Strukturmekanisk modellering av linbärverk

Kandidatarbete inom civilingenjörsprogrammen i Maskinteknik och Väg- och vattenbyggnad

ELLY ANDERSSON
MARTIN GUSTAFSSON
JOAR GÖRANSSON AXÅS
ROBERT HEDLUND
MAURICE KRONBERG
JOHAN ÖRNBORG

Institutionen för Tillämpad mekanik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2017

KANDIDATARBETE 2017:07

Strukturmekanisk modellering av linbärverk

Kandidatarbete i Tillämpad mekanik

ELLY ANDERSSON
MARTIN GUSTAFSSON
JOAR GÖRANSSON AXÅS
ROBERT HEDLUND
MAURICE KRONBERG
JOHAN ÖRNBORG

Institutionen för Tillämpad mekanik
Avdelningen för Material- och beräkningsmekanik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2017

Strukturmekanisk modellering av linbärverk
Kandidatarbete i Tillämpad mekanik
ELLY ANDERSSON
MARTIN GUSTAFSSON
JOAR GÖRANSSON AXÅS
ROBERT HEDLUND
MAURICE KRONBERG
JOHAN ÖRNBORG

Examensarbete 2017:07
ISSN 1654-4676
Institutionen för Tillämpad mekanik
Avdelningen för Material- och beräkningsmekanik
Chalmers tekniska högskola
SE-412 96 Göteborg
Sverige
Telefon: + 46 (0)31-772 1000

Omslag: Olympiastadion i München.

Tryckeri/Institutionen för Tillämpad mekanik
Göteborg, Sverige 2017

Abstract

Keywords: linbärverk, kablar, kedjekurva, catenary curve, dynamic relaxation method, force density method, tensegrity structures, form-finding, formbestämning.

In order to allow large-span structures, while at the same time keeping down the costs of building materials, it is advantageous to combine constructions with cable structures. Cable structures are special as they only transfer loads in tension and behave non-linearly, which means that special analytical methods are required to determine the form, form-finding. The analysis methods used in this report are dynamic relaxation method (DRM) and force density method (FDM).

The aim of this project has been to develop two functions in MATLAB, one for each analysis method, which determines the form of one or more cables in a structure. The functions have been coded to resemble the structure of the functions in CALFEM, a plug-in module for MATLAB. To make the functions easy to use, a manual has been written for each method. Five different structures have been used for development, verification and validation. The results attained with the functions have then been compared to analytical and numerical solutions, as well as results from practical experiments.

The methods perform differently depending on the structure in an unloaded state. DRM performs well when the structure is known, such as prestressed structures, and converges after a smaller number of iterations than FDM. FDM converges more often than DRM and is preferable for solving freely hanging structures, such as the catenary curve, although it does not always converge.

Sammandrag

För att möjliggöra konstruktioner med stora spännvidder, men samtidigt hålla nere kostnaderna på exempelvis byggnadsmaterial är det fördelaktigt att kombinera konstruktioner med linbärverk. Linbärverk är speciella då de enbart tar upp laster i drag samt beter sig icke-linjärt, vilket innebär att särskilda analysmetoder krävs för att bestämma formen (form-finding). De analysmetoder som tillämpats i denna rapport är ”dynamic relaxation method” (DRM) och ”force density method” (FDM).

Målet med detta projekt har varit att ta fram två funktioner till MATLAB, en för varje analysmetod, som bestämmer formen på en eller flera linor i en struktur. Funktionerna har kodats för att efterlikna strukturen på funktionerna i CALFEM, en insticksmodul till MATLAB. För att göra funktionerna lättanvända har en manual skrivits för respektive metod. Fem olika strukturer har valts som grund för utveckling, verifiering och validering. Funktionerna har sedan jämförts med respektive analytiska och numeriska lösningar samt resultat från praktiskt utförda experiment.

Resultatmässigt presterar metoderna olika beroende på hur strukturen ser ut i obelastat tillstånd. DRM presterar väl när strukturen är känd, såsom förspända strukturer, och konvergerar då efter ett mindre antal iterationer än FDM. FDM konvergerar överlag oftare än DRM och är lämpligt för att lösa fritt hängande strukturer, till exempel kedjekurvan, även om det inte alltid konvergerar.

Förord

Denna rapport är vårt kandidatarbete inom civilingenjörsprogrammen i Maskinteknik och Väg- och vattenbyggnad vid Chalmers Tekniska Högskola i Göteborg. Arbetet har genomförts av Elly Andersson, Martin Gustafsson, Joar Göransson Axås, Robert Hedlund, Maurice Kronberg och Johan Örnborg, under våren 2017.

Det har varit väldigt kul att genomföra detta projekt. Då litteratur, i vissa fall, känts gammal och antalet personer insatta i projektämnet varit få, har det stundtals varit en utmaning att sammanställa allt. Samtidigt har detta gjort det roligt att fortsätta, då det känts som att vi arbetat och utvecklat metoderna snarare än att implementera något redan existerande.

Tack

Under arbetets gång har vi haft ett nära samarbete med vår examinator, Mats Ander, och handledare, Jim Brouzoulis. Därför vill vi tacka er två för att ha tagit er tid när det behövts, samt alltid försett oss med konstruktiv feedback. Vi vill även ge ett extra stort tack till Jim som köpte med sig semlor på fettisdagen och lät oss påbörja varje dag i loggboken med "Kära Jim".

Ytterligare tack riktar vi till Mats, som hjälpte till att få in några av oss på workshopdagar som hölls inom ämnet tensegritykonstruktioner under påsken denna vår. Det var mycket lärorikt och bidrog till massvis med ny kunskap som vi kunde ta tillbaka till projektet.

Elly Andersson (V)
ellya@student.chalmers.se

Martin Gustafsson (M)
martig@student.chalmers.se

Joar Göransson Axås (M)
axas@student.chalmers.se

Robert Hedlund (V)
robhed@student.chalmers.se

Maurice Kronberg (V)
maukro@student.chalmers.se

Johan Örnborg (V)
ornborg@student.chalmers.se

Innehåll

1. Inledning

Linbärverk är samlingsnamnet för konstruktionsdelar som enbart bär laster genom dragverkan. Exempel på konstruktionselement som ingår i linbärverk är kablar och vajrar. Karaktäristiskt för linbärverk är att de inte tar upp några krafter i tryck och därmed har ett försumbart motstånd mot böjning. Alla linor i konstruktionen måste därför belastas i drag, vilket gör linbärverken mer komplexa att analysera än till exempel stångbärverk där elementen dessutom kan bära tryckkrafter. Linbärverk används i många typer av konstruktioner, till exempel hängbroar, såsom Älvsborgsbron i Göteborg (Figur 1-1), eller hängtak i en arena, såsom taket på Olympiastadion i München (Figur 1-2).

Figur 1-1 – Älvsborgsbron i Göteborg är ett exempel på hur linbärverk kan kombineras med fackverk i en konstruktion.

Figur 1-2 – Olympiastadion i Münchens tak är ett exempel på hur linbärverk kan kombineras till ett större kabelnätverk.

1.1 Bakgrund

Fördelarna med linbärverk i förhållande till renodlade balk- och stångbärverk är flera: hög styrka i förhållande till sin vikt, kostnadseffektivitet och möjlighet till stora spännvidder. Teorin för linbärverk kan vidare relateras till mer komplexa strukturer såsom tensegrity- (Figur 1-3), membran- och skalkonstruktioner (Figur 1-4).

Linbärverk är geometriskt icke-linjära vilket kräver särskilda analysmetoder för att bestämma formen (*form-finding*) på dessa system. Vidare är de mekanismer ur ett statiskt perspektiv och då fungerar inte lösningsmetoder baserade på statisk analys, till exempel finita elementmetoden (FEM). FEM används dock med fördel vid analys av strukturer med konstruktionselement såsom balkar och stänger. Många lösningsmetoder för linbärverk har föreslagits, till exempel "Dynamic Relaxation Method" (DRM), "Force Density Method" (FDM) och "Scaled Conjugate Gradient Method".

