LB

GRUPPEN FÖR VÅG-ENERGIFORSKNING

LINJÄR TEORI FÖR ENERGIUPP-
TAGNING HOS EN OSCILLERANDE
VÅGENERGIOMVANDLARE AV BOJTYP

AV

Lars Bergdahl
Lennart Claeson
Johannes K Lunde

Rapport GR:10
Göteborg den
12 maj 1978

GRUPPEN FÖR VÅGENERGIFORSKNING

Gruppen för vågenergiforskning konstituerades 1977 och består för närvarande av följande personer:

från Chalmers Tekniska Högskola:

Curt Falkemo	skeppshydromekanik
Johannes K Lunde	"
Anders Rylander	"
Svante von Zweygbergk	elektromaskinlära
Jan Forsberg	"
Per Andersson	"
Per Bergström	"
Lars Bergdahl	vattenbyggnad
Lars Wernersson	"
Lars-Ove Sörman	"

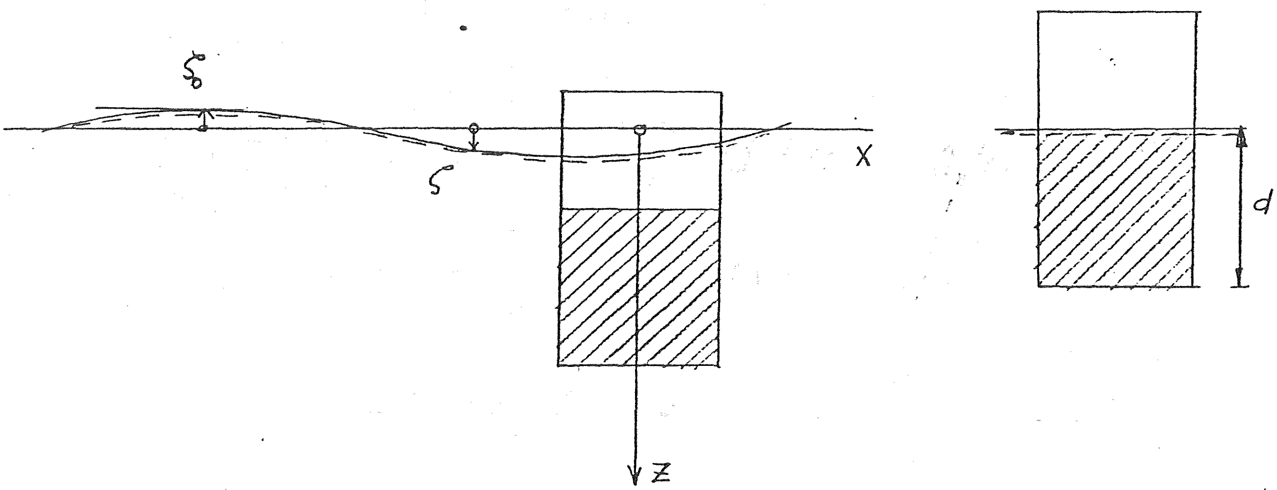
från Birger Ludvigson Ingenjörsbyrå AB:

Lennart Claeson
Thomas Rindby

LINJÄR TEORI FÖR ENERGIUPPTAGNING HOS OSCILLERANDE VÅGENERGIOMVANDLARE AV BOJTYP

"I am watching the sea
from the crest of a wave
and produce energy
in the way I behave"

Ren hävning d v s <u>en</u> frihetsgrad.



x-axeln ligger i normalvattenytan

z-axeln är positiv vertikal nedåt

Beteckningar:

ζ_0 = amplituden hos vågen	(m)		
$2\zeta_0 = H$ = våghöjden	(m)		
L = våglängden	(m)		
C_w = våghastigheten (fashastigheten)	(m/sek)		
k = vågtalet	(m^{-1})		
T = vågperioden	(sek)		
ω = vågrörelsens cerkelfrekvens	(rad/sek)	i	
ρ = vattnets ~~täthet~~	(kg/m^3)	densitet	
g = tyngdaccelerationen	(m/sek^2)		
z = vertikal koordinat för bojens rörelse	(m)		
d = deplacementets höjd	(m)	s	
A = bojens (konstanta) tvärsnittsarea	(m^2)		

