Institutionen för Vattenbyggnad
Chalmers Tekniska Högskola

Department of Hydraulics
Chalmers University of Technology

Till Larry
med vänliga hälsningar
Jan

STRÖMNING I ETT STYRBART SIDOÖVERFALL

av

Jan Forsberg

Rapportserie A:24
ISSN 0348-1050

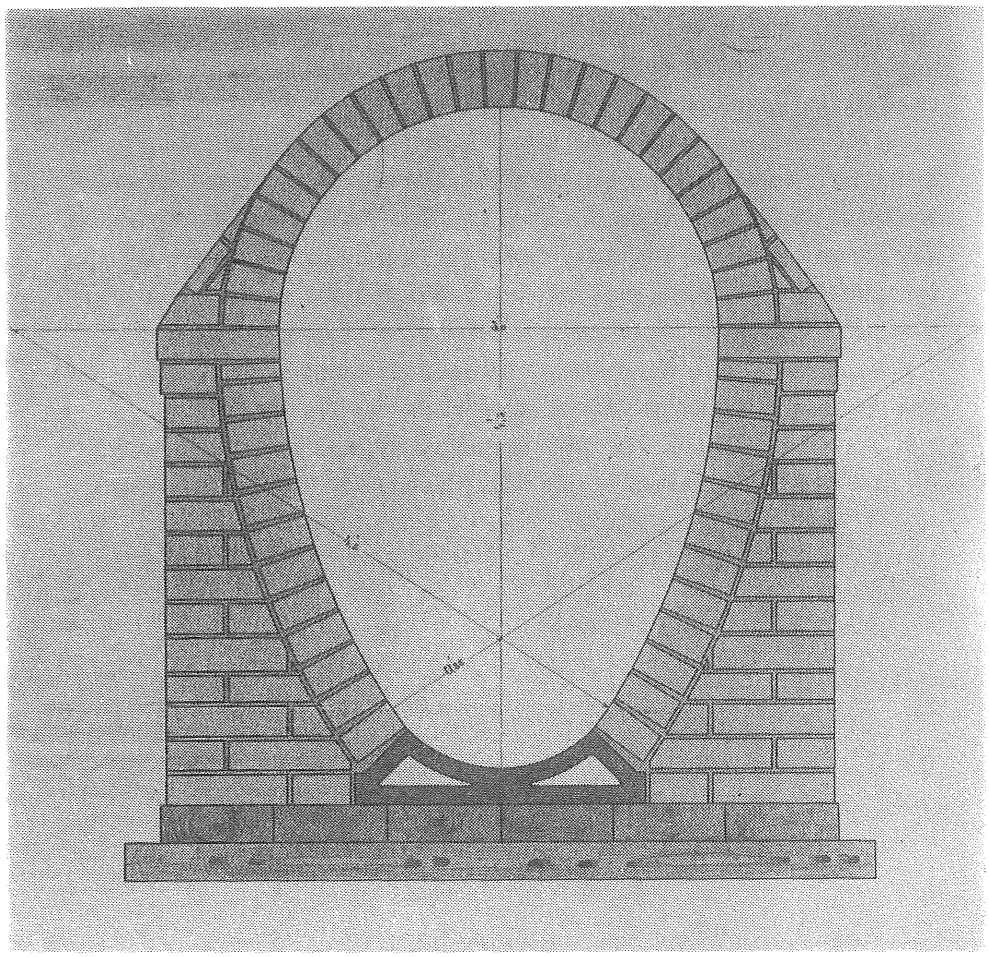
Göteborg 1995

Adress: Institutionen för Vattenbyggnad
Chalmers Tekniska Högskola
412 96 Göteborg

Telefon 031-772 10 00
Telefax 031-772 21 28

Fastän för länge sedan vattenfallet
slutat att sjunga
evigt
dess namn
bär oss ett eko av brus

japansk dikt
från 1000-talet



Summary

The purpose of the present study is to formulate a theoretical basis for the control of the flow over a side weir in a sewer with an egg-shaped cross-section. The control system should be able to take into account progressive wave fronts travelling in the sewer. This demands a dynamic description of the flow over the side weir. StVenant's equations are used for this purpose.

Godunov's method and Roe's Riemann solver are presented as examples of numerical solvers to the dynamic equations. The lateral discharge over the side weir generates a source term in the equations, and affects the initial-value conditions. An example shows the simulated dynamic flow in the sewer after a very fast closure of the side weir.

The description of the side weir discharge in stationary, subcritical flow condition is studied in more detail. StVenant's equations and a third equation defining the gradient of the lateral flux of momentum establish the theoretical flow. Three coefficients compensate for the distribution of momentum flux in the cross-section of the sewer. Varying parameters depend on local flow conditions only, which is necessary and physically relevant also in non-stationary flow conditions.

An eleven-metre-long model sewer in the scale 1:15 was set up in the hydraulic laboratory. It was equipped with a manœuvreable side weir and an automatic acquisition system for level and flow data, and a control system. The parameters of the stationary model for lateral discharge were adjusted by minimizing the difference between calculated and measured values of flow and level for two significantly different flow conditions.

For subcritical flow the deviation between measured and calculated flow was less than ±10% and the deviation of levels was less than ±2%.

It is concluded that it is possible to make a dynamic, numerical model of the flow over a manœuvreable side weir which can be used in flow control.

Sammanfattning

Syftet med detta arbete har varit att ta fram underlag för konstruktion av en regulator till ett styrbart sidoöverfall i en avloppsledning med äggformad sektion. Regulatorn skall kunna hantera vågor som utbreder sig i ledningen, vilket kräver någon form av dynamisk beskrivning av strömningen i och omkring sidoöverfallet. Den dynamiska beskrivningen utgår från StVenants ekvationer.

Godunovs metod och Roes Riemann-lösare presenteras som exempel på numeriska lösare till de dynamiska ekvationerna. Lateral avbördning i sidoöverfallet motsvarar en källterm i ekvationerna och modifierar begynnelsevillkoren i lösaren. Ett exempel visar det simulerade dynamiska flödesförloppet i ledningen, efter en mycket snabb stängning av sidoöverfallet.

Beskrivningen av sidoöverfallets avbördning under stationära, subkritiska förhållanden har studerats närmare. StVenants ekvationer har kompletterats med en tredje ekvation som beskriver gradienten i det laterala rörelsemängdsflödet. Tre koefficienter korrigerar rörelsemängdsflödets fördelnig i en ledningssektion. Använda parametrar tillåts enbart variera med det lokala tillståndet, vilket är nödvändigt och fysikaliskt korrekt även vid icke-stationär strömning.

En ca elva meter lång modelledning i skala 1:15 byggdes upp i institutionens vattenlaboratorium. Den utrustades med styrbart sidoöverfall och datorbaserat system för styrning och mätning av flöden och nivåer. Parametrarna i den stationära modellen för lateral avbördning har ställts in genom minimering av skillnaden mellan beräknade och mätta tillstånd vid två olika flöden.

Vid subkritisk strömning var avvikelsen mellan mätta och beräknade flöden mindre än ±10% och nivåavvikelsen understeg ±2%.

Slutsaten är att det är möjligt att göra en numerisk, dynamisk modell av strömningen i och omkring ett styrt sidoöverfall och som kan användas i ett reglersystem

Förord

Denna studie har finansierats av Byggforskningsrådet och Institutionen för vattenbyggnad inom forskningsprogrammet Ledningsteknik vid Chalmers tekniska högskola. Stockholm Vatten AB sponsrade inköpet av datasamlings- och styrsystem och Uponor skänkte alla ledningar.

Arbetet har utförts vid Institutionen för Vattenbyggnad, dels på intima kammare, dels i det mer spatiösa vattenlaboratoriet. Under arbetets gång har handledarskapet vilat med varierande tyngd på Anders Sjöberg, Sven Lyngfelt och Lars Bergdahl. Alla tre har visat tålamod, givit mig stöd och stor frihet i arbetet. När de rekommenderade PC och datorsimuleringar med MOUSE, valde jag Mac, laboratorieförsök och simulering med hjälp av SIMULINK/MATLAB.

Steffen Häggström har värmt kammaren med sitt smittande skratt och varit hydrauliskt och pedagogiskt bollplank. Gösta Lindvall trimmade mig i tillämpad hydraulik med "Nää, det går inte ..." eller "Så kan man väl inte göra ..." och hans noggrannhet har varit en trygghet. Bengt Carlsson och Kalle Djärv är artister i var sitt hantverk. Bengt lödde och lödde om elektroniska mostrar efter min design och re-design medan Kalle byggde mekaniska underverk från mina skisser på servetter. Vanja Slättberg har räddat mig flera gånger från att fastna på hyllorna i institutionens bibliotek. Yvonne Young försökte oförtröttligt att lyfta paussamtalen upp ur vattnet. Utanför institutionen har Kenneth Eriksson på Matematiskt centrum ställt upp som hyperbolisk samtalspart och Tore Svensson svepte många koppar kaffe under de diskussioner vi haft. Hemma har jag prövat familjens tålamod med citat av Alfons Åberg: "Jag ska bara ..."

Jag är tacksam mot alla på institutionen för den uppmärksamhet jag fått vid frågor jag ställt, under korta samtal i dörren, intill whiteboardens klotter, på mina seminarier och genom manuskritiken.

Angered april 1995
Jan Forsberg

Innehållsförteckning

Inledning	1
Syfte	5
Teori	7
Allmänt	8
Dimensionsanalys och modellregler	8
Förutsättningar och antaganden	11
Kontinuitetsekvationer för mass- och rörelsemängdsflöde	12
Begynnelse- och randvillkor	15
Vågfronter och vattensprång eller svaga lösningar med singulariteter	16
Riemann-problemet och Godunovs metod	18
Roes approximativa Riemann-lösare	20
Entropivillkor och chocker	23
Källtermer i högerledet	28
Sidoöverfall	30
Laboratoriemodell	39
Allmänt	40
Modellskala	41
Modelledning	46
Ställdon	46
Givare	47
Datasamling	49
Kalibrering	50
Mätfel	60
Simulering	67
Allmänt	68
Glatt strömning	68
Friktionsförluster	69
Stationär strömning i överfallet	72
Korrektionskoefficienter	76

Mätserie 920623, ett exempel 85
Simulerad avbördning 88
Känslighetsanalys 98

Reglerobjektet 101
Allmänt 102
Reglerobjektet 103
Dynamisk modell av ett sidoöverfall 104
Observerbarhet och styrbarhet 109

Diskussion, fortsatt arbete 111
Allmänt 112
Transient modell 112
Jämförelse med andra stationömodeller 113
Fortsatt arbete 117

Referenser

Beteckningar

Inledning

Flera tusen år innan människan behärskade differentialkalkylen kunde hon bygga avancerade system för konstbevattning, distribution av dricksvatten och uppsamling av avloppsvatten. Kanske växte idéerna om central, statlig organisation och styrning fram ur bevattningstekniker som utvecklades av folken runt de stora flodernas deltaområden vid denna tid.[1] Driften och underhållet av varje bevattningskanal påverkade de övriga utefter samma flod och behovet av samordning och kontroll blev tydligt. I önskan att kunna förutsäga eller kontrollera nederbörden knöt den världsliga makten den andliga kraften (astrologer och präster) till sig, så som organisationer och företag idag anlitar s k experter, vår tids magiker.

I ca hundra år har sidoöverfallet använts i städernas dagvattenledningar för kontroll av flöden och nivåer. Det är gott om nya vetenskapliga arbeten med dimensioneringsmetoder och teoretiska analyser av denna VA-tekniska komponent. [2,3,4] Tyder det på en ökad användning av sidoöverfallet

[1]Cameron Kenneth N: Människan och samhället, A&K 1976

[2]Delo E A, Saul A J: Charts for the hydraulic design of high side weirs in storm sewage overflows, Proc. Instn Civ Engrs, Part 2, Vol 87, June, 1989, pp 175-193

[3]Hager Willi H: Lateral outflow over side weirs, J of Hydraulic Engineering, Vol 113, No 4, April, 1987

[4]Uyumaz Ali, Smith Roger H: Design procedure for flow over side weirs, J of Irrigation and Drainage Engineering, Vol 117, No 1, January, 1991, pp 79-90

och behov av en noggrannare beskrivning av dess hydrauliska egenskaper? All litteratur jag funnit hittills har behandlat stationär strömning. En har tagit upp vattensprång i sidoöverfall med rektangulär sektion.[5]

Lokalt återkopplade bottenutskov för reglering av nivåer i kanaler med fri vattenyta används i system för konstbevattning.[6,7,8] Globala styrstrategier för system av dagvattenledningar har diskuterats länge.[9,10,11] De överordnade styrsystemen ger bör- eller referensvärden till lokala regulatorer ute i ledningssystemen. I en artikel behandlas återkopplade regulatorer för sidoöverfall.[12] Tyvärr saknar den beskrivning eller diskussion av regulatorn och dess design liksom illustration av hur styrsystemet fungerar.

De dagvattenförande ledningarna i våra moderna samhällen har strukturer som påminner om flodernas, med klena ledningar ytterst i tillrinningsområdena och grova stamledningar nära utloppen. Likt floderna drabbas dessa system av översvämningar vid intensiva regn. Genom kontrollerade utsläpp i dagvattensystemens bräddpunkter kan de materiella skadorna på hus och anläggningar minskas. Bräddningarna innebär emellertid biologisk och kemisk belastning på vattendrag och grundvattenmagasin från föroreningar som transporteras i ledningarna. Bräddavloppen kan oftast inte styras men där detta är möjligt sker det mer eller mindre manuellt.

Till en del reduceras flödestopparna efter intensiva regn av ledningssystemets egen magasineringskapacitet och med hjälp av bassänger för korttidslagring. Genom att introducera en mer automatiserad styrning av flödet i större dagvattensystem hoppas man kunna reducera både antalet bräddtillfällen och utsläppta volymer avsevärt. Beräkningsexempel[13] för Kungs-

[5]Olsson P, Svensson M: Bräddavloppshydraulik, Inst f vattenbyggnad, KTH 1979.

[6]Wang C, Clemmens A, Hart W E: Dynamic response of automatic water-level controller. I: Theory, J of Irrigation and Drainage Eng, Vol 116, No 6, 1990.

[7]Clemmens A, Wang C, Replogle J A: Dynamic response of automatic water-level controller. II: Application, J of Irrigation and Drainage Eng, Vol 116, No 6, 1990

[8]Reddy J M: Local Optimal Control of Irrigation Canals, J of Irrigation and Drainage Eng., Vol 116, No 5, 1990

[9]Trotta P D, Labadie J W, Grigg N S: Automatic Control Strategies for Urban Stormwater, J of The Hydraulics Div, ASCE Vol 103, HY12, Dec 1977.

[10]Papageorgiou M: Automatic Control Strategies for Combined Sewer Systems, J of Environmental Eng., Vol 109, No 6, Dec 1983.

[11]Lyngfelt Sven: Styrning av flöden i avloppssystem, Rapport B:51, Inst för vattenbyggnad, CTH 1989

[12]Csépai I, Kastanek F: Flow regulation by automatically controlled overflow weirs, Wat. Res., Vol 26, No 5, 1992, pp 625-628

holmen i Stockholm pekar på att utsläppt årsvolym kan minskas med 50%. Ett högre utnyttjande av magasineringskapaciteten i bassänger och ledningar är inte konfliktfritt, eftersom marginalerna till bräddning samtidigt krymper. Längre uppehållstider för avloppsvattnet i ledningssystemet ökar sedimenteringen och kan försämra kvaliteten på reningsverkens avloppsvatten.

En god styrstrategi bör innefatta en optimering av flödet i systemets alla delar, där avvägningar görs mellan risker och vinster. Riskerna bör minska ju mer information man har om det aktuella och förväntade hydrauliska och kemiska tillståndet i dagvattensystemet. Beräknings- och beslutstider ökar med mängden information som skall bearbetas och får inte bli alltför lång. För några år sedan omfattade dagvattennätet i Chicago 645 bräddpunkter varav 211 övervakades. Systemet kontrollerades med hjälp av bl a ca 80 nivå-monitorer och 64 styrpunkter, varav tre var pumpstationer.[14] För att underlätta en central styrning av så komplexa system, tror jag att denna bör bygga på hierarkiskt ordnade "autonoma" subsystem. En lokalt återkopplad styrning ökar även snabbheten och därmed friheten hos det överordnade systemet. Man kan förbättra framförhållningen genom att utnyttja information från väderradar och regnmätare och i förväg skatta tillrinningen.

Utan "intelligent" reglering på lokal nivå riskerar man att få interferens till exempel mellan närbelägna överfall eller med vågor som reflekteras vid diskontinuiteter i ledningarna. Internt genererade vågor kan misstolkas av ett centralt styrsystem. En studie av ett kanalsystem för bevattning försett med yt- och bottenutskov, överfall samt förgreningar visar hur dessa anordningar reflekterar ett påsläpp repektive en strypning uppströms i huvudkanalen.[15] Att behandla laterala utflöden i en kanal som punktsänkor kan leda till en underskattning av beräknade kanalflöden och nivåer med upp till 40%, enligt samma studie.

I tyska Bremen har man prövat s k toleransbandstyrning av ett överfall i VA-nätet. Den beskrivna toleransbandstyrningen är en till-från reglering med tre lägen; höj överfallsnivån lite, gör ingenting respektive sänk nivån lite. Börvärdet på vattennivån nära överfallet beräknas i ett simuleringspro-

[13]Hammarlund Hans: The potential of operational control in a sewer system, based on the catchment of Kungsholmen, Stockholm, KTH 1991

[14]Schilling Wolfgang: Urban runoff quality management by real-time control, NATO ASI Series, Vol G10, Springer-Verlag, Berlin 1986

[15]Misra R, Sridharan K, Mohan Kumar M S: Transients in canal network, J of Irrigation and Drainage, Vol 118, No 5, 1992

gram och jämförs med signalen från en nivåmätare. Styrningen uppdateras var tjugonde sekund, enligt artikeln[16].

Idag kan man simulera transienta flöden i kanaler och ledningar med fri vattenyta.[17] I kommersiella simuleringsprogram, som t ex MOUSE från danska DHI, är det möjligt att efterlikna hydrauliska förlopp i stora ledningssystem. Men ännu saknas möjligheten att i MOUSE pröva återkopplad reglering, t ex av ett sidoöverfall.

En modelledning i institutionens vattenlaboratorium har försetts med ett styrbart sidoöverfall, nivågivare och utrustning för flödesmätning. I laboratoriet kan sidoöverfallet och den lokala hydrauliska effekten av styrning studeras både stationärt och transient. Detta är en god förutsättning för analys och dimensionering av ett styrsystem till sidoöverfallet, som är besvärligt att beskriva som reglerobjekt.

[16]Gatke D, Verworn W: Design of control algoritms for moveable weirs by means of hydrodynamic runoff simulation, Proceedings of the sixth international conference on urban storm drainage, Vol II, Niagara Falls, 1993

[17]Sjöberg Anders: Beräkning av icke stationära flödesförlopp i reglerade vattendrag och dagvattensystem, Vattenbyggnad Meddelande nr 87, CTH, Göteborg 1976

Syfte

Strömningen i ett sidoöverfall är tredimensionell (3D). Det är inte realistiskt att avbilda denna fullständigt i en datormodell för lokal återkoppling. Förenklingar måste göras.

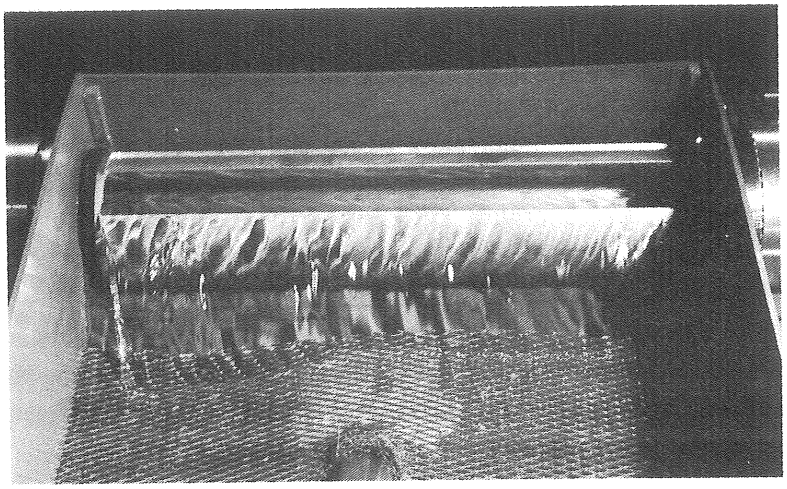
Arbetet syftar till att finna hydrauliska beskrivningar av ett styrbart sidoöverfall i en cirkulär ledning som kan vara användbara vid dimensionering av regulatorer för styrning av nivå eller flöde i närheten av överfallet. Ju färre mätpunkter man kan klara detta med desto bättre. Diskreta, dynamiska 1D-modeller är särskilt intressanta. Det är också fördelaktigt om en och samma beräkningsmodell klarar att beskriva alla strömningstillstånd som kan uppträda.

Det lokala laterala utflödet i överfallet påverkas bl a av vattennivåns höjd över sidoöverfallets krön, av förhållandet mellan vattnets hastighet och vågornas utbredningshastighet och av flödet längs överfallet. Storlek och val av olika parametrar kan bestämmas genom jämförelse mellan mätningar och beräkningar av nivåer och flöden i stationära försök. Resultat kan prövas mot experiment som andra utfört.

För att kunna jämföra teoretiskt beräknade nivåer och flöden med verkliga krävs en laboratoriemodell. I den kan vattennivåer i närheten av överfallet och avbördat flöde bestämmas med rimlig noggrannhet. Överfallets höjd skall vara styrbart.

För en given skillnad mellan vattendjup och överfallshöjd avbördar sido-

överfallet mer vatten vid subkritisk strömning än vid superkritisk. Det är intressant att undersöka hur subkritiskt tillstånd kan upprätthållas i överfallet.



Teori

Detta avsnitt innehåller de grundläggande matematiska och hydrauliska samband jag använt i arbetet med att försöka skapa en dynamisk modell av hydrauliska förlopp i en cirkulär ledning med sidoöverfall. Kapitlet inleds med dimensionsanalys och skalregler för modellförsöken följt av förutsättningar och antaganden för den använda matematiska modellen av kontinuerligt volym- och rörelsemängdsflöde. Begynnelse- (BV-) och randvärdesproblemet (RV-) tas upp tillsammans med begreppet karakteristisk riktning. Därefter beskrivs Rankine-Hugoniots chockvillkor, som kan knyta ihop lösningen på var sida om diskontinuiteter såsom vattensprång eller branta vågfronter. En del beskriver Gudunovs metod och Roes Riemann-lösare för numerisk lösning av BV- och RV-problemet för konservativa system där jag följer en monografi[18]. Problemet med källtermer berörs. Sist introduceras stationär strömning i ett sidoöverfall.

[18] LeVeque Randall J: Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhäuser Verlag, Basel 1992

Allmänt

Valet av matematisk modell för beskrivning av hydrauliska förlopp beror av flera faktorer, alltifrån kunskaper och syften till mätmöjligheter och datorkraft. Den styrbara laboratoriemodellens flödesförlopp är snabbare än den verkliga dagvattenledningens. Detta ställer krav på styrsystemets räkne- och reaktionstider. Ju enklare matematisk modell desto kortare samplingsintervall och bättre kontroll över processen. Å andra sidan innebär en alltför enkel modell förmodligen större fel i styrningen.

Dagvattenledningens dominerande fysiska dimension är dess längd. Fel genom medelvärdesbildning av hydrauliska storheter över ledningens sektion anses därför försumbara jämfört med variationen längs ledningen. Den enklaste avbildningen av strömningen blir då endimensionell.

Dimensionsanalys och modellregler

I dimensionsanalysen kan man dels göra sig oberoende av referenssystem eller skala och dels tydliggöra inverkan av karakteristiska parametrar. Den icke-stationära, endimensionella kanalströmningen beskrivs med StVenants ekvationer och kan karakteriseras med följande åtta parametrar;

$$\mu, \rho, g, R, M, Q, S_o, t$$

Parametrarna μ och ρ beskriver egenskaper hos det strömmande vattnet, viskositet respektive densitet. Tyngdaccelerationen g och tiden t är oberoende yttre parametrar. Mannings tal M bestäms av ledningsväggarnas råhet och hydrauliska radien R. S_o är ledningens lutning och flödet Q beskriver den aktuella strömningen i en ledningssektion. Väljs ρ, g och R som variabler med oberoende dimensioner, kan de karakteristiska parametrarna reduceras till fem *dimensionslösa* storheter X_1 ... X_5. Tretalet i oberoende dimensioner hänger samman med den newtonska mekanikens oberoende basdimensioner längd (L), tid (T) och massa (M).

De tre valda parametrarna uttrycks i basdimensionerna

$$[\rho]=L^{-3}T^{0}M^{1}$$
$$[g]=L^{1}T^{-2}M^{0}$$
$$[R]=L^{1}T^{0}M^{0}$$

För att ρ, g och R skall kunna bilda ett system med *oberoende* dimensioner krävs att basdimensionerna L, T och M är linjärt oberoende i de tre valda parametrarna. Placeras basdimensionernas exponenter i radvektorer, en för varje vald parameter, erhålls 3x3-matrisen

$$\Delta=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Om rang(Δ)=3 har de tre valda parametrarna oberoende dimensioner. Determinanten till Δ är skild från noll, varför rang(Δ)=3. Parametrarna ρ, g och R kan alltså användas som oberoende variabler vid bildandet av de dimensionslösa storheterna X_1 ... X_5. Låt den första variabeln X_1 vara en kombination av μ, ρ, g och R sådan att

$$X_1=\rho^{\alpha_1} g^{\beta_1} R^{\gamma_1} \mu^{m_1} \quad \text{där } [\mu]=L^{-1}T^{-1}M^{1}$$

Exponenten i X_1 måste vara noll för respektive basdimension L, T och M, för att X_1 skall bli dimensionslös

$$\text{L: } -3\alpha_1+1\beta_1+1\gamma_1-m_1=0$$
$$\text{T: } 0\alpha_1-2\beta_1+0\gamma_1-m_1=0$$
$$\text{M: } 1\alpha_1+0\beta_1+0\gamma_1+m_1=0 \quad \Rightarrow \alpha_1=-m_1,\ \beta_1=-\frac{1}{2}m_1 \text{ och } \gamma_1=-\frac{3}{2}m_1$$

Med m_1=-1 erhålls α_1=1, β_1=1/2 och γ_1=3/2. På samma sätt förfar man med de övriga karakteristiska parametrarna S_o, Mannings M, Q och t

$$X_1=\frac{\rho R\sqrt{gR}}{\mu}$$ ett slags Reynolds tal

$$X_2=S_o$$ ledningslutning

$$X_3=\frac{g}{M^2R^{\frac{1}{3}}}$$ friktionskoefficient

$$X_4=\frac{Q}{R^2\sqrt{gR}}$$ ett slags Froudes tal

$$X_5=\frac{t\sqrt{gR}}{R}$$ ett slags Strouhals tal

Är skalfaktorn given för var och en av de tre variablerna med oberoende dimension, kan alla fysiska storheter transformeras mellan en hydraulisk laboratoriemodell och dess förlaga i verkligheten; prototypen. Om X_1 ... X_5 behåller sina talvärden under transformationen råder *dynamisk similaritet* eller likformighet mellan modellen och prototypen. Den dimensionslösa variabeln X_1 ovan får en form som liknar Reynolds tal, X_4 och X_5 bildar ett slags Froudes respektive Strouhals tal.

Tre variabler med oberoende dimensioner kan väljas på flera sätt bland de åtta parametrarna, med andra former på de dimensionslösa storheterna X_1 ... X_5. Exempelvis är det möjligt att välja μ, ρ och g. I transformen mellan en laboratoriemodell och dess prototyp, där vatten används i båda, existerar endast en skalfaktor $\lambda_\mu=\lambda_\rho=\lambda_g=1$. Detta innebär teoretiskt att fullständig, dynamisk similaritet inte kan uppnås mellan modell och prototyp.

Vid hydrauliskt rå strömning anses friktionskoefficienten oberoende av μ och Reynolds tal, därmed är det möjligt att välja *en* skalfaktor (t ex för längd $\lambda_L=\lambda_R$ medan $\lambda_g=\lambda_\rho=1$). Antalet dimensionslösa parametrar ovan reduceras till fyra.

För att transformationen av de dimensionslösa variablerna X_2 ... X_5 skall vara invariant måste gälla att

$$\lambda_{S_o}=1$$

$$\lambda_g\lambda_M^{-2}\lambda_L^{-\frac{1}{3}}=1 \qquad \Rightarrow\lambda_M=\lambda_L^{-\frac{1}{6}}$$

$$\lambda_Q\lambda_L^{-\frac{5}{2}}\lambda_g^{-\frac{1}{2}}=1 \qquad \Rightarrow\lambda_Q=\lambda_L^{\frac{5}{2}}$$

$$\lambda_t\lambda_g^{\frac{1}{2}}\lambda_L^{-\frac{1}{2}}=1 \qquad \Rightarrow\lambda_t=\lambda_L^{\frac{1}{2}}$$

Är strömningen inte hydrauliskt rå under alla förhållanden kallas similariteten ofullständig eller partiell.[19] På liknande sätt kan varje storhet skalas mellan modell och prototyp. Strouhals tal är invariant i en transformation där enbart X_2, X_3 och X_4 utnyttjas. Denna transformation används ofta i kanalströmning och kallas *Froudes modellregel.*

Förutsättningar och antaganden

Ansatsen är densamma som Barré de Saint-Venant[20] använde 1871:

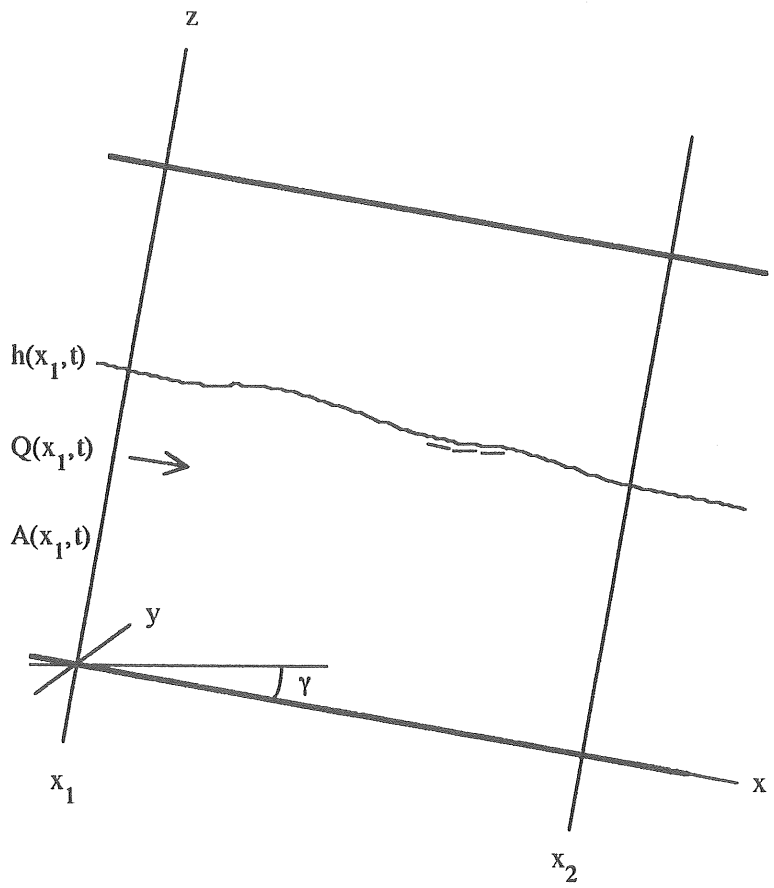
- endimensionellt flöde (vattenmassans hastighet beror av endast en rums koordinat)
- statisk tryckfördelning (försumbara vertikala accelerationer)
- icke-stationära gränsskikts- och turbulensförluster behandlas som stationära strömningsförluster
- lutningarna är små ($\cos\gamma\approx1$, $\sin\gamma\approx\tan\gamma=S$)
- vattnet förutsätts inkompressibelt (densiteten ρ konstant) och strömningsförlusterna approximeras med t ex allmänna friktionsformeln eller Mannings formel som empiriskt gäller vid stationär strömning.

---

[19] Yalin M Selim: Theory of hydraulic models, Macmillan, London 1971, p 45

[20] Cunge J A, Holly Jr F M, Verwey A: Practical Aspects of Computational River Hydraulics, Pitman, London 1980, pp 7-24

Kontinuitetsekvationer för mass- och rörelsemängdsflöde



Figur 1. Koordinater och beteckningar

Den hydrauliska beskrivningen har två delar, en för strömningen i ledningens längdriktning och en för det laterala utflödet i överfallet. Endimensionell strömning i en ledning kan beskrivas med två variabler t ex vattendjup och hastighet eller sektionsarea och flöde. Dessa bestäms med två ekvationer, kontinuitetssambandet för mass- respektive rörelsemängdsflödet. Referenssystemet är *Eulerskt*, dvs fixt med x-axeln längs den raka ledningen, se figur 1. Icke-stationär strömning genereras av tidsberoende randvillkor. Tid-

en anges med koordinaten t, flödets gradient längs ledningen betecknas Q_x och partiella derivatan med avseende på tiden t skrivs Q_t. En första ordningens kontinuitetsekvation för mass- eller volymflödet genom en ledningssektion ger

$$A_t + Q_x = -q \qquad (1)$$

där A är våta sektionsarean och q laterala utflödet per längdenhet i sidoöverfallet med $q \equiv 0$ utanför. På liknande sätt härleds den endimensionella kontinuitetsekvationen för rörelsemängdsflödet. Den konstanta densiteten ρ har dividerats bort i ekvationerna (1) och (2). Bredden B(z) i ledningens sektion på avståndet z från botten kan relateras till arean på cirkelsegmentet med höjden z, vilket utnyttjas i ekvation (2). S_f är energigradienten pga friktionsförlusterna

$$B(z) = \frac{dA}{dz}$$

$$Q_t + \left(\beta_1 \frac{Q^2}{A} + g \int_0^{h(A)} \frac{dA}{dz} (h(A) - z) dz \right)_x = gA(S_o - S_f) - \beta_2 \frac{Q}{A} q \qquad (2)$$

I en cirkulär ledning varierar korrektionsfaktorn för rörelsemängd[21] β_1 med vattendjupet under stationära förhållanden (och vid $Re \approx 10^5$) så att $1.005 \leq \beta_1 \leq 1.02$. Icke-stationärt och lateralt flöde påverkar korrektionsfaktorerna varför jag väljer att behålla korrektionskoefficienterna β_1 och β_2 i ekvation (2).

De båda kontinuitetssambanden (1) och (2) bildar ett system av partiella differentialekvationer (PDE) med *källtermer* i högerledet

$$u_t + f_x(u) = g(u) + b(u) \qquad (3)$$

[21] Sjöberg Anders: Beräkning av icke stationära flödesförlopp i reglerade vattendrag och dagvattensystem, CTH, Göteborg 1976, pp 11-17

Tillståndsvektorn u och dess partiella första derivator skrivs

$$u=\begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix} \qquad u_t=\begin{bmatrix} A_t \\ Q_t \end{bmatrix} \qquad u_x=\begin{bmatrix} A_x \\ Q_x \end{bmatrix} \tag{4}$$

och f(u) kan kallas fluxvektorn med

$$f(u)=\begin{bmatrix} Q \\ \beta_1\frac{Q^2}{A}+g\int_0^{h(A)}\frac{dA}{dz}(h(A)-z)dz \end{bmatrix} \tag{5}$$

Bidraget i källtermerna från gravitation och friktion ligger i vektorn g(u) och vektorn b(u) adderar verkan av det laterala flödet i överfallet.