Figur 1-3 – Kurlipa Bridge i Brisbane är en tensegritystruktur.

Figur 1-4 – British Museum i London är ett exempel på en skalkonstruktion.

1.2 Syfte

Syftet med kandidatarbetet “Strukturmekanisk modellering av linbärverk” är att implementera och jämföra två beräkningsmetoder för analys av linbärverk i CALFEM, en insticksmodul till beräkningsprogrammet MATLAB.

1.3 Avgränsningar

Verktyget är tänkt att hantera analys av linbärverk i tre dimensioner, med ambition att utgöra en språngbräda för framtida utveckling av verktyg som även hanterar tensegritystrukturer och membran. Avgränsning till linbärverk görs då det ligger utanför projektets tidsram att fördjupa oss i teorin och metodiken som ligger bakom analys av tensegritystrukturer och membran. Arbetet begränsas till två teoretiska metoder, DRM och FDM. Valet av lösningsmetoder gjordes utifrån att de båda är vanliga beräkningsmetoder för linbärverk.

I DRM finns det olika tillvägagångssätt för att beskriva dämpningen och vi har avgränsat oss till att implementera viskös dämpning, se avsnitt 2.1.1. Denna typ av dämpning har visats ge ett beteende som är nära verkligheten (Rodriguez Garcia, 2011). För den icke-linjära tillämpningen av FDM kan tre olika bivillkor definieras: osträckta elementlängder, nodavstånd och elementkrafter. Vi valde att endast implementera bivillkoret för osträckta längder, för att underlätta jämförelser med experiment.

1.4 Problemformulering

Uppgiften är att utveckla funktioner baserade på DRM och FDM i MATLAB, där funktionerna ska kunna beräkna linstrukturens form och spänningar. Resultaten från de båda funktionerna skall sedan gå att jämföra. Jämförelsen sker med hjälp av experimentella, analytiska och numeriska lösningar. Manualer för respektive funktion ska tas fram för att underlätta användningen. För att utföra uppgiften behöver ett antal frågor besvaras:

- Hur ser teorin ut bakom metoderna?

- Hur står sig resultaten från respektive funktion mot
    - Experiment?
    - Analytiska lösningar?
    - Numeriska lösningar?

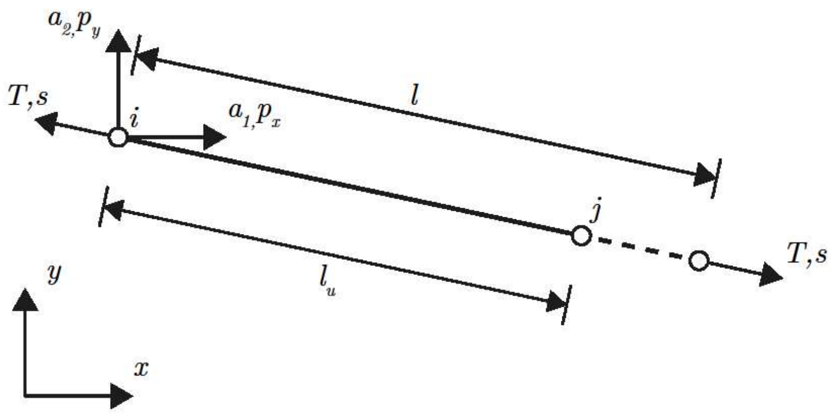
- Hur skiljer sig DRM och FDM med avseende på
    - Felprocent i resultatet?
    - Antal iterationer?
    - Robusthet?
    - Användarvänlighet?

- Vilka fördelar har de vid tillämpning av
    - Tryckta element?
    - Förspänning?

Beskrivningen av våra funktioner samt teorin ska vara begriplig för någon med grundläggande kunskaper i CALFEM. Funktionerna och manualen ska vara anpassade till strukturen i CALFEM.

2. Teoretisk bakgrund för linelement

Linelement för över krafter enbart i sin huvudsakliga utbredningsriktning och bär endast dragkrafter för varje enskilt snitt. En slak lina saknar alltså bärighet och tillför inget annat än egenvikt till konstruktionen (Samuelsson & Wiberg, 1997). Linelementet definieras mellan noderna i och j, se Figur 2-1, och nodernas förskjutning beskrivs med a_1 och a_2. Elementet har en osträckt längd l_u och en deformerad längd l, och antas vara i drag om $l > l_\mathrm{u}$. Elementkraften beskrivs med T i DRM och s i FDM. Varje nod utsätts för de yttre lasterna p_x och p_y.



Figur 2-1 – Definition av linelementet.

Strukturens globala jämvikt tas fram genom varje elements inbördes beroende såväl kraft- som förskjutningsmässigt. Vid analys av statisk jämvikt med förskjutningsmetoden fås ett ekvationssystem på formen

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \tag{2-1}$$

där
$\boldsymbol{K}$ = Styvhetsmatris
$\boldsymbol{a}$ = Förskjutningsvektor
$\boldsymbol{f}$ = Lastvektor

Det uppstår problem att bestämma formen för mekanismer och för strukturer vars geometri är en funktion av lasten (Dahlblom & Olsson, 2015). Då krävs istället metoder som hanterar icke-linjär formbestämning av strukturen.

Formbestämningen sker under följande antaganden för strukturen enligt Zhang och Ohsaki (2005):

- Elementen är sammankopplade av momentfria leder.
- Topologin, det vill säga beskrivningen av strukturens sammansättning av element, är känd på förhand.
- Den geometriska formen beskrivs av nodernas koordinater.
- Linorna beter sig linjärt elastiskt.

2.1 Dynamic relaxation method

Metoden härrör från en analogi som Alistair Day först beskrev för tidvattenflödesberäkningar år 1960 (Barnes, 1999). Ekvationer för vätskeflöden byttes då ut mot dämpad strukturmekanisk rörelse och de konstitutiva elasticitetssambanden. Det var dock först 1967 som metoden applicerades på icke-linjära problem.

Förskjutningsmetoden i ekvation (2-1) är inte tillräcklig för att beskriva nodernas läge vid ett visst lastfall. Genom att införa en andra ordningens differentialekvation, ekvation (2-2), kan strukturens form bestämmas med hjälp av att studera ekvationen för dynamisk jämvikt (Newtons andra lag).

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \qquad (2\text{-}2)$$

där
$\boldsymbol{M}$ = Fiktiv massmatris
$\ddot{\boldsymbol{a}}$ = Acceleration i noderna
$\boldsymbol{C}$ = Fiktiv dämpningsmatris
$\dot{\boldsymbol{a}}$ = Hastighet i noderna
$\boldsymbol{K}$ = Systemets ursprungliga styvhet
$\boldsymbol{a}$ = Förskjutning i noderna
$\boldsymbol{f}$ = Pålagd kraftvektor

Genom att accelerera systemet med den fiktiva massmatrisen, $\boldsymbol{M}$, och sedan dämpa det med dämpningsmatrisen, $\boldsymbol{C}$, fås ett tidsintervall under vilket systemet beter sig dynamiskt. Den fiktiva massan och dämpningen påverkar inte lösningen utan är endast till för att bestämma en statisk jämvikt. Under ett tidssteg i tidsintervallet tillskrivs noderna en konstant acceleration, $\ddot{\boldsymbol{a}}$, och en hastighet, $\dot{\boldsymbol{a}}$, vilka ger en iterations förskjutning, $\boldsymbol{a}$. Genom att låta $\ddot{\boldsymbol{a}}$ och $\dot{\boldsymbol{a}}$ gå mot noll, det vill säga minska hastigheten med dämpning fås elementens förskjutningar då strukturen uppfyller statisk jämvikt (Barnes, 1999). Med förskjutningarna kan lösningen till ekvation (2-1) erhållas.