Definitionsmässigt gäller:

$$\omega = 2\pi / T$$

$$k = 2\pi / L$$

$$c_w = L / T = \omega / k$$

För djupt vatten gäller dessutom:

$$L = 2\pi / k = g \cdot T^2 / 2\pi$$

$$k = \omega \cdot T / L = \omega^2 / g$$

$$T = \sqrt{2\pi L / g} = 2\pi / \omega$$

$$c_w = \sqrt{gL / 2\pi} = \sqrt{g/k} = g \cdot T / 2\pi = g / \omega$$

Hastighetspotentialen ϕ för en tvådimensionell våg på djupt vatten kan skrivas som

$$\phi = c_w \cdot \zeta_o \cdot e^{-k \cdot z} \cdot \sin(kx - \omega t) \qquad \ldots\ldots (1)$$

Eulers tryckekvation för inkompressibel potentialströmning kan skrivas som

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} - g \cdot z = 0$$

I den linjära teorin för vågor antar man att $(\nabla \phi^2)$ är liten i jämförelse med de andra termerna. Vi kan därför skriva

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \cdot z \qquad \ldots\ldots (2)$$

Från (1) och (2) får vi att vågprofilen (på vattenytan) ges av

$$\zeta(x, y, 0, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0} = \frac{c_w}{g} \cdot \omega \cdot \zeta_o \cdot \cos(kx - \omega t) =$$

$$= \zeta_o \cdot \cos(kx - \omega t) \qquad \ldots\ldots (3)$$

Eulers tryckekvation kan omskrivas som

$$\frac{p}{\rho} = -g \cdot \zeta(x,y,z,t) \cdot e^{-k \cdot z} + g \cdot z \qquad \ldots\ldots (4)$$

där e^{-kz} är tryckresponsfaktorn för vågor på djupt vatten

$$\therefore \frac{p}{\rho} = -g \cdot \zeta_0 \cdot e^{-kz} \cdot \cos(kx - \omega t) + g \cdot z \qquad \ldots\ldots (5)$$

Under vågorna har vi linjer längs vilka trycket är konstant. Om ζ är ekvationen av en sådan linje mätt relativt den tillhörande trycklinjen för lugnt vatten får vi från (2) och (1)

$$\zeta = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c_w}{g} \cdot \omega \cdot \zeta_0 \cdot \cos(kx - \omega t) =$$
$$= \zeta_0 \cdot e^{-kz} \cdot \cos(kx - \omega t) \qquad \ldots\ldots (6)$$

Ekvationen för vattenytans form blir således

$$\zeta = \zeta_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \qquad \ldots\ldots (7)$$

<u>Tröghetskraften</u> på grund av omvandlarens massa m och dess medsvängande massa a är

$$m \cdot \ddot{z} + a(\ddot{z} - \ddot{\zeta}) \qquad \ldots\ldots (8)$$

där $\ddot{z}$ är omvandlarens vertikala acceleration mätt relativt det fixa koordinatsystemet $Oxyz$ och $\ddot{z} - \ddot{\zeta}$ dess vertikala acceleration mätt relativt vågens yta.

Dämpningskraften består av två delar varav generatorns dämpningskraft antas vara proportionell mot omvandlarens hastighet relativt det fasta systemet $Oxyz$ d v s $b_1 \cdot \dot{z}$ medan den hydrodynamiska dämpningskraften antas vara proportionell mot omvandlarens hastighet relativt vattenytan d v s $b(\dot{z} - \dot{\zeta})$

$$\therefore \quad b_1 \cdot \dot{z} + b(\dot{z} - \dot{\zeta}) \qquad \ldots\ldots (9)$$

Den återförande kraften beror på hydrostatiska trycket p g a deplacementsändringen och är proportionell mot denna.

$$c(z - \zeta) \qquad \ldots\ldots (10)$$

(8), (9) och (10) ger oss rörelseekvationen för omvandlaren

$$m \cdot \ddot{z} + a(\ddot{z} - \ddot{\zeta}) + b_1 \dot{z} + b(\dot{z} - \dot{\zeta}) + c(z - \zeta) = 0$$

eller

$$(m + a)\ddot{z} + (b + b_1) \cdot \dot{z} + c \cdot z = a \cdot \ddot{\zeta} + b \cdot \dot{\zeta} + c \cdot \zeta \qquad \ldots\ldots (11)$$

Högerledet i (11) $F = a\ddot{\zeta} + b\dot{\zeta} + c\zeta$ är den "drivande kraft" som verkar på omvandlaren.

