

Naturlig geometri Av Torbjörn Lundh

torbjrn@math.chalmers.se



Matematiska Vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg.

Fysiken har under århundraden dragit nytta av matematiken på ett fantastiskt sätt. Kanske är det snart dags för biologin att utnyttja matematikens formskapande förmåga för att förklara det som inte står i generna?

Jag kan inte låta bli att fortfarande förundras över tomtens färg i Disneyprogrammet som visas på tv varje julafton i Sverige (en nationell tradition som är svår att förklara – speciellt för icke-sekulariserade amerikaner). Att ordning spontant skulle kunna uppstå ur oordning! Ändå är det detta som sker med ett befruktat ägg som under upprepad delning ska bli en ny individ. Vi kommer att titta på geometriska formskapande konstruktioner som uppkommer i naturen, från snöflingor till grodyngel. Vi kommer också att spekulera i om vi behöver uppfinna (eller upptäcka?) en ny sorts matematik för att kunna förstå naturens olika formskapande processer. Jag hoppas också kunna presentera några öppna problem. Bland annat en biogeometrisk fråga som har över 2300 år på nacken.

Ordning ur oordning

Om vi tar en kopp kaffe och häller i lite mjölk förväntar vi oss att utan att vi rör om med en sked i koppen kommer mjölken att undan för undan att blanda sig med kaffet till en välmixad mjölk-kaffeblandning. Vi är vana att system av sig själva strävar mot maximal oordning.

Tomtenissens färg

Klockan tre på julafton ser vi, och nästan hela Sverige, på Kalle Ankas jul på teve. När jag var liten var min favorit, vid sidan av tjuren Ferdinand som luktar på sina blommor under sin kära korkek, just tomten som målade schackbrädor med sin rutiga färg. Långt efter att jag slutade tro på tomten trodde jag att det verkligen fanns en sådan färg. Sedan efter eget vattenfärgskladdande fattade jag hur orimligt det var. Ännu lite senare, under mina civilingenjörsstudier, fick jag lära mig att det inte bara var orimligt, det var olagligt också. Man fick inte bryta mot termodynamikens andra huvudsats som säger att system som lämnas i fred går automatiskt mot mer och mer oordning.



Men om vi nu tittar på ett ägg som just befruktats. Det ser ju mer eller mindre homogent ut, men efter att ha börjat dela sig, bildas strukturer. Strukturer som blir mer och mer invecklade och utmejslade, efter ett tag har vi ett embryo som så småningom utvecklas till en ”färdig” organism, som i sin tur kanske kan skapa ett nytt ägg. Se till exempel denna process i filmsekvenser där man ser hur följt ett äggs utveckling och snabbat upp tiden. Går vi inte mot mer och mer ordning? Och bryter vi inte därmed mot termodynamikens andra huvudsats?

”En genererande funktion kan vara mycket enklare än en beskrivande. Detta är den centrala motivet i morfogenes: ägget innehåller inte en beskrivning av den vuxna organismen utan ett program för att skapa den. Misstaget att inse detta har, i det förflutna, lett till en viss mån av förvirring”

Lewis Wolpert

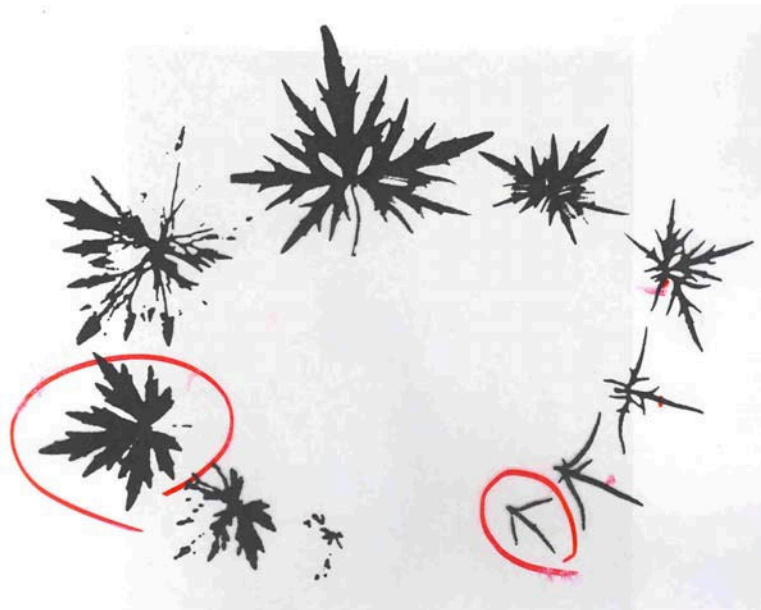
Som ett exempel på denna förvirring kan vi se på skisserna av en spermie som kunde göras genom stadium i det nyuppfunna mikroskopet. Här är en skiss som Hartsoeker gjorde år 1694 som tydligt visar att det inte bara är en färdig beskrivning av den vuxna organismen inne i spermien, utan mer eller mindre hela organismen färdig och klar för att bara växa till. Denna bild av embryologin ledde till vissa underligheter. Antag att den lille krabaten inne i spermien kommer att växa upp till en man, då har han inte bara sina testiklar redan, utan också alla spermier klara, vilka i sin tur innehåller små pyttepojkar som i sin tur också har spermier, osv. En annan invändning mot denna bild är att den reducerar kvinnans ägg till att bli enbart en passande plats för spermien att växa till, en slags blomkruka helt enkelt. En sådan syn får inte många poäng idag på den genusvetenskapliga skalan.