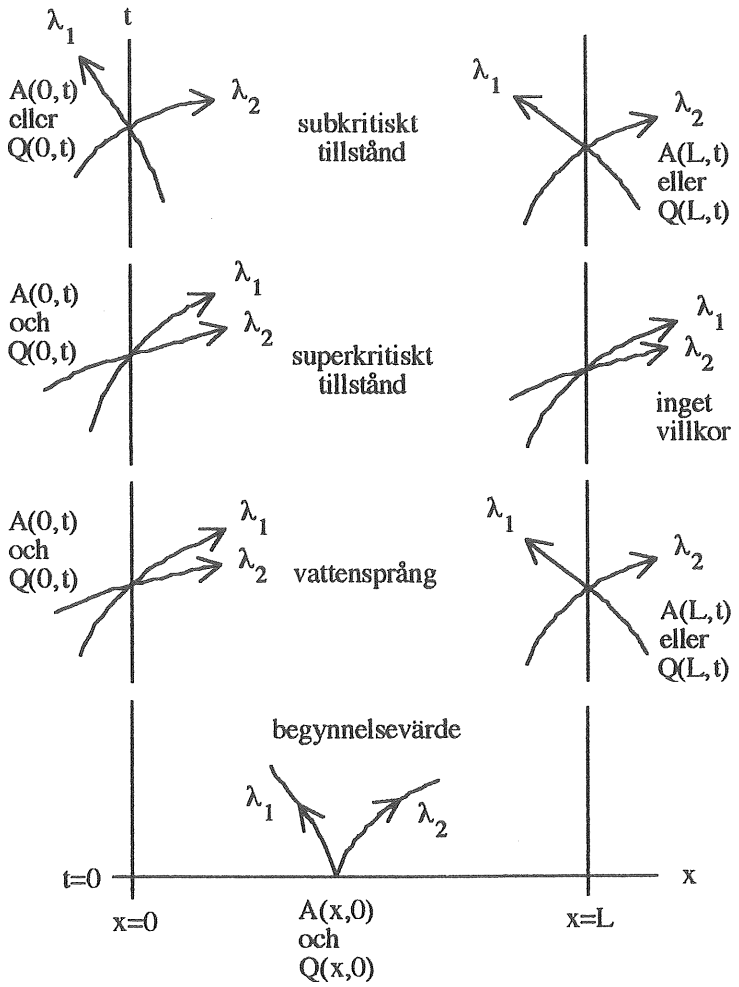
$$g(u)=\begin{bmatrix} Q \\ gA(S_o-S_f) \end{bmatrix} \qquad b(u)=-\begin{bmatrix} 1 \\ \beta_2\frac{Q}{A} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Jacobianen f´(u) till vektorn f(u) blir

$$f'(u)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gA\frac{dh(A)}{dA}-\beta_1\left(\frac{Q}{A}\right)^2 & 2\beta_1\frac{Q}{A} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Begynnelse- och randvillkor

Lösningen till PDE (3) bestäms av begynnelse- och randvillkoren. De senare måste vara uppfyllda för alla t. Det är ofta lämpligt att starta ett reglersystem under stationära eller långsamt varierande förhållanden. Vid simuleringar kan begynnelsevillkoren (BV) genereras t ex med hjälp av antagandet om stationär strömning för $t \leq 0$. Detta erhålls med $u_t=0$ i ekvation (3) och villkor på randen $x=0$ respektive $x=L$ där $0 \leq x \leq L$.



Figur 2. Karakteristisk riktning i RV och BV, fritt efter Anders Sjöberg [16] s 44

I strömning med fri vattenyta bestäms RV av de karakteristiska riktningarna på ränderna, dvs i detta fall upp- respektive nedströmsänden av den ledningssträcka simulering och mätning omfattar. De karakteristiska riktningarna bestäms av *egenvärdena till Jacobianen* f´(u) i (7) ovan[22].

$$\lambda_{1,2}=\beta_1\frac{Q}{A}\pm\sqrt{gA\frac{dh(A)}{dA}} \qquad (8)$$

Ekvationsystemet (3) kallas strikt hyperboliskt om egenvärdena är reella och distinkta, som i detta fall. Egenvärdet eller karakteristiska riktningen λ_p är den hastighet en liten störning i A eller Q får i ledningen (eller x-t-planet). Minsta egenvärdet för alla tillstånd u ges lägsta index och kallas *1-familjen.* Egenvärdet är informationsbärare och varje karakteristisk riktning in i definitionsområdet $0\leq x\leq L$, dvs $\lambda_p>0$ på randen uppströms (x=0) respektive $\lambda_p<0$ på randen nedströms (x=L) ger upphov ett randvillkor. Dessa illustreras i figur 2 ovan. Till exempel genereras två villkor vid superkritisk hastighet på randen uppströms medan samma tillstånd på randen nedströms inte ger något. Vattensprång ger upphov till *interna villkor.*

Det är vanligt att beskriva strömningstillståndet med Froudes tal, här kvoten mellan flödes- och våghastigheten i en ledningssektion. Froudes tal innehåller samma information som de karakteristiska riktningarna

$$Fr=\frac{Q}{\sqrt{gA^3\frac{dh(A)}{dA}}} \qquad (8')$$

Vågfronter och vattensprång eller svaga lösningar med singulariteter

En linjär hyperbolisk PDE med kontinuerligt deriverbara begynnelsevärden och kontinuerliga randvillkor har entydig kontinuerlig lösning. Singulariteter i BV utbreder sig i de karakteristiska riktningarna. StVenants ekvationer är ett system av *icke-linjära* PDE. Detta innebär att "släta" BV och RV efter en tid kan generera *chockfronter* (diskontinuiteter eller singulariteter) i det

[22]Smoller Joel: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, N Y 1983, pp 306-320

inre området. Det omvända gäller också; att vissa diskontinuiteter i BV efter en tid ger "släta" lösningar, som solfjäder-vågor (*rarefaction waves*). Sådana singulariteter uppträder i sinnevärlden, t ex som vattensprång eller vandrande vågfronter. Vattensprång kan uppträda i eller strax nedströms ett sidoöverfall också under stationära förhållanden.

Styrningen av överfallet ger upphov till mer eller mindre utvecklade vågfronter som vandrar utefter ledningen. StVenants ekvationer gäller för små vertikala accelerationer och beskriver inte området närmast diskontinuiteten på ett riktigt sätt. Med vissa krav[23,24,25] på tillståndsfunktionen u och dess BV existerar en s k *svag lösning* till systemet av homogena, icke-linjära PDE, dvs utan källtermerna i högerledet (HL)

$$u_t+f_x(u)= 0 \qquad (3h)$$

även om u inte är kontinuerligt deriverbar överallt. Ett system som kan beskrivas med ekvation (3h) brukar kallas konservativt eftersom en ändring i tillståndet u i ett område enbart beror av fluxfunktionen på ränderna. Kraven på den svaga lösningen till systemet (3h) tillåter inte varje diskontinuitet i u, bara sådana för vilka chock- eller språngvillkoret gäller (Rankine-Hugoniot-villkoret från gasdynamiken)

$$s(u_l-u_r)=f(u_l) - f(u_r) \qquad (9)$$

med index $_l$ och $_r$ för diskontinuitetens vänstra respektive högra sida och där s är diskontinuitetens utbredningshastighet. Rankine-Hugoniots chockvillkor (R-H-villkoret) innebär att diskontinuiteter i icke-linjära konservativa system utbreder sig med en annan hastighet än den karakteristiska i ekvation (8). Är chocken svag dvs $\|u_l-u_r\| \equiv \varepsilon \ll 1 \Rightarrow$ den normerade vektorn $(u_l-u_r)/\varepsilon$ närmar sig en egenvektor till $f'(u_r)$ då $\varepsilon \to 0$ medan chockhastigheten $s \to$ tillhörande egenvärde. Ofta existerar flera svaga lösningar och ibland oändligt många. Den fysikaliskt riktiga lösningen pekas ut med s k entropivillkor.

---

[23] Lax Peter D: The formation and decay of shock waves, Amer. math. monthly, Vol 79, March, 1972, pp 227-241

[24] Hirsch Charles: Numerical Computation of Internal and External Flows Vol I, John Wileys, 1988, pp 88-92

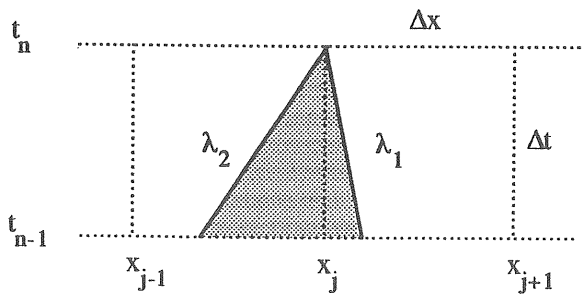
[25] Smoller Joel: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, N Y 1983, pp 239-264

Riemann-problemet och Godunovs metod

Vid diskretiseringen av konservativa systemekvationer, som (3h), delas rummet och tiden upp i steg om Δx respektive Δt, se figur 3. Rutnätet av celler förutsätts vara så utformat att informationen under ett tidsteg inte hinner längre än en celldelning i rummet. Detta brukar kallas *CFL-villkoret*

$$\left|\frac{\lambda_p \Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1 \qquad \text{för alla p}$$

(efter en artikel från 1928 av Courant, Friedrichs och Lewy) och är nödvändigt för att vårt finita-differens- eller finita volymsystem skall kunna konvergera mot den sanna lösningen för alla begynnelsevärden.



Figur 3. Diskretisering utifrån beroendeområdet

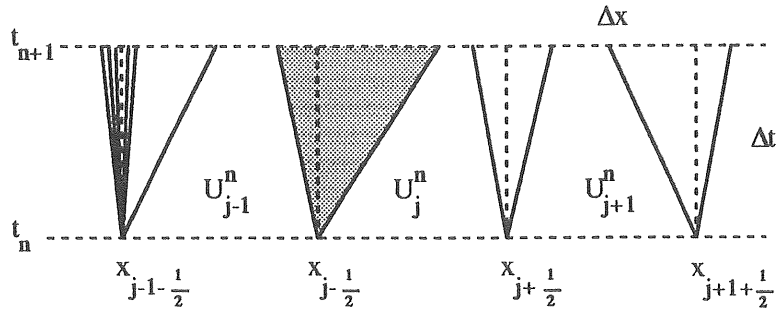
Figur 3 visar hur ett tillstånd i punkten x_j vid den diskreta tidpunkten t_n påverkas av *tillståndet vid föregående tidsteg, det skuggade beroendeområdet*, via de informationsbärande karakteristikorna. Mycket har skrivits om finit-differens eller finit-volym scheman för lösning av StVenants ekvationer utgående från beroendeområdet, se t ex Anders Sjöbergs avhandling [16].

År 1959 prövade ryssen Godunov att följa karakteristikorna framåt i tiden för att lösa en serie *Riemann-problem* (ett för varje cellgräns). Konservativa system som exempelvis ekvation (3h) med styckvis konstant begynnelsevärde

$$u(x,0)=\begin{cases} u_l & x<0 \\ u_r & x>0 \end{cases}$$

och med en diskontinuitet ($u_l \neq u_r$) kallas ibland Riemann-problem, efter ett gasdynamiskt chockproblem som Bernhard Riemann formulerade någon gång i mitten av förra århundradet.

Vid diskretiseringen av StVenants ekvationer på formen (3h) erhålls för varje tidsteg Δt en serie Riemann- eller begynnelsevärdes-problem där tillståndsfunktionen u är styckvis konstant. Låt U^n representera det diskreta numeriska tillståndet vid tiden t_n, se figur 4. Definiera en styckvis konstant funktion $\hat{u}^n(x, t_n)$ med värdet U^n_j för $|x-x_j|<\Delta x/2$ som begynnelsevärdet till en serie Riemann-problem.



Figur 4. Riemann-problemet (diskretisering utifrån influensområde)

Funktionen $\hat{u}^n(x, t)$ tillåts variera i intervallet $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Systemet av kontinuitetsekvationer (3h) kan lösas exakt på integralform

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \hat{u}^n(x,t_{n+1})dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \hat{u}^n(x,t_n)dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\hat{u}^n(x_{j-1/2},t))dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\hat{u}^n(x_{j+1/2},t))dt$$

Generera en ny approximativ lösning U^{n+1} genom medelvärdesbildning av den exakta lösningen vid tiden t_{n+1}

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \hat{u}^n(x,t_{n+1})dx \qquad (10)$$

och låt den numeriska fluxfunktionen $F(U^n_{j-1},U^n_j)$ vara

$$F(U^n_{j-1},U^n_j)=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\hat{u}(x_{j-1/2},t))dt$$

där $\hat{u}(x_{j-1/2}, t)$ är konstant i intervallet $t_n<t<t_{n+1}$ eftersom lösningarna till Riemann-problemet är konstanta, s k *similära lösningar* utefter alla strålar på formen

$$\frac{x-x_{j-1/2}}{t}=\text{konst}$$

förutsatt att CFL-villkoret ovan är uppfyllt. Därmed kan kontinuitetsekvationerna på integralformen ovan skrivas om som finita differenser

$$U_j^{n+1}=U_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F\left(U_j^n,U_{j+1}^n\right)-F\left(U_{j-1}^n,U_j^n\right)\right) \qquad (11)$$

Värdet utefter strålen $x_{j-1/2}$ beror enbart av de diskreta tillstånden U^n_{j-1} och U^n_j och betecknas $u^*(U^n_{j-1}, U^n_j)$. Interferens mellan vågfronter från angränsande Riemann-problem tillåts så länge denna sker inom cellen. Beräkningarna förenklas i detta fall av att tillståndet U_j^{n+1} är ett medelvärde, enligt ekvation (10). *Godunovs metod* bygger således på de karakteristiska riktningarna och har den fördelen att den hanterar chocker automatiskt. Nackdelen med den är att det exakta värdet på $u^*(U^n_{j-1}, U^n_j)$ måste itereras fram för icke-linjära system samtidigt som information ändå förloras i medelvärdesbildningen.

Roes approximativa Riemann-lösare

Genom olika approximationer kan iterationerna i Godunovs metod undvikas, istället måste man se upp med lösningar som är icke-konservativa eller i vissa fall bryter mot s k entropivillkor. Approximativa Riemann-lösare har utvecklats sedan slutet av 70-talet och nästan alla har tillämpats på Eulers

ekvationer för gaser.[26,27] Ett endimensionellt dammbrottsproblem med StVenants ekvationer för en oändligt bred, friktionsfri kanal (shallow water equations) har lösts med Roes approximation.[28]

Två artiklar jämför McCormacks och Lax-Friedrichs explicita differensschema respektive Lax-Wendroffs explicita och det implicita Preissmann-schemat med Godunovs metod på hydrauliska chockvågor.[29,30] I [29] avstår författarna från att ta med källtermer i HL av ekvation (3) medan [30] har med hydraulisk friktion i ett par fall. Båda artiklarna visar på fördelar med Godunovs metod. I [28], [29] och [30] har Roes approximation[31] använts som Riemann-lösare. I denna söks den exakta lösningen till ett Riemann-problem med enklare fluxfunktion än den ursprungliga i (3h)

$$\hat{u}_t + \hat{f}(u)_x = 0$$
$$\hat{u}(x,0) = \begin{cases} u_l & x<0 \\ u_r & x>0 \end{cases} \qquad (12)$$

med $\hat{u}(x,t)=w(x/t)$. För att den similära lösningen $w(x/t)$ skall vara konservativ i ekvation (3h) måste för den numeriska fluxfunktionen till f gälla, se [18] s 147-150

$$F(u_l,u_r) = \hat{f}(w(0)) + f(u_r) - \hat{f}(u_r) = \hat{f}(w(0)) + f(u_l) - \hat{f}(u_l) \qquad (13)$$

där w(0) bestäms på något sätt. Roe föreslår en *lokalt linjariserad* fluxfunktion med Jacobianen $\hat{A}(u_l,u_r)$ i ekvation (12)

---

[26] van Leer Bram: On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe, SIAM J of Sci. Stat. Comput. 5, No 1, 1984, pp 1-25

[27] Harten A, Lax P D, van Leer B: On upstream Differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, SIAM Review 25, No 1, 1983, pp 35-61

[28] Glaister Paul: Approximate Riemann solutions of the shallow water equations, J of Hydr. Res., Vol 26, No3, 1988

[29] Alcrudo F, Garcia-Navarro P, Saviron J-M: Flux difference splitting for 1D open channel flow equations, Int J for Num Methods in Fluids, Vol 14, 1992, pp 1009-1018

[30] Baines M J, Maffio A, Di Filippo A: Unsteady 1-D flows with steep waves in plant channels: the use of Roe's upwind TVD difference scheme, Adv. in Water Res., Vol 15, 1992, pp 89-94

[31] Roe Phillip L: The use of the Riemann problem i finite difference schemes, Lecture Notes in Physics, Vol 141, Springer-Verlag, New York 1981, pp 354-559.

$$\hat{f}(u) = \hat{A}(u_l, u_r)\, u \qquad (14)$$

Projiceras diskontinuiteten $u_r - u_l$ på *egenvektorerna* r_p till $\hat{A}(u_l, u_r)$ erhålls (m=2)

$$u_r - u_l = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p r_p$$

Den similära lösningen w(0) till (12) med fluxfunktionen (14) blir därmed

$$w(0) = u_l + \sum_{\lambda_p<0} \alpha_p r_p = u_r - \sum_{\lambda_p>0} \alpha_p r_p \qquad (15)$$

Används (15) tillsammans med (14) får fluxfunktionen (13) formen

$$F(u_r, u_r) = \hat{A}(u_l, u_r) w(0) + f(u_r) - \hat{A}(u_l, u_r) u_r = f(u_r) - \hat{A}(u_l, u_r) \sum_{\lambda_p>0} \alpha_p r_p \qquad (16)$$

som kan utnyttjas i Godunovs metod. Återstår att finna en lämplig form på Jacobianen $\hat{A}(u_l, u_r)$. Roe föreslår att den skall ha tre egenskaper

(i) $\hat{A}(u_l, u_r)(u_r - u_l) = f(u_r) - f(u_l)$

(ii) $\hat{A}(u_l, u_r)$ skall vara diagonaliserbar med reella, distinkta egenvärden

(iii) $\hat{A}(u_l, u_r) \rightarrow f'(u)$ då $u_l, u_r \rightarrow u$

Villkoret (i) garanterar att ekvation (13) gäller och att Rankine-Hugoniots chockvillkor uppfylls, (ii) innebär att det linjariserade Riemann-problemet blir hyperboliskt och lösbart och (iii) medför att lösningen uppför sig väl vid släta begynnelsevärden ($u_l \approx u_r$).

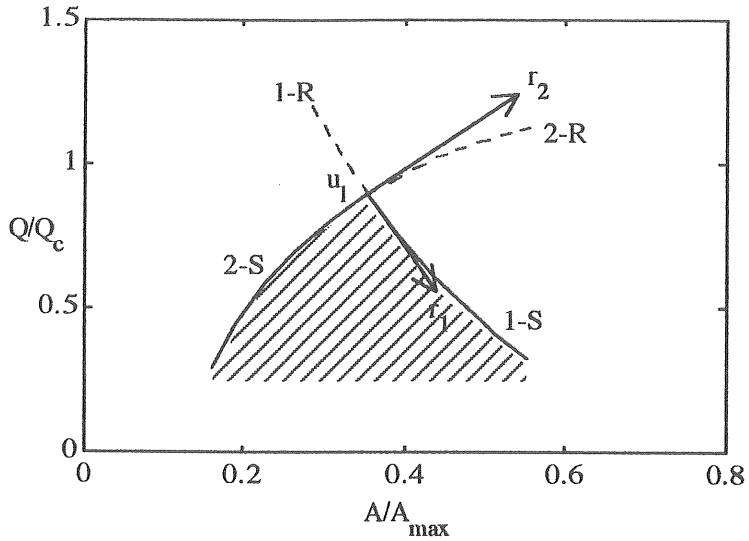
Ett problem med Roes approximation är att den inte skiljer på stabila chocker och instabila solfjäder-vågor (rarefaction waves) vilket kan resultera i felaktiga lösningar vid nästan stationära förhållanden ($|s|<<1$). Lösningen uppfyller nämligen inte entropivillkoren under dessa omständigheter. Detta kan emellertid åtgärdas, se t ex [26] avsnitt 5 eller [18] pp 150-157.

Entropivillkor och chocker

Ibland existerar *flera svaga lösningar* till den olinjära, homogena PDE (3h) som alla uppfyller R-H-villkoret. Den fysikaliskt rimliga bland dessa kan bestämmas med s k entropivillkor. Vattenpartiklar som passerar en stabil vågfront eller chockvåg förlorar mekanisk energi. När en chock väl har utvecklats kan man inte längre bestämma när och hur chocken uppstått genom att följa den bakåt i tiden. Information har förlorats i chocken, entropin har ökat.

Om man i ett tillstånds- eller fasplan förbinder ett tänkt fixt tillstånd u_l till vänster om en diskontinuitet med de tillstånd u_r till höger, som uppfyller R-H-villkoret (9), erhålls s k *Hugoniot locus*.

Eftersom chockhastigheten s tillsammans med tillståndet u_r ger tre obekanta i R-H-villkorets två ekvationer blir orten (locus) för möjliga tillstånd u_r en kurva med en parameter. Egenvektorn r_p i varje punkt på kurvan tangerar denna. De två egenvektorerna i StVenants ekvationer bildar var sin en-parameter familj för varje tillstånd u i fasplanet. Figur 5 nedan visar ett exempel för en ledning med cirkulär sektion. Tillståndsvariablerna, våta arean A och flödet Q, är normerade med arean för fylld ledning A_{max} respektive kritiskt flöde Q_c. Punkterna på kurvdelen 1-S bildar en stabil s k 1-chock med u_l medan delen 1-R av samma Hugoniot locus ger en instabil 1-chock eller 1-solfjäder-vågor. P s s erhålls den andra kurvan 2-S för stabila 2-chocker och 2-R för 2-solfjäder-vågor som Hugoniot locus till egenvektorn r_2. Om u_r ligger utanför de två kurvorna kommer diskontinuiteten eller vattensprånget att delas upp på vardera familjen. I det skuggade området i figur 5 blir båda delarna stabila.



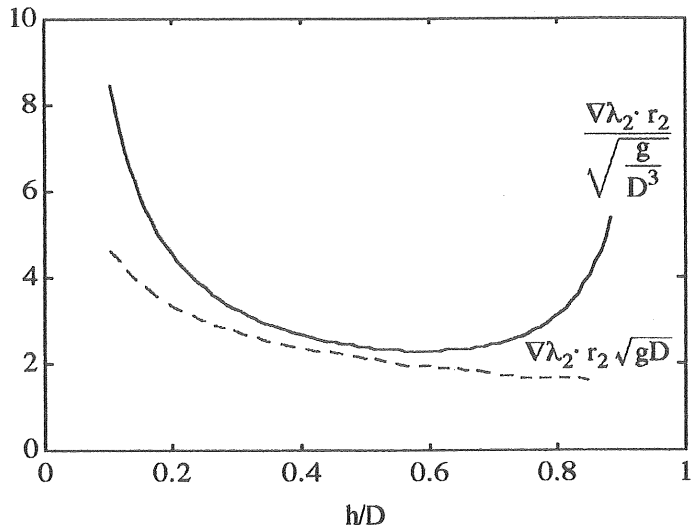
Figur 5. Hugoniot locus för StVenants ekvationer i en ledning med cirkulär sektion

En p-familj sägs vara *äkta olinjär* om det gäller för skalärprodukten

$\nabla\lambda_p \cdot r_p \neq 0$ för alla u

där $\nabla\lambda_p$ är gradienten av den karakteristiska hastigheten $\lambda_p(u)$ och $r_p(u)$ dennas egenvektor, se [18] p 74. Äkta olinjaritet medför att den karakteristiska hastigheten i p-familjen är *strängt monoton* utefter Hugoniot locus. Figur 6 illustrerar skalärprodukten $\nabla\lambda_p \cdot r_p$ för 2-familjen i StVenants ekvationer i en ledning med cirkulär sektion (heldragen linje) och i en oändligt bred kanal (shallow water equations). Båda är normerade med avseende på ledningens diameter D. Kurvorna visar att äkta olinjaritet råder vid alla rimliga ($0<A<A_{max}$) tillstånd u och att 2-familjen är strängt monotont växande.

Motsvarande kurvor för 1-familjen får man genom att spegla 2-familjen i den horisontella axeln h/D (relativt vattendjup). Karakteristiska hastigheten hos 1-familjen är strängt monotont avtagande både i ledningen med cirkulär sektion och i den oändligt breda kanalen.



Figur 6. Normerad skalärprodukt $\nabla\lambda_2 \cdot r_2$ för StVenants ekvationer i en ledning med cirkulär sektion och diametern D (heldragen linje) respektive en oändligt bred kanal med relativa vattendjupet (h/D) som oberoende variabel

I StVenants ekvationer för en ledning med cirkulärt tvärsnitt är båda p-familjerna äkta olinjära. Då kan en diskontinuitet i tillståndet u vara sammansatt av stabila chocker eller solfjäder-vågor från en av p-familjerna eller båda, se [18] avsnitt 7 och 8 eller [22] avsnitt 17.

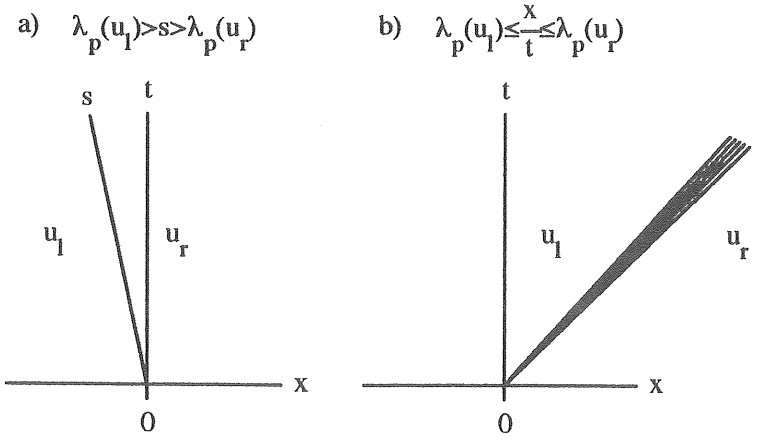
En diskontinuitet har utbredningshastigheten s, bestämd av R-H-villkoret (9), och är en tillåten stabil lösning om *Lax' chock- eller entropivillkor* är uppfyllt, jämför [22] s 259-261

$$\lambda_p(u_r) < s < \lambda_{p+1}(u_r)$$
$$\lambda_{p-1}(u_l) < s < \lambda_p(u_l)$$

För äkta olinjära p-familjer kan Lax' chockvillkor tecknas

$$\lambda_p(u_l) > s > \lambda_p(u_r)$$

dvs p-familjens karakteristikor på ömse sidor om diskontinuiteten måste gå in mot denna.



Figur 7. a) Stabil p-chock med utbredningshastigheten s, b) p-solfjäder-vågor (p-rarefaction waves)

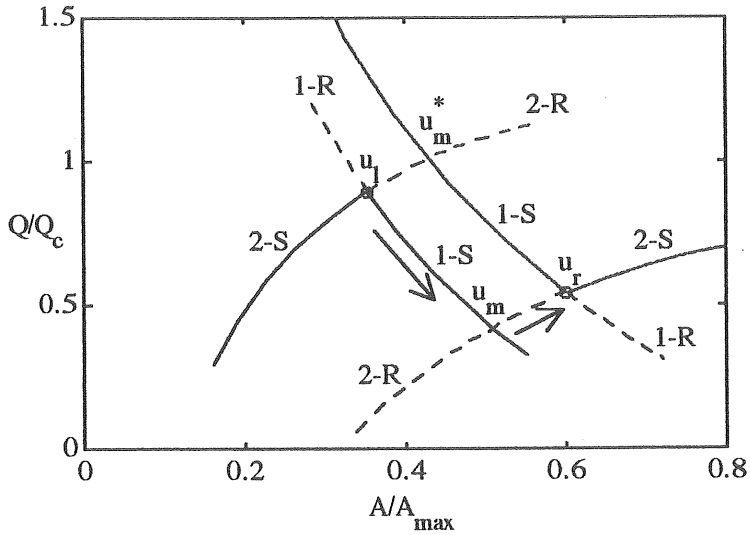
Figur 7 a) visar hur p-chocken utbreder sig utefter karakteristikan x/t=s i x-t-planet och skiljer vänstertillståndet u_l från högertillståndet u_r. Om $\lambda_p(u_l)<\lambda_p(u_r)$ över diskontinuiteten växer den karakteristiska hastigheten x/t kontinuerligt mellan $\lambda_p(u_l)$ och $\lambda_p(u_r)$ i en äkta olinjär p-familj och diskontinuiteten löses med tiden upp i divergerande p-solfjäder-vågor som i figur 7 b).

De kurvor i figur 5 ovan som streckats och betecknats med 1-R respektive 2-R följer Hugoniot locus till u_l men är *linjeintegraler* till systemet (p=1, 2) av differentialekvationer med tillståndet w(ξ) där

$$w'(\xi)=\frac{r_p(w(\xi))}{\nabla\lambda_p(w(\xi))\cdot r_p(w(\xi))} \qquad \lambda_p(u_l)\le\xi\le\lambda_p(u_r)$$

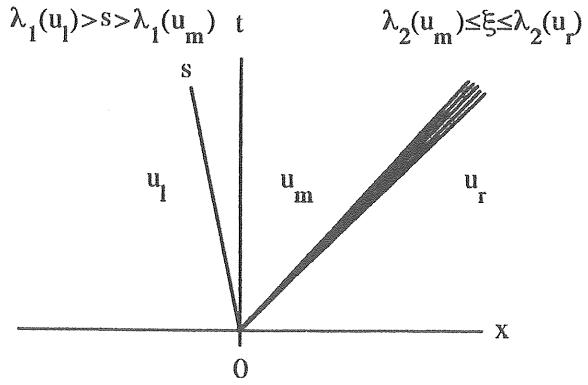
med $w(\lambda_p(u_l))=u_l$ och $w(\lambda_p(u_r))=u_r$. Linjeintegralen 1-R och Hugoniot locus 1-S har samma tangent i u_l. Figur 8 visar en tänkt diskontinuitet med vänstertillståndet u_l. Genom u_l går p-familjernas locus p s s i figur 5 ovan. I högertillståndet u_r har 1-familjens delkurvor 1-R och 1-S bytt plats jämfört med vänstertillståndet u_l med hänsyn till entropivillkoret, samma sak gäller

för 2-familjen. Om diskontinuitetens båda tillstånd ligger på samma Hugoniot locus (p-S) eller linjeintegral (p-R) uppträder en stabil p-chock respektive p-solfjäder-vågor. I annat fall, som i exemplet i figur 8, består diskontinuiteten av ett bidrag från vardera p-familjen. En stabil 1-chock (1-S) från vänstertillståndet u_l till ett *mellantillstånd* u_m på 2-familjens linjeintegral (2-R) från högertillståndet u_r förenar u_l och u_r i fasplanet. Diskontinuiteten i detta exempel är sammansatt av en 1-chock och en del med 2-solfjäder-vågor. I alla tre tillstånden u_l, u_m och u_r råder subkritisk strömning ($Q/Q_c<1$).



Figur 8. Fasplan för en tänkt diskontinuitet (u_l,u_r) i StVenants ekvationer för en ledning med cirkulärt tvärsnitt.

Fasplanets diskontinuitet i figur 8 kan beskrivas med sina karakteristiska riktningar i x-t-planet, jämför figur 9. Den karakteristiska hastigheten hos 1-familjen är i mellantillståndet u_m per definition lägre än 2-familjens och måste enligt Lax' entropivillkor vara mindre än chockhastigheten s. Detta betyder att orienteringen i rummet mellan de tre tillstånden är riktig och överensstämmer med den i figur 9. Det alternativa mellantillståndet u_m^* i figur 8 ger ingen entydig lösning.



Figur 9. Karakteristiska hastigheterna för exemplet i figur 8

Källtermer i högerledet

All teori för Riemann-problemet har utvecklats för konservativa system t ex med PDE (3h), dvs system där ändringen av tillståndet u i en cell enbart påverkas av fluxfunktionen vid cellgränserna. Källtermerna i ekvation (3) medför att tillståndet u även påverkas av friktion och lateralflöde i beräkningscellens inre. Det går att återföra StVenants ekvationer med källtermer (3) till ett konservativt Riemann-problem mha ett omformulerat begynnelsevillkor[32]. Det styckvis konstanta BV i Godunovs metod ersätts med ett *styckvis stationärt BV* sådant att

$$f(u)_x = g(u) + b(u)q \qquad x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \tag{17}$$

med bivillkoret att

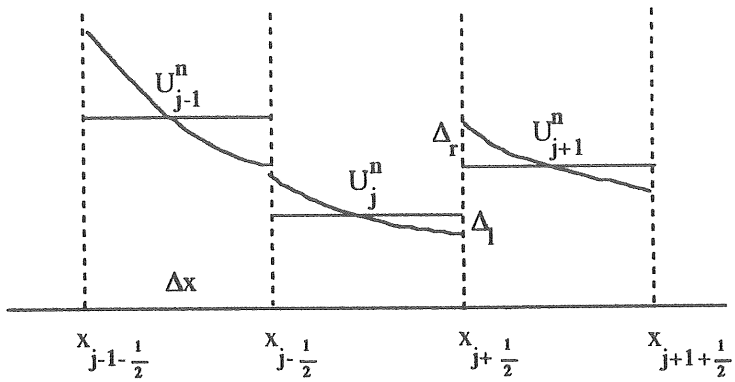
$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\Delta x/2}}^{x_{j+\Delta x/2}} u(x,t_n)dx = U_j^n$$

där U_j^n är det diskretiserade begynnelsetillståndet för cellen, ,ämför ekvation (10).

---

[32] Liu T P: Quasilinear Hyperbolic Systems, Comm in Math Phys, Vol 68, 1979, pp 141-172

Med BV enligt ekvation (17) kommer tillståndet i en cell enbart att påverkas av vågor som kommer från intilliggande celler. Ekvation (3) med det nya stationära BV blir konservativt och återfört till klassen av Riemann-problem. Man har visat att lösningen till StVenants ekvationer på formen (3) kan erhållas genom superposition av den från de äkta olinjära p-familjerna och den från det stationära BV om källtermerna är snälla nog, se [32]

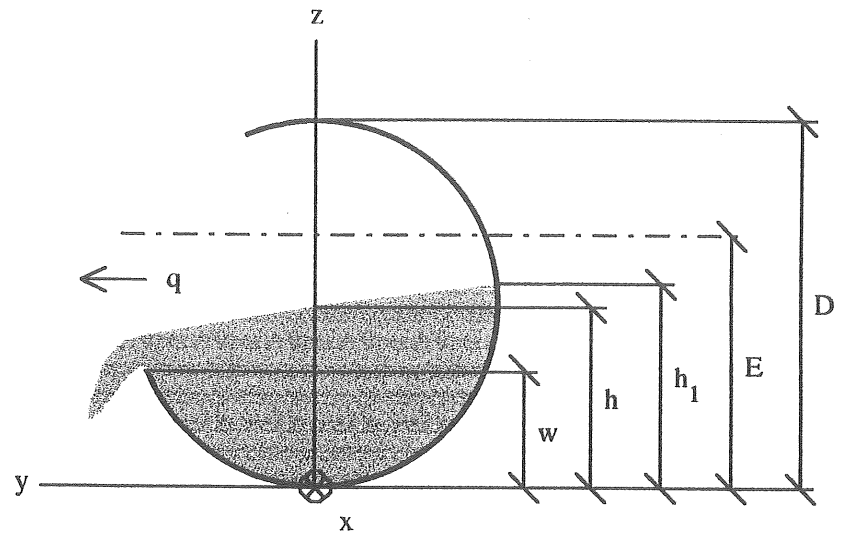


Figur 10. Stationärt BV med varierande tillstånd i cellen

Figur 10 illustrerar det stationära begynnelsevillkoret (17). Den krökta linjen i varje cell beskriver tillståndets u variation i cellen, medan den horisontella linjen visar cellens medelvärde U. Diskontinuiteten vid varje cellgräns är sammansatt av tre delar. En från det vanliga Riemann-problemet utan källtermer, dvs skillnaden mellan exempelvis U_j och U_{j+1}, bidraget Δ_r från det stationära BV höger om cellgränsen (j,j+1) samt Δ_l från cellgränsens vänstra sida. I en första approximation kan källtermerna betraktas som styckvis konstanta under tiden Δt. Metoden *hanterar inte* utan vidare chocker som är nästan stationära dvs med hastigheter $|s|<<1$, se [26] och [32].