2.1.1 Lösningsmetodik

Metoden fungerar på följande vis:

1. Styvhetsmatrisen definieras för strukturen.
2. Laster på systemet appliceras. Skulle förspänningar föreligga ansätts även dessa i beräkningsmodellen.
3. Fiktiva dämpningar och massor introduceras i noderna för att accelerera systemet och därefter dämpa rörelsen.
4. Nodernas förskjutning, hastighet och acceleration beräknas iterativt tills differensen mellan två iterationer är så pass liten att strukturen kan antas vara i statisk jämvikt.
5. Med hjälp av nodernas förskjutningar beskrivs därefter strukturens form och utifrån den kan strukturen analyseras med avseende på inre krafter.

2.1.2 Styrande ekvationer

Följande ekvationer är hämtade från Barnes (1999).

Residualkraften i någon koordinatriktning α i noden i beskrivs av formeln

$$R_{\alpha i}^{t} = M_i \cdot \dot{V}_{\alpha i}^{t} + C_i \cdot V_{\alpha i}^{t} \tag{2-3}$$

där

$R_{\alpha i}^{t}$ är residualkraften i nod i vid tiden t
M_i är fiktiva massan i nod i
C_i är fiktiva dämpningen i nod i
$\dot{V}_{\alpha i}^{t}$ är accelerationen i nod i vid tiden t
$V_{\alpha i}^{t}$är hastigheten i nod i vid tiden t
$\alpha \in \{x, y, z\}$

För små tidsintervall kan accelerationerna $\dot{V}_{\alpha i}^{t}$ och hastigheterna $V_{\alpha i}^{t}$ antas vara konstanta och skrivas om som

$$\dot{V}_{\alpha i}^{t} = \frac{\left(V_{\alpha i}^{t+\Delta t/2} - V_{\alpha i}^{t-\Delta t/2}\right)}{\Delta t} \tag{2-4}$$

$$V_{\alpha i}^{t} = \frac{\left(V_{\alpha i}^{t+\Delta t/2} + V_{\alpha i}^{t-\Delta t/2}\right)}{2} \tag{2-5}$$

Ekvation (2-3) kan med (2-4) och (2-5) skrivas

$$R_{\alpha i}^{t} = \frac{M_i}{\Delta t}\left(V_{\alpha i}^{t+\Delta t/2} - V_{\alpha i}^{t-\Delta t/2}\right) + \frac{C_i}{2}\left(V_{\alpha i}^{t+\Delta t/2} + V_{\alpha i}^{t-\Delta t/2}\right) \tag{2-6}$$

Från (2-6) fås hastigheten vid tiden $t + \Delta t/2$ som

$$V_{\alpha i}^{t+\Delta t/2} = R_{\alpha i}^{t}\left[\frac{1}{M_i/\Delta t + C_i/2}\right] + V_{\alpha i}^{t-\Delta t/2}\left[\frac{M_i/\Delta t - C_i/2}{M_i/\Delta t + C_i/2}\right] \tag{2-7}$$

Dämpningskonstanten för varje nod i beräknas enligt

$$C_i = \sqrt{8}\left(M_i/\Delta t\right) \tag{2-8}$$

och den fiktiva massan för varje nod i enligt

$$M_i = \frac{\Delta t^2}{2} \cdot b_i \tag{2-9}$$

där

$b_i = \sum_k \left(\frac{E_k A_k}{L_k^0} + \frac{T_k^0}{L_k^0}\right) \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$ för varje nod i med anslutande element k
E_k = Elasticitetsmodul [Pa]
A_k = Tvärsnittsarea [m^2]

T_k^0 = Förspänningskraft i linan [N]
L_k^0 = Linans osträckta längd [m]

Ekvation (2-7) med (2-8) och (2-9) insatt ger då

$$V_{\alpha i}^{t+\Delta t/2} = R_{\alpha i}^t \left[\frac{\Delta t}{M_i(1 + C/2)}\right] + V_{\alpha i}^{t-\Delta t/2}\left[\frac{1 - C/2}{1 + C/2}\right] \tag{2-10}$$

vilket är den nya hastigheten i varje nod. Förskjutningen i varje riktning för noden i vid tiden $t + \Delta t$ blir

$$a_{\alpha i}^{t+\Delta t} = a_{\alpha i}^t + \Delta t \cdot V_{\alpha i}^{t+\Delta t/2} \tag{2-11}$$

Deformationen av ett element k, mellan noderna i och j, beräknas som

$$\Delta a_{\alpha k}^{t+\Delta t} = a_{\alpha j}^{t+\Delta t} - a_{\alpha i}^{t+\Delta t} \tag{2-12}$$

Linelementets nya längd i varje komposantriktning kan nu beräknas som

$$L_{\alpha k}^{t+\Delta t} = L_{\alpha k}^t + \Delta a_{\alpha k}^{t+\Delta t} \tag{2-13}$$

Sedan beräknas linelementets uppdaterade längder med hjälp av rymddiagonalen på följande vis:

$$L_k^{t+\Delta t} = \sqrt{\left(L_{xk}^{t+\Delta t}\right)^2 + \left(L_{yk}^{t+\Delta t}\right)^2 + \left(L_{zk}^{t+\Delta t}\right)^2} \tag{2-14}$$

De nya normalkrafterna i varje element kan nu bestämmas med hjälp av en omskrivning av Hookes lag.

$$T_k^{t+\Delta t} = T_k^0 + \left(\frac{EA}{L^0}\right)_k \cdot e_k^{t+\Delta t} \tag{2-15}$$

$e_k^{t+\Delta t}$ är ett alternativt uttryck för linans deformation. När strukturens svängningar dämpas till ett stabilt jämviktsläge finns risken att ett ackumulerat fel i förlängningstermen kvarstår som följd av att den totala förlängningen beräknas i varje steg. När tidssteget närmar sig ett kritiskt värde kan det därför uppstå en form av instabilitet på grund av att förlängningen ibland är större än det verkliga värdet. Därav nyttjas detta alternativa uttryck för att beskriva elementens förlängning. Föregående iterations förlängning används tillsammans med de nya förskjutningarna för att bestämma elementets nuvarande förlängning.

$$e_k^{t+\Delta t} = \frac{Q}{2L_k^{t+\Delta t} + \dfrac{Q}{2L_k^{t+\Delta t} + e_k^t}} \tag{2-16}$$

där

$$Q = \sum_{\alpha} \Delta a_{\alpha k}^{t+\Delta t}\left(2\Delta X_\alpha + \Delta a_{\alpha k}^{t+\Delta t}\right)$$

och $\Delta X_\alpha = X_{\alpha j} - X_{\alpha i}$, där X är den ursprungliga koordinaten för respektive nod.

Om $L_{\alpha k}^{t+\Delta t} < L^0$ är elementet osträckt och då ansätts $T_k^0 = 0$ och $EA_k = 0$ till nästa iteration enligt Figur 2-2.

Förändringen i residualkraft med riktning α i element k kan slutligen skrivas som

$$\Delta R_{\alpha k}^{t+\Delta t} = \frac{T_k^{t+\Delta t}}{L_k^{t+\Delta t}}\left[\left(X_j + a_{\alpha j}^{t+\Delta t}\right) - \left(X_i + a_{\alpha i}^{t+\Delta t}\right)\right] \tag{2-17}$$

Med den pålagda kraften $P_{\alpha i}$ och summan av alla sammankopplade elements bidrag blir den totala resulterande kraften i varje nod och riktning

$$R_{\alpha i}^{t+\Delta t} = P_{\alpha \mathrm{i}} + \sum_k \Delta R_{\alpha k}^{t+\Delta t} \tag{2-18}$$

Denna beräkningsgång upprepas tills hastigheten i varje nod är tillräckligt nära noll. För att definiera när hastigheten anses tillräckligt låg, och statisk jämvikt därmed är uppfylld, behöver ett konvergensvillkor införas.

2.1.3 Konvergensvillkor

DRM:s konvergensvillkor är enligt Barnes (1999) baserat på nodernas kinetiska energi. Detta medför att en struktur som utsätts för långsamma fiktiva svängningar kan ha en mycket låg energi trots att statisk jämvikt inte är uppfylld. På grund av detta fenomen behöver två konvergensvillkor definieras (se även 5.2.2).