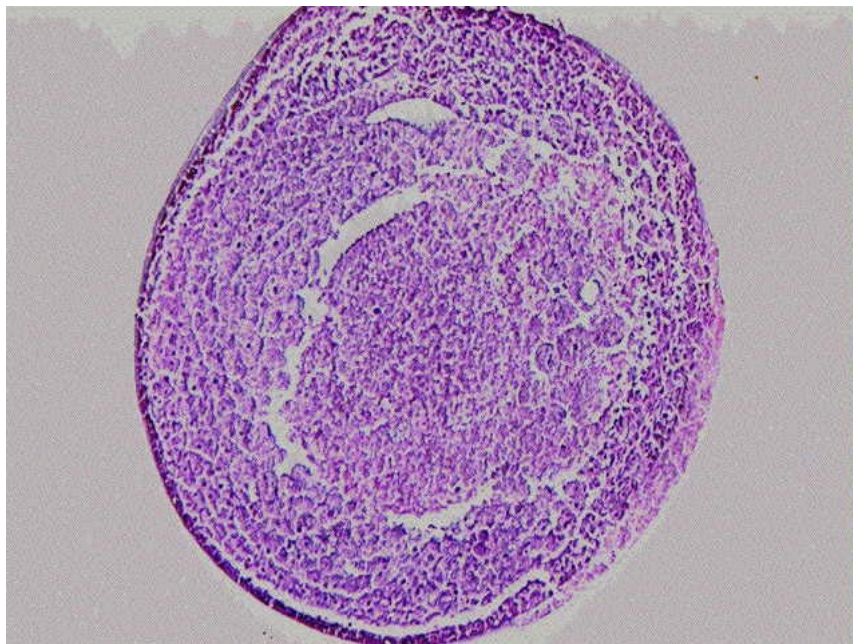
Morfogenes

Goethe och Schiller gick hem efter att ha varit på ett kvällsseminarium i botanik. Goethe var inte bara en stor poet, utan också en naturvetare av högsta rang, så vi kan anta att det var han som lurat med sig sin diktarbroder till detta seminarium. Schiller var lite missnöjd med att man diskuterat små detaljer hos en viss växt hela kvällen.

”Var är de stora idéerna, de övergripande teorierna?” Goethe gick hem och tänkte ut en sådan övergripande ide. Han tänkte sig något i stil med en abstrakt växt som hade alla andra växters egenskaper han kallade den *urplantan*, se figur 1. Han gav också namnet morfogenes till de biologiska formskapande processerna.



Figur 1 Goethes egen skiss av hans urplanta. De inringade bladen är två exempel på konkreta manifesteringar.



Figur 2 Här ser vi ett tvärsnitt av ett tidigt grodembryo. Notera att vi fortfarande kan se de enskilda cellerna i strukturen.

Emergens

När vi tänker på hur ett ägg och en spermie tillsammans skapar en helt ny komplex organism slås man av att helheten i detta fall är mer än summan av dess delar. Detta fenomen kallas

emergens och har av bland andra Trondheims egen Nils Baas fått en matematisk definition. Som exempel på andra strukturer man brukar kalla emergenta kan man se på hur enskilda individer formerar sig i flockar som i sig kan ha ett helt eget beteende.