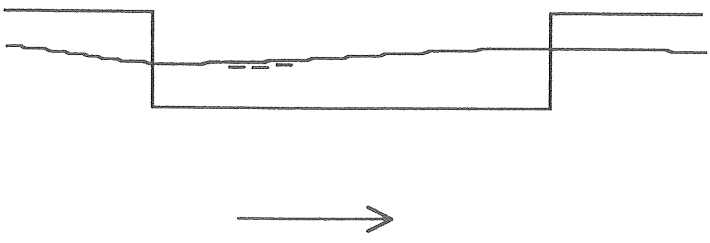
Härmed lämnar texten den allmänna teorin för icke-stationär strömning för att återuppta ämnet i det fjärde kapitlet, om reglerobjektet. Däremellan ligger betoningen på stationär strömning.

Sidoöverfall



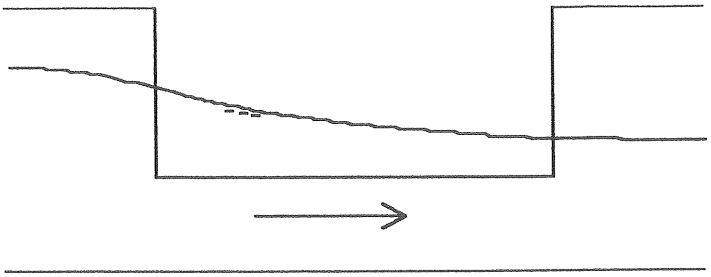
Figur 11. En sektion i överfallet med använda beteckningar

Under stationära förhållanden kan tre olika vattenprofiler[33] uppträda längs sidoöverfallet i en horisontell ledning, se figurerna 12-14 nedan. Situationen med superkritisk strömning uppströms ett vattenspång och subkritisk nedströms, kan betraktas som en kombination av de två andra. Vattenspångets båda sidor binds ihop med R-H-villkoret (9) ovan. Den *laterala avbördningen* i ett sidoöverfall är besvärlig att beskriva eftersom flödets hastighet kommer att variera till storlek och riktning längs överfallets krön.

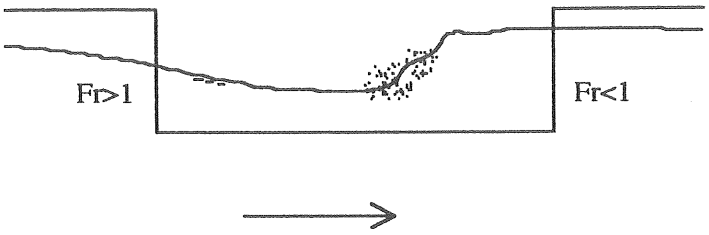


Figur 12. Subkritisk strömning (Fr<1) i hela överfallet

[33] Chow Ven T: Open-channel hydraulics, McGraw-Hill, 1959, pp 340



Figur 13. Superkritisk strömning (Fr>1) i hela överfallet



Figur 14. Vattensprång i överfallet

En bra genomgång[34] på svenska av teorin för bräddavlopp, med historik, finns i ett examensarbete från 1979. Den är också den enda referens jag funnit som behandlar ett vattensprång. En avhandling[35] beskriver utförligt ett sidoöverfall med rektangulär sektion. Två artiklar[36,37] behandlar ett rektangulärt sidoöverfall med cirkulär sektion. Emellertid har jag inte funnit någon matematisk modellering av icke-stationär strömning i sidoöverfall. Polenis formel[38], ekvation (18), anger avbördningen q per längdenhet vid vanligt *transversellt* och stationärt flöde i ett skarpkantat, rektangulärt överfall där c är en avbördningskoefficient, E specifika energin och w överfallskrönets höjd över ledningens botten

[34]Olsson Peter, Svensson Maria: Bräddavloppshydraulik, Vattenbyggnad, KTH, 1979

[35]Balmforth D J: Flow over side weirs, PhD Thesis, University of Sheffield, 1978

[36]Uyumaz Ali, Muslu Yilmaz: Flow over side weirs in circular channels, J of Hydraulic Eng., Vol 111, No 1, 1985, pp 144-159

[37]Uyumaz Ali, Smith Roger H: Design procedure för flow over side weirs, J of Irrigation and Drainage Eng., Vol 117, No 1, 1991, pp 79-90

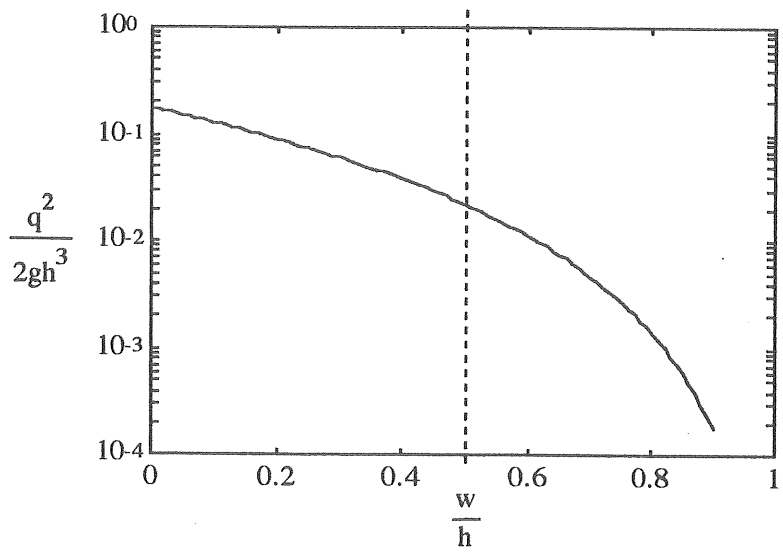
[38]Häggström Steffen: Hydraulik för V-teknologer, CTH, Göteborg 1988, pp 316

$$q = c\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,(E-w)^{\frac{3}{2}} \qquad (18)$$

Problemet består i att finna ett lämpligt sätt att bestämma specifika energin och avbördningskoefficienten. Vattnets hastighet när det lämnar överfallet bildar en vinkel ≤90° med ledningens längdaxel (x-axeln). Om den laterala hastighetshöjden i en sektion är mycket mindre än vattendjupet, relation (19), kan den laterala specifika energin approximeras[39] med djupet i sektionen. Ekvation (18) skrivs då istället enligt (20)

$$\frac{q^2}{2gh^3} << 1 \qquad (19)$$

$$q = c\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,(h-w)^{\frac{3}{2}} \qquad (20)$$



Figur 15. Relativa laterala hastighetshöjden som funktion av relativa överfallshöjden, med q beräknat enligt ekvation (20)

[39]Balmforth D J: Flow over side weirs, PhD Thesis, University of Sheffield, 1978, equ (2.17)

Med laterala flödet q beräknat enligt (20) kan vänsterledet i relationen (19) bestämmas approximativt. Figur 15 visar att den laterala hastighetshöjden mitt i sektionen är mindre än ett par procent av djupet om w/h ≥0.5

Som figurerna 12-14 ovan antyder, kommer djupet och därmed avbördningen q per längdenhet att variera utefter sidoöverfallet. Det är därför väsentligt att kunna beräkna vattenprofilen i överfallet. Sambanden för stationär strömning i sidoöverfallet, ekvation (21), erhålls med $u_t \equiv 0$ insatt i ekvation (3)

$$u_x = f'(u)^{-1}[g(u) + b] \tag{21}$$

Två kopplade differentialekvationer (22) approximerar det endimensionella flödet längs ett horisontellt sidoöverfall. Randvillkoren bestäms, som i det icke-stationära fallet, av de karakteristiska riktningarna. Vid subkritisk strömning i överfallet är Fr<1. Är förlusterna försumbara och $(2\beta_1 - \beta_2) > 0$ blir $A_x > 0$ enligt ekvation (22) och nivån stiger mot överfallets nedströmsände. Det överensstämmer med vattenprofilen i figur 12 ovan. Samma resonemang för den superkritiska strömningen förklarar vattenprofilens utseende i figur 13, ($Fr > 1 \Rightarrow A_x < 0$). Av detta och ekvation (20) kan man dra slutsatsen att mer vatten avbördas vid subkritisk strömning i överfallet än vid superkritisk, för givet djup h_u i överfallets inlopp uppströms och läge w på dess krön.

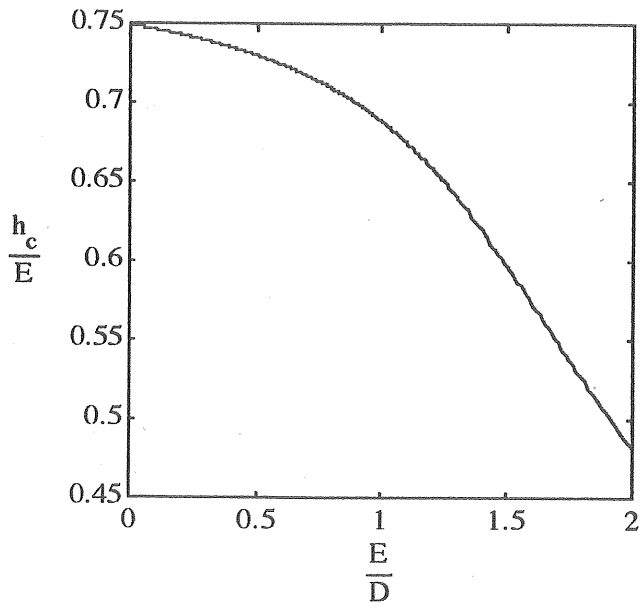
$$A_x = \frac{1}{gA\frac{dh}{dA}(1 - \beta_1 Fr^2)}\left((2\beta_1 - \beta_2)\frac{Q}{A}q - gAS_f\right)$$

$$Q_x = \begin{cases} -q & \text{i överfallet} \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases} \tag{22}$$

Under stationära förhållanden finns en lägsta nivå på sidoöverfallets krön vid vilken subkritisk strömning kan upprätthållas för ett givet flöde i överfallet. Gränsen går vid kritisk strömning i inloppet till sidoöverfallet. Råder kritisk strömning i inloppet kan den specifika energin tecknas som ekvation (23) visar. Normeras kritiska vattendjupet h_c med avseende på E erhålls ekvation (24)

$$E = h_c + \frac{A}{2}\frac{dh_c}{dA} \qquad (23)$$

$$\frac{h_c}{E} = \frac{1}{1 + \frac{A\frac{dh_c}{dA}}{2h_c}} \qquad (24)$$



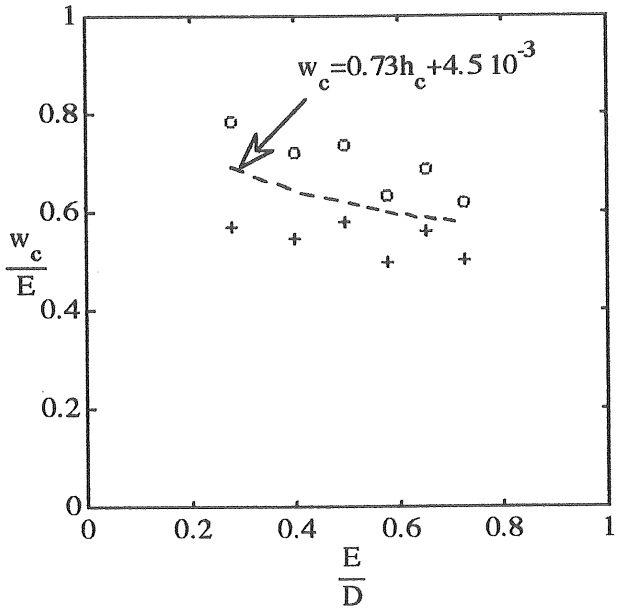
Figur 16. Kritiska vattendjupet som funktion av specifika energin i en ledning med cirkulär sektion

I en cirkulär ledning varierar det normerade kritiska vattendjupet i ekvation (24) med specifika energin E. Figur 16 återger ekvationen för $0 < E < 2D$, och ligger energilinjen under ledningens hjässa är $0.68E < h_c < 0.75E$. Strömlinjerna är mer krökta i övergången mellan ledning och sidoöverfall än vad StVenants ekvationer anger. Det verkliga energiminimet inträffar därför vid ett mindre djup h_u. Om man jämför med fri utströmning i en kanal med rektangulär sektion råder istället kritiskt djup i en sektion på avståndet $3h_c$-$4h_c$ från utloppet[40] och

$$h_u \approx \frac{0.7E}{1.4} = \frac{E}{2} \qquad (25)$$

Approximatioen (25) stämmer inte så bra i detta fall med delvis fri utströmning i ett överfall och med *cirkulär ledningssektion.* Det framgår också av mätresultaten i figuren 17 nedan. I stället erhålls en linjär regression (26) på punkterna som tillsammans med resultatet i figur 16 ger en skattning av den *kritiska överfallshöjden.*

$$h_u \geq w_c = 0.73h_c + 4.5\,10^{-3} \qquad (26)$$



Figur 17. Kritisk överfallshöjd vid cirkulär sektion bestämd ur mätningar. Superkritiskt tillstånd markerat med (+) och subkritiskt med (o)

Antag att det laterala utflödet q per längdenhet vid stationär strömning är en funktion av åtta karakteristiska parametrar; g, ρ, μ, ytspänningen σ, vattendjupet h i sektionen, överfallskrönets höjd w över botten, ledningens bredd i vattenytan samt överfallets längd L dvs c = c(g, ρ, μ, σ, h, w, dA/dh, L).

[40]Marchi Enrico: On free overfall, J of Hydraulic Research, Vol 31, No 6, 1993

Med exempelvis g, ρ och h som oberoende variabler, visar en dimensionsanalys att avbördningskoefficienten $c=c(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ beror av fem dimensionslösa variabler.

$$X_1 = \frac{h-w}{w}$$

$$X_2 = \frac{\rho g(h-w)^2}{\sigma} \qquad \cong We^2$$

$$X_3 = \frac{\rho(h-w)\sqrt{g(h-w)}}{\mu} \qquad \cong Re$$

$$X_4 = h\frac{dh}{dA}$$

$$X_5 = L\frac{dh}{dA}$$

X_2 motsvarar kvadraten på Webers tal (We) och skalas med $(\lambda_L)^2$ vid en transformation under Froudes modellregel och X_3 är ett Reynolds tal (Re) för överfallets laterala flöde. Om strömningen i sidoöverfallet förutsätts *hydrauliskt rå och turbulent* kan inverkan av variationer i X_3 försummas i en första ordningens approximation.

Balmforth[41] använder i sin avhandling en empirisk formel (27) för avbördningskoefficienten c. Den bestämdes ursprungligen av Theodor Rehbock i slutet av 1920-talet, för transversellt flöde i rektangulära skarpkantade överfall, och anses gälla för $(h-w)/w<10$

$$c=(0.602+0.083\frac{h-w}{w})(1+\frac{0.0012}{h-w})^{\frac{3}{2}} \qquad (27)$$

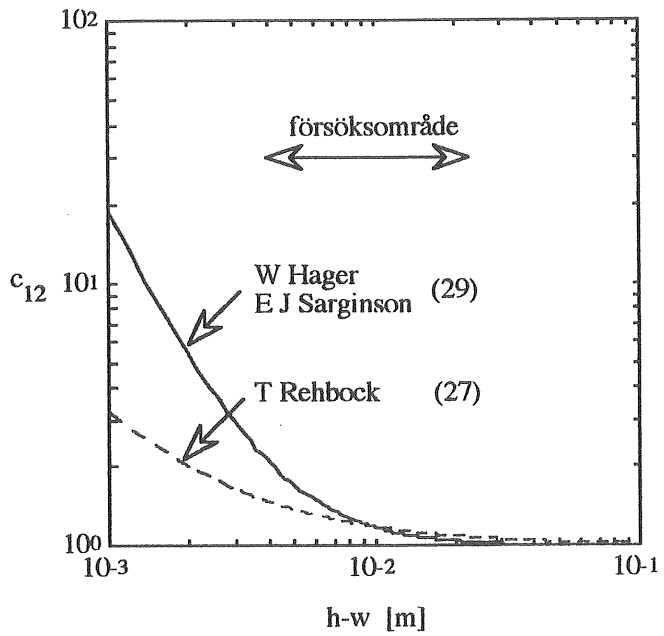
eller

$$c = c_{11}c_{12} \qquad (28)$$

[41] Balmforth D J: Flow over side weirs, PhD Thesis, University of Sheffield, 1978, section 6.1

Avbördningskoefficienten c i formel (27) består i högerledet av två faktorer, där X_1 ingår i den första. Den andra faktorn, motsvarande c_{12} i (28), har specifika laterala energin som nämnare i en term. Faktorn c_{12} kommer att växa obegränsat då överfallets höjd närmar sig vattendjupet och uttrycker inverkan av ytspänning vid låg specifik lateral energi. I artiklar av Hager[42] och Sarginson[43] ges ett alternativ till korrektionsfaktorn c_{12} i Rehbocks formel (27). Det stämmer bättre med dimensionsanalysens variabel X_2 ovan där Webers tal ingår. Det alternativa uttrycket anges i ekvation (29) nedan.

$$c_{12}=1+\frac{2.33}{We^2} \qquad (29)$$



Figur 18. Korrektionsfaktor c_{12} för inverkan av ytspänning

[42]Hager Willi H: Flow over side weirs in circular channels., discussions by Hager., av. referensen i not 10

[43]Sarginson E J: Scale effects in model tests on weirs, Symposium on scale effects in modelling hydraulic structures, IAHR, Esslingen am Neckar, September 1984

Mina modellförsök görs i en skala så liten att ytspänningen kommer att påverka avbördningen i sidoöverfallet, (h-w≤0.03 m). Figur 18 visar korrektionfaktorn c_{12} enligt de båda alternativen (27) respektive (29) för vatten vid 15°C.[44]

Balmforth, Sarginson och Hager har genomfört mätningarna på större modeller än jag, med mindre inverkan av ytspänning. De två förstnämnda har redovisat försök på sidoöverfall i icke-prismatiska kanaler med avsmalnande, rektangulära sektioner, medan jag undersökt ett sidoöverfall i en ledning med cirkulär, prismatisk sektion. Fördelen med avsmalnande ledningar är att vattendjupet kan hållas nästan konstant längs hela överfallet vid subkritisk strömning. Avbördningskoefficienten blir därmed bättre definierad vid mätningarna.

Om överfallet är "nästan skarpkantat", dvs med ett krön vars djup t i lateral led inte är försumbart, kan faktorn c_{11} i ekvation (27) att bytas ut mot[45]

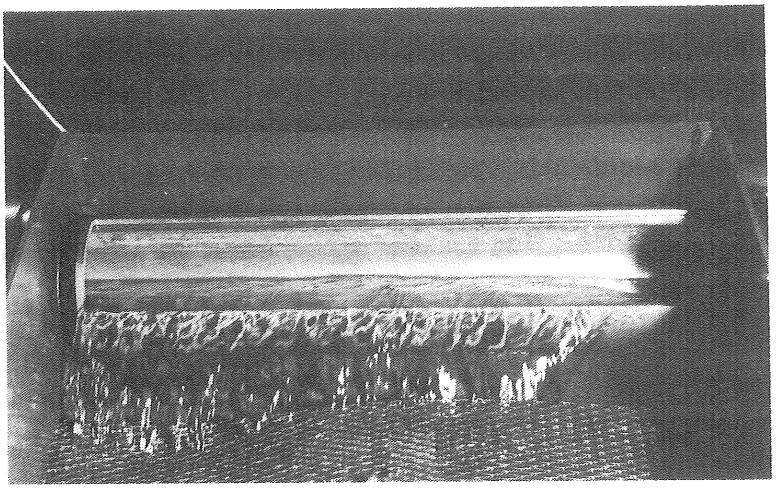
$$c_{11}= 0.5 + 0.11\frac{h-w}{t} \qquad 0.4< \frac{h-w}{t} <1.5 \qquad (30)$$

Innan simuleringen av strömningen i sidoöverfallet beskrivs närmare, presenteras den använda laboratoriemodellen i nästa avsnitt.

---

[44]Häggström Steffen: Hydraulik för V-teknologer, CTH, Göteborg 1988, pp 327

[45]Swamee Prabata K: Generalized Rectangular weir equations, J of Hydraulic Eng., Vol 114, No 8, 1988, pp 945-949



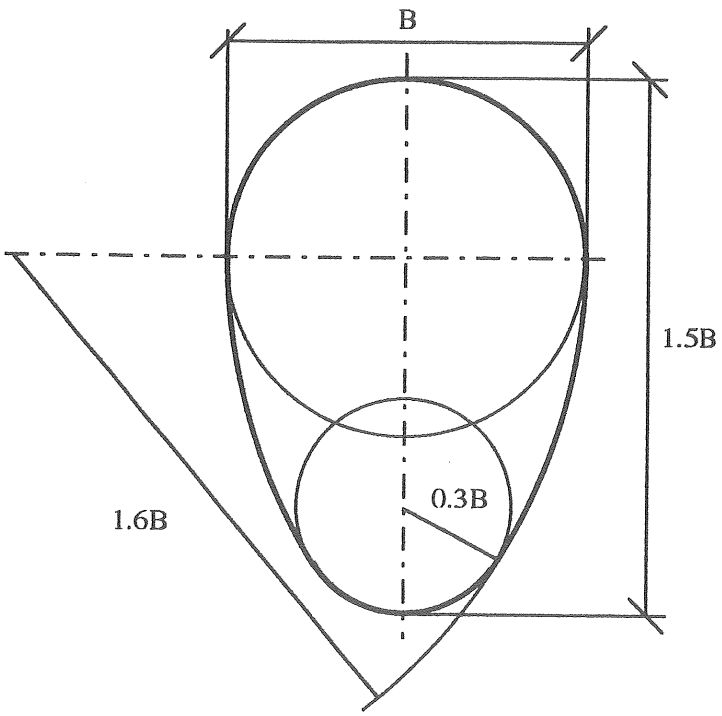
Laboratoriemodell

En diskussion om similaritet och val av modellskala inleder avsnittet som också beskriver apparatuppställningen vid försöken, givarna och deras kalibrering. Sist redovisas en skattning av olika mätfel.

Allmänt

Modellförsök blir ofta tidskrävande och kostsamma men återger verkliga förlopp och kan tjäna som *referenser* för datorsimulerade händelser. Om det visar sig att datormodellens resultat överensstämmer med laboratorieförsökens är det tillåtet att direkt simulera i prototypskalan.

Med laboratoriemodellen skapas förutsättningar att simulera och studera förlopp som liknar dem som kan uppträda vid dumpning av dagvatten, från huvudledningen i det centrala Stockholm, ned i "Ormen-magasinet" som rymmer 30 000 m^3.



Figur 19. Klassisk sektionsform på gamla, murade avloppsledningar

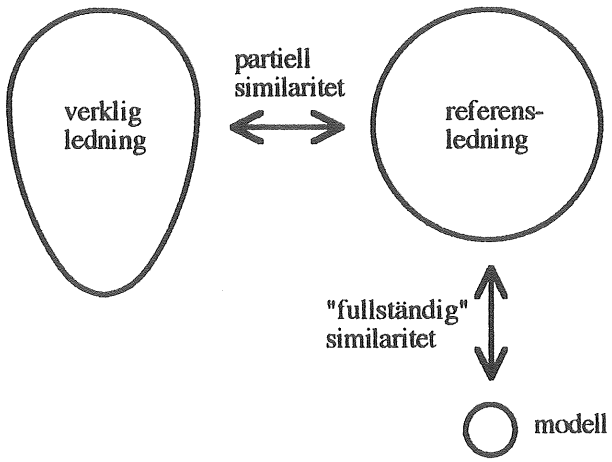
Huvudledningen, modellförsökens "prototyp", är drygt 2 km lång och dess största bredd på första kilometern är 0.9 m, på den andra 1.35 m. Lutningen varierar mellan 0 och 45‰. Dess egen magasineringskapacitet uppskattas till 3 000 m^3. Den gamla, murade ledningen i stadskärnan har äggform för att

minska sedimenteringen vid små flöden. Sektionen är uppbyggd av tre cirkelsegment med ungefärliga radier 0.3B, 0.5B och 1.6B där B är ledningens största bredd, se figur 19.

Modellskala

Det är orimligt att modellera verkliga ledningssystem i detalj, med krökar, lutningar och påstick. I en förenklad modell blir grundläggande fenomen tydligare på bekostnad av detaljer. Kvalitativa resultat överförs säkrare än kvantitativa från modellen till det verkliga ledningssystemet. Överfallstyrning genererar vågor som kommer att uppträda likartat i modellen och i "prototypen".

Resultat från modellförsöken kan relativt enkelt överföras till fullskala med Froudes modellregel om geometrisk likformighet eller similaritet råder. I detta fall *saknas fullständig similaritet* eftersom modellen dels har förenklats och dels har annan sektionsform än den verkliga huvudledningen.



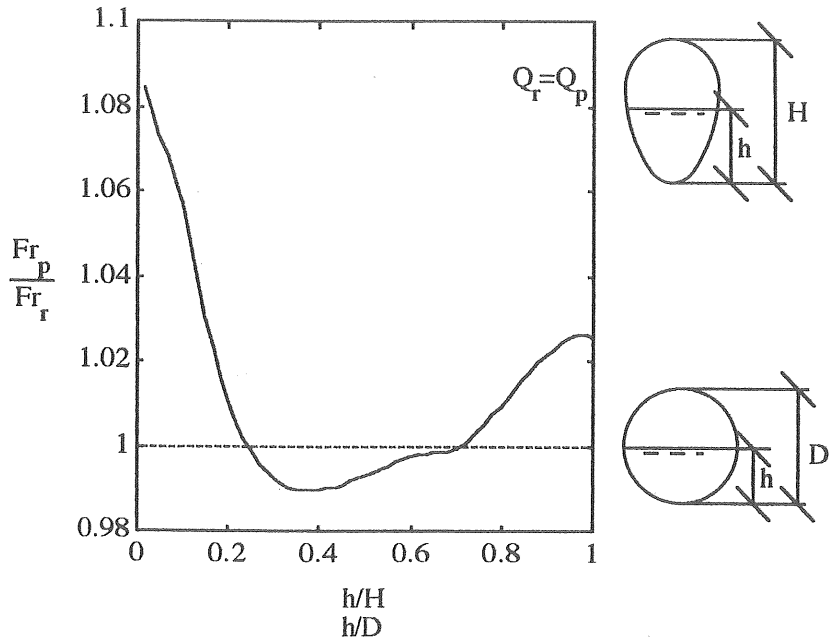
Figur 20. Modellskala och formskillnad

Vad som återstår är att undersöka hur väl den cirkulära ledningen svarar mot en äggformad. Vilken storlek på *"referens"-ledningen* med cirkulär sektion ger hydrauliskt viktiga parametrar som liknar "prototypens"?

Froudes tal karakteriserar strömningen i ledningar med fri vattenyta och betraktas här som en väsentlig storhet. Vilken diameter D på den tänkta referensledningen ger ett Froudes tal som överensstämmer med "prototypens", då t ex flöde respektive relativt vattendjup är lika i ledningarna? Index $_r$

betecknar referensledningen med cirkelformad sektion, $_p$ prototypen med "äggform", Q flödet, A arean och h_m hydrauliska medeldjupet.

$$Fr=\frac{Q}{A_r\sqrt{gh_{mr}}}=\frac{Q}{A_p\sqrt{gh_{mp}}} \quad \Rightarrow \quad A_r\sqrt{h_{mr}}=A_p\sqrt{h_{mp}} \qquad (31)$$



Figur 21. Kvoten mellan Froudes tal i "prototypen" och den "bästa" referensledningen (D=1.202B)

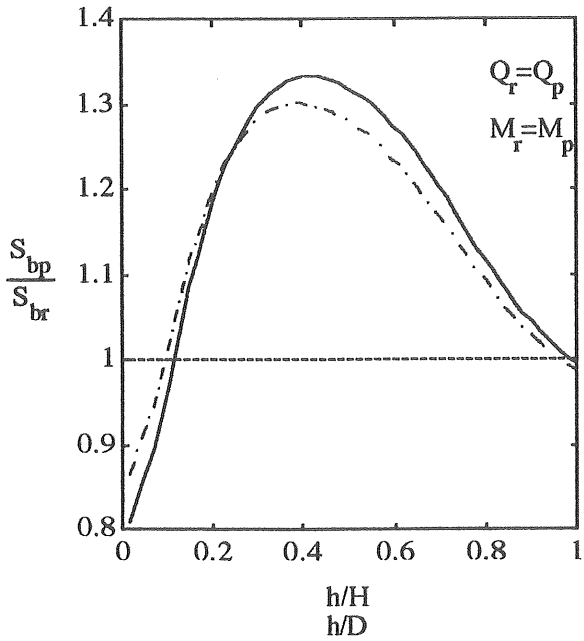
Bäst överensstämmelse ger referensdiametern D=1.202B med en beräknad avvikelse i Froudes tal ≤1% för 0.2≤h/H≤0.8, ett intressant djupintervall för styrning. I figur 21 jämförs Froudes tal för de två ledningarna. Den tänkta referensledningen till en prototypledning med bredden B=1.35 m får diametern D=1.62 m. Detta ger längdskalan λ_L=15.4 (≈1.62/0.105) mellan "prototypen" och modellen med *"bäst" överensstämmelse i Froudes tal* vid samma relativa vattendjup och om flödet skalas enligt Froudes modellregel.

Exempel på framräknade skalfaktorer för ett par viktiga hydrauliska storheter visas i Tabell 1 nedan. Betydelsefulla parametrar är även energigradient och vattenhastighet. Antag t ex att Mannings tal är lika i referens-

ledning och "prototyp". Förhållandet mellan energigradientens storlek vid naturligt vattendjup för samma flöde i "prototypen" och i den valda referensledningen beskrivs av den heldragna kurvan i figur 22.

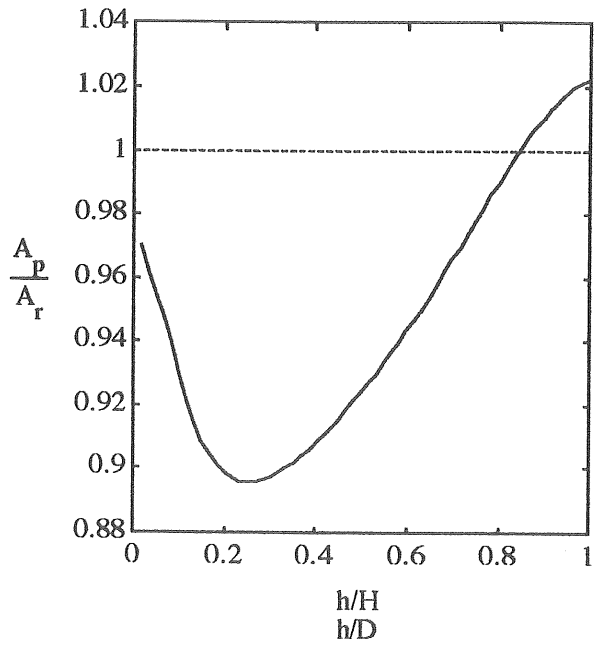
Tabell 1. Exempel på beräknade skalfaktorer

storhet	skalfaktor	
	modell	"prototyp"
längd	1	$\lambda_L=15.4$
volym	1	$\lambda_L^3=3670$
tid	1	$\lambda_L^{0.5}=3.93$
Mannings tal	1	$\lambda_L^{-\frac{1}{6}}=0.634$



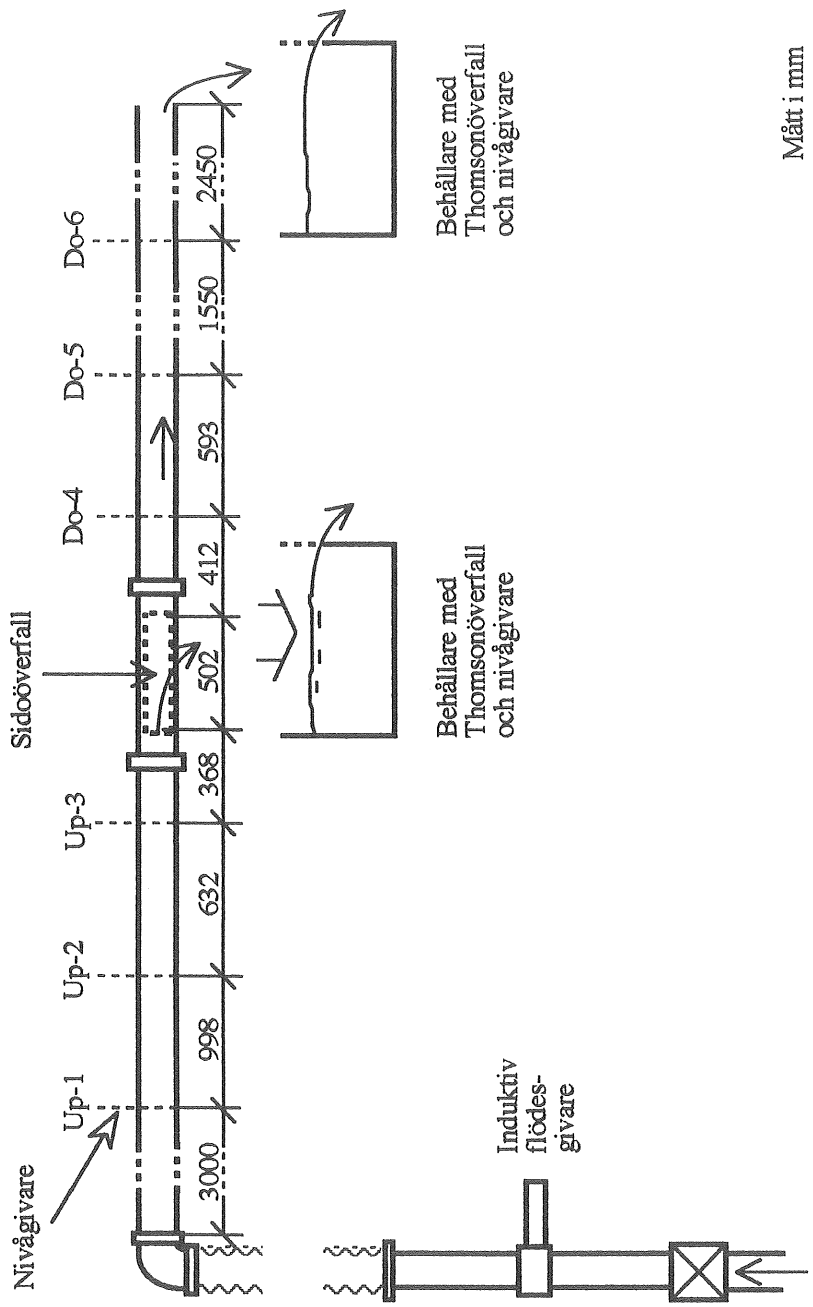
Figur 22. "Prototypens" och referensledningens energigradient (D=1.202B)

Den streckprickade kurvan i figur 22 visar relationen mellan energigradienterna beräknad enligt Darcy-Weisbach med konstant friktionskoefficient rå strömning. Skillnaden i energigradient kan tolkas så att Mannings tal för referensledningen bör vara 5-15% mindre än "prototypens" för att ge samma energigradient i intervallet $0.2 \leq h/H \leq 0.8$. Figur 23 visar hur kvoten mellan våta areorna förhåller sig som funktion av relativt djup i respektive ledning. Vid lika flöde blir skillnaden i vattenhastighet ≤10%. En slutsats är att avvikelsen i beräknade förluster mellan den valda referensledningen och prototypen är jämförbar med osäkerheten i prototypens friktionsförluster.