2.1.3.1 Systemets kinetiska energi

Kinetisk energi, E_i, beräknas för varje nod enligt

$$E_i = \frac{1}{2} M_i \left(V_i^{t+\Delta t}\right)^2 \tag{2-19}$$

där M_i är nodens fiktiva massa och $\mathrm{V}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}}$ hastigheten för noden. Systemets totala energi, $\sum_i E_i$, går mot noll då systemet uppnår statisk jämvikt.

2.1.3.2 Kraftskillnad

I en del fall är villkoret som Barnes (1999) baserar på kinetisk energi otillräckligt. Det kompletterande villkoret är en vidareutveckling av det kraftvillkor som används av Hüttner, Máca och Fajman (2014). Den maximala kraftresidualen i varje nod beräknas vid tidssteget t, det vill säga

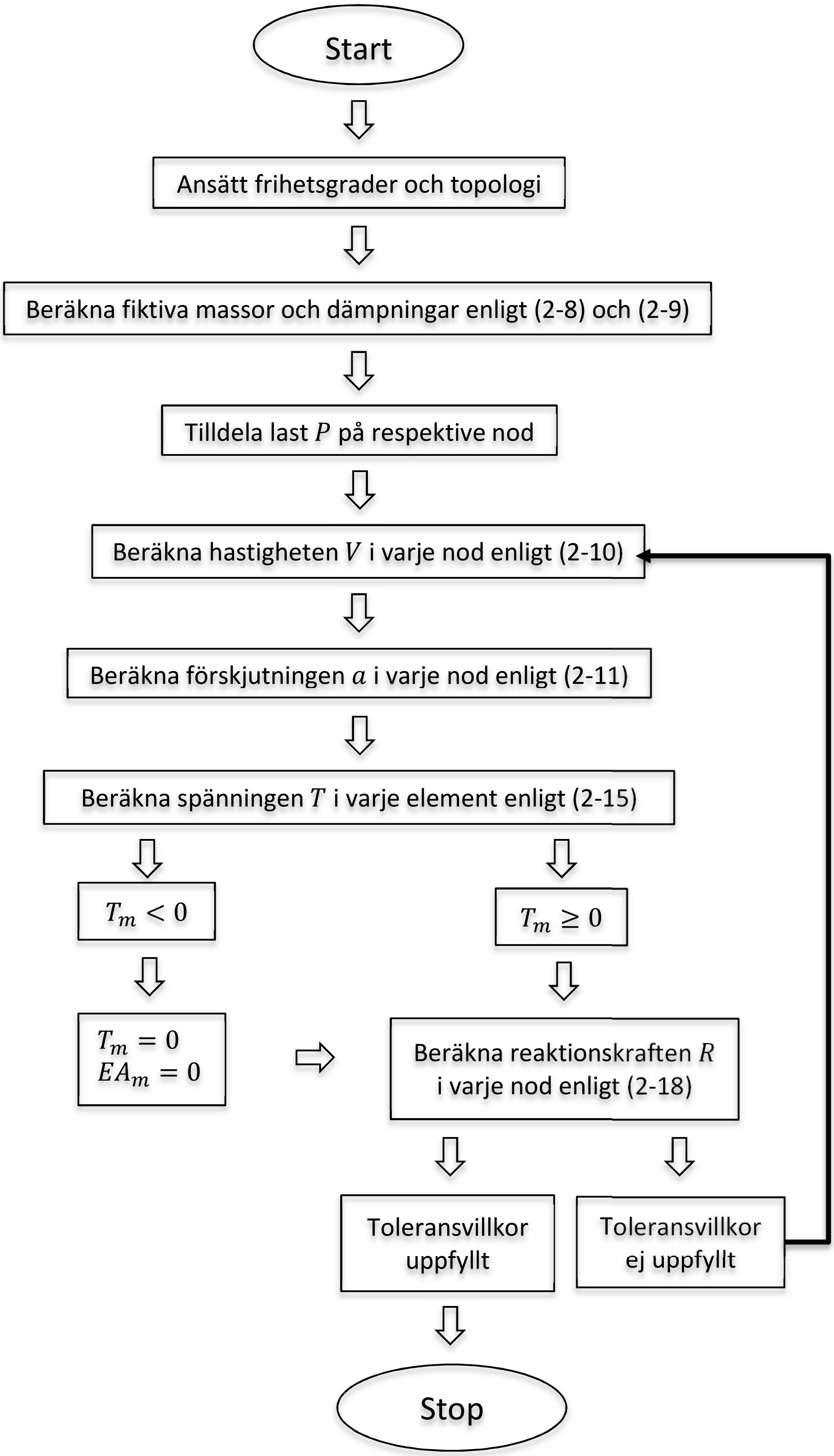
$$\max\left(\sqrt{(R_x^t)^2 + \left(R_y^t\right)^2 + (R_z^t)^2}\right)_{\mathrm{i}} = \max(R^t) \tag{2-20}$$

Sedan beräknas den maximala kraftresidualen för nästkommande tidssteg på samma sätt, $\max\left(R^{t+\Delta t}\right)_i$. Om skillnaden mellan dessa två är mindre än andelen β av den största pålagda kraftresultanten på en nod anses konvergens ha uppnåtts. Det vill säga

$$\left|\max\left(R^{t+\Delta t}\right)_i - \max(R^t)_i\right| < \beta \cdot \max(P) \tag{2-21}$$

där $P = \left(\sqrt{(\boldsymbol{P}_x)^2 + (\boldsymbol{P}_y)^2 + (\boldsymbol{P}_z)^2}\right)$. Kravet β ansätts godtyckligt, men bör sättas låg för att erhålla en liten felterm.

2.1.4 Flödesschema för DRM-algoritm



Figur 2-2 – En översikt på hur teorin för DRM kan implementeras i en algoritm.

2.2 Force density method

Denna metod föreslogs ursprungligen 1971 av Linkwitz och Schek för analys av kabelnät (Zhang & Ohsaki, 2005). Endast linjära ekvationer behöver lösas för att ta fram den initiala formen, vilket är en stor styrka jämfört med andra metoder. En nackdel är dock att det för stora system blir svårhanterat och ineffektivt med en analytisk lösning, då de är mer tidskrävande än numeriska lösningar.

FDM bygger på att transformera icke-linjära jämviktsekvationer med okända nodkoordinater till en uppsättning av linjära ekvationer som för varje element baseras på en kvot mellan normalkraft och längd kallad force density, betecknad $\boldsymbol{q}$. Med hjälp av $\boldsymbol{q}$ formuleras en jämviktsmatris där varje element i strukturen endast är beroende av förhållandet mellan sin normalkraft och längd. Tack vare denna enda beskrivande kvantitet uppnås linjära samband för strukturens ursprungliga geometri (Schek, 1974).

Vid linjär analys med FDM tas inte hänsyn till materialegenskaper, såsom spännings-töjningssamband. För att implementera detta krävs ett införande av bivillkor. Bivillkor kan även introduceras för önskvärt nodavstånd eller önskvärd kraftfördelning i strukturen. Införande av ett eller flera bivillkor gör beräkningen icke-linjär och därmed iterativ (Schek, 1974).

2.2.1 Styrande ekvationer

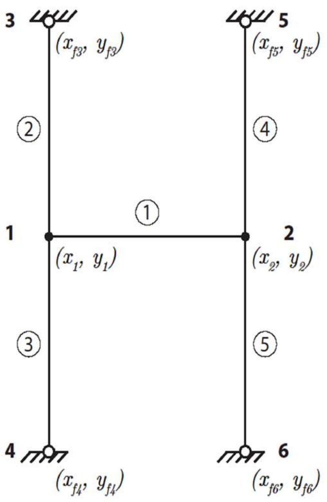
De styrande ekvationerna för FDM är i huvudsak baserade på teorin formulerad av Schek (1974), avvikelser refereras i respektive stycke.

Ett system av kablar definieras genom att varje linelement har sina ändpunkter i två noder. Själva noden kan vara av två typer, fri eller fixerad. Fixerade noder kan betraktas som ett randvillkor (oeftergivliga) medan de fria noderna är de vars geometri är okänd och utgör de obekanta variablerna.