Två succéhistorier

Låt oss titta på två vetenskapliga dundersuccéer – Newtons analys och upptäckten av DNA molekylen. Jag tänkte vi skulle ta upp solsystemet först. Innan Kopernikus kom in i matchen hade man en geocentrisk världsbild med jorden i mitten. Sedan visade Kopernikus (inte utan gnissel från den mäktiga kyrkan) att genom att istället lägga solen i mitten fick man en mycket elegantare matematisk representation. Men det var inte bara estetiska fördelar. Man kunde också göra bättre förutsägelser. Och det gjorde man. Man samlade data och hade fått ihop en ansevärd mängd information som Isaac Newton lade vantarna på och funderade ut sina lagar som kunde förklara hur och varför planeterna rörde sig. Det djärva i detta projekt var att han behandlade himlens objekt, som ju egentligen hörde till kyrkans hägn, på samma sätt som enkla profana äpplen. Han inte bara satte upp en modell, han utvecklade matematiken som krävdes för att behandla denna modell – det blev till infinitesimalkalkylen, eller med andra ord analysen, eller ”integraler derivator och sånt” som miljontals studenter studerar mer eller mindre just nu. Och han lyckades också använda dessa verktyg till att göra precisa och hittills omöjliga astronomiska förutsägelser. Det ska sägas att han också fick problem med den mäktiga kyrkan i och med att han började ge sig in på att tala om oändligt små tal, detta var fortfarande något som inte vem som helst kunde ta sig friheten att definiera. Denna teori skapade han i huvudsak i Cambridge mellan åren 1664 och 1666. (*Principia* 1687). Fysiken har inte varit sig lik sedan dess. Den har varit intimt sammankopplad med matematiken sedan dess och olika teorier på makro- och mikronivå har utvecklats med hjälp av den matematiska analysen. Nu till den andra vetenskapliga ”hitten”.

Nästan 300 år senare också i Cambridge, satt två doktorander Watson och Crick på puben The Eagle och spekulerade om meningen med livet på ett mer konkret sätt än vad unga personer brukar fundera på i samma miljö. De satte upp en modell av DNA molekylen som den dubbla spiral vi numer känner så väl. De byggde sina ideer på data som Rosalyn Franklin tagit fram genom röntgenmätningar. Det är nu femtio år sedan och biologin har bytt skepnad efter denna banbrytande upptäckt. För några år sedan kungjordes att hela det mänskliga genomet var kartlagt genom HUGO-projektet. Är inte allt klappat och klart nu. Kan vi inte sätta igång och bota sjukdomar nu när vi har hela den genetiska koden i vår hand, eller rättare sagt på en CD-skiva? Eller finns det mer att upptäcka?

Genocentriska tidsåldern

“In genetics for example, the task of understanding the functions of all the 100,000 human genes will require a much greater effort than that involved in their identification, and by a factor 10 or more.”

J. Madox

*“Det finns en stark tendens att tänka på gener som om de fixerade lagarna för biologisk utveckling, men det är inte så; deras roll är mycket närmare **begynnelsevillkoren**. ... Det måste finnas mer fundamentala teorier, dom sanna biologiska lagarna, de matematiska reglerna där den genetiska koden stoppas in i.”*

Ian Stewart, Warwick

Brian Goodwin har lite tillspetsat sagt att vi idag befinner oss i den genocentriska tidsåldern eftersom vi är bländade av den fantastiska framgång som upptäckandet av DNA molekylen har inneburit för vår syn på biologin.

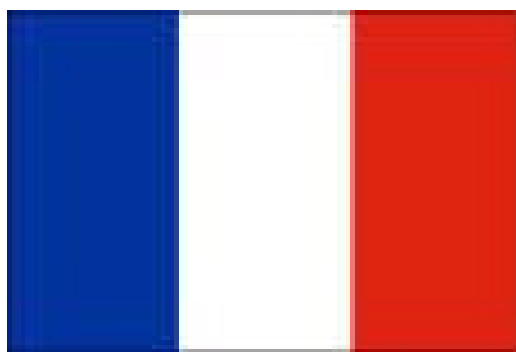
Om vi jämför biologins användning av matematiken jämfört med fysikens täta koppling, kan man säga att biologi-matematiken idag befinner sig på förenewtonsk nivå. Vi väntar på genombrottet som ska sätta igång en liknande revolution som fysiken genomgick efter det att Newton satte upp sina lagar, uppfann den matematiska analysen för att kunna arbeta med lagarna, och sedan gjorde förutsägelser bland annat om planeters position med hjälp av analysen. Kanske väntar vi på en ny Newton? Kanske genombrottet aldrig kommer, men vi måste försöka och vi måste hoppas.