Med utgångspunkt från (6) kan ett uttryck för F härledas. Härvid sättes $x = 0$. Vidare sättes $z = d$ eftersom den drivande kraften verkar på omvandlarens botten.

$$F = a \cdot \ddot{\zeta} + b \cdot \dot{\zeta} + c \cdot \zeta$$

eller

$$F = \zeta_0 \cdot e^{-kd} \left((c - a\omega^2) \cdot \cos \omega t - b \cdot \omega \cdot \sin \omega t \right) \qquad \ldots\ldots (12)$$

Den drivande kraften kan skrivas på formen

$F_o \cdot \cos(\omega t + \sigma)$ där

$$F_o = \zeta_o \left[(c - a \cdot \omega^2)^2 + (b \cdot \omega)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots\ldots (13)$$

$$\sigma = \operatorname{arctg} \left(\frac{b\omega}{c - a\omega^2} \right) \qquad \ldots\ldots (14)$$

σ är fasvinkeln mellan vågrörelsen och kraften

Vi har alltså

$$F = F_o \cdot \cos(\omega t + \sigma) \cdot e^{-kd} \qquad \ldots\ldots (15)$$

Rörelseekvationen (11) kan nu skrivas på formen

$$\ddot{z} + \frac{b + b_1}{m + a} \cdot \dot{z} + \frac{c}{m + a} \cdot z = F_o \cdot \frac{e^{-kd}}{m + a} \cdot \cos(\omega t + \sigma) \qquad \ldots\ldots (16)$$

(16) kan skrivas förenklat som

$$\ddot{z} + k_1 \cdot \dot{z} + k_2 \cdot z = k_3 \cdot \cos(\omega t + \sigma) =$$

$$= k_3 \left[\cos \omega t \cdot \cos \sigma - \sin \omega t \cdot \sin \sigma \right] \qquad \ldots\ldots (17)$$

Med hänvisning till superpositionsprincipen är det tillräckligt att studera den partikulära lösningen av differentialekvationen ovan.

Denna kan skrivas på formen

$$z = z_o \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) = z_o \cdot (\cos \omega t \cdot \cos \varepsilon - \sin \omega t \cdot \sin \varepsilon) \qquad \ldots\ldots (18)$$

:ter derivering, insättning i (17) samt identifikation av cos- resp. sin-termer fås

$$z_o \left[(k_2 - \omega^2) \cdot \cos \varepsilon - k_1 \cdot \omega \cdot \sin \varepsilon \right] = k_3 \cdot \cos \sigma \qquad \ldots\ldots (19)$$

respektive

$$z_o \left[-(k_2 - \omega^2) \cdot \sin \varepsilon - k_1 \cdot \omega \cdot \cos \varepsilon \right] = -k_3 \cdot \sin \sigma \qquad \ldots\ldots (20)$$

Kvadrering och summering ger efter förenkling

$$z_0 = k_3 \left[(k_2 - \omega^2)^2 + k_1^2 \cdot \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots (21)$$

här är

$$k_1 = (b + b_1)/(m+a) \quad \ldots\ldots (22)$$

$$k_2 = c/(m+a) \quad \ldots\ldots (23)$$

$$k_3 = F_0 \cdot e^{-kd}/(m+a) \quad \ldots\ldots (24)$$

nsättning i (21) ger

$$z_0 = F_0 \cdot e^{-kd} \left[(c - \omega^2(m+a))^2 + (b+b_1)^2 \cdot \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots (25)$$

(13) och (25) ger insatta i (18)

$$z = \zeta_0 \left[\frac{(c - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}{(c-(m+a)\omega^2)^2 + (b+b_1)^2 \cdot \omega^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-kd} \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \quad \ldots\ldots (26)$$

$$\omega t + \varepsilon = \omega t + \sigma - \tau \quad \ldots\ldots (27)$$

$$\tau = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega b}{c - (m+a) \cdot \omega^2} \right) \quad \ldots\ldots (28)$$

ε är fasvinkeln mellan hävningsrörelsen och vågrörelsen

τ är fasvinkeln mellan hävningsrörelsen och drivande kraften

Ekvation (26) beskriver <u>omvandlarens</u> rörelse.