Figur 23. Kvoten mellan våta arean i "prototypen" och referensledningen (D=1.202B)

Vill man simulera enligt Froudes modellregel i laboratoriet blir modellens diameter liten, av utrymmesskäl. En kilometer prototypledning med bredden 1.35 m motsvarar 65 m modelledning med diametern 0.105 m i skala 15.4:1. Görs modellen mindre kan krafterna från ytspänningen bli så stora att Froudes modellregel inte transformerar de hydrauliska förloppen korrekt mellan modell och "prototyp". Detta gäller i synnerhet små avbördningar i överfallet.



Figur 24. Modelledning

Modelledning

För studiet av överfallets lokala inverkan har en kortare plastledning byggts upp i vattenlaboratoriet. Ledningen, med inre diameter 0.105 m och längd 11 m, är genomsiktig och horisontell i dessa försök. Mitt på sitter ett 0.5 m långt sidoöverfall med cirkulär sektion och samma innerdiameter som ledningen. Överfallet kan rotera runt sin längdaxel. Modelledningen matas från en högreservoar via laboratoriets interna, fasta ledningssystem, en ventil och en slang som alltid går fylld. Inflödet mäts i slangen. Vågbildningen i övergången mellan slangen och modellen dämpas med ett mekaniskt filter. En undersökning av inströmningsregionen i delfyllda cirkulära ledningar[46] visar att påverkan från övergången i ledningens inlopp är liten bortom ett avstånd ca 25 ggr kritiska vattendjupet ($<25D\approx2.5$ m). Nivågivare och överfall är placerade längre bort. Givaren (Up-3) närmast uppströms överfallet fungerar som nivåreferens, se figur 24. Avbördningen från överfallet leds ner i en behållare, med bottenytan ≈ 0.5 m^2, som i sin tur avbördas via ett V-format sk Thomsonöverfall med nivågivare. En likadan behållare fångar upp vattnet från det fria utloppet i modelledningens nedströmsände.

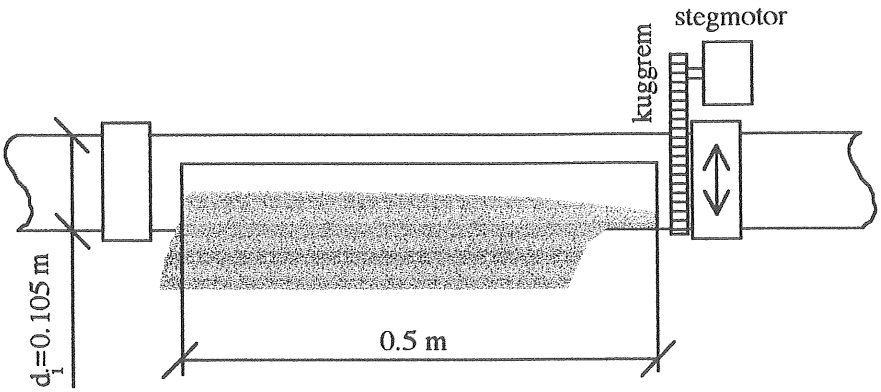
Det hydrauliska tillståndet i en given ledningssektion kan enligt teoriavsnittet karakteriseras med två tillståndsvariabler t ex våta arean A och flödet Q. Det transienta förloppet bestäms av begynnelsetillstånd och tidsberoende randvillkor. Vid datorsimulering kan ränderna förläggas till sektioner med nivågivare och uppmätta nivåer kan jämföras med beräknade.

Ställdon

Det kullagrade, vridbara överfallet manövreras ett ställdon bestående av en kuggremsdriven stegmotor. Den rektangulära öppningens höjd motsvarar 1/4 omkrets. Sidoöverfallet har konstruerats för mycket *snabba rörelser*. Vid pulsfrekvensen 800 Hz på stegmotorn accelereras överfallet från noll till maximal hastighet på en puls och överfallskanten vrids från ledningens botten till hjässan på en halv sekund. Minsta vinkeländring är 0.23° per puls vilket motsvarar en största nivåändring på 0. 24 cm. Kommunikationen mellan dator och stegmotor sker via digitala I/O-portar som överför information om antal steg, steglängd, -riktning och -frekvens.

---

[46]Rajaratnam N, Katopodis C, Sabur M A: Entrance region of circular pipes flowing partly full. J. of Hydr. Res., Vol 29, 1991, pp 685-698



Figur 25. Vridbart överfall med ställdon

Den högfrekvent switchade matningen av stegmotorn genererar störningar som varit svåra att dämpa i mätsystemet. Även med optokoppel mellan dator och stegmotorstyrning uppträder en lågfrekvent störning i mätsignalerna, en s k samplad alias från motorns högfrekventa drivspänning.

Givare

Varje nivågivare består av två smala (d=0.1 cm), rostfria och parallella (1.0 cm avstånd) elektroder som registrerar resistansen i vattnet mellan dem. Efter signalbehandling i en bryggförstärkare med separat inställbar förstärkning och offset, erhålls spänningen 1 V/cm vattendjup. Mätsignalen är linjär för vattendjup >1.5 cm.

I denna modellskala kommer alla mätelektroder i ledningen att dämma något (≤0.03 cm) varför inga extra temperaturkompenserande elektroder används. Nivåsignalen blir därmed *temperaturkänslig* och förutsätter en stabil vattentemperatur under mätningen (≤0.1 V/°C ~ 0.1 cm/°C).

Inflödet registreras med en *magnetisk-induktiv flödesmätare* i den fyllda slangen som matar modelledningen. I flödesmätaren bearbetas den inducerade spänningen från joner som strömmar med vattnet genom ett magnetiskt växelfält. Vid låga flödeshastigheter ökar den relativa störnivån. Enligt tillverkaren är onoggrannheten <1% av fullt utslag, utom för små flöden. Känsligheten är programmerbar och i försöken ställd så att flödesmätarens strömutgång ger maximala 20 mA vid 5 l/s. Signalen till datorn skall vara 1 V per l/s efter signalanpassning och extra lågpassfilter.

Att registrera det momentana flöde som lämnar ledningen i sidoöverfallet är besvärligt. Under arbetets gång har en teknik utvecklats och prövats, med viss framgång, där vattnet som strömmar över sidoöverfallet leds ner i en behållare. Vågbildningen i denna dämpas något av ett mekaniskt filter på ytan. Volymändringen i behållaren uppskattas med hjälp av nivågivaren i skvallerröret nära behållarens Thomsonöverfall. Beteckna behållarens fria vattenyta A_s och dennas nivå h_s över Thomsonöverfallets underkant. Låt C_d vara en avbördningskoefficient och Q_s tillflödet från sidoöverfallet. En förenklad analys av kontinuitetsvillkoret för behållarens vattenvolym ger

$$Q_s(t-\tau)=A_s\frac{dh_s(t)}{dt}+\frac{8}{15}\sqrt{2g}\,C_d h_s(t)^{\frac{5}{2}} \qquad (32)$$

Är tidsfördröjningen τ från överfall till nivågivaren, nivån $h_s(t)$ och dess tidsderivata känd kan överfallsflödet Q_s estimeras. Tiden τ bestäms av vattnets vertikala utgångshastighet i överfallet, vägen ned till behållarens vattenyta och vågornas utbredning mot skvallerrörets nivågivare.

Differentialekvationen (32) är icke-linjär och realiseras med *analog elektronik* som omvandlar nivåinformationen till en flödessignal. Efter denna skall spänningssignalen motsvara 1 V per l/s vid nivåkänsligheten 1 V/cm. Derivatan i ekvation (32) realiseras med deriveringstidskonstanten $10A_s$=5.4 för den aktuella behållaren med A_s=0.54 m^2.

$$Q'_s=10^3A_s\frac{d}{dt}\left(\frac{h'_s}{100}\right)+10^3\frac{8}{15}\sqrt{2g}\,C_d\left(\frac{h'_s}{100}\right)^{\frac{5}{2}}=$$

$$10A_s\frac{dh'_s}{dt}+10^{-2}\frac{8}{15}\sqrt{2g}\,C_d(h'_s)^{\frac{5}{2}} \qquad (33)$$

Omvandlade storheter i (33) markeras med primtecken. Deriverarens förstärkning ökar med frekvensen. Den är därför kompletterad med en brytpunkt i överföringsfunktionen, vid 0.5 Hz, så att förstärkningen blir konstant för höga frekvenser. Deriverare är något man bör hålla sig borta från, men i det här fallet löser den ett mätproblem. Den olinjära termen i (33) realiseras

med hjälp av en IC-krets AD538 från Analog Devices. Kretsen har signalsambandet

$$V_{out}=V_y(\frac{V_z}{V_x})^M \qquad (34)$$

där index $_x$, $_y$ och $_z$ representerar insignaler och M är inställbar mellan 1/5 och 5. Identifieras den olinjära termen i (33) med högerledet i (34) för V_x=10 V och V_z=h'$_s$ erhålls V_y=7.47C_d och M=5/2. Vid flöden Q≤5 l/s gäller för Thomsonöverfall[47] att 0.59≤ C_d ≤0.61. Med C_d=0.595. blir känsligheten teoretiskt 1 V per l/s i överfallet om den konstanta spänningen V_y justeras till 4.45 V.

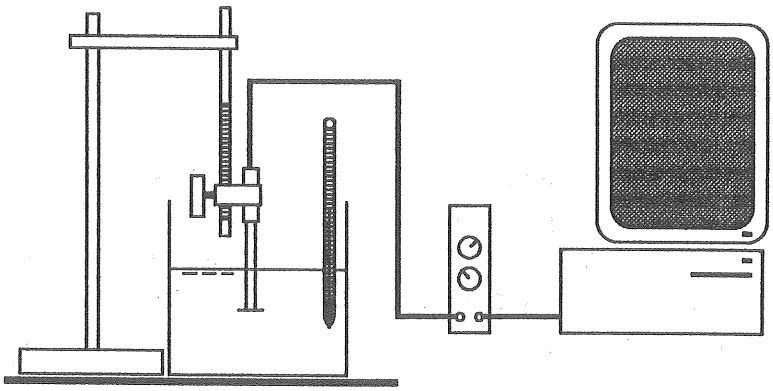
Tester visar att metoden fungerar bra med värden på M och V_y som avviker något från de ovan beräknade, se avsnittet nedan om kalibrering. Samma teknik används för att registrera flödet i modelledningens utlopp. Härefter kallas metoden enligt ekvation (33) också för "mätning av transient flöde" och elektroniken "transientflödesmätare".

Datasamling

Mätningarna administreras med hjälp av ett kraftfullt programmeringsverktyg LabView och ett signalomvandlingskort, båda från National Instruments. Programspråket är objektorienterat med ett grafiskt gränssnitt kallat "virtuellt instrument". Det är relativt lätt att bygga egna "instrument". Ett stort bibliotek med analys- och drivrutiner ingår. Signalomvandlingskortet har bl a åtta differentiella ingångar med individuellt programmerbar känslighet. Kortets A/D-del har omvandlingstiden 25 µs vid 12-bitars upplösning. Samplingsintervallet har valts till 0.1 s, med 25 µs mellan kanalerna. På signalomvandlingskortet sitter också 2x4 digitala I/O-portar samt fyra pulsräknare. Fyra I/O-portar och en pulsräknare används för styrningen av stegmotorn och en räknare startar varje mätcykel.

[47]Herschy Reginald W: Streamflow measurements, Elsvier Ltd, NY 1985, pp 307-312

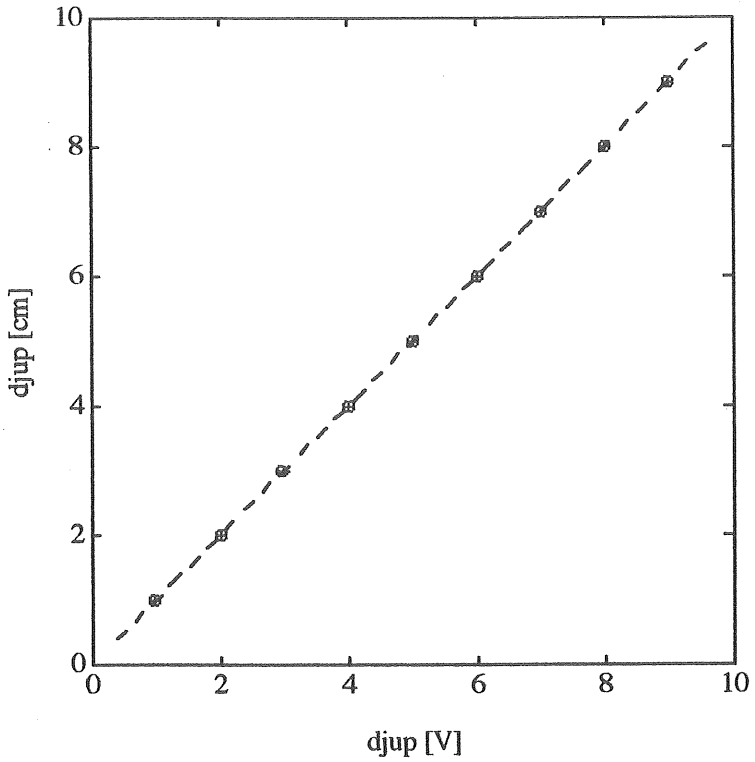
Kalibrering



Figur 26. Kalibrering av nivågivare

Mycken tid måste läggas på kalibreringar av olika slag pga att viktiga fysikaliska parametrar eller instrumentförstärkare inte är tillräckligt stabila. Alla nivågivarna är temperaturkänsliga och vattnet i laboratoriets magasin, högreservoar och matarledning kan ha olika temperatur. Den brukar stabiliseras efter ca 2 timmars flöde genom modelledningen. Beroende på årstiden kan temperaturen variera från vecka till vecka. Inför första mätserien i en omgång kalibreras alla nivågivare på ledningen för känsligheten 1.0 V/cm och med ledningssektionens botten som nollreferens. Under försöken avläses temperaturen varje timme. I mätningar under stationära förhållanden *medelvärdesbildas* de datorsamplade signalerna under minst 30 s.

Kalibreringen av ledningens nivågivare görs utanför ledningen så att påverkan från vandrande, svagt dämpade vågor undviks. En mindre behållare fylls med vatten från modelledningen och nivågivaren sänks till 2.0 cm djup i behållaren. Det kan vara besvärligt att avläsa vid vilken nivå trådarnas gemensamma bottenplatta skär vattenytan. Bryggförstärkarens offset justeras så att utsignalen blir noll. Givarens sänks ytterligare och bryggförstärkningen justeras till datorn läser det antal volt som sänkningen motsvarar i cm. Därefter ställs givaren åter på 2.0 cm djup och offset justeras så att spänningen blir 2.0 V.

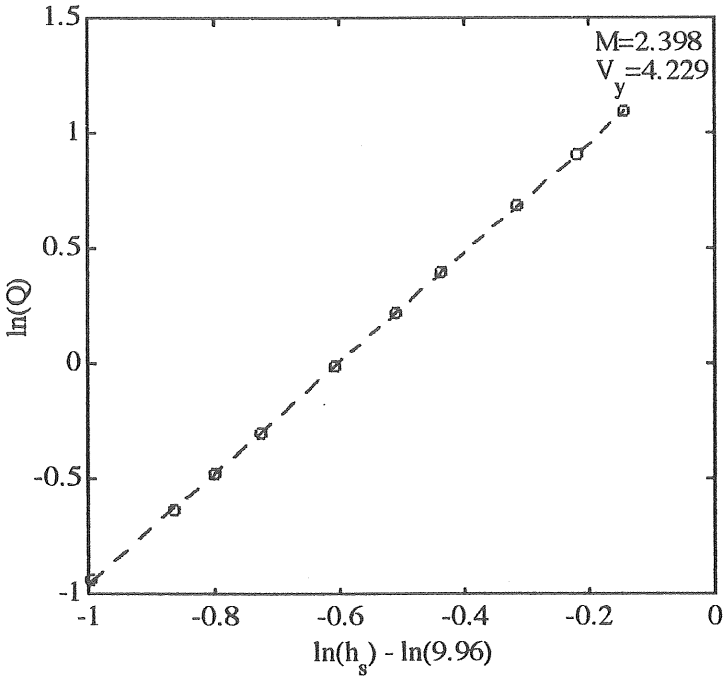


Figur 27. Test av nivågivaren, efter kalibrering

Figur 27 visar resultatet, efter kalibrering, från en inläsning av växande djup från 2 cm till 9 cm (o) och därefter avtagande (+). En liten systematisk skillnad erhålls där mätvärdena för avtagande djup ligger 0.017 V över den för växande, pga ytspänning. I samma mätserie är max avvikelse från räta linjen <0.028 cm och felet i förstärkningen 1cm/V är ≤ 2‰ med en offset ≤-0.004 cm.

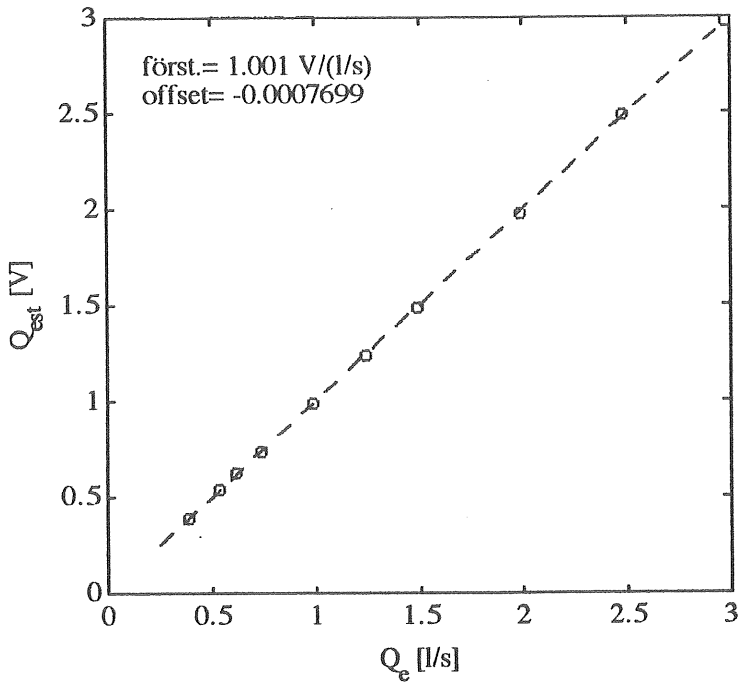
Nivågivarna i de två behållarnas skvallerrör kalibreras för känsligheten 1 V/cm och med noll-referensen i den spetsiga botten på respektive Thomsonöverfall. Behållaren töms till en nivå någon cm under spetsen. Signalen från nivågivaren nollställs med offset. Därefter sänks givaren ett antal cm och förstärkningen ställs så att datorn läser en spänning lika med sänkningen i cm. Med ett verktyg, format efter Thomsonöverfallet och försett med en spetsmätare, bestäms avståndet mellan botten i V-formen och vattenytan. Detta ställs därefter in som spännings-offset i bryggförstärkaren.

Parametrarna i *den olinjära analoga kretsen*, V_y och M i ekvation (34), beräknas med den magnetiskt-induktiva flödesmätaren som referens.



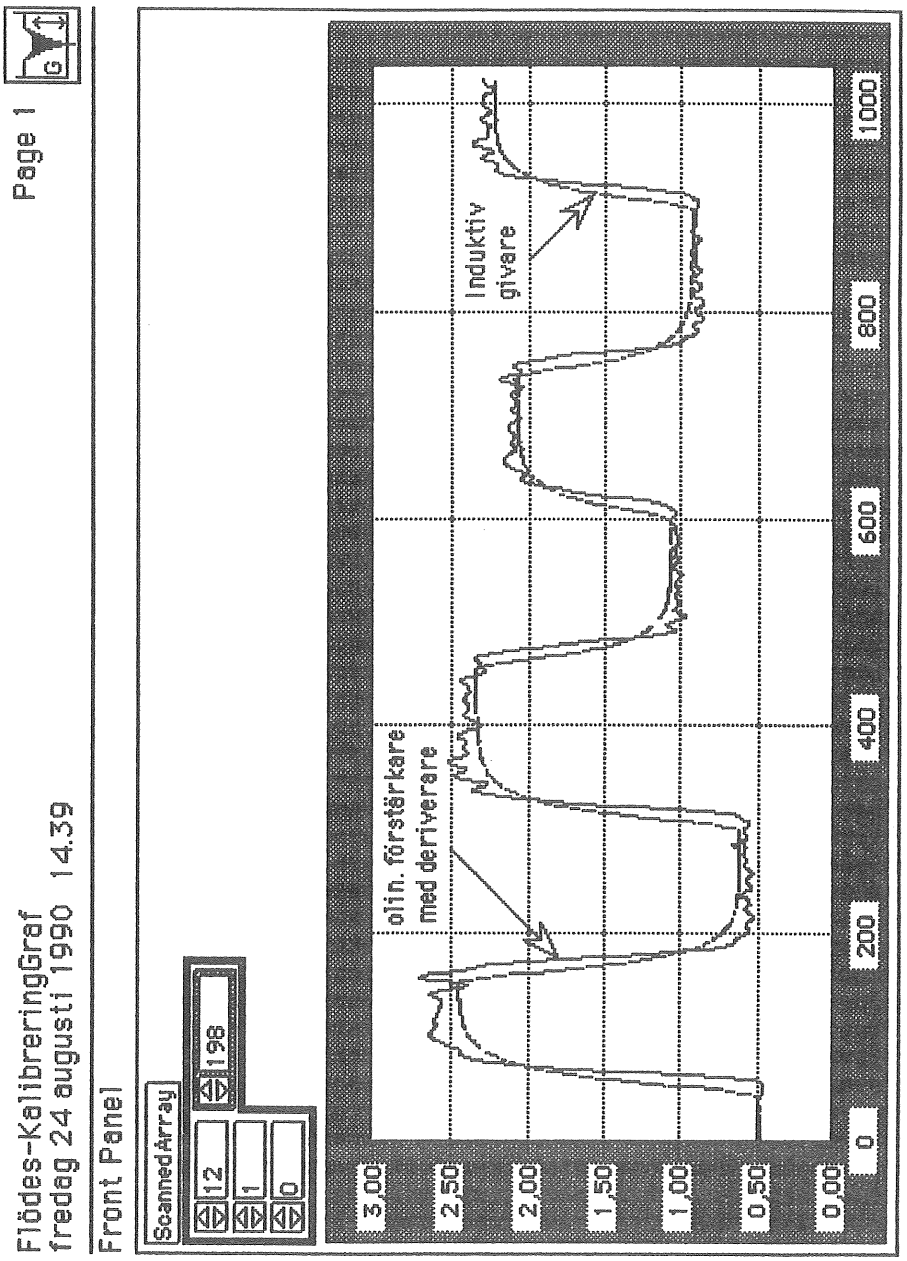
Figur 28. Bestämning av V_y och M ur relationen Q-h_s

Vid stationärt flöde registreras nivån h_s i Thomsonöverfallet tillsammans med referensflödet. Logaritmerade mätvärden visas i figur 28. Utan tillräcklig dämpning av vattnet utvecklas stationära virvlar där det störtar ner i behållaren. Ibland uppstår virvlarna nära skvallerröret och stör nivån där. Spänningen V_x i ekvation (34) är referensspänningen 9.96 V. Med regression beräknas M=2.398 respektive V_y=4.229. Värdena avviker något från de teoretiska ovan. Figur 29 jämför transientflödesmätarens utsignal Q_{est} från nivågivaren i Thomsonöverfallet med den induktiva flödesmätarens signal Q_e vid stationär strömning.

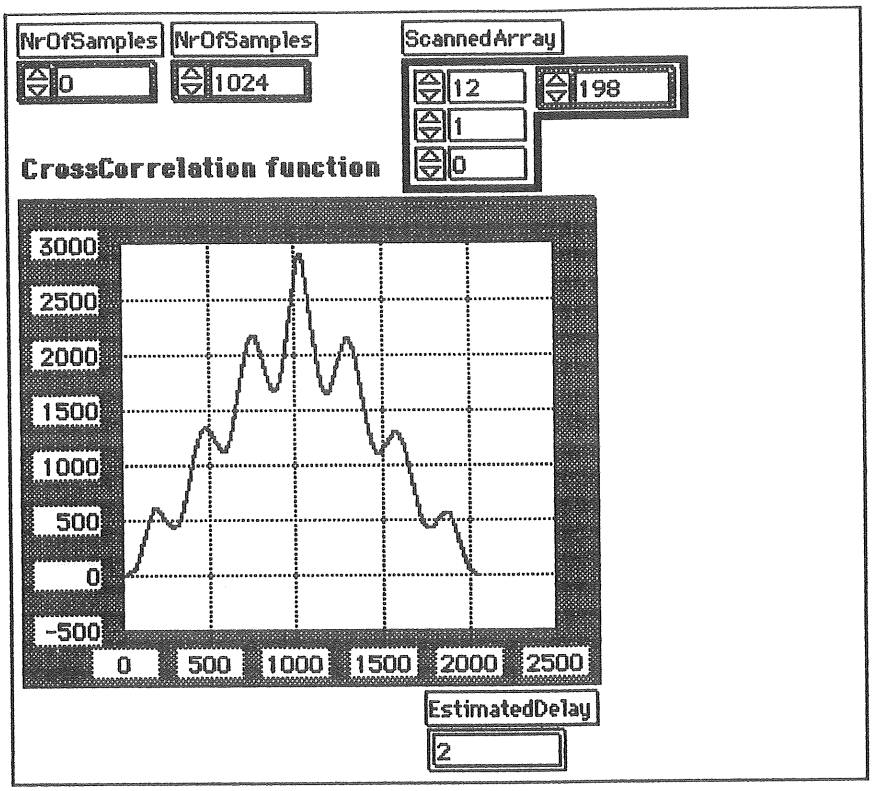


Figur 29. Stationära Q_{est} enligt (34), jämfört med induktiva givarens Q_e

Den transienta flödessignalen i sidoöverfallet kalibreras även den, jämför ekvation (33). Inflödet styrs med en ventil. Den induktiva flödesgivarens signal registreras tillsammans med utsignalen från transientflödesmätarens nivågivare i behållaren. Figur 30 visar flödessvaret på stegformade ändringar av ventilläget. På tidsaxeln motsvarar 100 sampel 10 s, den andra axeln visar flödet i l/s. I transientflödesmätarens utsignal syns vågorna från det nedstörtande vattnet. Fördröjningen τ mellan den induktiva givarens och nivågivarens svar på flödesändringen kan uppskattas ur korrelationen mellan signalerna. Den blir 2 sampel eller 0.2 s, jämför figur 31. En alltför kort tid eftersom den fyllda ledningen ansluter ca 5 m uppströms överfallet. Karakteristiska hastigheten borde vara ca 1 m/s i flödets riktning. En förklaring är att den induktiva givaren visade sig ha lång stigtid (tidskonstant $\approx$2 s) och att den deriverande kretsen överkompenserar behållarens integralverkan något. Matarslangen är elastisk och fördröjer därmed tryckändringen från den snabba ventilrörelsen. Långsammare sinusformade flödesvariationer kommer att beskrivas bättre av den induktiva givaren.



Figur 30. Exempel på transientmätning av överfallsflödet, ekvation (33)

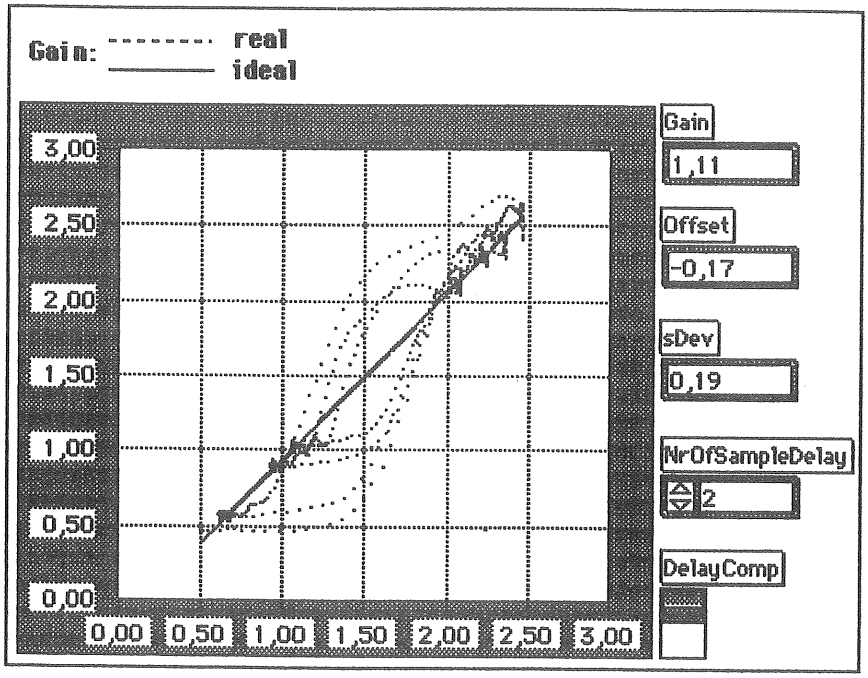


Figur 31. Korrelationen mellan induktiv- och transientflödesmätare

Dynamiska förstärkningen $Q_{est}(t)/Q_e(t-\tau)$ kan avläsas i figur 32. Den faskompenserade signalen från den induktiva givaren svänger i x-led, den andra i y-led. Trots kompensering för den skattade fördröjningen uppträder fasskillnaden som hysteres runt medelförstärkningen (räta linjen). Den deriverande kretsens tidskonstant, som kompenserar behållarens integralverkan, har justeras så att den dynamiska förstärkningen får medelvärdet 1.11 i detta fall.

Den induktiva flödesgivaren är mycket stabil och har kalibrerats externt en gång per år. Finjustering görs ibland med dess interna kalibreringsenhet. Givardelen sitter på matarledningen och är stämplad med en korrektionsfaktor som skall användas vid justeringen av signalen på flödesmätarens utgångar. Flödesmätaren ställs in för maximalt utslag 20 mA vid 5.0 l/s eller känsligheten 4 mA/(l/s). Det går inte att komma närmare än ±0.02 mA pga störningar. Över ett belastningsmotstånd på 250 ohm erhålls en spänning

motsvarande 1 V/(l/s). Mellan motståndet och datorn sitter ett filter som reducerar störningarna.



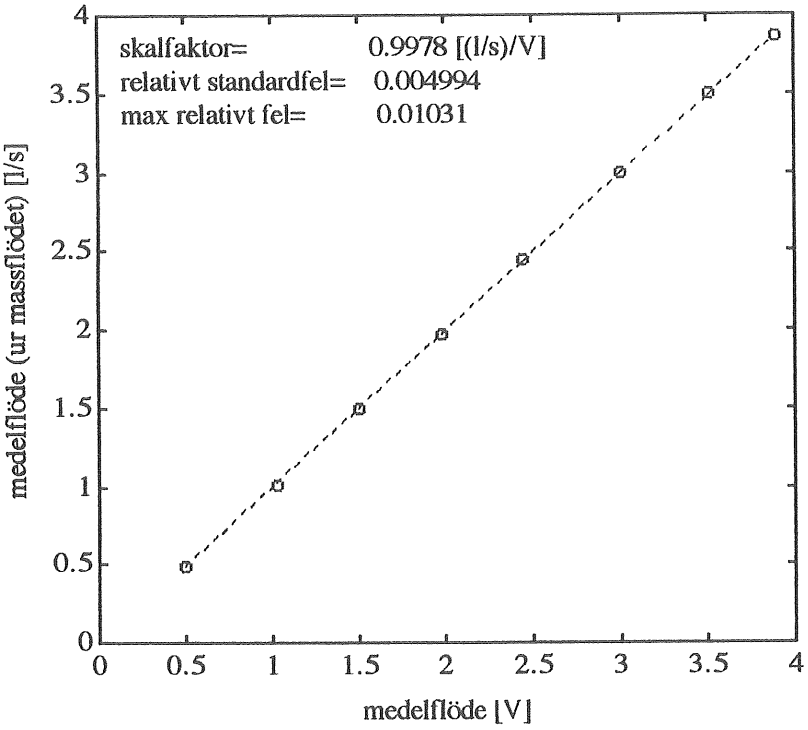
Figur 32. Dynamisk förstärkning efter kompensation för fördröjning

I den interna kalibreringsmoden skall instrumentet justeras med en potentiometer så att strömutgången ger 15.91 mA, enligt formeln

$$\text{calfactor} = 80\,\frac{\text{cal}}{Q_{max}} = 80\,\frac{0.99434}{5.0} = 15.91$$

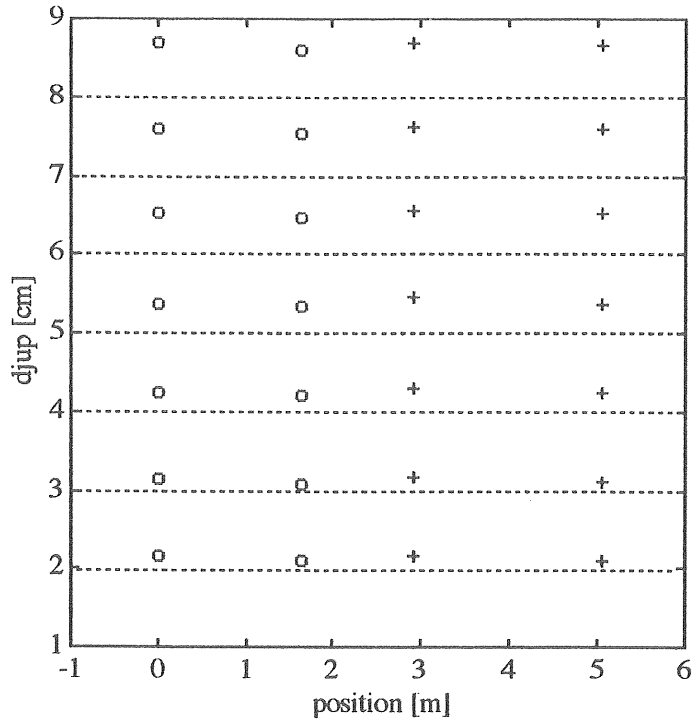
Efter justeringen kontrolleras flödesmätaren externt genom *masstidsmätning*. Vattnet från flödesgivaren leds ned i en behållare under en uppmätt tid och vägs därefter. Samtidigt registreras givarsignalen på datorn. Figur 33 visar sambandet mellan det ur masstidssambandet beräknade medelflödet och den i datorn avlästa medelspänningen från den induktiva flödesgivaren. Den beräknade känsligheten blir 0.998 l/s per V. Intern justering tycks ge tillräcklig noggrannhet.

Samtliga här redovisade försök eller mätningar har utförts på horisontell ledning. Uppriktningen kontrolleras emellanåt eftersom ledningsbädden av trä rör sig något. Ledningen fylls då med vatten och töms stegvis med sido-överfallet. Nivåerna i fyra sektioner på ledningen avläses i stillastående vatten på 6-8 olika djup.



Figur 33. Korrelation mellan volym/tid och avläst flödsgivarsignal

Ledningsbädden justeras tills nivåerna överensstämmer. Resultatet från en kontroll av ledningen presenteras i figur 34. Den maximala avvikelsen är mindre än 0.1 cm på den drygt 5 m långa sträckan med nivågivare. Två av dessa sitter uppströms sidoöverfallet. Minsta onoggrannheten man kan uppnå på ledningssträckan skattas till 0.03 cm.