Dagens morfogenesmodeller

Jag tänkte att vi kunde titta på några morfogenesmodeller man använder idag.

Franska-flagg-problemet

- *Hur kan en grupp av celler generera tre olika zoner (blå, vit och röd) med samma bredd, oberoende av det totala antalet celler?*
- *Driesch 1901 and Wolpert 1969 (positional information).*

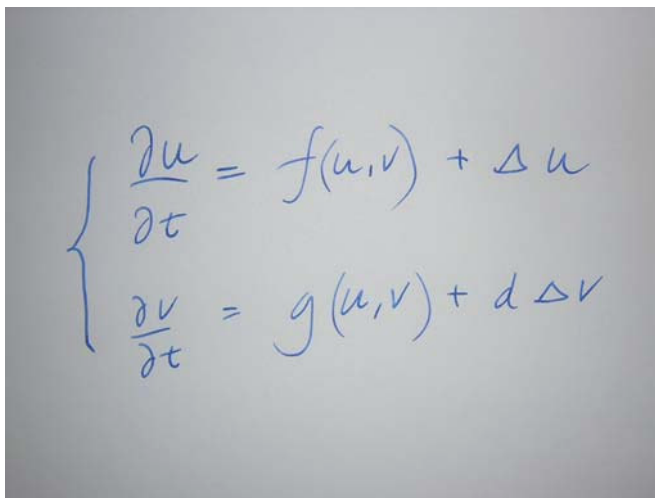


Gradientmetoden

Lösningen av det franska flaggproblemet med hjälp av gradientmetoden går ut på att man tänker sig att koncentrationen av en viss kemikalie, ett morfogen, bestämmer vilken färg cellerna ska få. Om vi har en källa som producerar detta morfogen på den vänstra blåa kanten och en sänka som suger upp morfogenet på höger sida på den röda kanten kommer koncentrationen av kemikalien att avta från vänster till höger och om vi har en regel som ger cellerna röd färg om koncentrationen understiger ett visst kritiskt värde, och blå färg om den överstiger ett annat kritiskt (högre) värde koncentrationer mellan de kritiska värdena ger vita celler får vi en franskflagga oberoende av rektangelns storlek. Denna enkla ide är mer en bara hypotetisk. Man har till exempel hos bananflugan kunnat hitta sådana signalprotein som ger koordinater längs bananflugelarven och som är viktiga för dess organutveckling.

Reaktion-diffusionsmodellen

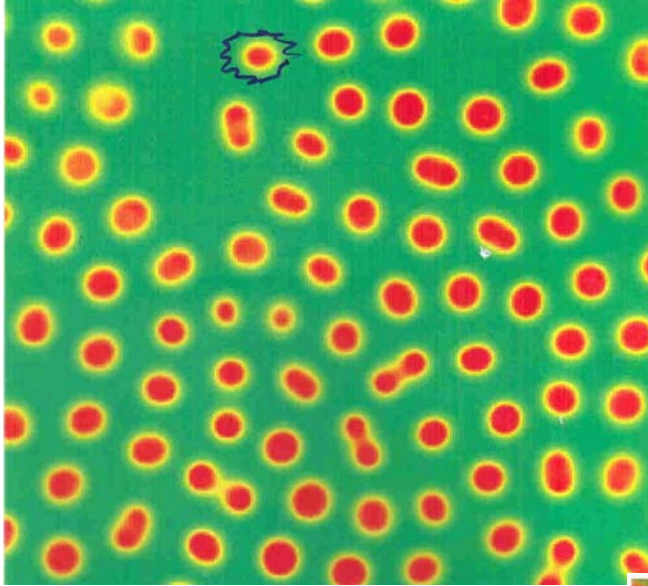
Samtidigt som Watson och Crick upptäckte DNA molekylen publicerade den engelske matematikern Alan Turing en artikel som handlade om två hypotetiska morfogen som samverkade på ett icke-linjärt sätt och som tillsammans gav upphov till spontan mönsterbildning. Turing hade lämnat Cambridge och var i Manchester där han också arbetade med att utveckla datorn. Innan dess hade han gjort sig berömd inom den snäva krets som kände till de extremt hemliga engelska kodknäckararbetena under andra världskriget. Turing var den tongivande i forcerandet, eller ”knäckandet”, av den Tyska ubåtskoden Enigma. Det kom en film med samma namn för några år sedan där en karaktär bär många, men inte alla, av Turings drag. Turings matematiska ekvationer kan sammanfattas som ett kopplat system av paraboliska differentialekvationer, där kopplingen är icke-linjär och där de olika variablerna har skilda diffusionskonstanter. Se Figur 3.