Varje nod n (fri) och n_f (fixerad) tilldelas koordinaterna (x, y, z). Alla fria noders koordinater samlas sedan i vektorerna $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ och $\boldsymbol{z}$ och fixa noders koordinater samlas i vektorer på samma form, $\boldsymbol{x_f}$, $\boldsymbol{y_f}$, $\boldsymbol{z_f}$.

För att bestämma den exakta geometrin av strukturen definieras en topologimatris $\boldsymbol{C_s} \in R^{m\times(n+n^f)}$ där sammankopplingen av alla element m via noder n och n^f framgår. Varje linelement k sammanlänkar noderna i och j. För $i < j$ ansätts i topologimatrisen siffran 1 på plats $\boldsymbol{C_s}(k, i)$ respektive -1 på plats $\boldsymbol{C_s}(k, j)$.

$\boldsymbol{C_s}$ partitioneras sedan i två submatriser $\boldsymbol{C} \in R^{m\times n}$ och $\boldsymbol{C_f} \in R^{m\times n^f}$ som är ordnade så att de representerar elementens koppling till fria noder respektive fixerade noder.



$$
\begin{array}{cl}
 & \quad\quad \text{nod} \quad 1 \quad\; 2 \quad\;\; 3 \quad\; 4 \quad\; 5 \quad\; 6 \\
\text{element} & \\
\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \boldsymbol{C_s} = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \\
 & \qquad\quad\; \boldsymbol{C} \qquad\qquad\qquad \boldsymbol{C_f}
\end{array}
$$

Figur 2-3 – Exempel på topologimatris och elementindelning för ett enkelt kabelsystem.

Figur 2-3 visar ett exempel på hur $\boldsymbol{C_s}$-matrisen kan etableras för en struktur bestående av fem element. Streckningen i matrisen visar uppdelningen i submatriserna $\boldsymbol{C}$ och $\boldsymbol{C_f}$. Observera att matrisen skiljer sig både till form och funktion mot topologimatrisen som bl.a. används med bar- och beamfunktionerna i CALFEM.

Komposantavstånden mellan sammankopplade noder kan beräknas genom att nyttja topologimatrisen $\boldsymbol{C}$ och $\boldsymbol{C_f}$ och uttrycks på formen:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{C_f x_f} \\
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{Cy} + \boldsymbol{C_f y_f} \\
\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{Cz} + \boldsymbol{C_f z_f}
\end{aligned}
\tag{2-22}
$$

Genom dessa uttryck för noddifferenser kan nu även längdvektorn $\boldsymbol{l}$ etableras genom sambandet

$$
\boldsymbol{l} = \sqrt{\boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{z}^2} \tag{2-23}
$$

vilket är ett uttryck för elementlängderna i termer av nodernas position.

Inre krafter för varje element ansätts genom vektorn $\boldsymbol{s}$, som innehåller initiala förspänningskrafter för respektive element. Förspänningen ska ansättas positiv ($s_i > 0$) för kabelnätverk. Vektorn ska även vara nollskild vilket inses längre fram genom definitionen av force density-vektorn och hur vektorer som närmar sig noll leder till singularitet vid bestämning av nodernas koordinater.

Yttre laster beskrivs av lastvektorerna $\boldsymbol{p_x}$, $\boldsymbol{p_y}$ och $\boldsymbol{p_z}$. Nod i har således lasterna p_{xi}, p_{yi} och p_{zi} i riktningarna x-, y- och z-led. Strukturen är i jämvikt då summan av inre och yttre krafter i varje nod är noll. Systemet är i jämvikt då följande ekvationer är uppfyllda:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{C^T U L^{-1} s} = \boldsymbol{p_x} \\ \boldsymbol{C^T V L^{-1} s} = \boldsymbol{p_y} \\ \boldsymbol{C^T W L^{-1} s} = \boldsymbol{p_z} \end{gathered} \tag{2-24}$$

där $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ och $\boldsymbol{L}$ är diagonalmatriserna av $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, och $\boldsymbol{l}$. Jacobimatrisen är representerad genom omskrivningen

$$\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{C^T U L^{-1}}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial \boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C^T V L^{-1}}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial \boldsymbol{z}} = \boldsymbol{C^T W L^{-1}} \tag{2-25}$$

Uttrycken är ekvivalenta med kraftkomposanternas riktningscosiner (Linkwitz, 2014). Genom att formulera force density-vektorn som

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{s} \tag{2-26}$$

kan (2-24) nu skrivas om till

$$\begin{gathered} \boldsymbol{C^T U q} = \boldsymbol{p_x} \\ \boldsymbol{C^T V q} = \boldsymbol{p_y} \\ \boldsymbol{C^T W q} = \boldsymbol{p_z} \end{gathered} \tag{2-27}$$

Med identiteterna $\boldsymbol{Uq} = \boldsymbol{Qu}$, $\boldsymbol{Vq} = \boldsymbol{Qv}$ och $\boldsymbol{Wq} = \boldsymbol{Qw}$ där $\boldsymbol{Q}$ är diagonalmatrisen av $\boldsymbol{q}$ går det nu via den ursprungliga definitionen av $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ att skriva om uttrycken på formen

$$\begin{gathered} \boldsymbol{C^T Q C x} + \boldsymbol{C^T Q C_f x_f} = \boldsymbol{p_x} \\ \boldsymbol{C^T Q C y} + \boldsymbol{C^T Q C_f y_f} = \boldsymbol{p_y} \\ \boldsymbol{C^T Q C z} + \boldsymbol{C^T Q C_f z_f} = \boldsymbol{p_z} \end{gathered} \tag{2-28}$$

För att åstadkomma ett enklare uttryck definieras matriserna $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C^t Q C}$ och $\boldsymbol{D_f} = \boldsymbol{C^t Q C_f}$ och vi löser sedan ut koordinatvektorerna $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, och $\boldsymbol{z}$ ur de jämviktsekvationer vi erhållit vilket resulterar i

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{D^{-1}}(\boldsymbol{p_x} - \boldsymbol{D_f x_f}) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{D^{-1}}(\boldsymbol{p_y} - \boldsymbol{D_f y_f}) \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{D^{-1}}(\boldsymbol{p_z} - \boldsymbol{D_f z_f}) \end{gathered} \tag{2-29}$$

Ekvation (2-29) ger strukturens form för en godtyckligt pålagd last, och för varje given force density-vektor existerar det precis ett jämviktstillstånd med en unik lösning. $\boldsymbol{q}$-vektorer och jämviktstillstånd är därmed samma till antalet, vilket gör konceptet med force density väl fungerande för analys av kabelstrukturer (Schek, 1974).

Matriserna $\boldsymbol{D}$ och $\boldsymbol{D_f}$ kan betraktas som jämviktsmatriser vars element är summor av q-värden som fördelats beroende av topologin. Exempel på matrisen $\boldsymbol{D}$, baserad på samma topologi som vid definitionen av $\boldsymbol{C_s}$ (Figur 2-3):

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 + q_3 & -q_1 \\ -q_1 & q_1 + q_4 + q_5 \end{pmatrix} \tag{2-30}$$

Matrisen är positivt definit för kabelnätverk när samtliga element är i drag ($q > 0$) och endast innehåller kopplade noder. Matriserna $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C^T Q C}$ och $\boldsymbol{D_f} = \boldsymbol{C^T Q C_f}$ är i matematiska termer den generaliserade Gaussiska transformationen av $\boldsymbol{C}$, även känt som generaliserad Weierstrasstransformation (Schek, 1974). Förenklat uttryckt ger transformationen en kontinuerlig funktion från en uppsättning linjära ekvationer. En mer ingående beskrivning finns i källhänvisningen (Wikipedia, 2017).

Vidare erhålls normalkrafter för varje element enligt

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{Lq} \tag{2-31}$$

där $\boldsymbol{L}$ är diagonalmatrisen av $\boldsymbol{l}$, där $\boldsymbol{l}$ bestämts utifrån de erhållna nodkoordinaterna i (2-29) (Schek, 1974). Med ovanstående metod går det att bestämma slutlig form för en godtyckligt vald force density-vektor. Så långt är analysen på linjär form.