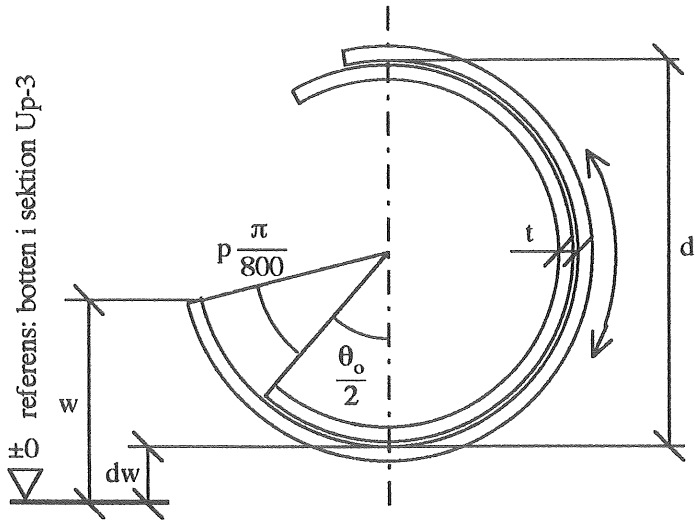


Figur 34. Exempel på ledningens uppriktning, (o) för givarna uppströms sidoöverfallet och (+) för de två nedströms

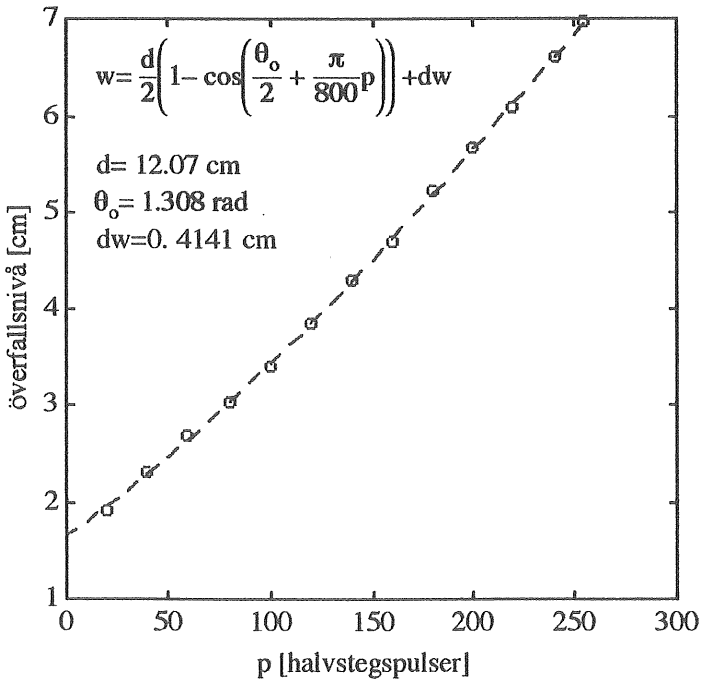
Vid kalibreringen av överfallskantens höjd har stegmotorns upplösning varit 1600 pulser per varv. Överfallskantens nivå w kan skrivas, jämför figur 35

$$w = \frac{d}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\theta_o}{2} + p\frac{\pi}{800}\right)\right) + dw \qquad (35)$$

Med stillastående vatten till kanten på sidoöverfallet har djupet w vid Up-3, den närmsta nivågivaren uppströms i figur 24, och samhörande antal stegmotorpulser p från referensläget $\theta_o/2$ registrerats. Parametervärdena d=12.1 cm, θ_o=1.31 radianer och dw=0.414 cm i ekvation (35) har bestämts ur regression på uppmätta serier av djup w och pulser p, jämför figur 36 nedan. Avståndet t har mätts till 0.34 cm.



Figur 35. Det vridbara sidoöverfallet med använda beteckningar



Figur 36. Samband mellan nivån i Up-3 och antalet stegmotorpulser

Mätfel

Den genomsiktiga PVC-ledningen har liten råhet och avstånden ≤1.5 m mellan två närliggande nivågivare utefter ledningen. Liten energigradient och korta sträckor innebär små variationer i vattendjup utanför sidoöverfallet. Onoggrannheten i nivåmätningen får betydelse för tolkningen av mätvärdena. Skattade maximalfel är värdefulla exempelvis vid tolkningen av skillnader i mätta och beräknade flöden och nivåer. Det finns flera *källor till fel*; menisker pga ytspänningen vid elektroderna, beläggning av alger, icke-parallella elektroder, temperaturvariationer, fel i avläsningen på spetsmätaren under kalibreringen, variabel form på ledningens tvärsnitt, nedböjning av ledningsbädden, fel i A/D-omvandlaren mm.

Alla mätinstrument som används i modellen är kalibrerade för nominella känsligheten 1 V/cm för nivåer respektive 1 V/(l/s) för flöden. Analysen avser att uppskatta det teoretiskt maximala felet i känslighet. Den magnetiskt-induktiva flödesmätaren, datorns A/D-omvandlare och den olinjära analoga kretsen ger felbidrag som specificeras av tillverkaren. Ett sätt att presentera felet är som relativt fel, vanligtvis relativt det maximala värdet, i dessa mätningar 10 cm för nivåer och 5 l/s för flöden. Tabell 2 är sammanställning av teoretiskt beräknade och mätta maximala fel.

Tabell 2. Maximala teoretiska och mätta fel

mätstorhet	teoretiskt maximalt fel % av fullt utslag	mätt maximal avvikelse % av fullt utslag
vattendjup	≤±0.9	≤±0.3
överfallsnivå	≤±0.9	≤±0.3
inflöde	≤±1	≤±0.3
överfallsflöde	≤±2	≤±0.3
utflöde	≤±2	≤±0.3

Felet vid kalibreringen av nivågivarna påverkas dels av de olika komponenterna i mätsystemet, med uppskattade maximala fel

$\Delta h \leq \pm 0.01$ cm	fel i spetsmätaravläsning
$\Delta O \leq \pm 1$ bit	fel i 12-bits A/D-omvandlare
$\Delta T \leq \pm 0.05$ °C	fel i vattentemperatur

dels av kalibreringsförfarandet. Bryggförstärkningen i nivåmätaren ställs, med 1 cm ~ 1 V, så att inläst spänning U ger vattendjupet h_e som

$$h_e=kU+offs \tag{36}$$

Kalibreringen av *ledningens nivåmätare* görs, som tidigare nämnts, i tre steg (i=1, 2, 3) med elektroddjupet h_i mätt med spetsmätare och samhörande givarspänning U_i inläst i datorn

$$h_1=kU_1+offs1$$

$$h_2=kU_2+offs1$$

$$offs=h_3-kU_3$$

Eliminering av offs1 ger

$$k=\frac{h_2-h_1}{U_2-U_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta k \leq 2\frac{1}{U_2-U_1}\Delta h + 2\frac{h_2-h_1}{(U_2-U_1)^2}\Delta U \tag{37}$$

Spänningen U har två dominerande felkällor, den ena är A/D-omvandlingen den andra är temperaturberoendet hos resistiviteten i vattnet

$$\Delta U \leq \frac{20}{4095}\Delta O + 0.02U\Delta T$$

Insatta värden ger $\Delta k \leq 4.7\ 10^{-3}$. Det tredje steget i kalibreringen ska ge rätt absolutnivå, dvs nivåmätarens offset (offs) justeras till noll med hjälp av spetsmätaren

$$offs=h_3-kU_3=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta offs \leq \Delta h + k\Delta U + U_3\Delta k$$

som ger $\Delta offs \leq 0.026$ cm. Efter kalibreringen blir det *teoretiskt maximala felet* i nivåmätningen

$$\Delta h_e \leq k\Delta U + U\Delta k + \Delta offs = 5.7\ 10^{-3} U + 0.031 \text{ cm}$$

Relaterat till största utslaget 10 V blir det maximala felet $\Delta h_e \leq 0.88\%$. En feluppskattning där alla delfelen samverkar blir konservativ. Figur 27 visar att avvikelserna i den mätserien är ca tre ggr mindre än den teoretiskt beräknade maxavvikelsen Δ mellan spetsmätaravläsningen h och datorns samplade h_e

$$\Delta = \sqrt{\Delta h_e^2 + \Delta h^2} \leq 0.089 \text{ cm}$$

Onoggrannheten i den *magnetiskt-induktiva flödsmätaren* kontrolleras med masstidsmätning efter kalibreringen. Med hjälp av en milliampère-meter och mätdatorn ställs känsligheten in enligt kalibreringsavsnittet ovan så att flödesmätarens strömutgång ger 20 mA vid 5 l/s. Strömutgången ger efter justeringen nominellt 1V per l/s över precisionsmotståndet R=250 ohm. Skalfaktorn k_{ref} (l/s per V) bestäms vid kalibreringen till

$$k_{ref} = \frac{RI_{ref}}{U_{ref}} = \frac{250 * 15.90\ 10^{-3}}{3.9621} = 1.00326$$

Med maximala delfelen

$\Delta O \leq \pm 1$ bit	fel i 12-bits A/D-omvandlare
$\Delta R \leq \pm 250\ 10^{-4}$ ohm	fel i belastningsmotståndet
$\Delta I_{ref} \leq \pm 0.02$ mA	fel i strömmätningen

beräknas maximala felet i skalfaktorn Δk_{ref} till

$$\Delta k_{ref} \leq \frac{R}{U_{ref}} \Delta I_{ref} + \frac{I_{ref}}{U_{ref}} \Delta R + \frac{RI_{ref}}{U_{ref}^2} \Delta U_{ref} = 2.60\ 10^{-3}$$

Flödet Q_e bestäms ur den spänning U som den magnetiskt-induktiva flödes-mätarens ström ger över motståndet R

$$Q_e = k_{ref} U = k_{ref} R I \qquad (38)$$

Enligt tillverkaren är

$$\frac{\Delta Q}{Q} \leq 10^{-3}\left(5 + \frac{Q_{max}}{Q}\left(1 + \frac{1}{v_{max}}\right)\right) \qquad (39)$$

Med flödesgivaren justerad så att flödet Q_{max}= 5 l/s i givarens 1.5"-mätrör ger I_{max}=20 mA, erhålls strömfelet ΔI ur ekvation (39)

$$\Delta I \leq 5\ 10^{-3} I + 2.5\ 10^{-5}$$

Differentiering av ekvation (38) ger *maximala felet* i mätsignalen Q_e

$$\Delta Q_e \leq \left(R\Delta k_{ref} + k_{ref}\Delta R\right) I + k_{ref} R\, \Delta I + \frac{20}{4095}\Delta O = 1.93\, I + 0.0112$$

dvs för I=20 mA vid maxflödet 5 l/s blir felet ΔQ_e i den inlästa flödessignalen≤1.0%.

Felet i *masstidsmätningen* av flödet $Q_m$kan beräknas med de skattade felen

$\Delta T \leq \pm 0.05$ °C	fel i avläsningen av vattentemperaturen
$\Delta m \leq \pm 0.1$ kg	fel i vägningen
$\Delta t \leq \pm 0.2$ s	fel i tidmätningen

och sambandet

$$Q_m = \frac{m}{\rho t}$$

där massan m med densiteten ρ fyller kärlet på vågen under tiden t.
Detta ger ett teoretiskt *maximalt relativt fel* i flödesbestämningen

$$\frac{\Delta Q_m}{Q_m} = \frac{\Delta m}{m} - \frac{\Delta t}{t} - \frac{\frac{\partial \rho}{\partial T}}{\rho}\Delta T \leq 0.002+0.005+1.0\ 10^{-5}=0.007$$

där siffervärdena står för de maximala relativa delfelen vid kalibreringen. För att kunna jämföra med resultaten i figur 33 ovan, där avvikelsen $\Delta \leq 0.0164$ l/s mellan de två metoderna, beräknas den teoretiskt största skillnaden vid max flöde

$$\Delta = \sqrt{\Delta Q_e^2 + \Delta Q_m^2} \leq \sqrt{2.474\ 10^{-3} + 1.225\ 10^{-3}} = 0.061$$

Den teoretiskt beräknade, maximala avvikelsen blir ca fyra gånger större än den uppmätta. Masstidsmetoden är inte tillräckligt bra för att vara referens. Denna borde ha minst en 10-potens högre noggrannhet än det mätsystem som kontrolleras. Det ser ändå ut som om den använda flödesmätaren ger den onoggrannhet ≤ 1% av fullt utslag som tillverkaren lovat.

Transienta flödesmätarens fel härrör både från beräkningsmodellen i ekvation (33) och från justeringen av parametrarna i ekvation (34) tillsammans med nivågivarfelet. Parametervärdena i den olinjära förstärkaren tas från den linjära regressionen i figur 28 ovan. Differentiering av ekvationen ger

$$\Delta V_{out} = \left(\frac{\Delta V_y}{V_y} + \left(\frac{\Delta V_z}{V_z} - \frac{\Delta V_x}{V_x} \right) M + \ln\left(\frac{\Delta V_z}{V_x} \right) \Delta M + \Delta olin \right) V_y \left(\frac{V_z}{V_x} \right)^M \quad (40)$$

Exponenten M i den olinjära förstärkaren ställs in som resistansvärdet hos en potentiometer

$$R_M = \frac{R_o}{M-1}$$

och

$$\Delta M = \frac{R_o}{R_M}\left(\frac{\Delta R_o}{R_o} - \frac{\Delta R_M}{R_M} \right) \leq \frac{R_o}{R_M}\left(\frac{\Delta R_o}{R_o} + \frac{\Delta R_M}{R_M} \right) = 5.6\ 10^{-3}$$

För instrument som användes för inställningen av spänningar och motstånd gäller att

V_x=9.96 V ±0.1%
V_y=4.229 V ±0.1%
R_o=194.35 ohm ±0.2%
R_M=139.02 ohm ±0.2%

medan den olinjära kretsen enligt tillverkaren har ett fel Δolin≤1%. Låt V_z beteckna nivåsignalen h_e från Thomsonöverfallet. Med värden insatta i ekvation (40) ovan, erhålls ett *maximalt relativt fel* om $Q_{est} \equiv V_{out}$

$$\frac{\Delta Q_{est}}{Q_{est}} \le 0.027 + \frac{0.031}{h_e} + 5.6\,10^{-3}\left|\ln\left(\frac{h_e}{9.96}\right)\right| + \frac{20}{4095 Q_{est}}$$

Den högsta nivå i Thomsonöverfallet som den olinjära förstärkaren klarar är 9.96 cm, motsvarande 9.96 V, därefter bottnar den. Vid h_e=8.0 cm blir Q_{est}=2.5 l/s med ett teoretiskt maximalt relativt fel ≤3.4%.

På samma sätt som tidigare kan den teoretiskt maximala avvikelsen mellan flödesmätning med Thomsonöverfall (Q_{est}) och magnetiskt-induktiv givare (Q_e) bestämmas för t ex Q_e=2.5 l/s

$$\Delta \le \sqrt{\Delta Q_{est}^2 + \Delta Q_e^2} = \sqrt{(2.5*0.034)^2 + 0.0313^2} = 0.091$$

Detta motsvarar relativa avvikelsen Δ=3.6% vid Q=2.5 l/s mellan mätinstrumenten. Maximala skillnaden är drygt sex gånger större än den största uppmätta relativa avvikelsen Δ=0.56% i figur 29 ovan.

Det styrda sidoöverfallets parametrar i ekvation (35) har bestämts genom regression, jämför figur 36, där maximal avvikelse Δ mellan regressionslinjen och en mätpunkt är mindre än 0.031 cm

$$\Delta = \sqrt{\Delta w^2 + \Delta h_e^2} \le 0.031$$

Differentiering av ekvation (35) ger olikheten

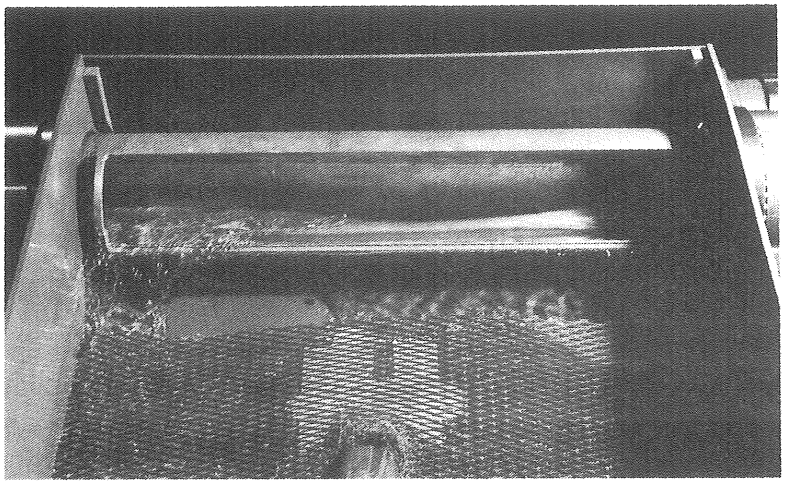
$$\Delta w \leq \Delta d + \frac{d}{4}\Delta\theta_o + \frac{\pi d}{1600}\Delta p + \Delta dw$$

som tillsammans med skattade värden på maximala delfel

$\Delta d \leq \pm 0.02$ cm
$\Delta p \leq \pm 1/2$
$\Delta dw \leq \pm \Delta h_e = \pm 5.7\ 10^{-3}\ U + 0.031$
$\Delta\theta_o \leq \pm \pi \Delta p/400$

ger felet $\Delta w \leq 0.10$ cm vid en inställning av överfallets nivå som motsvarar halvfylld ledning (U=5.0 V). Här blir det teoretiska maximala felet ca tre gånger större än största felet i regressionen. Relaterat till nivån 10 cm blir teoretiska, maximala felet i överfallsnivån ≤1%.

Efter denna genomgång av den fysiska modellen och dess olika givare återvänder texten i det följande avsnittet till diskussionen om numerisk beräkning eller simulering av stationär strömning i sidoöverfallet.



Simulering

Avsnittet inleds med undersökningar av friktionsförlusterna i ledningen. StVenants ekvationer kompletteras med en ekvation för det laterala rörelsemängdsflödet. Aktuella parametrar bestäms i jämförelsen mellan beräknade och mätta flöden på ömse sidor om överfallet. Exempel på beräknade nivå- och flödesprofiler i överfallet presenteras. En känslighetsanalys avslutar avsnittet.

Allmänt

Försöken med stationär strömning i sidoöverfallet genomfördes i omgångar under åren 90-92. Mätutrustning och -metoder har modifierats efterhand, oftast för att minska verkan av både elektriska och hydrauliska störningar. Utgångspunkten har varit en praxis där man knappast har råd eller möjlighet att mäta upp vattenytans profil eller hastighetsfördelningen i vattenmassan. Endast storheter som djupet mitt i en sektion eller totala flödet genom ett mätöverfall har varit tillgängliga i laboratoriemodellen. Ett mål är också att försöka skapa en transient modell av flödet i och omkring ett sidoöverfall. Den ändliga våghastigheten innebär att det transienta eller icke-stationära tillståndet i en sektion bara påverkas av förhållandena i den närmsta omgivningen, jämför CFL-villkoret på sidan 18. Det laterala utflödet i sidoöverfallet måste därför kunna uttryckas i lokala variabler.

I kanalströmning med fri vattenyta är det vanligt att välja den hydrauliska radien R som karakteristisk längd. Men för att lättare relatera till mätningar på fyllda ledningar kan man låta den hydrauliska radien R ersättas av 4R i Reynolds tal (4R=D i fylld ledning)

$$Re=\frac{\rho\, 4R\, U}{\mu}$$

U är medelhastigheten i sektionen. Området $2000<Re<8000$ betraktas ofta som övergångszon[48] mellan laminär och turbulent strömning i kanaler.

Glatt strömning

Den genomsiktiga plastledningen i modellen har liten råhet. Strömning som är turbulent med hastighetsfördelning och friktionskoefficient beroende av Reynolds tal kallas hydrauliskt turbulent och glatt. Om Reynolds tal Re ligger i intervallet $3\ 10^3<Re<10^5$ kan friktionskoefficienten f=f(Re) approximeras med Blasius' relation för släta rör, [48] p 8

$$f=\frac{0.315}{Re^{0.25}}$$

[48] Chow Ven T: Open-Channel Hydraulics, McGraw-Hill, Tokyo 1959, p 10

Uttrycket kan ersätta friktionskoefficienten f i den s k allmänna friktionsformeln (41), Darcy-Weisbachs formel från 1845, vid bestämning av energiförlusten h_f på ledningssträckan L

$$h_f = f \frac{L}{4R} \frac{U^2}{2g} \qquad (41)$$

Ursprungligen togs formeln fram för fyllda rör och diametern har ersatts av 4R eftersom vi har att göra med fri vattenyta.

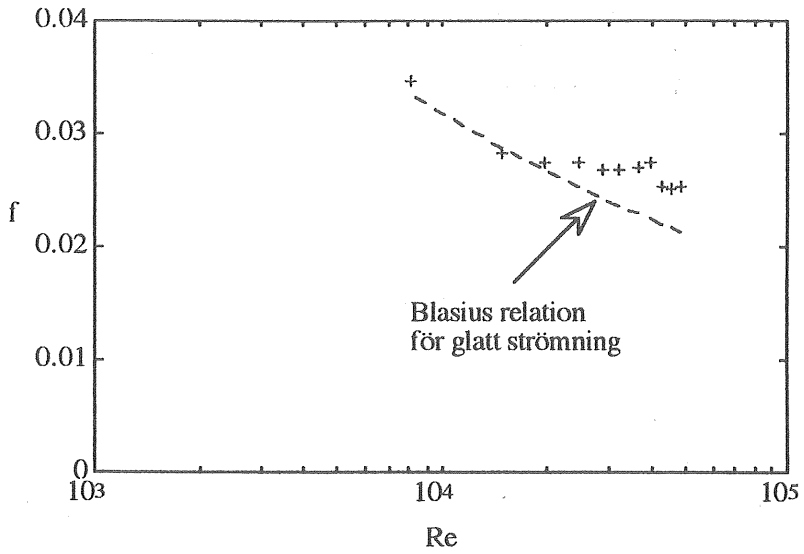
Friktionsförluster

Två sätt att beskriva kanalledningens friktionsförluster har prövats, med allmänna friktionsformeln och Mannings formel. Använda parametrar har bestämts genom minimering av felet mellan beräknat och uppmätt djup i två sektioner, med inbördes avstånd L=5.055 m. Felet har erhållits efter numerisk integrering av ekvation (22) mellan de båda sektionerna. Ledningen är horisontell varför olikformig strömning råder utefter sträckor med fri vattenyta.

Kombineras allmänna friktionsformeln med Blasius' relation kan energins gradient S_f tecknas

$$S_f = \frac{c_0}{Re^{c_1}} \frac{1}{4R} \frac{U^2}{2g} \qquad (42)$$

Figur 37 visar friktionskoefficienten f beräknad enligt ekvation (42) ur data från en mätserie med 11 olika flöden Q ($0.23<Q<2.6$ l/s) med fri vattenyta och utan lateral avbördning. Konstanternas medelvärde och standardavvikelse i ekvation (42) blev $c_0=0.322 \pm 0.020$ respektive $c_1=0.241 \pm 0.011$. Resultaten liknar dem från mätningar på likformiga stationära flöden i släta kanaler i [48] fig 1-3, p 10. Strömningen i modelledningen kan enligt figur 37 betraktas som glatt eller nästan glatt. Förlusterna förvrängs därför något vid skalning av modellförsöken med Froudes modellregel.



Figur 37. Friktionskoefficienten ur Darcy-Weisbachs formel (+) och Blasius relation för glatt strömning (mätserie 910823).

Mannings formel från 1889, ekvation (43), används ofta vid beräkning av energins gradient S_f i kanaler med fri vattenyta och hydrauliskt rå strömning

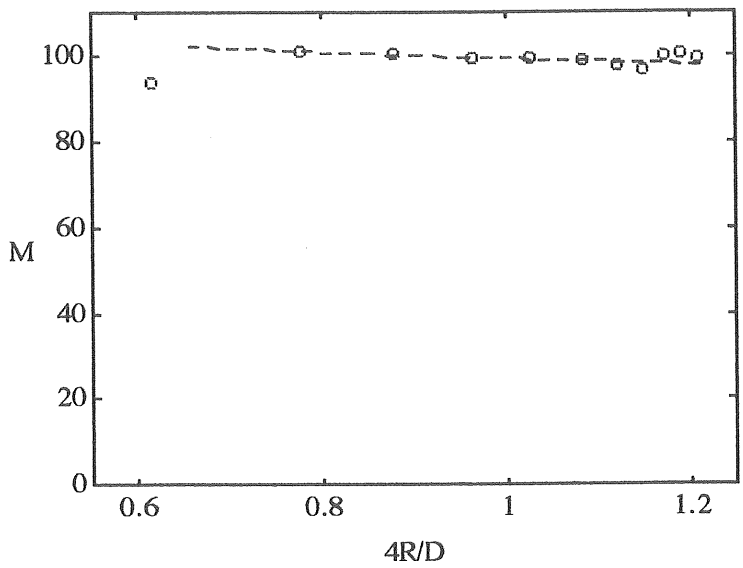
$$S_f = \frac{U^2}{M^2 R^{\frac{4}{3}}} \tag{43}$$

Mannings M antas bero av råheten k och hydrauliska radien R, se [48] pp 205-206

$$M = M\left(\frac{4R}{k}\right) = \frac{c_0 \log\left(c_1 \frac{4R}{k}\right)}{\left(\frac{4R}{k}\right)^{\frac{1}{6}}} k^{-\frac{1}{6}} \tag{44}$$

Enligt datablad är modelledningens ekvivalenta råhet k=0.01 mm. Konstanterna c_0 och c_1 i (44) har även här bestämts genom minimering av skillnaden

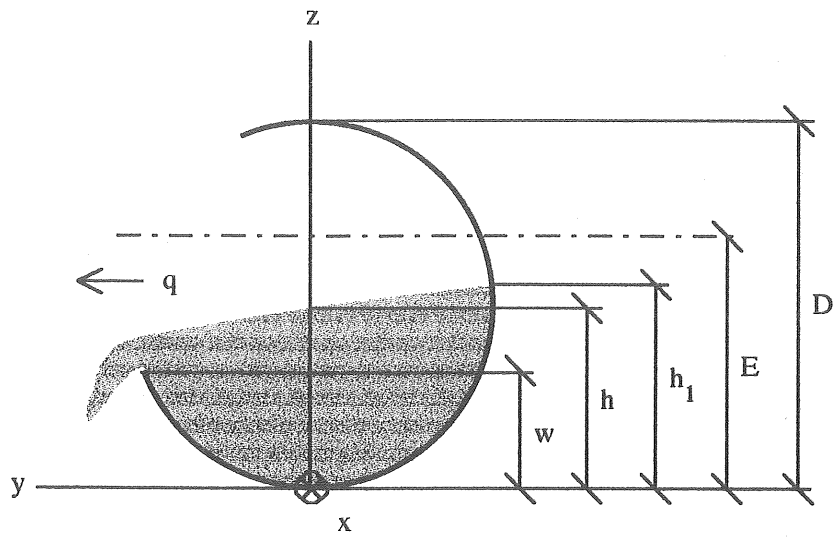
mellan lösningen till ekvation (22) och mätt djup, för samma mätdata som använts i framställningen av figur 37. Medelvärde och standardavvikelse på konstanterna i samband (44) blev c_0=13.9 ± 0.2 respektive c_1=7.66 ±0.18. Figur 38 visar Mannings M som funktion av 4R/D. Den streckade kurvan representerar M med energins gradient S_f beräknad enligt ekvation (43) med konstanterna c_0 och c_1 insatta i (44). I figuren redovisas också M bestämd med ekvation (43) och medelvärdet av energilutning, hastighet U och hydraulisk radie R i de två mätsektionerna. Värdena har markerats med ringar (o) i figuren, en för varje flöde. Ett värde avviker mer än övriga vilket troligen beror på att flödet i den mätpunkten ligger i övergångszonen där strömningen varken är rent laminär eller helt turbulent.



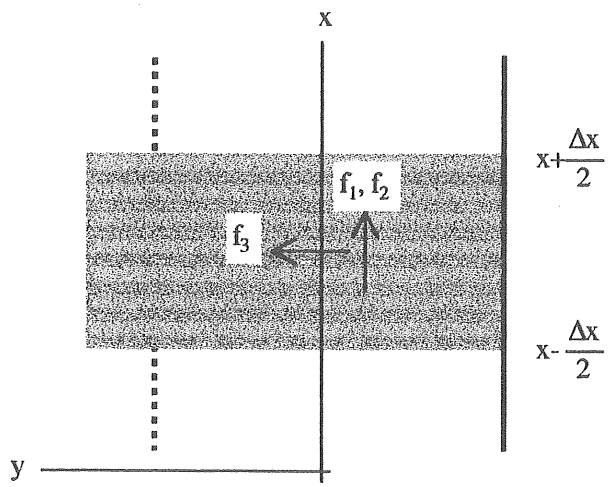
Figur 38. Modelledningens M, resultat från minimering av skillnaden mellan mätt och beräknad djup mha ekvationerna (22), (43) och (44) (kurva) samt från en enkel medelvärdesbildning (o).

Eftersom strömningen i en sektion av sidoöverfallet inte är rå, ibland kanske inte ens turbulent, har jag valt att beskriva friktionsförlusterna med ekvation (42). För en noggrannare bestämning av strömningsförlusterna bör mätningar utföras på en längre ledning. Därvid skulle verkan av felen i nivåmätningen och i ledningens lutning reduceras något.

Stationär strömning i sidoöverfallet



Figur 39. Sektion i överfallet med använda beteckningar



Figur 40. Plan i överfallet med kontrollvolym

Storheten f_1 representerar rörelsemängdsflödet genom en ledningssektion och har samma referensriktning som x-axeln, f_2 är volymflödet genom

samma sektion. Det laterala rörelsemängdsflödet f_3 i ledningssektionen förs med huvudflödet Q och har y-axelns riktning som referens, se figur 40 ovan

$$f_3 = \beta_3 \frac{qQ}{2A\frac{dh}{dA}}$$

Den stationära lösningen till Saint Venants ekvationer kompletteras med en ekvation för det stationära laterala rörelsemängdsflödet. På överfallets kant har strömningen en lateral komponent som motsvarar volymflödet q per längdenhet. Vid stationärtillstånd i kontrollvolymen råder balans mellan in- och utströmmande lateral rörelsemängd dvs

$$\frac{g}{2}(h_1 - w)^2 - \frac{|q|q}{r_u(h_1 - w)} - (f_3)_x = 0 \qquad (45)$$

om densiteten ρ är konstant. Första termen representerar den drivande tryckkraften från ledningens vägg mitt emot överfallskanten, den andra rörelsemängdsflödet som passerar överfallskanten och den tredje gradienten till det laterala rörelsemängdsflödet f_3 genom en ledningssektion. Parametern r_u korrigerar för djup och hastighetsfördelning på överfallskanten.

Tillståndsvektorn u och fluxvektorn f som introducerades i teoriavsnittet ovan utökas i sidoöverfallet med elementet q respektive f_3

$$u = \begin{bmatrix} A \\ Q \\ q \end{bmatrix} \qquad f(u) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \frac{|Q|Q}{A} + g\int_0^{h(A)} \frac{dA}{dz}(h(A) - z)dz \\ Q \\ \beta_3 \frac{qQ}{2A\frac{dh}{dA}} \end{bmatrix}$$

Stationärlösningen till ekvation (3) i teoriavsnittet kompletteras med ekvation (45), men har samma form som tidigare

$$f_x(u) = g(u) + b \qquad (46)$$

med

$$g(u) = -\begin{bmatrix} g\frac{|Q|}{Q}S_f A + \beta_2\frac{Q}{A}q \\ q \\ \frac{|q|q}{r_u(h_1 - w)} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{g}{2}(h_1 - w)^2 \end{bmatrix}$$

Som förut är A våta sektionsarean, h_1 vattendjupet intill väggen mitt emot överfallet och w överfallskrönets höjd över botten, se figur 39. Q är huvudflödet längs ledningen, S_f energigradienten, g tyngdaccelerationen och $\beta_{1,2,3}$ korrektionskoefficienter för rörelsemängdsflöde.

Stationärtillståndet i varje ledningssektion beräknas genom *numerisk integrering av tillståndsgradienten* u_x utefter sidoöverfallets längd. För att lösningen skall bli entydig krävs tre randvillkor (RV). Med

$$f_x(u) = Fu_x \qquad u_x = \begin{bmatrix} A_x \\ Q_x \\ q_x \end{bmatrix} \qquad g(u) = Gu$$

erhåller differentialekvationerna matrisformen, jämför ekvation (21) s 33

$$u_x = F^{-1}[Gu + b] \tag{47}$$

där

$$G = -\begin{bmatrix} g\frac{|Q|}{Q}S_f & \beta_{1x}\frac{|Q|}{A} & \beta_2\frac{Q}{A} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta_{3x}\frac{q}{2A\frac{dh}{dA}} & \frac{|q|}{r_u(h_1 - w)} \end{bmatrix}$$

och

$$F=\begin{bmatrix} gA\frac{dh}{dA}-\beta_1\frac{|Q|Q}{A^2} & 2\beta_1\frac{Q}{A} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta_3\frac{qQ}{2\frac{dh}{dA}A^2}\left(1+\frac{A\frac{d^2h}{dA^2}}{\frac{dh}{dA}}\right) & \beta_3\frac{q}{2A\frac{dh}{dA}} & \beta_3\frac{Q}{2A\frac{dh}{dA}} \end{bmatrix}$$

Nämnaren i inversen F^{-1} till matrisen F kommer att innehålla faktorn

$$gA\frac{dh}{dA}-\beta_1\frac{|Q|Q}{A^2}=gA\frac{dh}{dA}(1-\beta_1 Fr^2)$$

som närmar sig noll då Froudes tal $Fr \rightarrow \sqrt{1/\beta_1}$, dvs lösningen rill ekvation (47) blir singulär nära kritisk strömning.

Tredje radens två sista element i systemmatrisen $F^{-1}G$ innehåller termer med faktorn Q i nämnaren. Detta medför att små Q ger stora, beräknade gradienter i lateralflödet q. I det följande avsnittet med mät- och beräkningsexempel görs simuleringarna i en ledning med dead end, dvs $Q \rightarrow 0$ i sidoöverfallets nedströmsände.

Om ledningen slutar i dead end och strömningen är superkritisk uppströms bildas ett vattensprång i sidoöverfallet med ett internt randvillkor, ett chock- eller R-H-villkor

$$s(u_r-u_l)=f(u_r)-f(u_l) \qquad (48)$$

R-H-villkoret omfattar enbart de två första tillstånden (A och Q) i ekvation (47), de två med flödesreferens i x-axelns riktning. Vid stationär strömning är vattensprångets hastighet s=0 varför $f(u_r)=f(u_l)$, dvs det hydrauliska volym- respektive rörelsemängdsflödet i ledningens huvudriktning skall vara lika på var sida om vattenspråget.

Korrektionskoefficienter

Tre korrektionskoefficienter β_1, β_2 och β_3 används för att beskriva rörelsemängdsflödet i en sektion. Den första korrigerar för fördelningen i x-led (längs ledningen), den andra för fördelningen av det rörelsemängdsflöde i x-led som passerar överfallskanten. Den tredje korrigerar i y-led (lateralt).

$$\beta_1 = \frac{\int_A u^2\,dA}{\frac{Q}{A}Q} \qquad \beta_2 = \frac{\int_w^h uv\,dz}{\frac{Q}{A}q} \qquad \beta_3 = \frac{\int_A vu\,dA}{\frac{q}{2A\frac{dh}{dA}}Q} \tag{49}$$

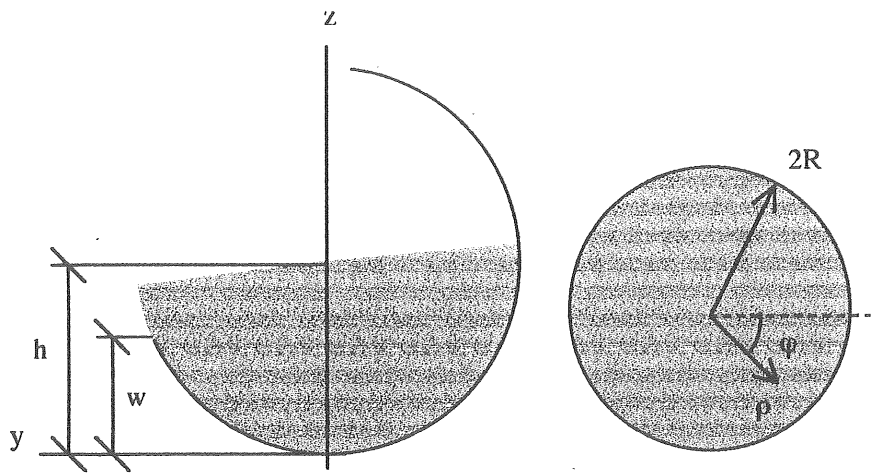
I en artikel[49] beskrivs försök i en kanal med rektangulär sektion, sidoöverfall och dead end. Där framgår att hastighetsfördelningen kan variera från att vara nästan rektangulär i överfallets uppströmsände till triangulär i nedströmsänden. Därför tillåts korrektionskoefficienterna β_i variera, se även [48] s 28. Det viskösa underskiktets tjocklek har försummats och strömningen förutsätts vara turbulent ända intill ledningens väggar. En analys av den lokala hastighetens inverkan har genomförts med hjälp av ytterligare, förenklande antaganden[50], där de lokala hastigheterna u (i x-led) och v (i y-led) approximeras med *linjära fördelningar* i rummet. Detta leder till en ofysikalisk strömningsbild med hastighetsgradienter mitt i ledningen. Beräkningsresultaten påverkas emellertid inte eftersom interna krafter i kontrollvolymen inte verkar på dess ränder.