Energiomvandling

Den energi som kan tas upp svarar mot det arbete som generatorn utför. Under en period blir detta arbete

$$E = b_1 \int_0^T \dot{z}^2 dt$$ varvid $dz = \dot{z} \cdot dt$ insatts

Medeleffekten under en period blir

$$P_m = \frac{b_1}{T}\int_0^T (\dot{z})^2 \cdot dt \qquad \ldots\ldots (29)$$

$$z = z_0 \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \quad \text{där} \qquad \ldots\ldots (30)$$

$$z_0 = \zeta_0 \cdot \left[\frac{(c - a\omega^2)^2 + (b\cdot\omega)^2}{(c-(m+a)\cdot\omega^2)^2 + (b+b_1)^2\cdot\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-kd} \qquad \ldots\ldots (31)$$

z_0 är amplituden hos kroppens rörelse

Derivering, kvadrering och integrering ger

$$P_m = \frac{b_1 \cdot \omega^2 \cdot z_0^2}{2} \qquad \ldots\ldots (32)$$

Vi får med (31)

$$P_m = \frac{b_1}{2} \cdot \zeta_0^2 \cdot \omega^2 \cdot e^{-2kd}\left[\frac{(c - a\omega^2)^2 + (b\cdot\omega)^2}{(c-(m+a)\cdot\omega^2)^2 + (b+b_1)^2\cdot\omega^2}\right] \qquad \ldots\ldots (33)$$

För dimensioneringen är även den maximala effekten under en period av intresse.

$$P = b_1 \cdot \dot{z}^2 \cdot dt/dt = b_1 \cdot \dot{z}^2$$

Derivering och kvadrering ger

$$\bar{P} = b_1 \cdot \omega^2 \cdot z_0^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varepsilon) \qquad \ldots\ldots (34)$$

varav inses att

$$P_{max} = b_1 \cdot \omega^2 \cdot z_0^2 \qquad \ldots\ldots (35)$$

d v s dubbelt så mycket som P_m

Kraften som påverkar omvandlaren via generatorn är

$$F_d = b_1 \cdot \dot{z} \qquad \ldots\ldots (36)$$

eller

$$F_d = -b_1 \cdot \omega \cdot z_0 \cdot \sin(\omega t + \varepsilon) \qquad \ldots\ldots (37)$$

Extremvärdena för F_d är intressanta

Deras absolutvärde är

$$|F_d|_{max} = b_1 \cdot \omega \cdot Z_o \quad \text{d v s}$$

$$|F_d|_{max} = b_1 \cdot \omega \cdot \zeta_o \cdot \left[\frac{(c - a\omega^2)^2 + (b \cdot \omega)^2}{(c - (m+a) \cdot \omega^2)^2 + (b + b_1)^2 \cdot \omega^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-kd} \quad \ldots\ldots (38)$$

Bestämning av a, b och c

Omvandlaren antages ha formen av en rät cirkulär cylinder med radien R och massan m

$$A = \pi \cdot R^2 \quad \ldots\ldots (39)$$

$$m = A \cdot d \cdot \rho \quad \ldots\ldots (40)$$

$$c = \rho \cdot g \cdot A \quad \ldots\ldots (41)$$

Om kroppen är helt nedsänkt blir $c=0$.

a = medsvängande massa och

b = hydrodynamisk dämpningskoefficient

Koefficienterna beror bl a på elementets form och kan bestämmas analytiskt vilket dock i allmänhet är mycket komplicerat.