$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + d \Delta v \end{cases}$$

Figur 3. Turings reaktion-diffusions ekvation. Här kan vi tänka oss att u och v står för koncentrationerna för två morfogen och där funktionerna står för kopplingen mellan kemikalierna. Notera att om f och g är båda noll, så får separata partiella differentialekvationer som beskriver rena diffusion, men med olika hastigheter i och med att d strikt större än ett.

Jim Murray har arbetat mycket med denna modell, se till exempel... Han har gett en trevlig beskrivning av hur man kan förklara hur det fungerar i princip utan att blanda in några ekvationer alls. Tänk er att vi har ett stort gräsområde där det finns många gräshoppor. Det är torrt och plötsligt startar en mängd småbränder på gräsområdet. Gräshopporna i närheten grips av panik och börjar hoppa frenetiskt bort från elden. De hoppar så frenetiskt att de börjar svettas så kopiöst att gräset där tillräckligt många passerar blir lite fuktigt, vilket gör att branden inte kan sprida sig vidare åt den riktningen. Tillslut kommer det alla bränder att slockna och kvar blir ett mönster som kan kanske se ut som i Figur 4.

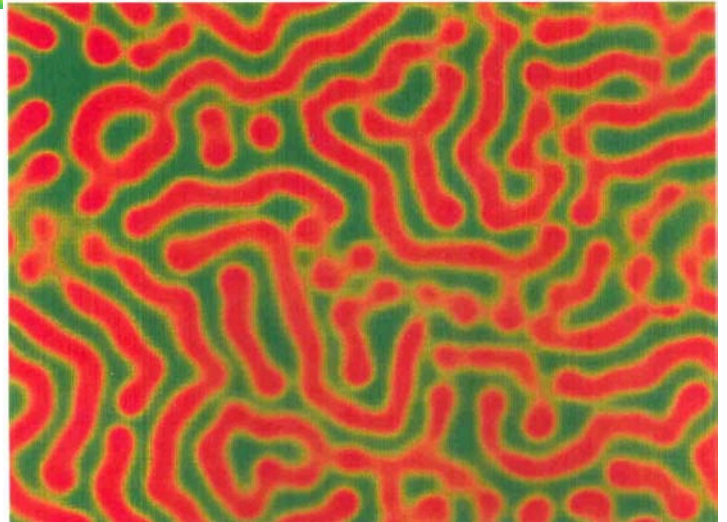
I Figur 5 har vi samma situation, men här är det en annan art av svettiga gräshoppor som inte kan hoppa så snabbt vilket leder till att bränderna hinner breda ut sig mer. Observera att i båda fallen gäller att vi inte på förhand kan säga exakt hur mönstret kommer att bli, bara vilken karaktär den kommer att ha. Detta är ovanligt i matematiska modeller, där man är för det mesta van vid total determinism, utom förstås i statistiska sammanhang. Vi kan ge en kvalitativ förutsägelse,



Figur 4. Ett tänkt resultat efter att många småbränder startat spontant och gräshoppor hoppat och svettats. I detta exempel kan gräshopporna hoppa snabbt, vilket i ekvationen i Figur 3 motsvaras av

Figur 5. Här kan inte gräshopporna hoppa så snabbt (d närmare ett) vilket leder till att bränderna kan breda ut sig mer.

Reaktion-diffusions modellen har varit framgångsrik när det gäller att ge teoretiska modeller för pälsmönstring, etc. Den kan tex ge ett svar på det faktum att det finns prickiga djur, men inga prickiga svansar. Men det har varit svårare att hitta riktiga morfogen i naturen.