Den lokala hastigheten u förutsätts vara störst (u_B) i vattenytan mitt i ledningen och minst (u_b) utefter väggen i en sektion, motsvarande den i en fylld cirkulär sektion med samma hydrauliska radie R som sektionen i sidoöverfallet, se figur 41. Den lokala, laterala hastigheten v antas vara maximal (v_B) vid överfallskanten och noll utefter sektionens väggar. Analysen ger en anvisning om hur β_i kan variera med flöde och överfallshöjd i en ledning med cirkulär sektion.

---

[49] Hager W H, Volkart P U: Distribution Channels, J of Hydraulic Eng, Vol 112, No 10, October, 1986

[50] Steffler P M, Jin Y-C: Depth averaged and moment equations for moderately shallow free surface flow, J of Hydraulic Research, Vol 31, No 1, 1993



Figur 41. Sektion i överfallet och hydraulisk radie R

Den linjariserade fördelningen av u har formen

$$u = u(r, \varphi) \approx u_B - \frac{u_B - u_b}{2R} r \qquad (50)$$

uttryckt i avståndet r från centrum i en fylld sektion med samma hydrauliska radie R som kanalen. Med detta antagande blir

$$\int_A u^2 dA \approx \int_0^{2R} \left(u_B - \frac{u_B - u_b}{2R} r\right)^2 2\pi r \, dr \qquad (51)$$

och

$$Q = \int_A u \, dA \approx \int_0^{2\pi} \int_0^{2R} \left(u_B - \frac{u_B - u_b}{2R} r\right) r \, dr \, d\varphi = \pi (2R)^2 \frac{u_B + 2u_b}{3}$$

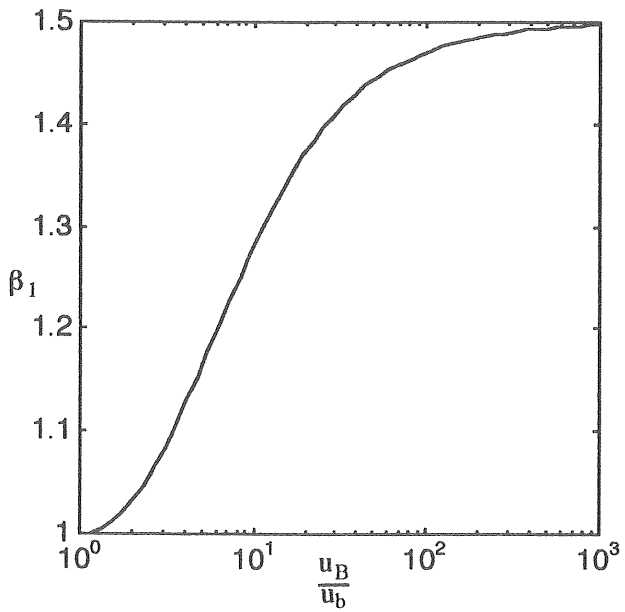
varför

$$\beta_1 \approx \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{u_B}{u_b}+1\right)^2+2}{\left(\frac{u_B}{u_b}+2\right)^2} \qquad (52)$$

Korrektionsfaktorns β_1 beräknade hastighetsberoende visas i figur 42 som funktion av kvoten u_B/u_b. Enligt ekvation (52) gäller att

$$\frac{u_B}{u_b} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 \to 1$$

$$\frac{u_B}{u_b} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \beta_1 \to \frac{3}{2}$$



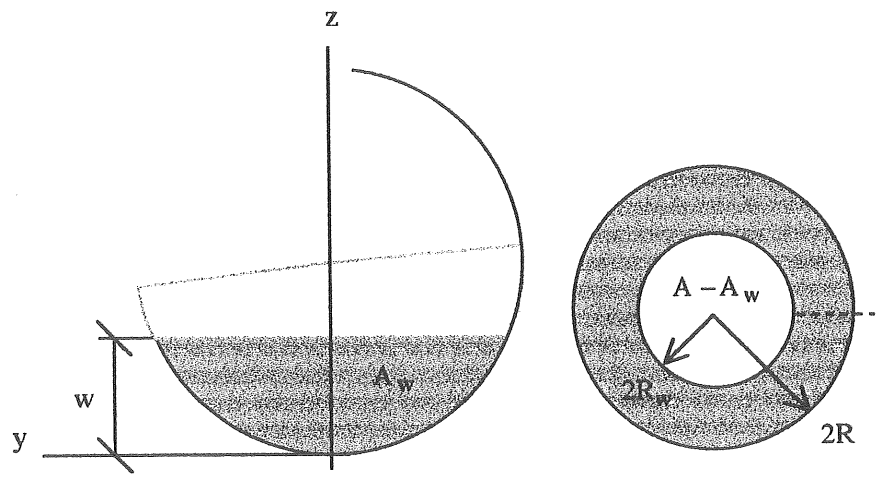
Figur 42. Hastighetsberoendet hos korrektionsfaktorn β_1 *som funktion av kvoten mellan största och minsta lokala hastigheten i x-led*

Den lokala hastigheten i y-led (lateralt) antas vara v_B på ytan över kanten på överfallet och noll utefter ledningens väggar. I den fyllda sektionens polära koordinater kan en linjärt fördelad, lokal, lateral hastighet skrivas

$$v(r,\varphi) = \frac{v_B}{2\pi}\varphi\left(1-\frac{r}{2R}\right) \qquad \begin{cases} 0\le\varphi<2\pi \\ 0\le r\le 2R \end{cases} \tag{53}$$

Om man antar att en större del av vattnet på överfallskanten dras av från vattenmassan närmast ytan, dvs för $w\le z\le h$, och överför detta antagande till den fyllda sektionen, kan man bestämma en med överfallsnivån "ekvivalent" radie ($2R_w$) sådan att

$$2R_w = 2R\sqrt{1-\frac{A_w}{A}} \tag{54}$$



Figur 43. Definition av en "ekvivalent" hydraulisk radie $2R_w$

Korrektionsfaktorn β_2 för den delen av rörelsemängdsflödet i ledningens längdriktning som passerar överfallskanten kan uttryckas i variablerna och φ

$$\int_w^h uv\,dz \approx \int_0^{2R_w} v_B\left(1-\frac{r}{2R}\right)\left(u_B-\frac{u_B-u_b}{2R}r\right)dr \tag{55}$$

Efter integrering

$$\int_w^h uv\,dz \approx (2R_w)u_b v_B\left(\frac{u_B}{u_b}\left(1-\frac{2R_w}{2R}+\frac{1}{3}\left(\frac{2R_w}{2R}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\frac{2R_w}{2R}-\frac{1}{3}\left(\frac{2R_w}{2R}\right)^2\right)$$

Definitionen av β_2 i ekvation (49) ovan innebär att $\beta_2 \to 1$ för alla fördelningar av laterala, lokala hastigheten v och för alla överfallsnivåer w, om lokala hastigheten u är lika överallt i sektionen ($u_B = u_b = U$). Detta medför att

$$\frac{Q}{A}q = Uq = (2R_w)\,U\,v_B\left(1-\frac{1}{2}\frac{2R_w}{2R}\right)$$

dvs

$$q = (2R_w)\,v_B\left(1-\frac{1}{2}\frac{2R_w}{2R}\right) \qquad (56)$$

Därmed kan korrektionsfaktorn β_2 för rörelsemängdsflödet som passerar överfallskanten i ledningens riktning skattas som

$$\beta_2 \approx 3\,\frac{\frac{u_B}{u_b}\left(1-\frac{2R_w}{2R}+\frac{1}{3}\left(\frac{2R_w}{2R}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2R_w}{2R}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2R_w}{2R}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\frac{2R_w}{2R}\right)\left(\frac{u_B}{u_b}+2\right)} \qquad (57)$$

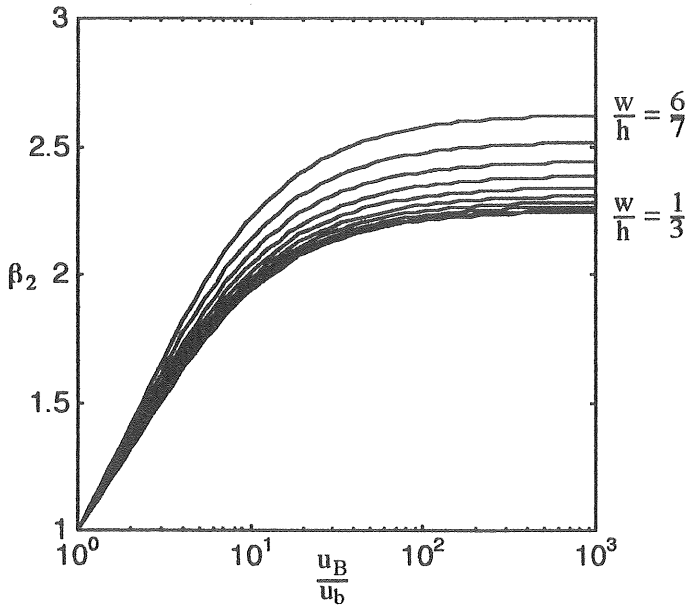
Relationen (56) garanterar att $\beta_2 \to 1$ då $u_B/u_b \to 1$ och om $u_B/u_b \to \infty$ visar ekvation (57) att

$$\beta_2 \to 3\,\frac{1-\frac{2R_w}{2R}+\frac{1}{3}\left(\frac{2R_w}{2R}\right)^2}{1-\frac{1}{2}\frac{2R_w}{2R}}$$

och överfallsnivån påverkar β_2 i intervallet $0 \le w \le h_1$

$$w \to h_1 \Rightarrow R_w \to 0 \Rightarrow \beta_2 \to 3$$
$$w \to 0 \Rightarrow R_w \to R \Rightarrow \beta_2 \to 2$$

Figur 43 nedan illustrerar variationen i β_2 för olika relativa överfallsnivåer w/h med R_w bestämd av ekvation (54). I beräkningarna längre fram i texten har jag valt att låta R_w=R.



Figur 43. Hastighetsberoendet hos korrektionsfaktorn β_2 som funktion av kvoten mellan största och minsta lokala hastigheten i x-led

Det laterala rörelsemängdsflödet i en sektion med huvudflödet Q blir med hastighetsfördelningar enligt ekvationerna (50) och (53)

$$\int_A vu\,dA \approx \int_0^{2\pi} \frac{v_B}{2\pi}\varphi \int_0^{2R} r\left(1 - \frac{r}{2R}\right)\left(u_B - \frac{u_B - u_b}{2R}r\right) dr d\varphi \qquad (58)$$

dvs

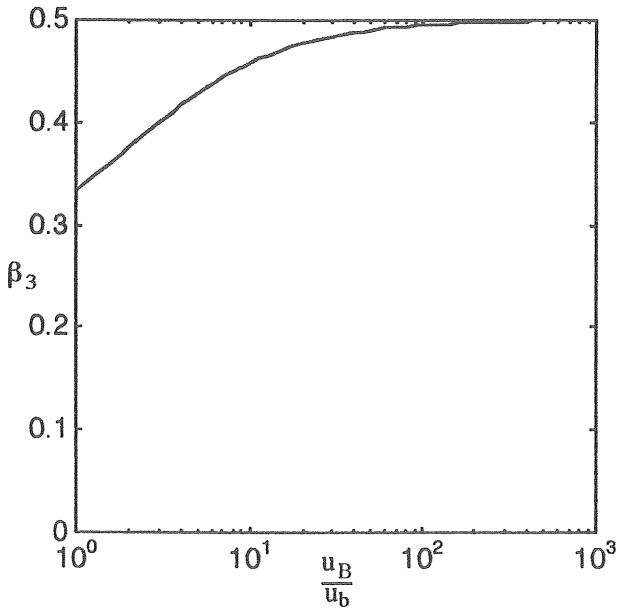
$$\int_A vu\,dA \approx \frac{1}{12}\pi (2R)^2 v_B\, u_b\left(\frac{u_B}{u_b} + 1\right) \qquad (59)$$

Om lokala, laterala hastigheten v antas konstant i hela sektionen och relateras ($v=v_B$) till maximala, lokala hastigheten v_B i lateralled gäller, oberoende av hastighetsfördelningen hos u, att

$$\frac{v_B\int_A udA}{\frac{q}{A\frac{dh}{dA}}Q}=\frac{v_BQ}{\frac{q}{A\frac{dh}{dA}}Q}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{q}{A\frac{dh}{dA}}=v_B \tag{60}$$

Detta ger möjlighet att bestämma *korrektionsfaktorn* β_3 vid en linjär hastighetsfördelning enligt (53) med hjälp av definitionen (49), ekvation (59), sambanden i (60) och med flödet Q uttryckt på formen nederst på sidan 77

$$\beta_3=\frac{1}{2}\frac{\frac{u_B}{u_b}+1}{\frac{u_B}{u_b}+2} \tag{61}$$



Figur 44. Hastighetsberoendet hos korrektionsfaktorn β_3 som funktion av kvoten mellan största och minsta lokala hastigheten i x-led

$$\frac{u_B}{u_b} \to 1 \Rightarrow \beta_3 \to \frac{1}{3}$$
$$\frac{u_B}{u_b} \to \infty \Rightarrow \beta_3 \to \frac{1}{2}$$

Linjär hastighetsfördelning i en tänkt, fylld ekvivalent ledningssektion med radien 2R ger huvudflödets medelhastighet U

$$U = \frac{u_B + 2u_b}{3} \tag{62}$$

och med antagandet att strömningens friktion och retardation i överfallet påverkar hastighetsfördelningen så att[51]

$$u_B - u_b = k_u U - k_v U_x \tag{63}$$

där k_u och k_v är konstanter. Ekvationerna (62) och (63) ger sambandet

$$\frac{u_B}{u_b} = \frac{3U + 2(k_u U - k_v U_x)}{3U - (k_u U - k_v U_x)} \tag{64}$$

I överfallets nedströmsände kommer medelhastigheten U att gå mot noll eftersom ledningen har en dead end, medan U_x är liten i uppströmsänden. Av ekvation (64) framgår att

$$U \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_B}{u_b} \to -2$$
$$U_x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_B}{u_b} \to \frac{3 + 2k_u}{3 - k_u}$$

Ekvation (64) blir singulär för vissa värden på U och U_x. I en nära omgivning till dessa värden har absolutbeloppet av kvoten u_B/u_b maximerats till 100.

I beräkningarna tas viss hänsyn till inverkan av acceleration och viskositet i den kroklinjiga strömningen nära överfallets kant samt ytspänningen i den

[51] Hager W H: Flow in distribution conduits, Proc Instn Mech Engrs, Vol 200, No A3, 1986

fria strålen. Vid höga värden på Froudes tal i sidoöverfallets inströmningssektion är strömlinjerna där mer krökta än vad StVenants ekvationer anger. En parameter justerar nivån med hänsyn till detta. Tabell 3 visar en sammanställning av korrektionerna

Tabell 3. Använda korrektionskonstanter

beteckning	fenomen
k_{up}	krökta strömlinjer i inloppet uppströms
k_p	krökta strömlinjer vid överfallskanten
r_u	rörelsemängdsförluster nära överfallskanten
k_u, k_v	ändrad hastighetsfördelning
c_{11}	ytspänning

Den laterala, hydrostatiska kraften justeras med en dimensionslös faktor så att

$$\frac{1}{2}\rho g(h_1-w)^2 \rightarrow \frac{1}{2}\rho g(h_1-w)^2\left(1+k_p\frac{q^2}{g(h_1-w)^3}+c_{11}\frac{1}{We^2}\right) \qquad (65)$$

I faktorn ingår ett bidrag från den vertikala accelerationen i den kroklinjiga, konvexa strömningen på överfallskanten

$$k_p\frac{\left(\frac{q}{(h_1-w)}\right)^2}{g(h_1-w)}$$

där (h_1-w) antas vara en karakteristisk längd och $k_p>0$ för konvexa strömlinjer. Ett bidrag från ytspänningen till statiska tryckkraften anges med Webers tal We, se teoriavsnittet s 36

$$c_{11}\frac{1}{We^2}\ \frac{1}{2}\rho g(h_1-w)^2$$

De tröga och viskösa krafterna på överfallskanten antas påverka det laterala utflödet av rörelsemängd per längdenhet i termen

$$\rho \frac{|q|q}{r_u(h_1 - w)}$$

och koefficienten r_u antas bero av ett lokalt Reynolds tal Re_t, jämför [43], och kvoten w/h_1, så att

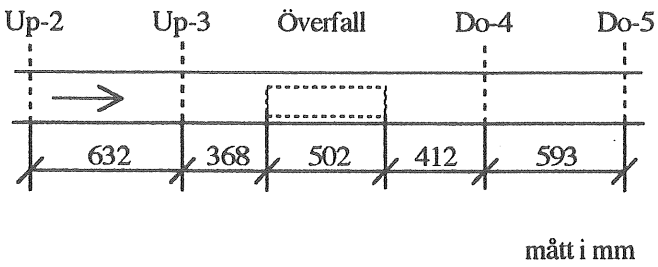
$$r_u = r_{u0} - r_{u1} \ln(Re_t) - r_{u2} \frac{w}{h_1}$$

Med överfallskantens tjocklek t i lateralled, jämför figur 35 i föregående avsnitt, som karakteristisk längd erhålls

$$Re_t = \frac{\frac{q}{(h_1 - w)} t}{\nu}$$

Mätserie 920623, ett exempel

Mitt på den 10.5 m långa experimentledningen sitter det styrbara sidoöverfallet med samma diameter som ledningen (D=0.105 m). Ett tunt mekaniskt filter i ledningens inlopp dämpar de störningar som övergången mellan matarledningen och experimentledningen alstrar. Vattnet tas från laboratoriets högreservoar som håller konstant nivå och flödet regleras med en ventil. Efter ca två timmars flöde genom ledningen stabiliseras vattentemperaturen.



Figur 45. Givarplacering vid mättillfället

Flödet mäts med den induktiva givaren i matarledningen uppströms experimentledningen, onoggrannhet ≤0.05 l/s. Nivågivarna kalibreras inför varje mätomgång och har en skattad onoggrannhet ≤±0.09 cm. Givarnas trådar ökar strömningsmotståndet i ledningen och ger ett litet nivåfel uppströms.

Ledningen och överfallet var båda horisontella under registreringen av denna mätserien. Utloppet nedströms hölls stängt. Ett datorprogram styrde överfallsnivån och registrerade givarsignalerna när strömningen nått stationärt tillstånd. För sju olika inställningar av överfallsnivån, från 1.7 cm till 6.6 cm, och sex olika flöden, från 0.5 l/s till 3 l/s, registrerades inflödet och två nivåer uppströms överfallet (Up-2 och Up-3), överfallsnivån samt två nivåer nedströms (Do-4 och Do-5). Alla givare avlästes med 10 Hz under 50 sekunder. Nivåer och flöden i tabellen nedan representerar medelvärdet under denna tid. I den fem meter långa dead-end-ledningen genererades stående vågor vid superkritisk strömning i överfallet. Vattentemperaturen var 21.2 °C.

Tabell 4. Mätserie med stationär, subkritiskt strömning i dead-end ledning

mätn. nr	inflöde l/s	överfalls-nivå cm	Up-2 nivå cm	Up-3 nivå cm	Do-4 nivå cm	Do-5 nivå cm	anm.
1	0.494	1.66	2.88	2.74	2.52	2.52	super?
2	0.493	2.29	3.02	2.90	2.90	2.90	kritiskt?
3	0.490	3.03	3.64	3.61	3.62	3.62	sub
4	0.490	3.85	4.43	4.42	4.40	4.41	
5	0.489	4.73	5.32	5.31	5.29	5.30	
6	0.489	5.66	6.24	6.23	6.20	6.21	
7	0.488	6.60	7.18	7.15	7.11	7.12	
8	0.990	1.66	4.03	3.86	3.06	3.07	
9	0.990	2.29	4.03	3.83	3.53	3.55	super
10	0.990	3.03	4.13	4.00	4.06	4.07	kritiskt?
11	0.988	3.85	4.79	4.74	4.82	4.83	sub
12	0.988	4.73	5.64	5.61	5.66	5.68	
13	0.988	5.66	6.54	6.52	6.57	6.58	
14	0.987	6.60	7.47	7.44	7.46	7.47	

mätn. nr	inflöde l/s	överfalls-nivå cm	Up-2 nivå cm	Up-3 nivå cm	Do-4 nivå cm	Do-5 nivå cm	anm.
15	1.489	1.66	4.92	4.69	3.45	3.52	
16	1.489	2.29	4.91	4.69	3.98	4.02	super
17	1.489	3.03	4.92	4.69	4.65	4.67	kritiskt?
18	1.488	3.85	5.20	5.02	5.23	5.25	sub
19	1.489	4.73	5.97	5.88	6.02	6.04	
20	1.489	5.66	6.84	6.74	6.89	6.91	
21	1.487	6.60	7.73	7.69	7.78	7.79	
22	1.979	1.66	5.67	5.41	3.85	3.98	
23	1.979	2.29	5.67	5.41	4.42	4.55	super
24	1.979	3.03	5.67	5.42	5.13	5.16	kritiskt?
25	1.979	3.85	5.73	5.48	5.73	5.77	sub
26	1.979	4.73	6.34	6.22	6.42	6.45	
27	1.979	5.66	7.18	7.11	7.26	7.29	
28	1.978	6.60	8.17	8.00	8.14	8.16	
29	2.473	1.66	6.36	6.03	4.08	4.10	
30	2.471	2.29	6.36	6.03	4.76	4.79	
31	2.471	3.03	6.35	6.02	5.60	5.64	super
32	2.472	3.85	6.36	6.04	6.24	6.27	kritiskt?
33	2.471	4.73	6.68	6.46	6.81	6.83	sub
34	2.470	5.66	7.45	7.27	7.59	7.62	
35	-	6.60	-	-	-	-	missad
36	2.968	1.66	6.97	6.53	4.49	4.54	
37	2.969	2.29	6.97	6.55	5.17	5.21	
38	2.968	3.03	6.98	6.54	6.04	6.07	super
39	2.968	3.85	6.98	6.62	6.77	6.79	kritiskt?
40	2.968	4.73	7.07	6.77	7.26	7.29	sub
41	2.970	5.66	7.68	7.48	7.99	8.02	
42	2.967	6.60	8.52	8.33	8.76	8.78	

Kolumnen längst till höger i tabellen innehåller kommentarer om strömningstillståndet eftersom matrisen $F^{-1}G$ i DE (47) blir singulär eller dåligt konditionerad nära kritisk strömning. Givarna uppströms överfallet (Up-2 respektive Up-3) indikerar superkritiskt tillstånd när deras nivåsignaler blir konstanta och oberoende av överfallsnivån.

Simulerad avbördning

Två olika högnivåspråk har använts för att samla och bearbeta data, det tidigare nämnda LabView respektive SIMULINK/MATLAB. Med det förra har jag skrivit ett tjugotal rutiner för styrning av sidoöverfallet, givarkalibrering, insamling och filtrering av mätdata medan det senare utnyttjats för simulering och numerisk beräkning. Ett hundratal egna funktioner eller subrutiner har använts tillsammans med några färdiga rutiner i MATLAB-biblioteket[52]. Till detta hör t ex QUAD8 för numerisk lösning av integraler, Runge-Kutta-rutinen ODE45 för numerisk lösning av differentialekvationen (47) samt minimeringsrutinen FMINS, en simplex-metod av Nelder och Mead, för bestämning av parametervärden.

Rörelsemängdsmodellen DE (47) har tre tillståndsvariabler A, Q och q. Är dessa kända på överfallets rand uppströms eller nedströms kan tillståndet bestämmas i hela överfallet genom numerisk lösning av DE (47), med start på den valda randen. Tillståndet på ränderna är känt antingen genom mätningar eller beräkningar, se Tabell 5.

Tabell 5. Randvillkor för DE (47) i överfallet

tillstånds-variabel	uppströms rand	nedströms rand
A	beräknad	mätt
Q	mätt	noll
q	noll	beräknad

Arean A på randen uppströms räknas fram med DE (47) för q=0 och med hjälp av mätdata från nivågivarna Up-2 och Up-3, se figur 45 ovan. Vid höga värden på Froudes tal kröks strömlinjerna nära inströmningssektionen i överfallets uppströmsände och osäkerheten i det beräknade värdet på A ökar.

[52]MATLAB Referencre Guide, MathWorks Inc, Mass. USA, 1992

I överfallets utströmningssektion mot dead-end-ledningen uppstår virvlar som påverkar djupet. De största virvlarna kan ha samma diameter som ledningen. Nivågivarna Do-4 och Do-5 sitter fyra respektive tio diametrar in i ledningen. Huvudflödet Q är konstant uppströms sidoöverfallet och noll i dead-end ledningen nedströms. Lateralflödet q är noll i inströmningssektionen uppströms liksom i utströmningssektionen nedströms.

I princip spelar det ingen roll från vilken rand man börjar lösa DE (47), men systemmatrisen $F^{-1}G$ i ekvationen är, som tidigare nämnts, dåligt konditionerad för små värden på huvudflödet Q. Lateralflödet q är definierat på randen uppströms. Lösningen av DE (47) startades därför från överfallets uppströmsände i alla beräkningarna. Eftersom flödet Q i ledningens riktning är noll i sidoöverfallets nedströmsände, transporteras ingen lateral rörelsemängd vidare in i dead-end-ledningen. Det ändliga värdet på q alldeles uppströms denna kan uppfattas som det som genererar virvlarna där.

Parametrarna i Tabell 3 ovan bestämdes med hjälp av randvillkoren för sektionsarean A och huvudflödet Q i sidoöverfallets nedströmsände. Summan av kvadraterna på avvikelserna mellan mätt inflöde Q_{in} och beräknad avbördning Q_{ber} i sidoöverfallet respektive mätt nivå h_{do} och beräknad nivå h_{ber} i nedströmsänden minimeras med den ovan nämnda simplex-algoritmen.

$$\left(\frac{Q_{ber}-Q_{in}}{Q_{in}}\right)^2 + str\left(\frac{h_{ber}-h_{do}}{h_{do}}\right)^2 \qquad (66)$$

Med str=1 straffas avvikelserna i flöde och nivå lika hårt. I beräkningarna nedan användes str=5, dvs nivåfel straffades fem ggr mer än flödesfel. Ledningens volym har integrerande verkan på flödet och gör den beräknade arean A mindre känslig för parametervariationer än huvudflödet Q. Faktorn k_{up} för justering av djupet i inströmningssektionen verkar däremot direkt på våta arean.

I det aktuella försöksområdet med subkritisk strömning, $0.5 \leq Q \leq 3$ l/s och $3.0 \leq w \leq 6.6$ cm, varierar beräkningsmodellens känslighet för parametrarna. Vid låga laterala energinivåer (h_1-w) spelar ytspänningen och parametern c_{11} större roll, jämför t ex Figur 18 i teoriavsnittet. Höga värden på Froudes tal ger en krökt vattenyta i inströmningssektionen till sidoöverfallet och större känslighet för parametern k_{up}. Parametrarna ställdes in med hjälp av

två olika strömningstillstånd, först ett med högt Froudes tal och stor lateral energi och ett annat med lågt Froudes tal och liten lateral energi (mätning 19 respektive nr 3 i Tabell 4). I det första fallet tilläts alla parametrar utom c_{11} variera, och i det andra varierades enbart parametern c_{11}. Under dessa förutsättningar gav parametervärdena i Tabell 6 det minsta värdet på förlustfunktionen för mätning nr 19. När förlustfunktionens värde understeg 5 10^{-4} avbröts minimeringen och parametervärdena avlästes.

Tabell 6. Parametervärden skattade ur mätning nr 3 och nr 19 i Tabell 4.

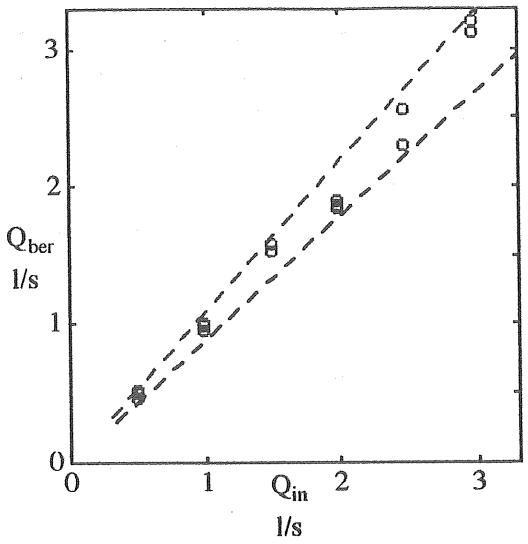
k_{up}	k_r	r_{u0}	r_{u1}	r_{u2}	k_u	k_v	c_{11}
1.15	1.57	4.58	0.550	0.104	1.61	-0.446	-2.80

Av de registrerade mätningarna i Tabell 4 klassades 22 st som subkritiska. Med parametervärdena inställda enligt Tabell 6 simulerades flödet och nivån längs överfallet för varje mätning genom numeriskt lösning av DE (47) med de villkor som gällde på randen uppströms, i sidoöverfallets inlopp. Modellen för beräkning av den korrigerade nivå h_{upw} i inloppet var

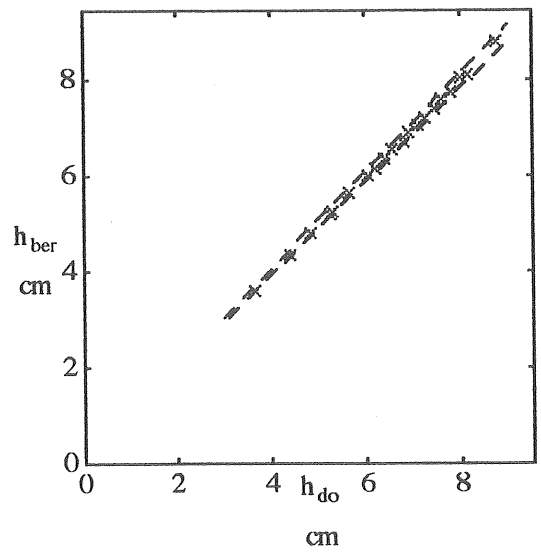
$$h_{upw} = h_{up} + k_{up}\frac{Fr^2}{k_{up}+Fr^2}(w-h_{up}) \qquad (67)$$

där nivån h_{up} är beräknad ur nivågivardata uppströms sidoöverfallet och Fr Froudes tal i inloppssektionen. Lösningen till ekvation (67) itererades fram eftersom Froudes tal beror av h_{upw}.

Av de 22 mätningarna motsvarade två, nr 25 och nr 40, nästan kritisk strömning och redovisas inte i figur 46. Simuleringsmodellen fungerade dåligt i båda fallen och för mätning nr 40 blev lösningen singulär. Simuleringen av mätning nr 25 redovisas i figur 53 nedan. Det stora simuleringsfelet har minst två källor. Dels är systemmatrisen $F^{-1}G$ illa konditionerad nära kritisk strömning, dels fungerar modellen för den skattade nivån h_{upw} i överfallets inlopp sämre då Froudes tal avviker mycket från det som parametern k_{up} ställdes in för. Skillnaden mellan mätt och beräknad avbördning var mindre än ±7 % i överfallet för 19 av de 22 mätningarna med subkritisk strömning. Överensstämmelsen mellan mätt nivå h_{do} på överfallets rand nedströms och den simulerade nivån h_{ber} redovisas i figur 47. Avvikelsen mellan mätt och beräknad nivå var mindre än ±1% utom i ett fall. Figurerna 46 och 47 visar att flöde och nivå har olika känslighet för data- och parametervariationer i beräkningarna, något som också påpekats tidigare.

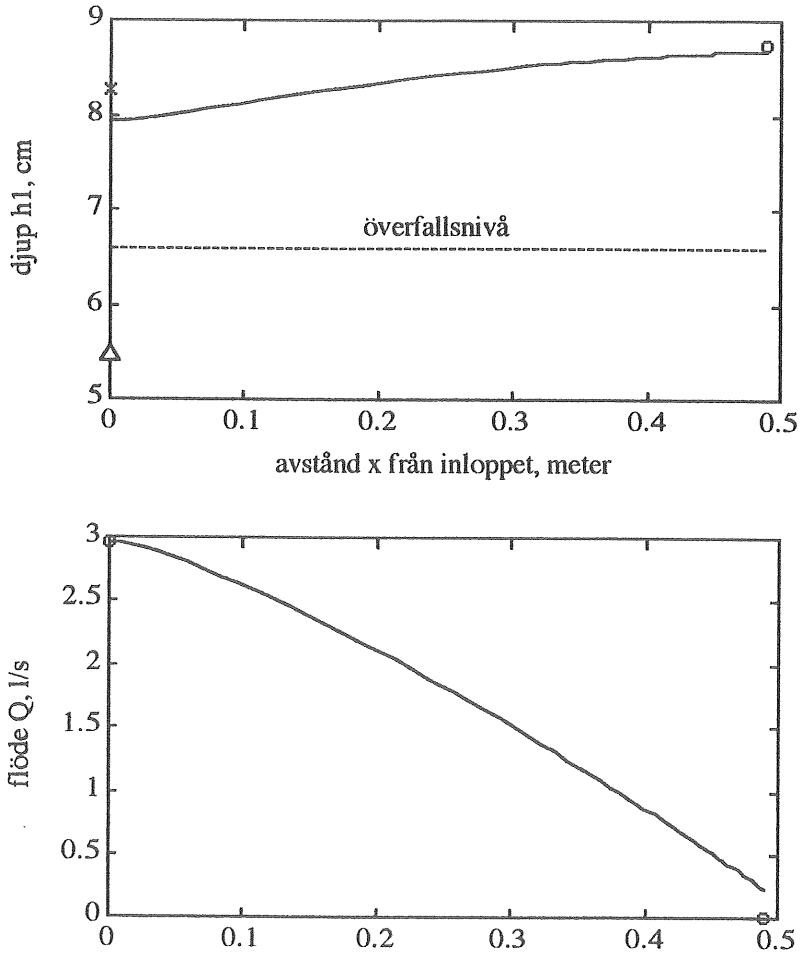


Figur 46. Överensstämmelsen (o) mellan mätt avbördning Q_{in} och beräk nad Q_{ber} i sidoöverfallet för 20 mätningar och med avvikelserna ±10% inlagda som streckade linjer



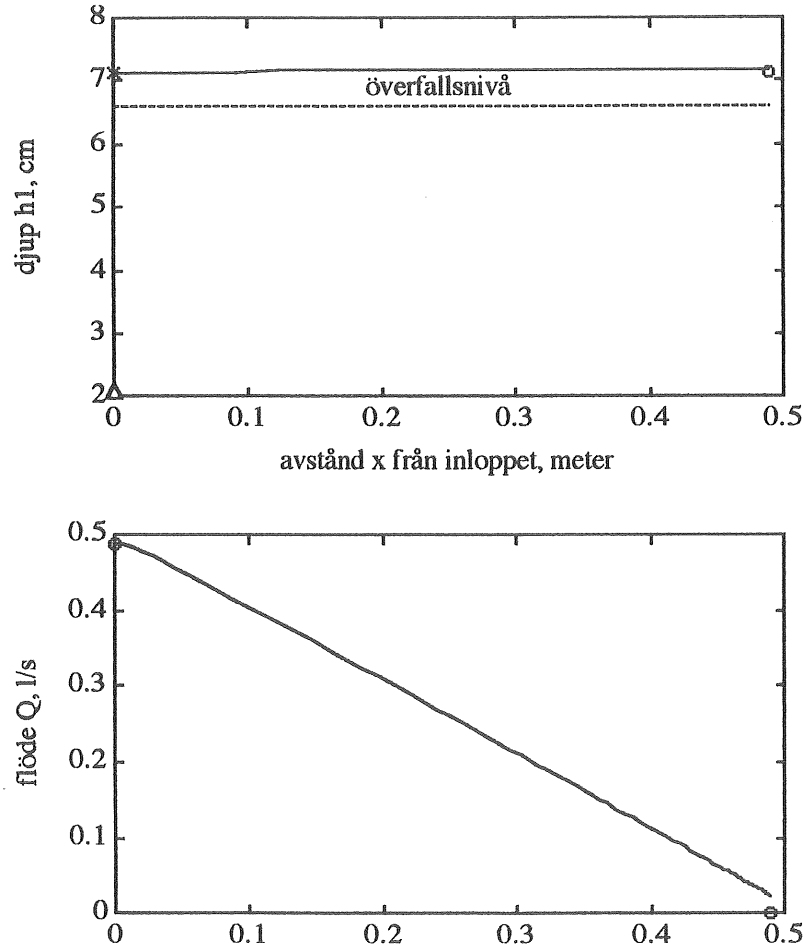
Figur 47. Överensstämmelsen (x) mellan mätt nivå h_{do} på randen ned ströms och beräknad h_{ber} i sidoöverfallet för 20 mätningar och med avvikelserna ±2% inlagda som streckade linjer

Figurerna 48-53 är exempel på nivåer och flöden i sidoöverfallet som beräknats ur mätdata i Tabell 4. Den övre halvan i figurerna visar vattenytans profil utefter sidoöverfallet, vid innerväggen. Ringen (o) markerar mätt nivå nedströms, krysset (x) beräknad nivå h_{up} i inloppssektionen och triangeln (Δ) beräknat, kritiskt vattendjup h_c utan sidoöverfall. Den undre halvan visar huvudflödets Q variation längs sidoöverfallet med kända flöden i in- och utloppsektionerna markerade med ringar.



