	$\alpha(kr_0)$
.02	.0006	.02	.20	.0643	1.42
.04	.0025	.07	.40	.2581	6.98
.06	.0057	.16	.60	.5423	13.64
.08	.0101	.29	.80	.8337	18.77
.10	.0159	.45	1.00	1.0773	23.54
.12	.0229	.65	1.20	1.2684	16.97
.14	.0313	.89	1.40	1.4215	14.83
.16	.0409	1.16	1.60	1.5496	8.86
.18	.0520	1.47	1.80	1.6613	1.61
.20	.0643	1.82	2.00	1.7619	-6.53
.22	.0780	2.20	2.20	1.8545	-15.33
.24	.0930	2.61	2.40	1.9410	-24.62
.26	.1094	3.06	2.60	2.0228	-34.26
.28	.1270	3.54	2.80	2.1006	-44.19
.30	.1459	4.05	3.00	2.1752	-54.34
.32	.1661	4.59	3.20	2.2471	-64.67
.34	.1874	5.15	3.40	2.3164	-75.15
.36	.2099	5.74	3.60	2.3836	-85.74
.38	.2335	6.35	3.80	2.4488	-96.43
.40	.2581	6.98	4.00	2.5123	-107.20
.42	.2836	7.63	4.20	2.5741	-118.05
.44	.3101	8.29	4.40	2.6344	-128.95
.46	.3373	8.96	4.60	2.6934	-139.91
.48	.3653	9.64	4.80	2.7511	-150.91
.50	.3938	10.32	5.00	2.8075	-161.95
.52	.4229	11.00	5.20	2.8629	-173.03
.54	.4523	11.67	5.40	2.9172	176.52
.56	.4821	12.34	5.60	2.9705	165.38
.58	.5122	13.00	5.80	3.0228	154.22
.60	.5423	13.64	6.00	3.0742	143.04
.62	.5725	14.27	6.20	3.1249	131.84
.64	.6026	14.88	6.40	3.1740	120.62
.66	.6326	15.47	6.60	3.2237	109.38
.68	.6624	16.03	6.80	3.2720	98.13
.70	.6920	16.56	7.00	3.3195	86.87
.72	.7212	17.07	7.20	3.3665	75.59
.74	.7500	17.54	7.40	3.4128	64.30
.76	.7784	17.98	7.60	3.4584	53.01
.78	.8063	18.39	7.80	3.5035	41.70
.80	.8337	18.77	8.00	3.5480	30.38
.82	.8606	19.11	8.20	3.5919	19.06
.84	.8870	19.41	8.40	3.6353	7.73
.86	.9128	19.68	8.60	3.6782	-3.61
.88	.9380	19.91	8.80	3.7206	-14.96
.90	.9626	20.10	9.00	3.7626	-26.31
.92	.9867	20.26	9.20	3.8041	-37.66
.94	1.0102	20.39	9.40	3.8451	-49.03
.96	1.0331	20.47	9.60	3.8857	-60.39
.98	1.0554	20.52	9.80	3.9258	-71.77
1.00	1.0773	20.54	10.00	3.9656	-83.14

LITTERATURFÖRTECKNING

1. Reinius, Erling: Hamnar och farleder. Stockholm 1973.
2. Cederwall, Klas: Vågor. Institutionen för vattenbyggnad, CTH, Intern skrift nr 10, 1968.
3. Morison, J.R., O'Brien, M.P., Johnson, J.W., Shaaf, S.A. The Force Exerted by Surface Waves on Piles. Petroleum Transactions, AIME, Vol. 189, TP 2846, 1950.
4. Johnson, A.J. Design in Relation to the Environment Conference on Off-Shore Structures, The Institution of Civil Engineers, London 1974.
5. Mac Camy, R.C., Fuchs, R.A. Wave Forces on Piles: A Diffraction Theory, U S Army Corps of Engineers, Beach Erosion Board, Techn. Memo., No. 69, Washington 1954.
6. Gran, Sverre. Föreläsning vid CTH, Institutionen för Vattenbyggnad 26. mars 1973, Det Norske Veritas
7. Nilsson, Ove. Plattformar för olja ur havet, Teknisk Tidskrift, h10, 1973.
8. Cederwall, Klas, Sjöberg, Anders. Hydraulik. Inst. för vattenbyggnad CTH, intern skrift nr 6, 1969.
9. Houmb, Ole. Utdrag fra forelesninger om bølger på vann. Doktorandkurs vid Institutionen för vattenbyggnad CTH våren 1973.
10. Nagai, S. Wave Forces on Structures, Advances in Hydroscience, Vol. 9 1973, New York, Academic Press.
11. Rundgren, Lennart. Water Wave Forces, A theoretical and laboratory study. Bulletin No. 54, Inst. för vattenbyggnad KTH, Stockholm 1958.