2.2.2 Formbestämning och analys med bivillkor

I de flesta fall är det intressant att kunna analysera en struktur utifrån dess osträckta elementlängder, en slutlig önskad spänning i ett godtyckligt antal element, eller slutliga nodplaceringar. Införande av sådana restriktioner gör analysen icke-linjär (Schek, 1974).

2.2.2.1 Generell definition av bivillkor och lösningsmetodik

Antag att det existerar r antal bivillkor på formen

$$\begin{gathered} g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{q}) = 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{q}) = 0 \\ \vdots \\ g_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{q}) = 0 \end{gathered}$$

Bivillkoren kan sammanställas i en vektor med r antal element:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0} \tag{2-32}$$

Eftersom nodernas koordinater endast är en funktion av $\boldsymbol{q}$ i enlighet med ekvation (29) kan funktionen skrivas om med beroende av endast en variabel:

$$\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{z}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{q}) = 0 \tag{2-33}$$

De tillagda bivillkoren kommer inte att vara uppfyllda vid startgissningen $\boldsymbol{q}^{(0)}$ där $\boldsymbol{q}^{(0)}$ representerar force density-vektorn vid den initiella och linjärt åstadkomna formen. Därför eftersöks en ny form genererad av $\boldsymbol{q}^{(n+1)} = \boldsymbol{q}^{(n)} + \Delta\boldsymbol{q}$ där $\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{q}^{(n+1)}) = 0$ är uppfyllt, det vill säga samtliga bivillkor är uppfyllda.

Den nya formen tas fram i följande iterativa process (Figur 2-4) som är baserad på Newton-Raphsons metod (Linkwitz, 2014):

Vi letar efter ett $\Delta\boldsymbol{q}$ som uppfyller

$$\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{q}^{(n+1)}) = \boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{q}^{(n)}) + \frac{\partial \boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{q}^{(n)})}{\partial \boldsymbol{q}}\Delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{2-34}$$

För enkelhetens skull skrivs Jacobimatrisen som

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{q}^{(\boldsymbol{0})})}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}} \tag{2-35}$$

och bivillkoren som

$$-\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{q}^{(\boldsymbol{0})}) = \boldsymbol{r} \tag{2-36}$$

Detta ger oss istället att (2-34) kan skrivas

$$\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\Delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r} \tag{2-37}$$

I vissa fall existerar fler antal element än ansatta bivillkor. Med andra ord existerar det i detta fall för k antal element och r stycken bivillkor $m - k$ linjärt oberoende lösningar. I detta fall väljs en lösning ut utifrån minsta kvadrat-principen

$$\Delta\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{T}}\Delta\boldsymbol{q} \;\rightarrow\; \min \tag{2-38}$$

I de fall då iterationerna ger stora variationer i force density, det vill säga stor förändring av formen, kan även någon form av dämpning behöva införas för att undvika vibrationer. Detta implementeras i en faktor $\boldsymbol{k}$ som innehåller Jacobianen och bivillkoren. Faktorn $\boldsymbol{k}$ definieras som

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{T}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{r} \tag{2-39}$$

där $\boldsymbol{T}$ med pålagd dämpning $\boldsymbol{P}$ blir

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{P} \tag{2-40}$$

Dämpmatrisen $\boldsymbol{P}$ är en godtyckligt ansatt faktor multiplicerad med identitetsmatrisen och med samma matrisstorlek som $\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{G}$**.** Flera varianter på dämpning definieras av Schek (1974) och i ekvation (2-40) definieras den dämpstrategi som implementerats i vårt verktyg. Beskrivningen av övriga dämpmetoder är svårtolkade och används i kombination med andra sätt att tillämpa minsta kvadrat-principen. Dämpning enligt ekvation (2-40) är den mest grundläggande varianten för FDM. En definition av samtliga dämpningsmetoder beskrivs av Schek (1974).

$\Delta\boldsymbol{q}$ kan nu skrivas på formen

$$\Delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{k} \tag{2-41}$$

För nästa iteration ansätts $\boldsymbol{q}^{(n+1)} = \boldsymbol{q}^{(n)} + \Delta\boldsymbol{q}$ och upprepar processen tills bivillkoren är uppfyllda ($\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{q}^{(n+1)}) = 0$) inom en given tolerans (Schek, 1974).

2.2.2.2 Bivillkoret för osträckt längd

Elementlängderna i vektorn $\boldsymbol{l}$ har tidigare definierats som avståndet mellan nodkoordinater. Detta representerar således den sträckta elementlängden. Med hjälp av Hookes lag går det att definiera följande samband mellan sträckta och osträckta längder vilket utgör bivillkoret för osträckt längd:

$$\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{q}^{(n)}) = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{h}+\boldsymbol{s}}\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}_{\mathrm{u}} = \boldsymbol{0} \tag{2-42}$$

där $\boldsymbol{s}$ är normalkraftsvektor, $\boldsymbol{h}$ representerar styvhet $(\boldsymbol{EA})$, $\boldsymbol{l}$ deformerad längd och $\boldsymbol{l}_{\mathbf{u}}$ osträckt längd.

2.2.2.3 Jacobimatrisen $\boldsymbol{G}^T$

Av praktiska skäl eftersöks vid iteration med hjälp av Newton-Raphsons metod ett så enkelt uttryck som möjligt för Jacobimatrisen $\boldsymbol{G}^T$. Matrisen $\boldsymbol{G}^T$ kan erhållas genom kedjeregeln och blir på formen:

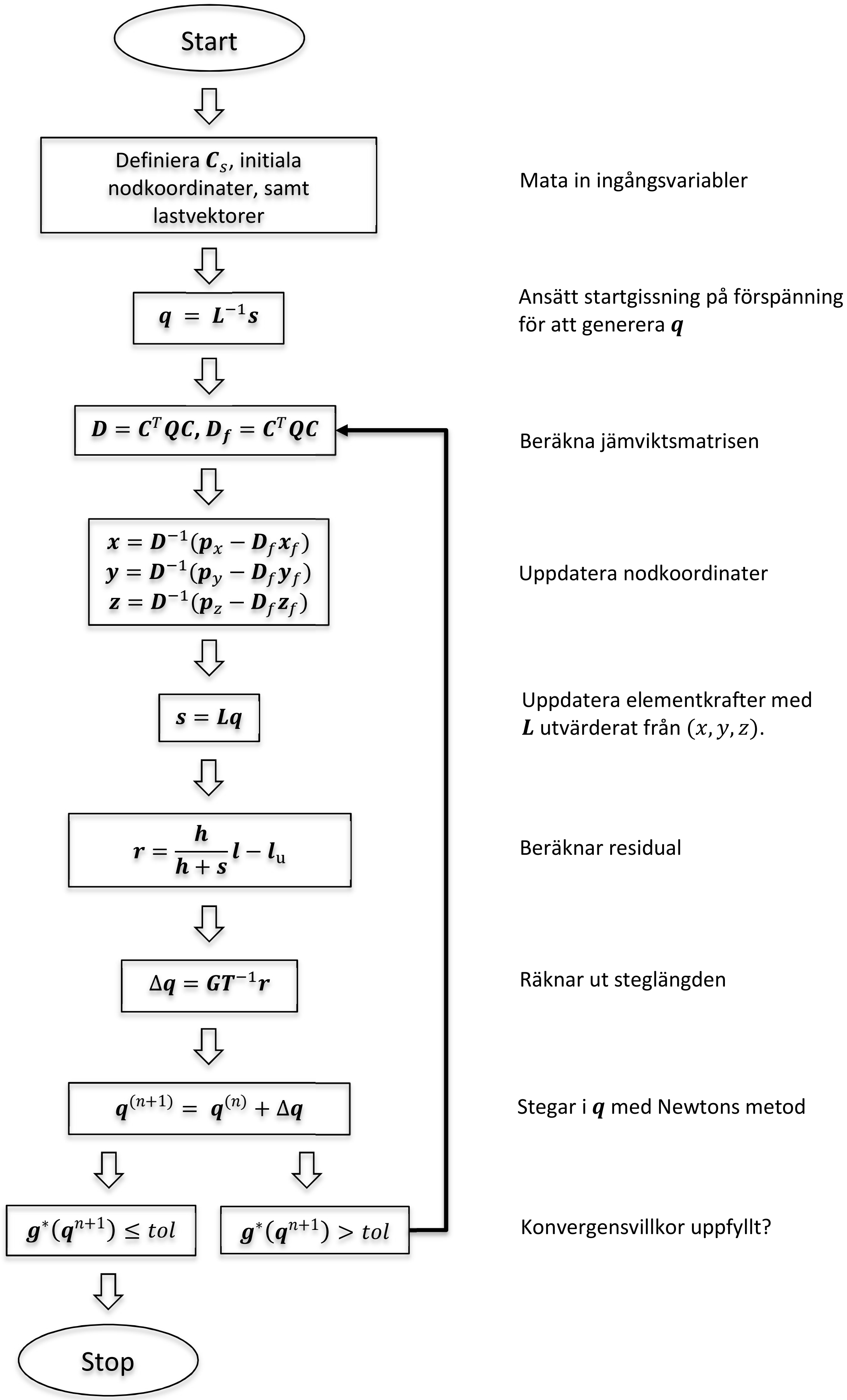
$$\boldsymbol{G}^T = \frac{\partial \boldsymbol{g}^*}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{z}}\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{2-43}$$