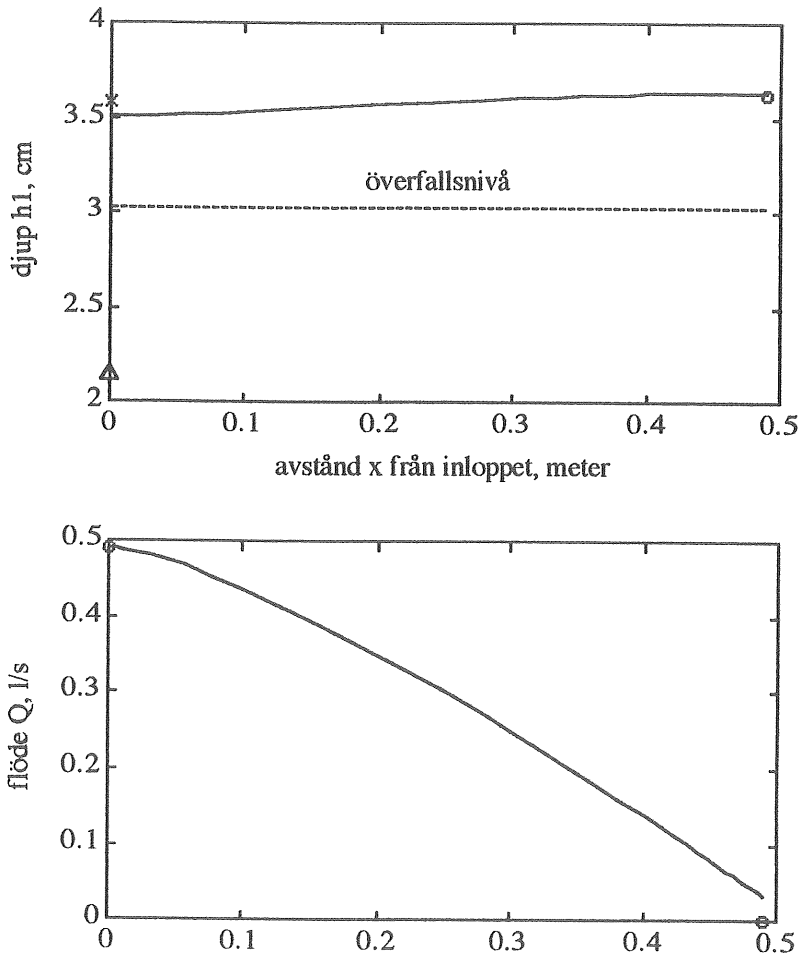
Figur 48 Simulering av nivå och huvudflöde utefter sidoöverfallet för mätning nr 42 i Tabell 4. Parameterinställning enligt Tabell 6. Mätta nivåer och flöden (o), beräknad nivå och kritiskt djup i inloppssektionen (x) respektive (Δ)

Med sidoöverfallet i mätseriens översta läge och med det största flödet får det simulerade flödet och nivån i överfallet ett utseende som figur 48 visar. Enligt simuleringen avbördas inte allt inkommande vatten. Flödesresten motsvarar avbördningsfelet -7.9 % vid nivåfelet -1% relativt mätta värden. Vattenytan börjar och slutar horisontellt med en inflexionspunkt någonstans i sidoöverfallet. Flödesprofilen visar att det laterala flödet per längdenhet q växer från noll till ett nästan konstant värde en bit in sidoöverfallet.



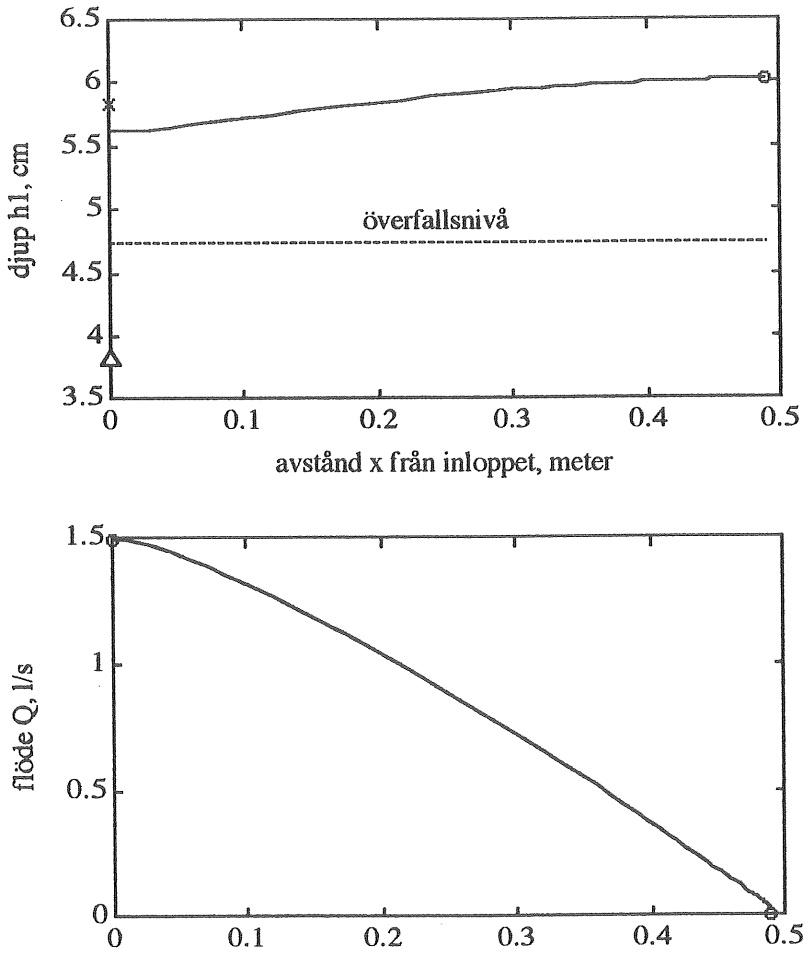
Figur 49. Simulering av nivå och huvudflöde utefter sidoöverfallet för mätning nr 7 i Tabell 4. Parameterinställning enligt Tabell 6. Mätta nivåer och flöden (o), beräknad nivå och kritiskt djup i inloppssektionen (x) respektive (Δ)

Figur 49 simulerar minsta flödet med överfallskanten i mätseriens översta läge (mätning nr 7 i Tabell 4). Nivåskillnaden mellan vattenytan och överfallskanten är nästan konstant och mindre än 0.5 cm, varför ytspänningen påverkar strömningstillståndet. Avbördningen eller lateralflödet q är nästan konstant utefter hela överfallet. Figur 50 visar samma flöde men med överfallskanten sänkt till knappt hälften av nivån i Figur 49. Här ser man tydligt hur djupet stiger i flödets huvudriktning och att lateralflödet q per längdenhet växer mot överfallets nedströmsände.

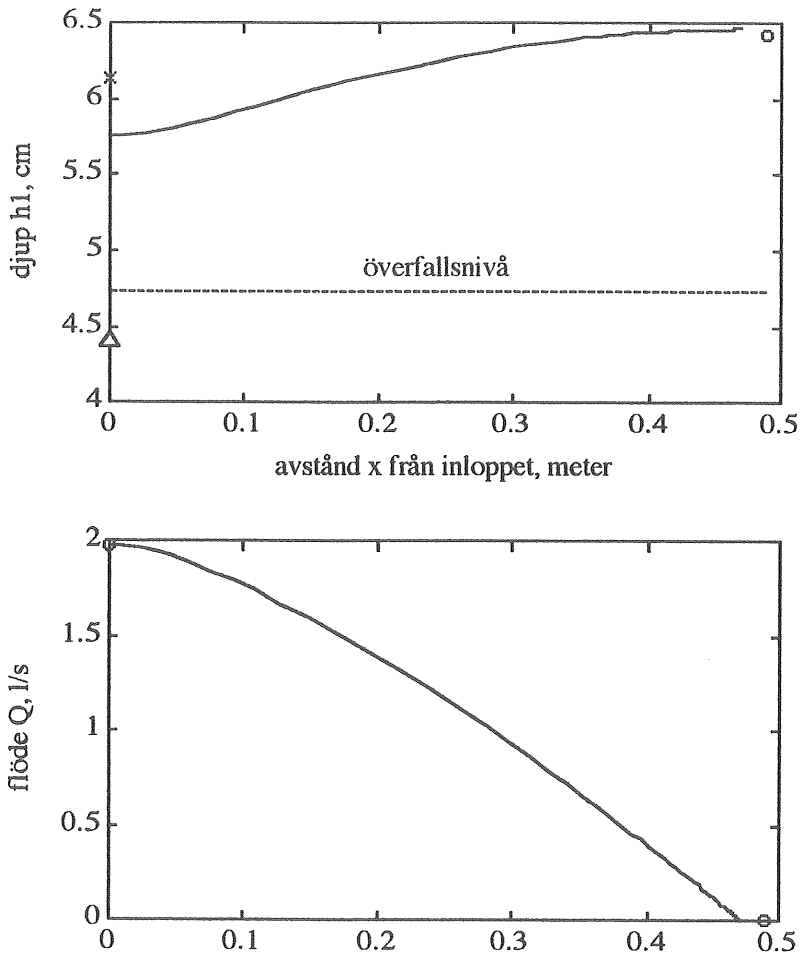


Figur 50. Simulering av nivå och huvudflöde utefter sidoöverfallet för mätning nr 3 i Tabell 4. Parameterinställning enligt Tabell 6. Mätta nivåer och flöden (o), beräknad nivå och kritiskt djup i inloppssektionen (x) respektive (Δ)

Alla parametrarna utom c_{11} kalibrerades för det fall som visas i figur 51. Den lilla avvikelsen i flödet nedströms beror på att simuleringen är gjord efter justeringen av c_{11} i mätning nr 3. Froudes tal i inloppet ger en skillnad mellan nivån h_{up} beräknad med StVenants ekvationer utan lateralflöde och simuleringens randvillkor med djupet h_{upw} beräknat med ekvation (67).



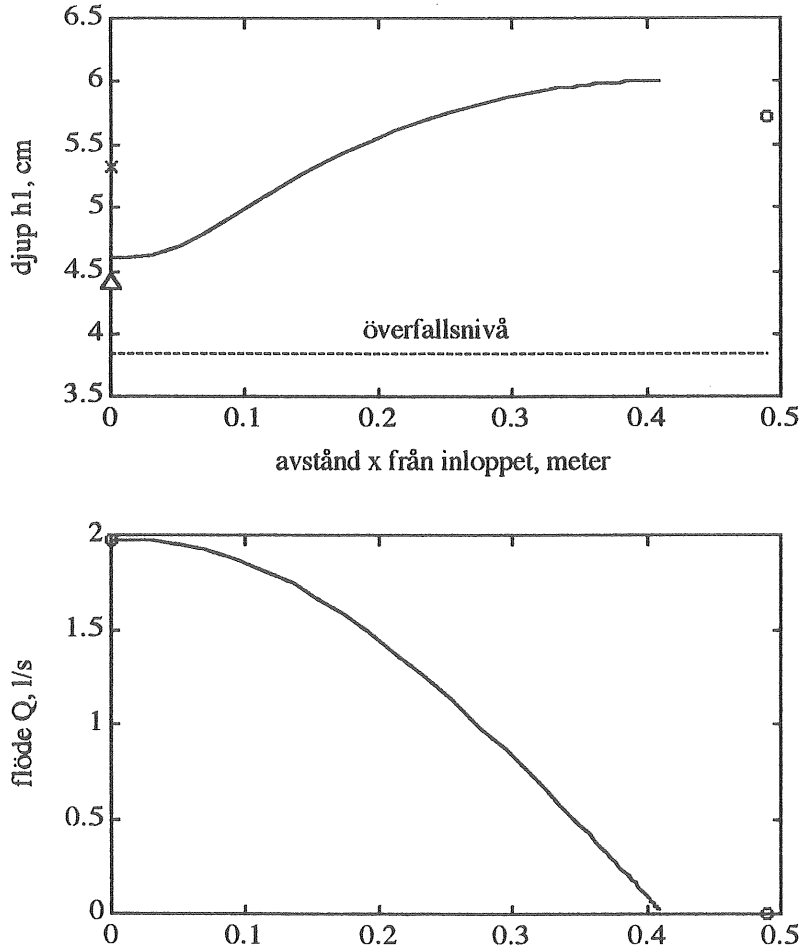
Figur 51. Simulering av nivå och huvudflöde utefter sidoöverfallet för mätning nr 19 i Tabell 4. Parameterinställning enligt Tabell 6. Mätta nivåer och flöden (o), beräknad nivå och kritiskt djup i inloppssektionen (x) respektive (Δ)



Figur 52. Simulering av nivå och huvudflöde utefter sidoöverfallet för mätning nr 26 i Tabell 4. Parameterinställning enligt Tabell 6. Mätta nivåer och flöden (o), beräknad nivå och kritiskt djup i inloppssektionen (x) respektive (Δ)

Sidoöverfallet avbördar enligt Figur 52 hela inflödet på en sträcka mindre än överfallets verkliga längd. Eftersom flödet Q inte kan bli negativt avbryts lösningen av DE (47) för $Q \leq 0$. Avvikelsen i flödet defineras där som produkten av flödets gradient i den punkt där $Q=0$ och avståndet därifrån till randen nedströms. Avvikelsen i figuren motsvarar 5.6% av inflödet. Figur 53

visar den simulering i serien som avvek mest på randen nedströms. Som nämnts tidigare är systemmatrisen illa konditionerad nära kritisk strömning vilket gör lösningen osäker. Den höga hastigheten i inloppet till överfallet och vattnets tröghet medför att det laterala flödet per längdenhet q når sin nästan konstanta intensitet först en bra bit (ca 0.25 m) in i överfallet



Figur 53. Simulering av nivå och huvudflöde utefter sidoöverfallet för mätning nr 25 i Tabell 4. Parameterinställning enligt Tabell 6. Mätta nivåer och flöden (o), beräknad nivå och kritiskt djup i inloppssektionen (x) respektive (Δ)

Känslighetsanalys

Hur fel i mätningar och parameterskattningar påverkar beräkningarna kan studeras i en känslighetsanalys. Simuleringsmodellen är emellertid så komplex att risken är stor att jag förlorar överblicken eller gör formfel vid en rent matematisk analys. Det känns därför säkrare att studera den numeriskt, även om analysen förlorar i allmän giltighet och exakthet. Alla registrerade värden på vattendjupet h_1, överfallsnivån w och huvudflödet Q har onoggrannheter som skattats i avsnittet om mätfel.

$\Delta h_1 = 5.7\ 10^{-3} h + 0.031$ cm

$\Delta w = 5.7\ 10^{-3} w + 0.061$ cm

$\Delta Q = 7.7\ 10^{-3} Q + 0.011$ l/s

Vid simuleringen relateras nivåfelen till nivågivaren Do-4 i dead-end-ledningen medan flödesfelen relateras till flödet i överfallets inlopp. Relativa känsligheten för fel i nivåregistreringen är större vid små flöden med låga värden på den lateralt drivande energin (h_1-w). Mätning nr 7 i tabell 4 ovan ger t ex ett skattat maximalt fel i nivåskillnaden (h_1-w)

$$\Delta(h_1 - w) \leq 5.7\ 10^{-3}(h_1 + w) + 0.092 = 0.17 \text{ cm}$$

vilket motsvarar relativa felet i nivåskillnad

$$\frac{\Delta(h_1 - w)}{h_1 - w} \leq 33\%$$

Simulering av felet ±0.17 cm i nivån på randen uppströms ger en variation ≤±56% i det simulerade flödet på randen nedströms, relaterat till flödet 0.5 l/s i inströmningssektionen. Den maximala mätta nivåavvikelsen var enligt avsnittet om mätfel ca en tredjedel av den maximala beräknade och ger en simulerad flödesvariation ≤±19%. Vid dessa låga flöden i laboratoriemodellen är skattningen av nivån uppströms kritisk för simuleringsresultatet. Görs samma analys för ett större flöde t ex för mätning nr 26 med (Q=1.98 l/s) erhålls det teoretiskt maximala nivåskillnadsfelet p s s

$$\Delta(h_1 - w) \leq 5.7\ 10^{-3}(h_1 + w) + 0.092 = 0.16 \text{ cm}$$

med relativa felet

$$\frac{\Delta(h_1-w)}{h_1-w} \leq 9.2\%$$

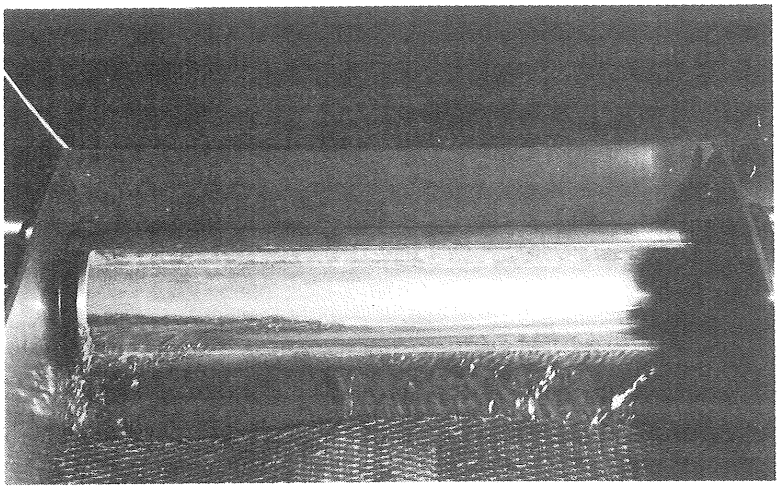
och en motsvarande simulerad flödesvariation i nedströmsänden $\leq\pm 18\%$ relativt inflödet uppströms. Det mätta maximala nivåfelet är en tredjedel av det teoretiskt maximala och ger 6.2% simulerat flödesfel. Grovt räknat tycks ett relativfel i nivåskillnad ge dubbelt så stort relativt fel i det simulerade flödet i nedströmsänden, vilket i detta fall med dead-end-ledning också motsvarar felet i avbördat flöde. Omvänt tycks ett relativt fel av storleksordningen ±5% i flödet Q uppströms sidoöverfallet ge $\leq\pm 1\%$ variation i nivå nedströms och $\leq\pm 3\%$ variation i avbördat flöde.

De åtta parametrarna i simuleringsmodellen påverkar beräkningarna olika. För att få en kvalitativ uppfattning om hur, testade jag parametervariationer på ±10% runt det skattade värdet i Tabell 6 ovan. Variationen prövades på tre olika flöden och överfallsnivåer, mätning nr 7, nr 19 respektive nr 41 i Tabell 4. Sammanställningen i Tabell 7 visar resultatet av känslighetsanalysen, med en parameter per rad. Om en ökning av parametervärdet ger en minskning i simulerat flöde har parametern markerats med minustecken i tabellen.

Tabell 7. Modellkänslighet för parametervariationer

parameter	mätning nr 7		mätning nr 19		mätning nr 41	
±10 %	ΔQ %	Δh %	ΔQ %	Δh %	ΔQ %	Δh %
$-k_{up}$	±0	±0	±0.50	±0.050	±1.4	±0.15
k_r	±5.7	±0	±4.4	±0.050	±3.5	±0.10
r_{u0}	±57	±0.050	±47	±0.25	±45	±0.10
$-r_{u1}$	±44	±0.050	±39	±0.10	±38	±0
$-r_{u2}$	±1.2	±0	±1.1	±0	±0.85	±0
k_u	±0	±0	±0.10	±0	±0.50	±0.10
k_v	±0	±0	±0	±0	±0	±0
$-c_{11}$	±4.9	±0	±0.95	±0	±0.45	±0

Känsligast är det simulerade, avbördade flödet. Störst inverkan får en variation i parametrarna r_{u0} och r_{u1} med en 50-procentig ändring i avbördat flöde. Därnäst kommer parametern k_r med en 5-procentig inverkan. Som väntat har ytspänningens parameter c_{11} större inverkan vid små nivåskillnader mellan vattenytan och överfallskanten. Den simulerade nivån påverkas bara marginellt av parametervariationerna. Förklaringen till den stora inverkan av parametrarna r_{u0} och r_{u1} finner man i DE (47) och i matrisen G, där dessa direkt i parametern r_u påverkar gradienten q_x, som dessutom beror kvadratiskt av lateralflödet per längdenhet q. Här finner man att parametern k_r, som korrigerar termen $g/2(h_1\text{-}w)^2$ i vektorn b, också direkt påverkar gradienten q_x.



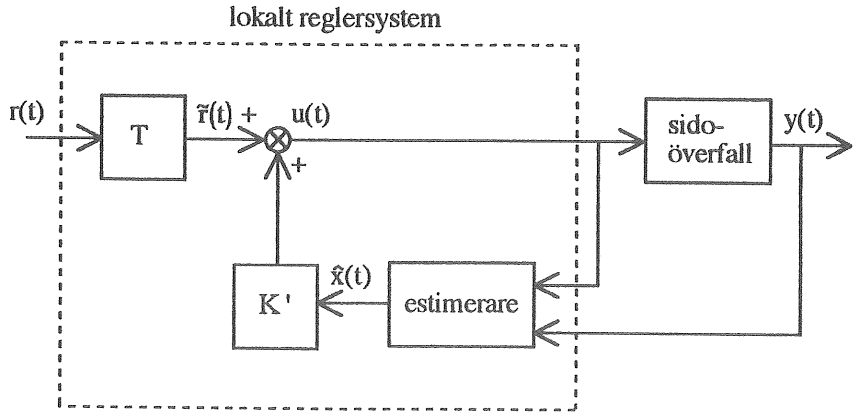
Reglerobjektet

Ett kort allmänt resonemang om lokal reglering inleder en dynamisk beskrivning av sidoöverfallet. Denna innehåller dels exempel på ett registrerat transient flödesförlopp vid en snabb stängning av sidoöverfallet dels en numerisk simulering av samma snabba stängning. Avsnittet avslutas med en kort reflexion över observerbarhet och styrbarhet

Allmänt

För att styra ett dagvattennät behövs *global* information om tillståndet i detta, om nederbörden i tillhörande avrinningsområde samt möjligheten att reglera överfall och pumpar. Ett överordnat styrsystem för en större stad blir komplext och kräver avancerade hjälpmedel för automatisk generering av en "optimal" strategi för regleringen av volymer, nivåer eller flöden i nätet. Kan regleringen läggas ut *lokalt* avlastas det överordnade systemet. En lokal regulator behöver referensvärden att följa eller hålla. En av det överordnade systemets uppgifter blir att bestämma lämpliga referensvärden för dessa regulatorer, med hänsyn till väderlek, ledningarnas fyllnadsgrad, magasinerings- och reningskapacitet, översvämningsrisk mm.

Figuren 54 illustrerar ett tänkbart, lokalt reglersystem till ett sidoöverfall. Blocken symboliserar delsystem och pilarna visar informationens (signalernas) riktning.



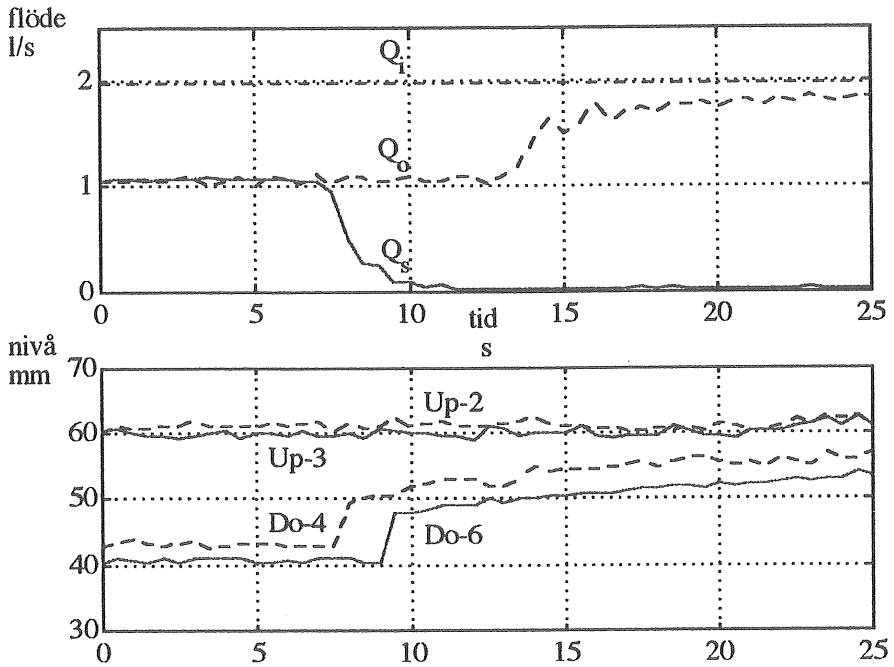
Figur 54. Lokalt reglersystem

Signalen r(t) från det överordnade systemet representerar referensvärden dvs önskade, lokala värden på t ex flöde eller nivån nedströms, nära sidoöverfallet. Om r(t) är konstant eller varierar med tiden t har betydelse för kraven på reglersystemets egenskaper. Blocket T omformar r(t) till en anpassad referenssignal. Utsignalen y(t) representerar informationen från nivågivare som placerats upp- och nedströms sidoöverfallet och från eventuella flödesmätare. Styrlagen u(t) kan motsvara överfallskantens nivå eller volym- och

rörelsemängdflöden som skall ge önskat r(t). Estimeraren gör en numerisk skattning av det hydrauliska tillståndet på ledningssträckan mellan givarna upp- och nedströms sidoöverfallet. Med hjälp av informationen i y(t) och styrlagen u(t) beräknar estimeraren en tillståndsvektor $\hat{x}(t)$ för ledningssträckan, information som återkopplas via förstärkarmatrisen K'. Estimeraren kan innehålla prediktering för ett antal tidsteg Δt in i framtiden och sparad information om styrlagen u och mätvärdena y flera tidsteg tillbaka i tiden för att kompensera de fördröjningar som den ändliga våghastigheten orsakar.

Reglerobjektet

Strömningstillståndet på ledningssträckan med sidoöverfall kan beskrivas på olika sätt. Reglersystemet förutsätter en beskrivning som innehåller de dynamiska egenskaperna. Dessa kan exempelvis studeras i laboratorieförsök. Figur 55 visar registrerade, transienta förlopp orsakade av en mycket snabb stängning av sidoöverfallet i den 10.5 m långa modelledning som beskrivits i avsnittet om laboratorieförsöken.



Figur 55. Transient förlopp vid stängning av sidoöverfallet

Mätningen startade från ett stationärtillstånd med inflödet 2 l/s och där halva flödet avbördades i sidoöverfallet mitt på ledningen och resten av vattnet fortsatte mot ledningens utlopp. Detta var helt öppet och fritt under försöket. Efter drygt sex sekunder stängdes sidoöverfallet hastigt och registrerad tidvariation i inflöde Q_i, överfallsflöde Q_s och flödet Q_o i ledningens ände framgår av den övre halvan i figuren 55 ovan. Den branta fronten från det växande flödet i ledningen nedströms sidoöverfallet nådde utloppet ca sju sekunder efter stängningen. I slutet av registreringen, ca 19 sekunder efter stängningen, hade strömningen ännu inte nått det nya stationärtillståndet.

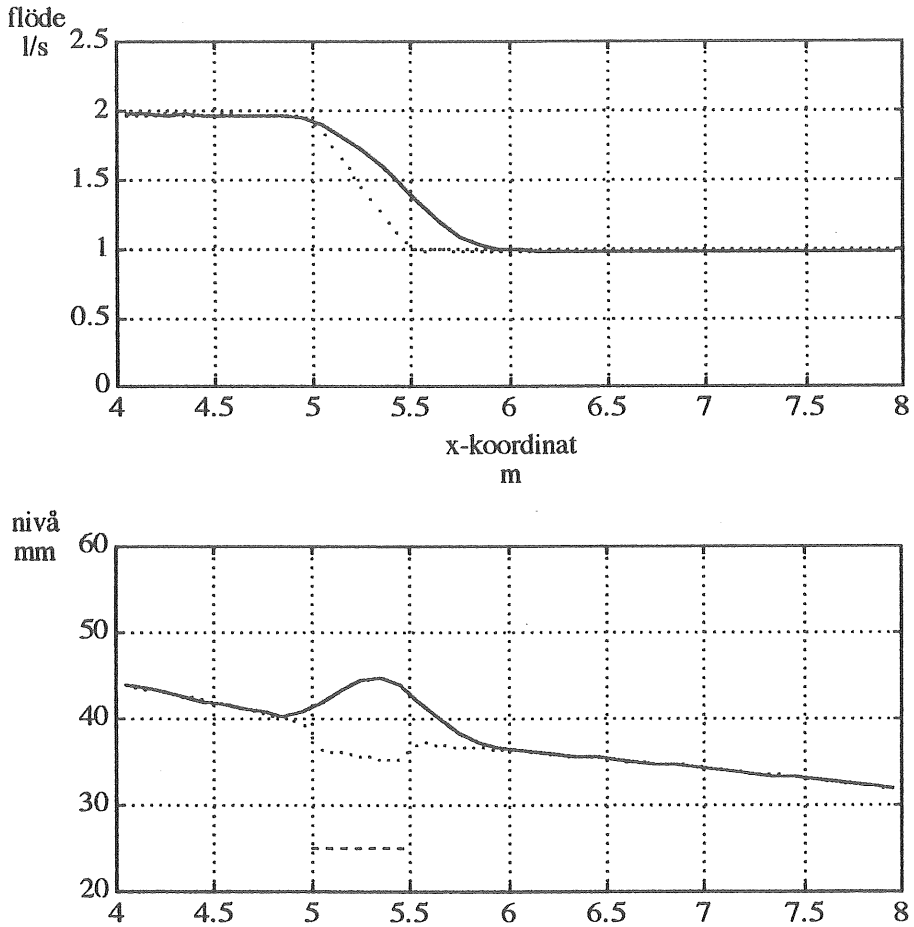
Uppströms sidoöverfallet satt nivågivarna Up-2 och Up-3 på avstånden 1.0 m respektive 0.37 m från överfallets uppströmsände. Nedströms fanns nivågivaren Do4 på avståndet 0.41 m från överfallets nedströmsände och Do-6 på avståndet 2.6 m. I den undre figurhalvan ser man signalerna från de två givarna uppströms på nivån 60 mm, medan de båda givarna nedströms börjar på drygt 40 mm. Vågfronten utbredde sig snabbast i flödesriktningen och nivågivaren Do-4 registrerade fronten mindre än en sekund efter stängningens början. Givaren Up-3 som satt närmare överfallet uppströms nåddes först efter ca tio sekunder av en svag våg. Vore strömningen vid Up-3 superkritisk hela tiden skulle ingen information om stängningen nå dit.

Dynamisk modell av ett sidoöverfall

Fluider, som vatten, tillhör klassen kontinuerliga system där tillståndsvektorn beror av tiden och rummet. Genom diskretisering kan man approximera det kontinuerliga systemet med ett ändligt antal tillstånd i ett ändligt antal punkter i rummet. Saint Venants ekvationer beskriver kanalströmningen med tillståndsvektorer som har två eller tre element och är kopplade till energin (potentiell eller kinetisk) i ett finit-volym element.

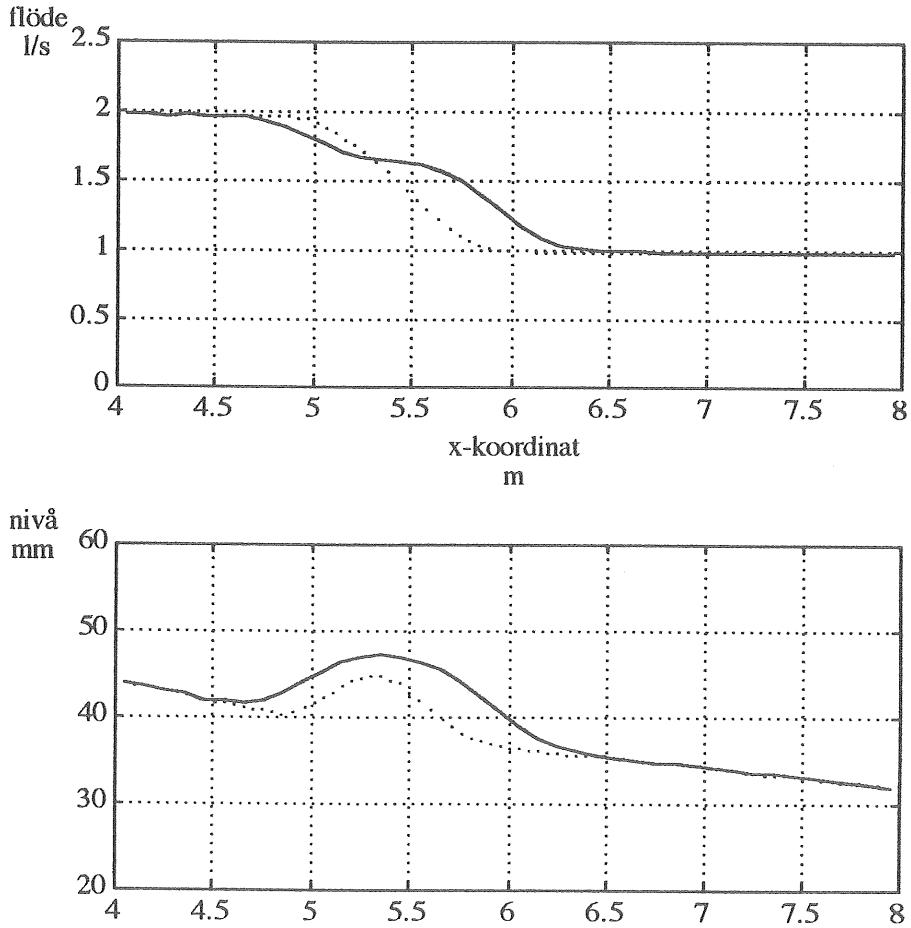
Ett förlopp, liknande det transienta ovan, har simulerats enligt Godunovs metod i en dynamisk, finit-volym modell. Jämför med ekvation (11) i teoriavsnittet. Diskretiseringen uppfyllde CFL-villkoret. Volymelementen hade utsträckningen Δx=0.1 m och i simuleringen valdes tidsteget Δt=0.05 s. För att underlätta utvecklingsarbetet gjordes vissa förenklingar. En rektangulär sektion och en enklare avbördningsformel användes i lösningsalgoritmen. För simuleringen valdes samma inflöde som vid mättillfället och en kanalbredd som gav djup som liknande det stationärtillstånd som rådde innan sidoöverfallet stängdes med samma hastighet som i laboratorieförsöken, dvs med en hastighet av 100 mm/s. Figur 56 nedan visar det simulerade, statio-

nära begynnelsetillståndet vid tiden t=0 (prickade kurvor) och tillståndet vid t=0.5 s (heldragna kurvor) utefter ledningssträckan 4 m<x<8 m. Nivågivaren Up-2 har koordinaten x≈4 och koordinaten för Do-6 motsvarar x≈8. En kort, streckad linje i nivådiagrammet markerar nivån på sidoöverfallets 0.5 m långa krön före stängningen vid t=0. Med en nivåhöjning på 100 mm/s hamnar sidoöverfallets kant över vattenytan och stoppar avbördningen helt inom 0.2 s, motsvarande fyra tidssteg i simuleringen.