För en halvsfär blir approximativt

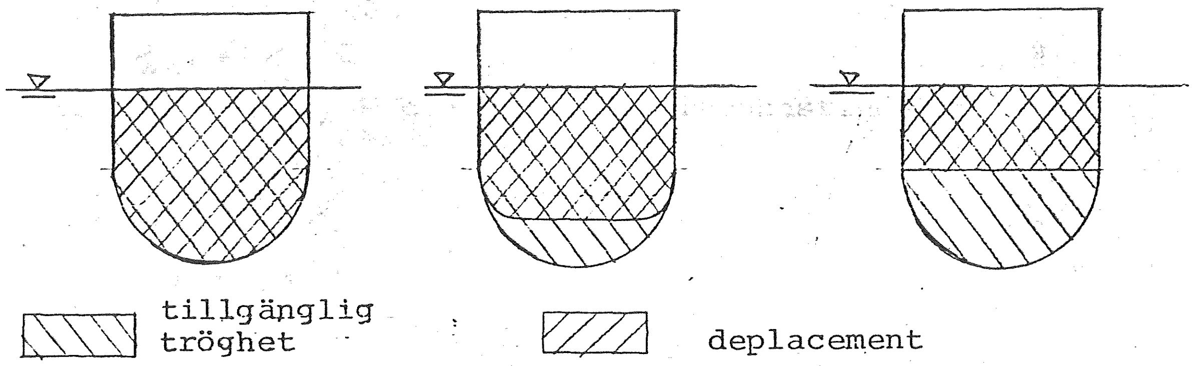
$$a = \frac{2\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \rho \cdot \mu \quad \ldots\ldots (42)$$

$$b = \frac{2\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \rho \cdot \varepsilon \cdot \omega \quad \ldots\ldots (43)$$

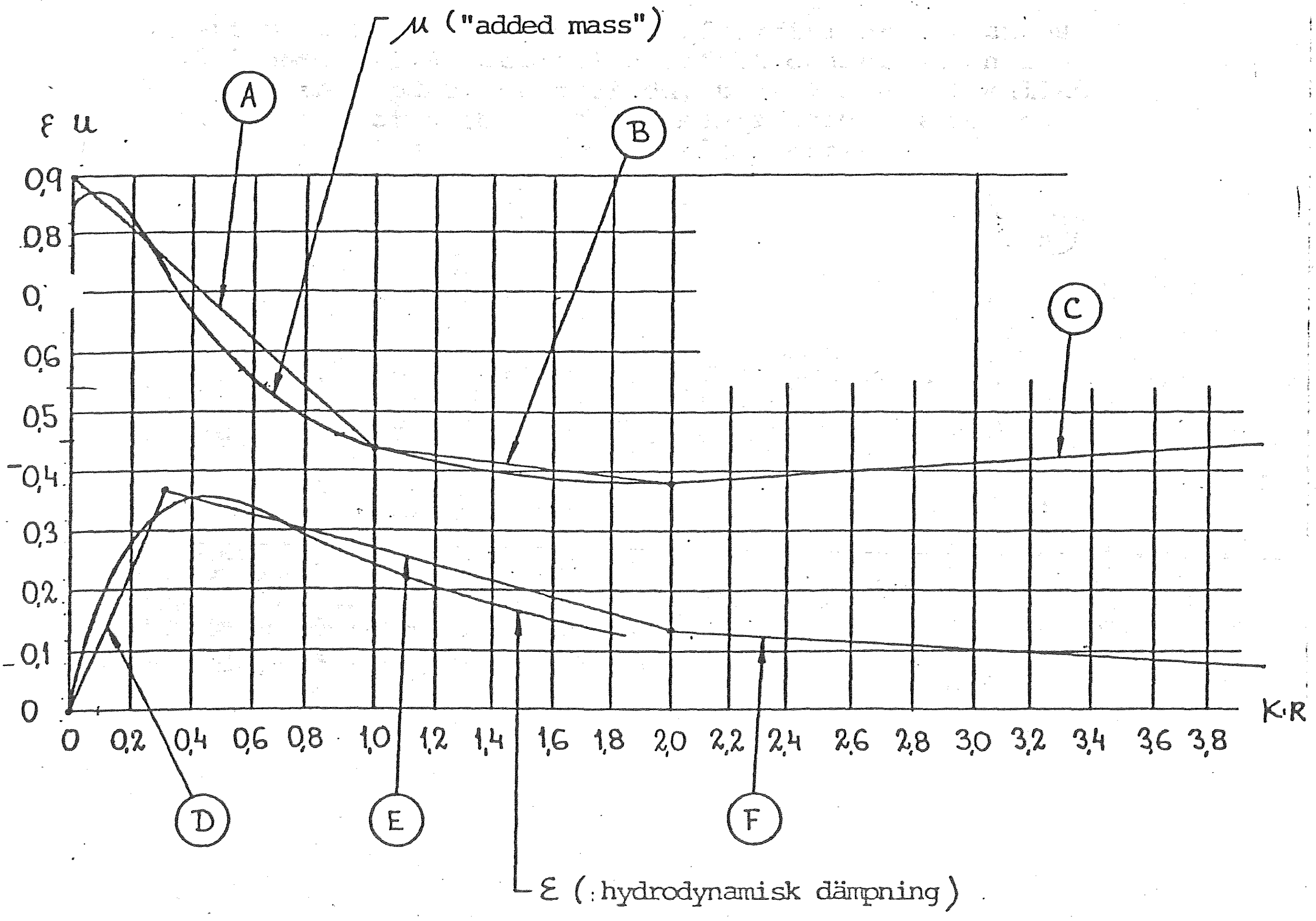
dvs halvsfärens deplacement (tillgänglig tröghet, "access of inertia") multiplicerat med μ resp $\varepsilon \cdot \omega$