Med hjälp av implicita derivator kan G^T skrivas som

$$\boldsymbol{G}^T = -\boldsymbol{L}_{\mathrm{u}}^2\boldsymbol{H}^{-1} - \boldsymbol{L}_{\mathrm{u}}^2\boldsymbol{L}^3(\boldsymbol{UCD}^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{U} + \boldsymbol{VCD}^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{V} + \boldsymbol{WCD}^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{W}) \tag{2-44}$$

Att härleda (2-44) är inte trivialt och för mer information om detta hänvisas till Schek (1974). Observera också att Jacobimatrisen ser annorlunda ut för andra typer av bivillkor.

2.2.3 Flödesschema för FDM-algoritm



Figur 2-4 – En översikt på hur teorin för FDM kan implementeras i en algoritm.

2.3 Kedjekurvan

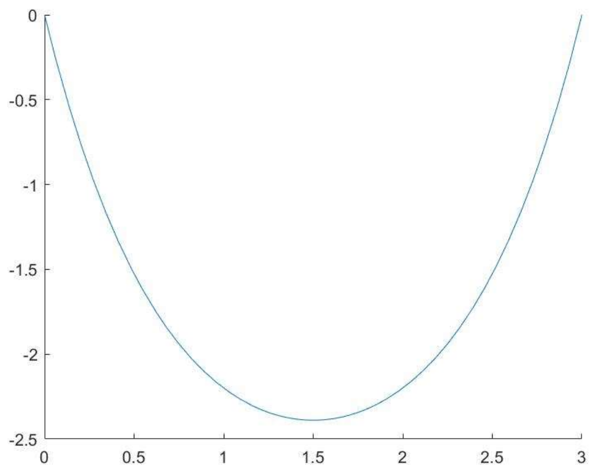
En lina som belastas med en jämnt utbredd last antar en viss form känd som kedjekurvan, som matematiskt kan uttryckas med hjälp av cosinus hyperbolicus. Eftersom det finns en analytisk lösning för formen lämpar sig kedjekurvan väl som referensproblem för att verifiera att funktionernas lösningar är giltiga. Kedjekurvan skrivs på formen

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \tag{2-45}$$

där a är en konstant som kan bestämmas som lösningen till ekvationen

$$0 = s - 2a \cdot \sinh\left(\frac{x_2 - x_1}{2a}\right) \tag{2-46}$$

där s är kurvlängden och $x_2 - x_1$ beskriver avståndet mellan infästningarna (Emery, 2003). I Figur 2-5 visas ett exempel på den karaktäristiska formen för kedjekurvan. I figuren är parametern a = 0,69, vilket motsvarar en 6 m lång lina fäst i två punkter på 3 m avstånd.



Figur 2-5 – Exempel på kedjekurvan, den form en lina upphängd mellan två punkter antar. Kurvan beskrivs med $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{cosh}\left(\frac{x}{a}\right)$, där $\boldsymbol{a}$ bestäms utifrån kurvlängden $\boldsymbol{s}$ och avståndet mellan infästningarna $\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}$. I det här fallet är $\boldsymbol{s} = 6$ m, $\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} = 3$ m och $\boldsymbol{a}$ har beräknats till 0,69. Koordinatsystemet har flyttats till vänstra infästningen.

3. Metod

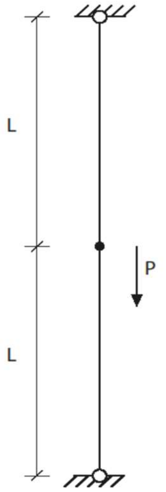
MATLAB-funktioner baserade på DRM och FDM programmeras och jämförs med ett antal referensproblem. Experiment genomförs för att validera några av referensproblemen. Experimentens genomförande och resultat redovisas närmare i Bilaga A.

3.1 Referensproblem

För att kunna uppskatta funktionernas tillförlitlighet verifieras respektive valideras de mot totalt fem problem med analytisk, empirisk eller numerisk lösning, och antalet iterationer jämförs. Problem 1 (Figur 3-1) och 2 (Figur 3-2) är framtagna för att i ett tidigt skede verifiera funktionernas tillförlitlighet. Problem 3, 4 och 5 (Figur 3-3, Figur 3-4 och Figur 3-5) används sedan för att bekräfta funktionernas validitet.

3.1.1 Referensproblem 1: Endimensionellt linbärverk

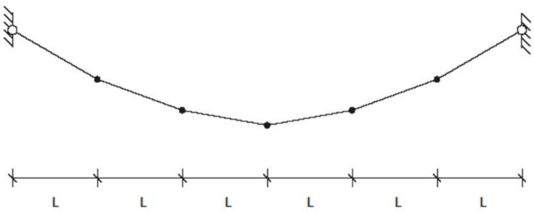
Analytisk lösning. Två linor seriekopplas mellan tre noder (Figur 3-1) med de två ändarna fast inspända. Den mittersta noden belastas med en kraft P i ena riktningen längs linornas utbredning. Linorna är inte förspända, så en av dem belastas i drag och den andra i tryck. Den tryckbelastade linan ska inte påverka lösningen, eftersom linor inte kan ta trycklaster. Systemet är därför ekvivalent med en enda dragbelastad lina, och förskjutningen kan jämföras med Hookes lag för den dragbelastade linan, $Ka = P$, där K är styvheten och a förskjutningen.



Figur 3-1 – Referensproblem 1, enaxiellt belastad lina.

3.1.2 Referensproblem 2: Kedjekurvan

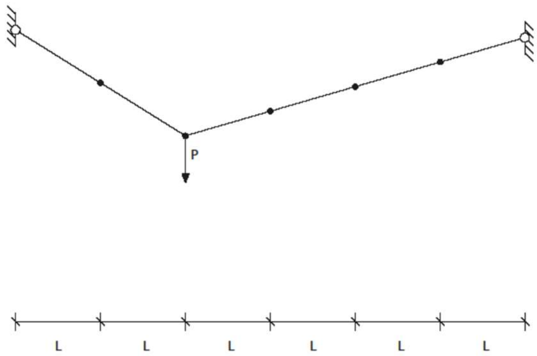
Analytisk lösning. Ett antal linor med hög styvhet seriekopplas mellan två fast inspända noder på samma höjd (Figur 3-2). Varje fri nod belastas rakt nedåt med en given last, samma för varje nod. Strukturen är en approximation av en kedja som hänger mellan två punkter och som enbart belastas av sin egenvikt. Därför kan deformationen jämföras med kedjekurvans analytiska lösning $y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, beskriven i avsnitt 2.3.



Figur 3-2 – Referensproblem 2, approximation av kedjekurvan med en jämnt utbredd last.