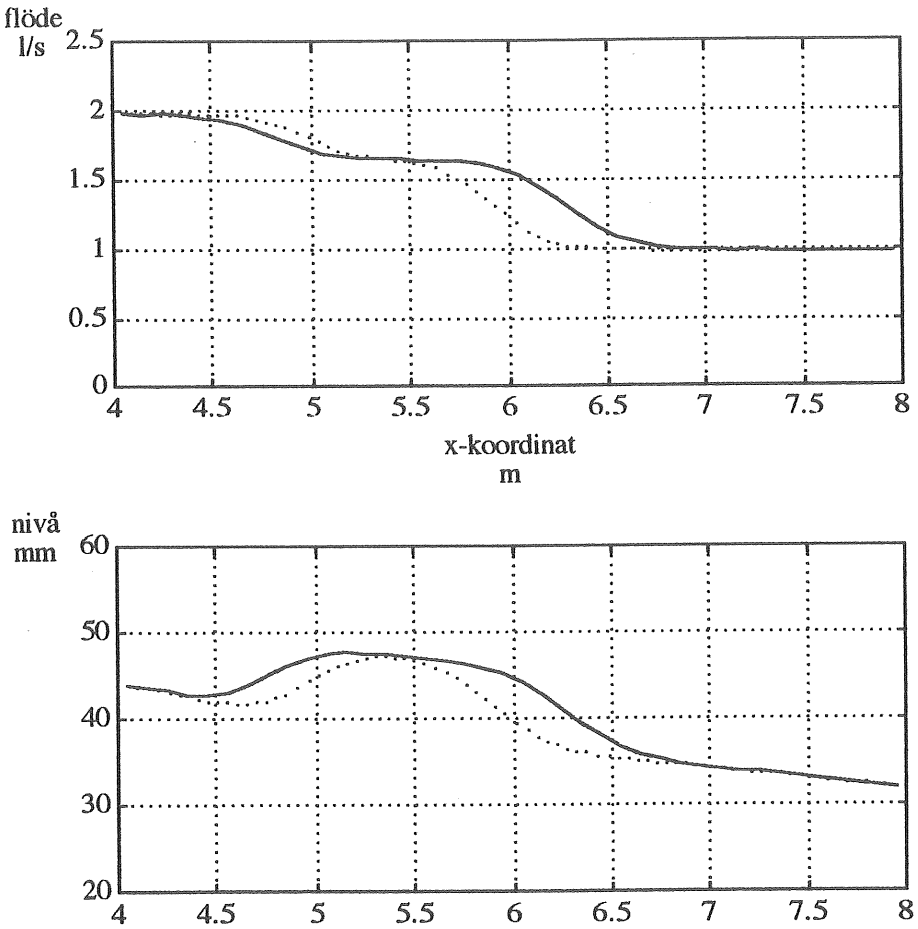
Figur 56. Simulerade tillstånd, flöde respektive nivå, 0.5 s efter stängningen av sidoöverfallet (heldragna linjer). Prickade linjer visar tillståndet 0.5 s tidigare. Den korta, streckade linjen i nivådiagrammet markerar överfallets läge vid t=0

En nivåhöjning och en flödesvåg genereras i sidoöverfallet under stängningen. Den övre figurhalvans heldragna flödeskurva antyder en bruten front strax uppströms sidoöverfallets nedre ände. Frontens övre del består av en instabil chock eller solfjädervåg som breder ut sig uppströms medan den undre rör sig i flödesriktningen. Den simulerade vattennivån en halv sekund efter stängningen visar en kraftig puckel nära mitten av sidoöverfallet. Vatten kommer in i överfallet uppströms medan vattenmassan nedströms ännu inte hunnit accelerera i det stängda sidoöverfallet. I Figur 57 beskriver de heldragna linjerna situationen ytterligare en halv sekund senare.

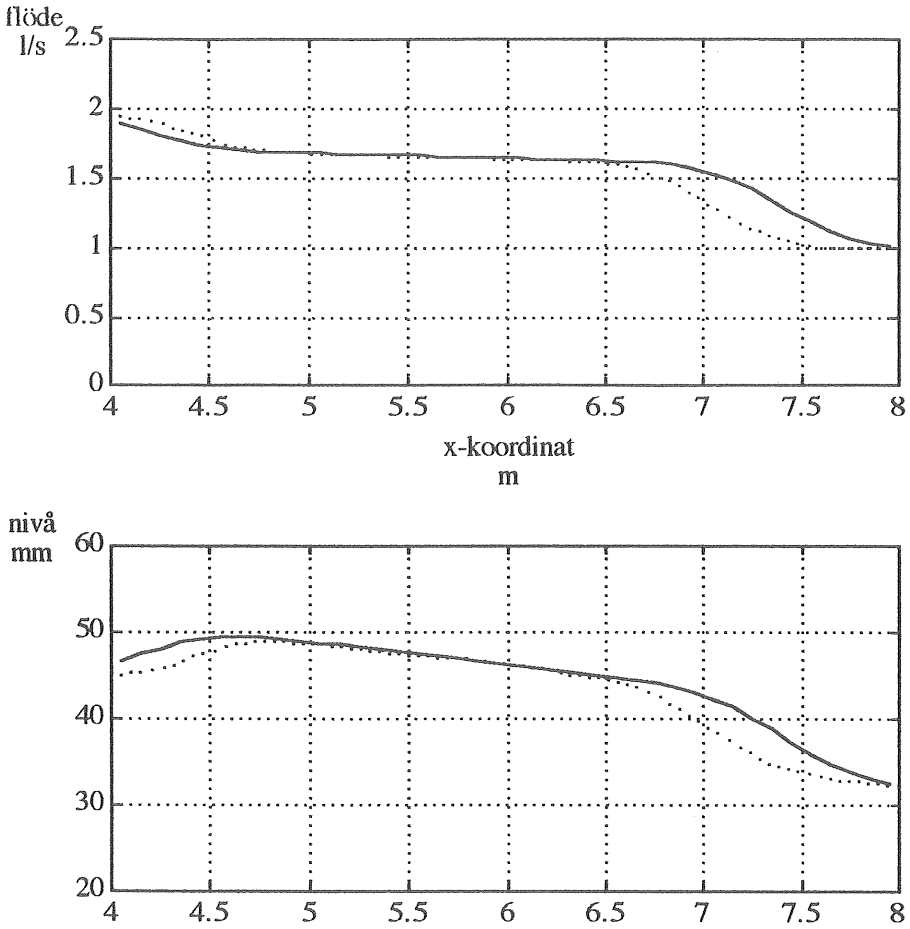


Figur 57. Simulerade tillstånd 1.0 s efter stängningen av sidoöverfallet. Den prickade linjen markerar tillstånd 0.5 s tidigare

Flödet i övre figurhalvan visar tydligt delningen i en vågfront som börjar röra sig uppströms och en som rör sig i huvudflödets riktning. I Figurerna 58 och 59 ser man att flödesfronten som rör sig mot strömmen är instabil och försvagas medan den andra fronten stabiliseras och rör sig mot ledningens utlopp nedströms. Vid tiden t=3.0 s har den simulerade strömningsbilden (heldragen linje) på ledningssträckan förändrats så som figur 59 visar. Den prickade linjen representerar tillståndet 0.5 s tidigare. Den stabila vågfronten är ca 10 mm hög.



Figur 58. Simulerade tillstånd 1.5 s efter stängningen av sidoöverfallet. Prickade linjer markerar tillstånd 0.5 s tidigare.



Figur 59. Strömningen 3 sekunder efter stängningen. Prickade linjer mar kerar tillstånd 0.5 s tidigare.

Presentationen av mätresultaten visar tidsförloppet i respektive givarposition medan datorsimuleringen visar tillståndet utefter ledningen vid en viss tidpunkt, varför framställningarna inte kan jämföras direkt. Ur de mätta kurvorna i figur 55 skattas hastigheten nedströms till ca 1.2 m/s på en vågfront med maximala brantheten 12 mm/s. Den simulerade fronten i Figur 59 ovan rör sig i flödets riktning med ca 1 m/s och har brantheten 10 mm/s. Flödeshastigheten framför fronten är ungefär 0.33 m/s i båda fallen. Skillnaderna kan bl a bero på att sektionsformerna och djupen inte överensstämmer och på det förenklade uttrycket på avbördningen. I simuleringen är den matematiska modellen av 1:a ordningen och smetar därför ut fronten något, vidare kan behandlingen av källtermerna förbättras.

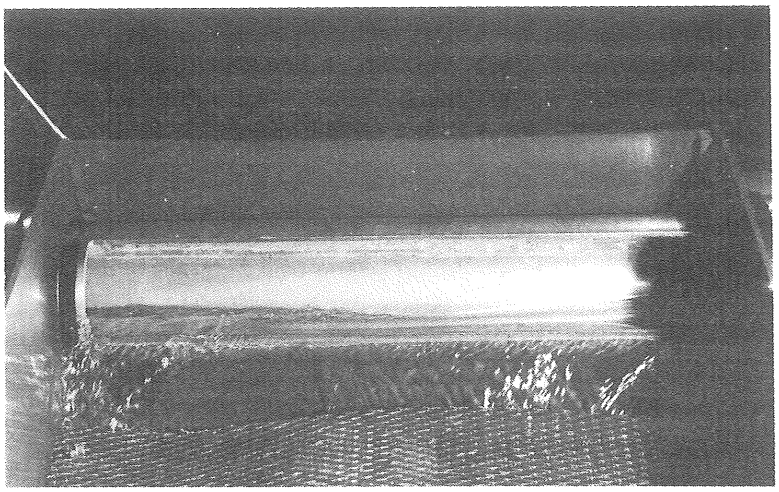
Om man använder skalfaktorn för längd λ_L=15.4 i Tabell 1 s 43 i Froudes modellregel kan man översätta simuleringsresultaten till en prototypledning med rektangulär sektion och bredden B=1.3 m. I protypen skulle en ca 0.15 m hög vågfront röra sig nedströms med 4 m/s efter stängningen av sidoöverfallet. Simuleringens flöde före stängningen motsvarar 0.93 m^3/s i prototypen och som i fronten växer till intensiteten 1.5 m^3/s och bakom denna långsamt växer mot slutvärdet 1.9 m^3/s.

Observerbarhet och styrbarhet

Av simuleringen framgår att alla tillstånden på den den aktuella ledningssträckan kan bestämmas, dvs är observerbara, om tillståndet är känt på ränderna upp- och nedströms. Detta gäller för hyperboliska system enligt teoriavsnittet ovan. Inverkan av ofullständig information om begynnelsetillståndet vid t=0 klingar av med tiden, allteftersom vågorna vandrar ut ur området. Mäts inte flödet på randen kan detta troligen estimeras med hjälp av tre nivågivare genom att nivån på den mellersta givaren predikteras och ett beräknat flöde korrigeras så att skillnaden mellan uppmätt och predikterad nivå blir minimal.

Ingen teoretisk analys av styrbarheten har utförts i detta arbete. Men förmodligen är inte tillståndet i alla delar av ledningssträckan styrbara, eller möjliga att påverka, hela tiden. Som tidigare nämnts kan ingen information vandra uppströms i ett område med superkritisk strömning. Det betyder exempelvis att en ändring av överfallsnivån inte påverkar tillståndet uppströms så länge strömningen är superkritisk i överfallets övre del. Först när strömningen blivit subkritisk kan ledningen uppströms påverkas av en styrning. Tillstånd nedströms är förmodligen styrbara så länge vatten avbördas i sidoöverfallet.

Tillståndsvektorns båda komponenter i ett volymelement på ledningen är förmodligen inte styrbara var för sig. Detta beror på att nivå och flöde i en ledningssektion är kopplade i StVenants ekvationer, jämför ekvationerna (3) -(6) i teoriavsnittet och ekvationerna (45)-(47) i mät- och beräkningsavsnittet. Man får bestämma sig för att antingen försöka styra flödet eller nivån i en ledningssektion.



Diskussion, fortsatt arbete

Här jämförs den använda matematiska modellen och simuleringsresultaten med liknande arbeten av Balmforth [39] och Hager [49]. Förslag till fortsatt arbete diskuteras.

Allmänt

Att ta fram ett fungerande, lokalt återkopplat reglersystem till ett styrbart sidoöverfall var svårare än jag trodde i början och detta arbete nådde inte ända fram. Men en liten bit bort syns sidoöverfallet, beskrivet som reglerobjekt på tillståndsform. Därifrån är det möjligt att se konturerna av ett lokalt återkopplat reglersystem.

I litteraturen har jag ännu inte funnit någon beskrivning av transient flöde i ett sidoöverfall. Däremot finns sådana där lateralflödet behandlas som en tidsvariabel punktsänka eller som ett pumputtag. Så vitt jag förstår hanteras lateralflödet som en punktsänka i simuleringsprogrammet MOUSE.

Den stationära strömningen i ett sidoöverfall är komplex och tredimensionell. Försök att beskriva flödet med enklare, endimensionella framställningar leder till avvikelser mellan mät- och beräkningsresultat. Man kan pröva att minska dessa genom att införa parametrar av olika slag. Alla refererade artiklar och rapporter har sådana. Några av artiklarna relaterar vissa parametrar till förhållandet i inloppssektionen i sidoöverfallets uppströmsände. I en dynamisk, hydraulisk modell av strömningen i en kanal med sidoöverfall måste parametrarna vara lokalt beroende. Sådana beskrivningar fann jag i arbeten av Balmforth [39], Hager [3], [49], [51] och Olsson-Svensson [5]. Balmforth och Hager har behandlat sidoöverfallet i sina doktorsavhandlingar från University of Sheffield 1978 respektive ETH-Zürich 1981.

Transient modell

En stor del av teoriavsnittet ovan behandlar Riemann-problemet och dess lösning. De icke-linjära termerna i StVenants ekvationer ger upphov till diskontinuiteter som kan återföras till Riemann-problemet och till detta finns flera lösningsalgoritmer. Dominerande källtermer, som den laterala avbördningen i ett styrbart sidoöverfall, komplicerar lösningen. I avsnittet om reglerobjektet har en relativt enkel, första ordningens modell med källterm använts för att simulera effekten av en snabb ändring av överfallsnivån. Simuleringsmodellen verkar numeriskt stabil även om kritisk strömning orsakade små, men begränsade, numeriska störningar eller vågor.

Tidserier av flöden och nivåer efter snabba ändringar av sidoöverfallets nivå registrerades i laboratoriemodellen. En serie har redovisats i figur 55 och jämförts med simulerade nivåer och flöden efter ändringen av sidoöver-

fallets nivå. Den numeriska icke-stationära modellen är utvecklingsbar och bör kunna användas vid datorsimulering av lokalt återkopplad reglering av sidoöverfallet.

Jämförelse med andra stationärmodeller

Det kan vara intressant att resonera runt olika modeller för beräkning av flöden och nivåer i sidoöverfallet. Jag har valt Hagers framställning i [49] som beskriver mätningar och beräkningar på ett sidoöverfall i en prismatisk ledning med rektangulär sektion och dead end. Vidare ingår exempel från Balmforths avhandling. Han redovisar mätningar och beräkningar på strömningen i en avsmalnande, icke-prismatisk kanal med sidoöverfall utan dead end. Hager och Balmforth mätte på laboratoriemodeller som var 2-3 gånger större än den som använts i denna studie och jämförelsen omfattar enbart subkritisk strömning.

Ur de stationära systemekvationerna (47) erhålls uttrycket för gradienten till vattendjupet h, efter division med gA och med hjälp av sambandet $h_x=A_x dh/dA$

$$h_x=\frac{1}{1-\beta_1\frac{|Q|Q}{gA^3\frac{dh}{dA}}}\left(-\frac{|Q|}{Q}S_f-(\beta_2-2\beta_1)\frac{Qq}{gA^2}-\frac{|Q|Q}{gA^2}\beta_{1x}\right)$$

Uttrycket kan jämföras med en översättning av ekvation (1) för vattenytans lutning i Hagers artikel [49] till en horisontell, prismatiskt kanal med mina tillståndsvariabler A och Q

$$h_x=\frac{1}{1-\beta_1\frac{Q^2}{gA^3\frac{dh}{dA}}}\left(-S_f-\left(\frac{U\cos(\phi)}{V}-\beta_1-1\right)\frac{Qq}{gA^2}-\frac{Q^2}{gA^2}\beta_{1x}\right) \qquad (H)$$

där Hager sätter V=Q/A och låter U vara vattenhastigheten på överfallskanten och som bildar vinkeln ϕ med V. Han kallar termen

$$S_b=\left(\frac{U\cos(\phi)}{V}-\beta_1\right)\frac{Qq}{gA^2}$$

en bifurkationsförlust orsakad av den laterala avbördningen. Hager menar att inverkan av den lokala variationen hos bifurkationsförlusten utefter sidoöverfallet kan försummas. Han bildar därför medelvärdet av gradienten S_b

som

$$S_b = \frac{\xi V_u^2}{2g\Delta L} \qquad \xi = \frac{4}{5}\frac{\Delta Q}{Q_u}\left(\frac{\Delta Q}{Q_u} - \frac{1}{2}\right)$$

där ΔL är överfallslängden och ΔQ skillnaden mellan flödet uppströms sido-överfallet Q_u och utflödet i överfallets utloppssektion nedströms . Vid sub-kritisk strömning sätter Hager $\beta_1=1$ och $\beta_{1x}=0$.

Formuleras motsvarande ekvation (2.13) i Balmforths avhandling [39] med mina beteckningar beskriver han vattenytans gradient på formen

$$h_x = \frac{1}{1-\beta_1 \dfrac{Q^2}{gA^3\dfrac{dh}{dA}}}\left(-S_f - (1-2\beta_1)\frac{Qq}{gA^2} - \frac{Q^2}{A}\beta_{1x}\right) \qquad \text{(B)}$$

och för hastigheter $Q/A=U<0.6$ m/s approximeras korrektionsfaktorn för rörelsemängdsflödet β_1 i ledningens huvudriktning med

$$\beta_1 = 1.06 - 0.10U$$

Vi har hanterat inverkan av rörelsemängdsförlusten i lateralflödet på tre olika sätt. För övrigt är ekvationerna lika, så när som på beloppstecknen i ekvation (47) och som finns där som påminnelse om det transienta fallet. Friktionsförlusten S_f har också samma form i alla tre versionerna. Det laterala flödet q hanterar vi åter olika. Hager utgår från Bernoullis ekvation i sin ekvation (3a)

$$q = \frac{3}{5}c\sqrt{g\frac{E-w}{3E-2h-w}}\,(h-w)^{\frac{3}{2}}$$

med c=1 för ett skarpkantat överfall och specifika energin E

$$E = h + \alpha\frac{Q^2}{2gA^2}$$

Balmforth använder Polenis formel för små lateralhastigheter, ekvation (20) i teoriavsnittet ovan

$$q = c\,\frac{2}{3}\sqrt{2g}(h-w)^{\frac{3}{2}}$$

tillsammans med avbördningskoefficieten c enligt Rehbocks formel (27) i teoriavsnittet

$$c=\left(0.602+0.083\frac{h-w}{w}\right)\left(1+\frac{0.0012}{h-w}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Vid lösningen av differentialekvationerna startar Hager och Balmforth från nedströmsänden, medan jag startar från uppströmsänden av skäl som redovisats ovan. Vi får alla tre avvikelser av liknande storlek ±(4% -8%) mellan mätta och beräknade flöden, medan nivåerna avviker något mindre ±(2% - 5%). Hager och Balmforth har mätt vattenytans profil i sidoöverfallet något som inte genomförts i mitt arbete. Balmforths beräknade nivåer ligger i genomsnitt 4.8% under hans mätta profiler, vilket kan tyda på modellfel.

Balmforth har gjort testerna på ett sidoöverfall i en icke-prismatisk, avsmalnande kanal med rektangulär sektion. Flödeshastigheten och nivån blir nästan konstant utefter sidoöverfallet. I början prövade jag samma beräkningsmodell som Balmforth använt. Den gav mycket sämre överensstämmelse med mina mätningar för Froudes tal Fr>0.1. Den beräknade vattenytans konvexa profil lutade allt brantare mot överfallets uppströmsände. Avvikelsen mellan mätt och beräknad nivå kunde uppgå till någon centimeter och flödet blev 15%-50% lägre än det mätta. Jag övergav därför hans modell. Den dåliga överensstämmelsen i mitt fall kan ha flera förklaringar. Balmforths modellförsök ger lateralflödet nästan konstant storlek och riktning längs sidoöverfallet. I en prismatisk kanalsektion varierar hastigheten och dess fördelning mer längs sidoöverfallet, och extremt mycket i en ledning med dead end. Avvikelsen kan bero av den faktor som skall hantera rörelsemängdsförlusten i sidoöverfallet och som vi tre beskrivit olika.

För att testa inverkan av β_1 och β_2 i min modell satte jag båda lika med ett och behöll beräkningsmodellen intakt för övrigt. Påverkan från β_3 undersöktes på liknande sätt genom att dess optimala, lokala värde fördubblades och halverades i simuleringen. Beräkningar gjordes på tre olika situationer från mätserien i Tabell 4; nr 7, nr 19 och nr 41. Resultatet redovisas i Tabell 8.

I tabellen kan man läsa ut att ansatsen $\beta_1=\beta_2=1$ ger en simulerad vattenyta som avviker mer från mätningarna ju högre inflödet är. Man finner också att vattenytans profil är känsligare för variationer i β_1 och β_2 än i β_3. En slutsats man även kan dra ur ekvation (22) för de antagna korrektionskoefficienterna i figur 42 och figur 43, eftersom $0>(\beta_1-2\beta_2)>-1$ för alla

flöden. Att vattenytan visar en systematisk, positiv avvikelse mellan mätt och beräknad nivå i Tabell 8, medan Balmforth anger ett systematiskt negativt fel, beror på att vi startar den numeriska lösningen i olika ändar av sidoöverfallet.

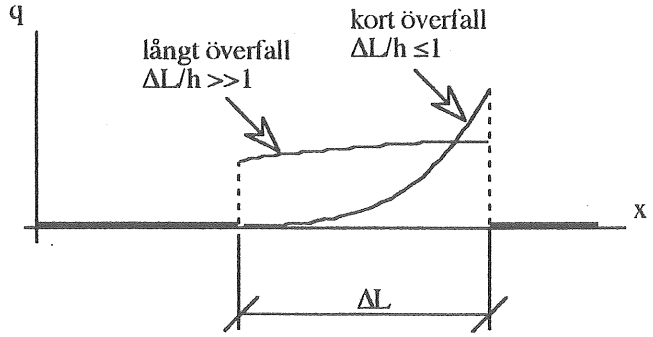
Tabell 8. Inverkan av rörelsemängdskorrektioner

parameter	mätning nr 7		mätning nr 19		mätning nr 41	
	ΔQ %	Δh %	ΔQ %	Δh %	ΔQ %	Δh %
$\beta_1=\beta_2=1$	-3	0.9	9.3	2	10	2.6
$0.5\beta_3$	5	0.3	1.6	0.1	<1	-0.6
$2\beta_3$	0.8	0.3	-7.3	-0	-13	-1.1

Det tog tid innan jag förstod hur Hager bestämde sin bifurkationsförlust och första försöket att efterlikna hans modell (H) ovan fungerade dåligt. Modellen uppträdde på ett liknande sätt som Balmforths. Som jag nu förstår Hagers modell uttrycks inte bifurkationstermen i de lokala variablerna utan i tillstånden i sidoöverfallets ändar. Det betyder inte något i det stationära fallet eftersom man kan iterera fram en lösning. Men i det transienta fallet finns ingen omedelbar koppling mellan sidoöverfallets ändar eftersom informationen utbreder sig med en ändlig karakteristisk hastighet. Rörelsemängdsmodellen i ekvation (47) har enbart lokalt beroende variabler och parametrar.

Hager och Balmforth har också prövat sina modeller på superkritisk strömning utan dead end, med gott resultat. Balmfort lade då till kompensation för kroklinjig strömning.

Med ekvationen för lateralt rörelsemängdsflöde i (47) tillåts inga diskontinuiteter i lateralflödet q. Det växer från noll i inströmningssektionen uppströms sidoöverfallet och borde avta med ändlig gradient i nedströmsänden, nära sidoöverfallets utströmningssektion. Vattenytans profil visar en mjuk, horisontell övergång i sidoöverfallets ändar och har en form som överensstämmer med Hagers och Balmforth mätningar av vattenytans profil längs överfallet. I efterhand kan jag se att det hade varit värdefullt att konstruera det styrda överfallet så att profilmätningar hade underlättats och genomförts i mina försök.



Figur 60. Lateralflödet i korta och långa sidoöverfall, fritt efter Hager [53]

I en artikel om skaleffekter[53] tar Hager upp inverkan av överfallets längd och problemet med diskontinuiteten hos q i överfallets ändar. Eftersom det avbördade flödet bestäms av integralen av lateralflödet q utefter sidoöverfallet, spelar diskontinuiteten på ränderna liten roll enligt Hager, om överfallslängden är mycket större än vattendjupet (ΔL/h >>1). Genom randvillkoren till systemekvationen (47) kommer effekten av korta sidoöverfall, eller sidoöverfall med varierad höjd, in i simuleringen.

Fortsatt arbete

Närmast borde rörelsemängdsmodellen testas på superkritisk strömning med vattensprång och jämföras med befintliga mätdata. Är den användbar på alla strömningstillstånd, utan större modifieringar? Testa på bräddavlopp och gör fältmätningar. En tredimensionell finitelement modell kunde programmeras upp, först för det stationära subkritiska fallet. I en sådan modell kan man få en bättre insikt om den komplexa strömningen i ett sidoöverfall

Den dynamiska modellen bör utvecklas för en ledning med cirkulär sektion och förses med en bättre beskrivning av källtermerna. Tester kan göras med mätningar i laboratoriemodellen. Med en dynamisk modell av sidoöverfallet är det t ex möjligt att simulera tillståndsåterkopplade regulatorer. En till-från reglering med fuzzy logic är kanske ett alternativ.

En dynamisk modell för en ledningssträcka med tre nivågivare kan kanske utvecklas till en flödesmätare i kanaler med fri vattenyta.

---

[53]Hager W H: Some scale effects in distribution channels, Symposium on scale effects in modelling hydraulic structures, IAHR, Esslingen am Neckar, September 1984

REFERENSER

Alcrudo F, Garcia-Navarro P, Saviron J-M: Flux difference splitting for 1D open channel flow equations, Int J for Num Methods in Fluids, Vol 14, 1992, pp 1009-1018

Baines M J, Maffio A, Di Filippo A: Unsteady 1-D flows with steep waves in plant channels: the use of Roe's upwind TVD difference scheme, Adv. in Water Res., Vol 15, 1992, pp 89-94

Balmforth D J: Flow over side weirs, PhD Thesis, University of Sheffield, 1978

Cameron Kenneth N: Människan och samhället, A&K 1976

Chow Ven T: Open-Channel Hydraulics, McGraw-Hill, Tokyo 1959

Clemmens A, Wang C, Replogle J A: Dynamic response of automatic water-level controller II: Application, J of Irrigation and Drainage Eng, Vol 116, No 6, 1990

Csépai I, Kastanek F: Flow regulation by automatically controlled overflow weirs, Wat. Res., Vol 26, No 5, 1992, pp 625-628

Cunge J A, Holly Jr F M, Verwey A: Practical Aspects of Computational River Hydraulics, Pitman, London 1980, pp 7-24

Delo E A, Saul A J: Charts for the hydraulic design of high side weirs in storm sewage overflows, Proc. Instn Civ Engrs, Part 2, Vol 87, June, 1989, pp 175-193

Gatke D, Verworn W: Design of control algoritms for moveable weirs by means of hydrodynamic runoff simulation, Proceedings of the sixth international conference on urban storm drainage, Vol II, Niagara Falls 1993

Glaister Paul: Approximate Riemann solutions of the shallow water equations, J of Hydr. Res., Vol 26, No 3, 1988

Hager Willi H: Lateral outflow over side weirs, J of Hydraulic Engineering, Vol 113, No 4, April, 1987

Hager Willi H: Flow over side weirs in circular channels, discussions by Hager, av referensen i not 10

Hager W H: Flow in distribution conduits, Proc Instn Mech Engrs Vol 200, No A3, 1986

Hager W H, Volkart P U: Distribution Channels, J of Hydraulic Eng, Vol 112, No 10, October, 1986

Hager W H: Some scale effects in distribution channels, Symposium on scale effects in modelling hydraulic structures, IAHR, Esslingen am Neckar, September 1984

Hammarlund Hans: The potential of operational control in a sewer system, based on the catchment of Kungsholmen, Stockholm, KTH, 1991

Harten A, Lax P D, van Leer B: On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, SIAM Review 25, No 1, 1983, pp 35-61

Herschy Reginald W: Streamflow measurements, Elsvier Ltd, NY 1985, pp 307-312

Hirsch Charles: Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol I, John Wileys, 1988, pp 88-92

Häggström Steffen: Hydraulik för V-teknologer, CTH, Göteborg 1988

Lax Peter D: The formation and decay of shock waves, Amer. math. monthly, Vol 79, March 1972, pp 227-241

van Leer Bram: On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe, SIAM J of Sci. Stat. Comput. Vol 5, No 1, 1984, pp 1-25

LeVeque Randall J.: Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhäuser Verlag, Basel 1992

Liu T P: Quasilinear Hyperbolic Systems, Comm in Math Phys, Vol 68, 1979, pp 141-172

Lyngfelt Sven: Styrning av flöden i avloppssystem, Rapport B:51, Inst för vattenbyggnad, CTH 1989

Marchi Enrico: On free overfall, J of Hydraulic Research, Vol 31, No 6, 1993

Misra R, Sridharan K, Mohan Kumar M S: Transients in canal network, J of Irrigation and Drainage, Vol 118, No 5, 1992

Olsson P, Svensson M: Bräddavloppshydraulik, Inst f vattenbyggnad, KTH 1979.

Papageorgiou M: Automatic Control Strategies for Combined Sewer Systems, J of Environmental Eng, Vol 109, No 6, Dec 1983.

Rajaratnam N, Katopodis C, Sabur M A: Entrance region of circular pipes flowing partly full., J. of Hydr. Res., Vol 29, 1991, pp 685-698

Reddy J M: Local Optimal Control of Irrigation Canals, J of Irrigation and Drainage Eng, Vol 116, No 5, 1990

Roe Phillip L: The use of the Riemann problem i finite difference schemes, Lecture Notes in Physics, Vol 141, Springer-Verlag, New York 1981, pp 354-559.

Sarginson E J: Scale effects in model tests on weirs, Symposium on scale effects in modelling hydraulic structures, IAHR, Esslingen am Neckar, september 1984

Schilling Wolfgang: Urban runoff quality management by real-time control, NATO ASI Series, Vol G10, Springer-Verlag, Berlin 1986

Sjöberg Anders: Beräkning av icke stationära flödesförlopp i reglerade vattendrag och dagvattensystem, Vattenbyggnad Meddelande nr 87, CTH, Göteborg 1976

Smoller Joel: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, N Y 1983

Steffler P M, Jin Y-C: Depth averaged and moment equations for moderatly shallow free surface flow, J of Hydraulic Research, Vol 31, No 1, 1993

Swamee Prabata K: Generalized Rectangular weir equations, J of Hydraulic Eng., Vol 114, No 8, 1988, pp 945-949

Trotta P D, J W Labadie, N S Grigg: Automatic Control Strategies for Urban Stormwater, J of The Hydraulics Div, ASCE Vol 103, HY12, Dec 1977.

Uyumaz Ali, Muslu Yilmaz: Flow over side weirs in circular channels, J of Hydraulic Eng., Vol 111, No 1, 1985, pp 144-159

Uyumaz Ali, Smith Roger H: Design procedure för flow over side weirs, J of Irrigation and Drainage Eng., Vol 117, No 1, 1991, pp 79-90

Wang C, Clemmens A, Hart W E: Dynamic response of automatic water-level controller. I: Theory, J of Irrigation and Drainage Eng, Vol 116, No 6, 1990.

Yalin M Selim: Theory of hydraulic models, Macmillan, London 1971, p 45

BETECKNINGAR

$A(x,t)$	våt area i en ledningssektion (oberoende tillståndsvaiabel)
b	styrvektor
B	ledningsbredd
c	avbördningskoefficient för överfallet
$c_{1,2}$	korrektionsfaktorer
C	karakteristisk hastighet
C_1	funktioner med kontinuerliga första-derivator
C_d	avbördningskoefficient
d	längd på överfallets krön, diameter
dG	Jacobian till G
D	ledningsdiameter
E	specifik energi
f	kontinuerlig fluxfunktion, friktionskoefficient
F	diskret fluxvektor, matris
F_x	gradienten av F
F_t	partiella derivatan av F map tiden t
Fr	Froudes tal
g	tyngdacceleration
G	matris
h, h_x	vattendjup och dess gradient
h_c	kritiskt vattendjup
h_u	vattendjup i överfallets uppströmsände
h_m	medeldjup i en sektion
h_n	vattendjup i överfallets nedströmsände
H	ledningens höjd
i	diskret index
j	diskret index i rummet
I	elektrisk ström
k	konstant, givarkänslighet
l	vänsterindex
ΔL	sidoöverfallets längd
L	ledningens längd
m	massa
M	Mannings tal, exponent i flödesmätare
n	index för diskret tid
offs	offset
O	bit i A/D-omvandlaren

p	index för egenvärde, index prototyp, stegmotorpuls
P	våt perimeter i en ledningssektion
q	lateralt utflöde per längdenhet
Q(x,t)	flöde genom en ledningssektion (oberoende tillståndsvariabel)
r	högerindex, egenvektor, referens index, radie
R	hydraulisk radie, resistans
Re	Reynolds tal
s	diskontinuitetens utbredningshastighet
S_b	energilutning
S_f	friktionslutning
S_o	ledningens lutning
St	Strouhals tal
t	tiden (oberoende variabel)
T	temperatur
u	tillståndsvektor, lokal hastighet i x-led
U	medelhastighet, diskret tillståndsvariabel, spänning
v	lokal hastighet i y-led
V	spänning, hastighet
w	sidoöverfallet höjd över ledningens botten
We	Webers tal
x	koordinat i ledningens längsled (oberoende variabel)
X	dimensionslöst tal
y	koordinat i ledningens laterala led
z	koordinat i ledningens höjdled
α	korrektionsfaktor för rörelseenergi
β	korrektionsfaktor för rörelsemängd
γ	lutningsvinkel
Δ	relativt fel
λ	skalfaktor, egenvärde
φ, ϕ	vinkel
μ	dynamisk viskositet
ν	kinematisk viskositet
ρ	densitet, radie
σ	ytspänning
τ	tidsfördröjning
θ	vinkel i överfallets position