μ och ε finns beräknade, av Havelock, som funktion av vågtalet k och radien R.

För en stående cirkulär cylinder med sfärisk botten antas approximativt gälla att den tillgängliga trögheten är lika med kroppens deplacement. För den helt sfäriska nosen gäller ju detta enligt ovan men för den räta delen av cylindern skall man reducera något om cylindern är hög. För en boj med avrundande hörn antas den tillgängliga trögheten bestå av deplacementet samt massan av den vattenvolym, som omslutes av en halvsfär, som tangerar den räta delen av cylindern. För en rät cylinder med horisontell botten gäller slutligen att den tillgängliga trögheten satts till deplacementet plus massan av vattnet inom en halvsfär med bojens radie under cylindern. Tilläggsmassan a och den hydrodynamiska dämpningen b har sedan beräknats som produkter av μ respektive $\varepsilon \cdot \omega$ och den tillgängliga trögheten för de tre beskrivna fallen.



De av Havelock framtagna funktionerna för ε och μ har nedan lineariserats för att möjliggöra datorberäkning utan att ε och μ behöver anges som ingångsdata.



Ekvationer för räta linjerna A - F

A	$0 \leq x \leq 1.0$	$y = -0.46 \cdot x + 0.90$
B	$1 \leq x \leq 2.0$	$y = -0.07 \cdot x + 0.51$
C	$2.0 \leq x$	$y = \min \begin{cases} 0.50 \\ 0.04 \cdot x + 0.29 \end{cases}$
D	$0 \leq x \leq 0.32$	$y = 1.13 \cdot x$
E	$0.32 \leq x \leq 2.0$	$y = -0.13 \cdot x + 0.40$
F	$2.0 \leq x$	$y = \max \begin{cases} 0.01 \\ -0.03 \cdot x + 0.20 \end{cases}$

A–C: $y = \varepsilon$; D–F: $y = \mu$; $x = \frac{\omega^2}{g} \cdot R$

Effektivitet

Medeleffekten i vågor av sinusform är per breddmeter.

$$P_{med} = c_g \cdot E \qquad \ldots\ldots (44)$$

där $E = H^2 \cdot \rho \cdot g / 8$ och c_g = grupphastigheten

$$c_g = \frac{1}{2} \cdot c_w \qquad \ldots\ldots (45)$$

om $h > L/2$

$$P_{med} = \frac{1}{16} \cdot H^2 \cdot \rho \cdot g^2 \cdot \frac{1}{\omega} \qquad \ldots\ldots (46)$$

Som ett mått på en omvandlares effektivitet kan anges förhållandet mellan utvecklad effekt och effekten i vågorna räknat på en viss bredd, t ex avståndet mellan omvandlarna. Detta bör vara av samma storleksordning som medelvåglängden i aktuellt vågspektrum.