Belusov-Zhabotiskii

Samtidigt som den teoretiska realiseringen av en slags "tomtefärg" skapades av Alan Turing, gjorde en rysk kemist en fantastisk upptäckt. Så fantastisk att den inte kunde bli accepterad för publikation förrän långt senare, och då i en konferensproceeding, inte helt olik den du läser i just nu! Belusov upptäckte av en slump att en viss kemisk blandning gav upphov till spontan mönsterbildning. Det vill säga en helt homogen blandning som på egen hand började dela upp sig och ge mönster av utvidgande cirkulära band. Det var först en världssensation, men tyvärr kunde ingen tidskrift publicera något som så flagrant bröt mot termodynamikens andra huvudsats. Det visade sig senare att lagen fortfarande håller. Den spontana mönsterbildningen pågår kanske bara i en kvart innan den slutar. Det var först på 70-talet som en ung rysk doktorand gav sig på att försöka upprepa försöket, men att tillsätta mer synliga indikatorer gjorde han inte bara om försöket, han gjorde det dessutom omöjligt att inte se de mönster som uppträdde.





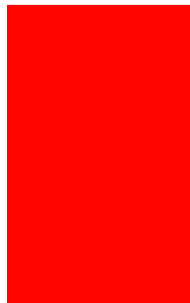
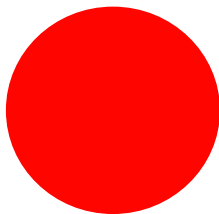
Romanesco – min nya favoritgrönsak

För några år sedan lanserades en ny grönsak, inte genmodifierad, men framavlad som många andra grönsaker genom korsning. Denna kallades Romanesco och var en korsning mellan broccoli och blomkål. När jag såg det första exemplaret av den, räknade jag antal spiraler som skruvar sig ut från varje top. Jag fick det till åtta åt ena hållet och tretton åt det andra. Det var vad man kunde förvänta. Man har länge sett att sådana spiraler hos växter är efterföljande Fibonacci, dvs tal ur serien 1,1,2,3,5,8,13,21,33,..., där man får nästa tal i följd genom att summera de två tidigare talen. Man har sedan länge sett detta fenomen och det stämde alltså även på nya grönsaker. Men varför är det så. Alan Turing funderade en hel del på detta. Det var först på 80-talet Douady et al kunde ge en bra förklaring till detta som byggde på att spiralerna som kom fram var en bieffekt av att växten försöker packa de nya knopparna så effektivt som möjligt under tiden hela grönsaken växer.

Det som gör Romanesco till min nya favorit är att den förutom denna Fibonacciegenskap också har en sk. Fraktal struktur, dvs den är självliknande på olika skalor. Tänk er att ni bryter av en liten top på den stora klumpen och förstör upp den. Den lilla biten blir då svår att särskilja från originalbiten. Den smakar rätt okey också, speciellt som tilltugg till fördrinkar etc.

Sårläkning

Som avslutning skulle jag vilja ta upp ett öppet biogeometriskt problem som enligt sägnen först formulerades för ungefär 2300 år sedan av Hippokrates, läkekonstens fader, som varje läkare svär sin trohets ed till vid examen. Han frågade sig varför runda sår läker så mycket långsammare än kantiga sår. Detta problem är fortfarande olöst, även om flera teorier och hypoteser finns.



Som avslutning skulle jag vilja citera Galileo som i sin tur citerade Platon: ***”Naturens bok kan mycket väl vara skriven med geometrins bokstäver”.***

Referenser

- N. A. Baas *Emergence, Hierarchies, and Hyperstructures*, Artificial Life III, Ed. C. G. Langton, SFI Studies in the Sciences of Complexity, Proc. Bol. XVII, Addison--Wesley, 1994.
- P. Ball *The self-made tapestry*, Oxford University Press, 1999.
- B. Goodwin *How the leopard changed its spots*, Weidenfeld and Nicolson, 1994.
- S. Johnson *Emergence*, Scribner, 2001.
- J. Madox *What remains to be discovered*, The Free Press, NY, 1998.
- J. D. Murray *Mathematical Biology I, II*, Springer--Verlag, 2002.
- I. Stewart *Life's other secret*, Penguin books, 1998.
- L. Wolpert *The Triumph of the Embryo*, Oxford University Press, 1991.