12. Hedar, P.A. Stability of Rock-Fill Breakwaters, Doktors-avhandlingar vid CTH Nr. 26, Göteborg 1960.
13. Bruun, Per Port Engineering, Gulf Publishing Company Houston 1973.
14. Chakrabarti, S.K., Naftzger, R.A. Nonlinear Wave Forces on Half Cylinder and Hemisphere. ASCE WW3 1974.
15. Daily, Harleman. Fluid Dynamics, Addison-Wesley, Ontario 1966.
16. Bachelor, G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 1967.
17. Myers, Holm, McAllister. Handbook of Ocean and Underwater Engineering Mc Graw Hill. 1969.
18. Jansson, L-E. Plaströr i Va-tekniken. Gränges Essem, 1971.
19. Johansson, Börje. Vågkrafter mot en på havsbotten liggande, cirkulär rörledning. Inst. för vattenbyggnad KTH, Stockholm 1965.
20. Tørum, Alf. Bølje og strømkrefter på utslippsledninger. Vann nr 1, 1973, Oslo.
21. Wiegel, R.L. Oceanographical Engineering, Prentice Hall, 1964.
22. Hildebrand, F.B. Advanced Calculus for Applications, Prentice Hall 1962.
23. Garrison, C. J., Snider, R. H. Wave Forces on Large Submerged Tanks, COE Report no. 117, Texas A and M University, 1970.
24. Taylor, R. E. Structural Dynamics of Off-Shore Platforms. Conference on Off-Shore Structures, The Institution of Civil Engineers, London 1974.

25. Bretschneider, C.L. Revised Wave Forecasting Relationships
Proceedings of the Second Conference on Coastal Engineering
1952. Utförligt redovisad i [26], summariskt i [1] o. [2].
26. U S Army, Corps of Engineers, Beach Erosion Board.
Shore Protection Manual Vol. I-III
Washington DC 1973
27. Hellström, B., Rundgren, L. Model Tests on Ölands Södra
Grund Lighthouse. Bulletin No. 39, Institutionen för vatten-
byggnad KTH, Stockholm 1954.
28. van der Weide, J. Some Hydrodynamical Aspects of Gravity -
Type Platform Design, Delft Hydraulics Laboratory, Publ. 120,
Delft 1974.
29. Yamamoto, Nath och Slotter. Wave Forces on Cylinders Near
Plane Boundary. ASCE WW4 1974
30. Tørum, Larsen och Hafskjold. Offshore Concrete Structures -
Hydraulic Aspects, Offshore Technology Conference, Dallas 1975.
31. Garrison, Tørum m fl. Wave Forces on Large Volume Structures -
- A Comparison Between Theory and Model Tests, Offshore Techno-
logy, Conference, Dallas 1975.
32. Horwitz, Ludvig. Off shore konstruktioner, Byggdok, rapport
1974:4.
33. Garrison, Gehrman, Perkinson. Wave Forces on Bottom-
Mounted Large-Diameter Cylinder. ASCE WW 4, 1975
34. Lamb, Horace: Hydrodynamics, Cambridge 1963.
35. Det Norske Veritas - Rules for the Design, Construction
and Inspection of Fixed Offshore Structures. Oslo 1974
36. Hogben, N. Fluid Loading on Offshore Structures, A State of
Art Appraisal: Wave Loads, The Royal Institution of Naval
Architects: Maritime technology monograph No. 1, 1974.