$$\eta = \frac{P_m}{L_{med} \cdot P_{med}} \qquad \ldots\ldots (47)$$

Optimering av Pm

a) M.a.p. b_1 (generatorns dämpningskoefficient)

formel (32) förenklas till följande

$$P_m = \frac{c_1 \cdot b_1}{c_2 + (b_1 + b)^2}$$

Derivering ger följande villkor för extremvärden sedan $c_2 = \left(\frac{c}{\omega^2} - (m+a)\right)^2$ insatts

$$b_1 = \sqrt{b^2 + \left(\frac{c}{\omega^2} - (m+a)\right)^2} \quad \ldots\ldots (48)$$

Medeleffekten har ett extremvärde för detta värde på b_1

Vid resonans är $c = (m+a) \cdot \omega^2$ ..... (49)

varav $b_1 = b$

Om man sätter in uttrycket $a = (2\pi/3) R^3 \cdot \rho \cdot \mu$ för tilläggsmassan i resonansvillkoret erhålles

$$D = \frac{g}{\omega^2} - \frac{2}{3} \cdot R \cdot \mu = \frac{L}{2\pi} - \frac{2}{3} R \cdot \mu \quad \ldots\ldots (50)$$

b) M.a.p. D (djupgående, deplacementshöjd)

Om diametern 2R hålles konstant erhålles med

$$P_m = \frac{C_3 \cdot e^{-2kD}}{(c - (D\pi R^2 \cdot \rho + a)\omega^2)^2 + C_4} \quad \ldots\ldots (51)$$

där $C_3 = (b_1/2) \cdot \zeta_0^2 \cdot \omega^2 [(c - a\omega^2)^2 + (b \cdot \omega^2)^2]$ ..... (52)

och $C_4 = (b + b_1)^2 \omega^2$ ..... (53)

Efter derivering och substitutionen

$$D_1 \equiv C - (\Delta \pi R^2 \rho + a)\cdot \omega^2$$

fås sedan $k = \frac{\omega^2}{g}$ insatts följande villkor för extremvärde

$$D_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 \rho g\,(1 \pm \beta) \quad \text{där } \beta = \sqrt{1 - \frac{4(b+b_1)^2\cdot \omega^2}{\pi^2 \cdot R^4 \cdot \rho^2 \cdot g^2}} \quad \ldots\ldots (54)$$

$$\Delta = \left(\frac{C - D_1}{\omega^2} - a\right) \Big/ (\pi R^2 \cdot \rho) \quad \ldots\ldots (55)$$

$C = \rho g R^2 \cdot \pi$ och $a = \frac{2\pi}{3}\rho \cdot R^3 \cdot \mu$ insättes

Vi får $$\Delta = \frac{g}{2\omega^2}(1 \mp \beta) - \frac{2\mu}{3}\cdot R \quad \ldots\ldots (56)$$

Skriv $b = (2\pi/3)\cdot \rho \cdot R^3 \cdot \omega \cdot \varepsilon$ och $(b+b_1) = r\cdot b$

β^2 kan då skrivas

$$\beta^2 = 1 - (4 r \varepsilon R k/3)^2$$

Om man skall finna ett reellt maximum måste $\beta^2 \geq 0$
Tyvärr visar det sig att $\beta^2 < 0$ åtminstone för den boj (ca ø 3 m) och de periodtider (ca 5 s) som är aktuella.

Med insatta siffror erhålles randvärdesmaximum för D=0 m vilket är orimligt, eftersom bojen i så fall skulle lätta från vågorna vid minsta fasförskjutning.

Ett praktiskt gränsvärde för sjunkdjupet blir ju då villkoret för att bojen inte skall lyfta från vattenytan.

Man kan påpeka, att om man gör massan och deplacementet oberoende av varandra t ex genom att förspänna bojen mot bottnen med en elastisk fjäder, eller genom att införa svängande massor i systemet som inte påverkar deplacementet i form av svänghjul i bojen eller på bottnen, eller åstadkommer motsvarande krafter via ett reglersystem, så kommer vårt optimeringsvillkor (50) inte att gälla längre. Vad gäller sjunkdjupet erhålles då automatisk att D skall vara så litet som möjligt. Vad gäller massan erhålles åter resonansvillkoret, som för fallet med fjädern blir samma som tidigare.

$$m = \left(\frac{g}{\omega^2} - \frac{2}{3}\cdot R\cdot\mu\right)\rho\pi R^2$$

För fallet med reglersystemet och roterande massor måste en ny grundekvation för svängningen uppställas.