37. Korvin-Kroukovsky, B. V. Theory of Seakeeping.
The Society of Naval Architects and Marine Engineers,
New York N.Y. 1961
38. Computational Mechanics: Analysis of Off-Shore
Structures, Southampton 1976.
39. Reinius, E. och Sandström, Å.: Wave action on offshore
lighthouses.

SVAR TILL ÖVNINGSUPPGIFTER

$$3a: \quad w_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \sigma \sin kx \cos \sigma t$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} = g \eta$$

$$3b: \quad \phi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh k(\eta+h)} \sin kx \cos \sigma t$$

$$\text{eller } \phi = -\frac{a\sigma}{k} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh k(\eta+h)} \sin kx \cos \sigma t$$

$$\text{där } \eta = a \sin kx \cos \sigma t$$

$$3d: \quad (u_{\max})_{z=-h} = 0,92 \text{ m/s}$$

$$w_{z=-h} = 0$$

$$4b: \quad h/L = 12,5/30 = 0,42 \geq 0,35$$

och formel (4.6) skall användas

$$p_{\text{dynmax}} = 6,2 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \quad (z = -12,5 \text{ m})$$

$$4c: \quad h/L = 12,5/100 = 0,125 < 0,135$$

$$H/L = 2/100 = 0,02 < 0,04$$

och formel (4.9) kan användas

$$p_{\text{dynmax}} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \quad (z = -12,5 \text{ m})$$

$$4d: \quad h/L = 5/25 = 0,2; \quad 0,135 < h/L < 0,35$$

formel (4.2) ger

$$P_{\max} = 1,64 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

$$5b: F_{\max} = 4,5 \cdot 10^8 \text{ N} \quad M_{\max} = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ Nm}$$

$$h_{\max} = 24 \text{ m.} \quad \partial F = 0,43 \cdot 10^8 \text{ N (10 \%)}$$

$$\partial M = 2,2 \cdot 10^9 \text{ Nm (17 \%)}$$

$$5d: F_{\max} = 5,3 \cdot 10^7 \text{ N}$$

6b: Rörelsen är $x = \cos t$

Kraften blir då

$$F = -562 \cos t + 157 \sin^2 t \text{ N} \quad \sin t \geq 0$$

$$F = -562 \cos t - 157 \sin^2 t \text{ N} \quad \sin t \leq 0$$

Eftersom derivatan av F endast har nollställen för $t = n\pi$ erhålles

$$\text{maxkraften till } F_{\max} = \pm 562 \text{ N}$$

$$6d: F_{\max} = 26,9 \text{ MN}$$

$$6f: \ddot{x} + 1,7 \cdot 10^{-2} \dot{x} + 3,88 x = -1,04 \cos \sigma t + 4,52 \cdot 10^{-2} \sin \sigma t$$

Den homogena ekvationen kan skrivas

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + w^2 x = 0 \quad \text{vilket ger den karakteristiska ekvationen}$$

$$r^2 + 2kr + w^2 = 0, \quad r = -k \pm \sqrt{k^2 - w^2} \quad \text{men } w^2 \gg k^2$$

varför lösningen är mycket nära

$$x_h = C \cdot e^{-0,85 \cdot 10^{-2} t} \cos(1,97 t - \alpha)$$

$$\text{egenfrekvensen } f = \frac{w}{2\pi} = 0,31 \text{ Hz}$$

$$\text{egenperioden } T = 3,2 \text{ s}$$

α och C beror av begynnelsevillkoren.

Om dämpningstermen $2k\dot{x}$ och $4,52 \cdot 10^{-2} \sin \sigma \cdot t$ försummas erhålles partikulärlösningen

$x_p = 0,279 \cos 2\pi t/16 \text{ s}$ där 16 s är vågrörelsens period.

Eftersom $16 \text{ s} \gg 3,2 \text{ s}$ föreligger ingen risk för resonanssvängning. I en regelbunden vågrörelse gäller att $x_h \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ och efter ett insvängningsförlopp blir maximal amplitud hos semisubmersiblen 0,279 m och maxkraften $F_{\max} = 0,279 \text{ m/f} = 28 \text{ MN}$. Jfr. 6.d) Uppankringen är således för styv för att krafterna skall reduceras nämnvärt.