3.1.3 Referensproblem 3: Punktbelastad lina

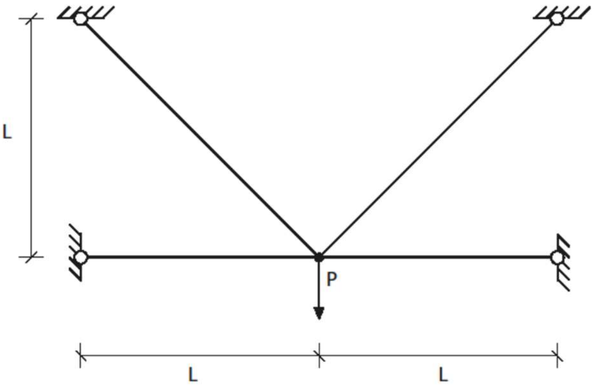
Empirisk lösning. Strukturen är densamma som i 3.1.2, men lasten koncentreras i en punkt på linan (Figur 3-3). Resultatet jämförs med ett experiment där en lina spänns mellan två punkter och en vikt hängs i en punkt på linan. Styvheten i materialet och lasten är lika för funktionerna och experimentet, så att jämförelse möjliggörs. Olika värden på lastens massa provas empiriskt och numeriskt. Den belastade nodens koordinater jämförs.



Figur 3-3 – Referensproblem 3, approximation av lina med en punktlast på en av noderna.

3.1.4 Referensproblem 4: Stångbärverk

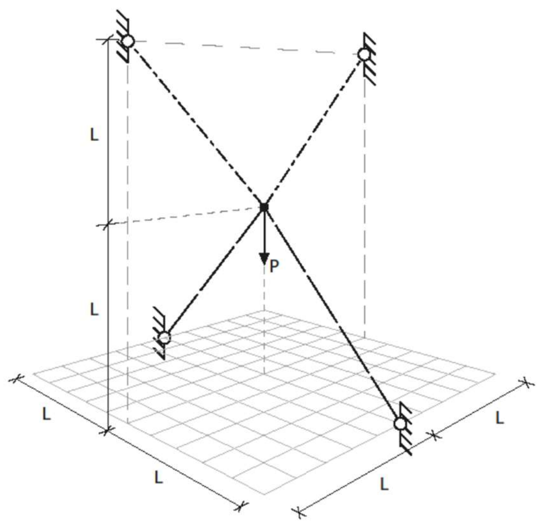
Numerisk lösning. Alla element är dragbelastade i strukturen (Figur 3-4) och den beter sig därför som ett linbärverk. Strukturen testas både som linbärverk i våra funktioner och som stångbärverk i CALFEM med samma styvheter och laster. Beräknade spänningar och den fria nodens förskjutning jämförs.



Figur 3-4 – Referensproblem 4, dragbelastat stångbärverk.

3.1.5 Referensproblem 5: Tredimensionellt bärverk

Empirisk lösning. En tredimensionell struktur byggs med två förspända linor (Figur 3-5). Förspänningen i linorna mäts med dynamometer. En vikt hängs i den fria noden och förlängningarna/förkortningarna mäts med måttband. Samma linbärverk byggs upp i våra funktioner, med samma förspänning och punktlast. Förskjutningen beräknas och jämförs därefter med experimentet.



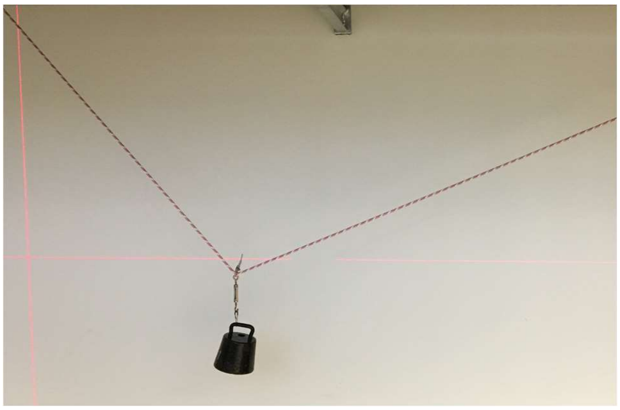
Figur 3-5 – Referensproblem 5, tredimensionell förspänd struktur belastad I en punkt.

3.2 Genomförande av praktiska experiment

Två experiment utförs, vars resultat jämförs med beräkningar i DRM och FDM. Förberedelser till experimenten samt deras randvillkor beskrivs nedan.

3.2.1 Experiment 1: Punktbelastad lina

Linan som införskaffats saknar dokumentation för värden på styvhet/elasticitet. Linans spännings-töjningsdiagram (Figur 5-1) kan dock tas fram empiriskt. Det görs genom att fästa linan i en ände och belasta den andra änden lodrätt med 5 olika vikter i storleksordningen 1-5 kg. Elasticitetsmodulen tas fram med Hookes lag utifrån känd deformation och last.



Figur 3-6 – Punktbelastad lina. Notera hur den påhängda vikten har förskjutit den belastade noden nedanför det horisontella laserstrecket (förskjutning i $\boldsymbol{y}$-led). Förskjutning i $\boldsymbol{x}$-led mäts ut till det vertikala laserstrecket som skär vänster upphängningspunkt.

3.2.1.1 Randvillkor experiment 1

- Avstånd mellan fixa punkter:	3,0 m
- Linans längd:	5,0 m
- Linans diameter:	6 mm

Lika position i höjdled verifieras med nivelleringslaser. Upphängning sker i kabelstege utanför laborationsrum.

3.2.1.2 Dokumentation av resultat

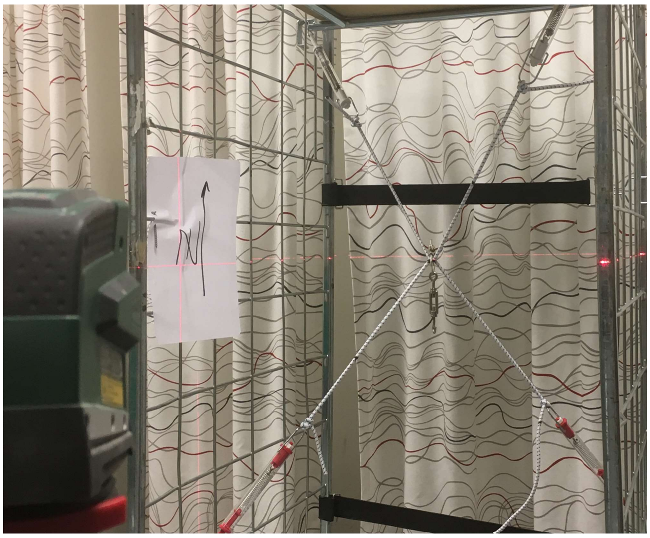
Linans nedböjning i punkten där massan placeras mäts genom att placera en nivelleringslaser som lyser med horisontellt laserstreck genom belastningspunkten samt ett vertikalt streck som skär ena infästningspunkten. Strecken bildar tillsammans ett kryss som ger x- och y-komposant mellan punkterna. På så sätt erhålls ett relativt avstånd som är relativt lätt att mäta och verifiera. Den nya belastade positionen mäts med tumstock till båda laserstrecken. Alla steg fotodokumenteras så att en så korrekt återgiven modell som möjligt kan konstrueras med hjälp av DRM och FDM. Randvillkor mäts upp och kontrolleras, det vill säga linans längd och avståndet mellan infästningar samt linans vikt/meter. Försöket bör även upprepas minst en gång för att verifiera resultaten.

3.2.1.3 Material

- 1 lina > 5 m Ø6 mm
- 5 vikter om 1–5 kg
- Metallkrok med skruvplatta för att montera vikt på lina
- Nivelleringslaser/krysslaser
- Tumstock och måttband
- Dynamometrar i storleksordningen 10-100 N
- Våg

3.2.2 Experiment 2: Bärverk i 3D

En tredimensionell struktur byggs upp med två förspända högelastiska linor enligt Figur 3-7. Förspänningen i båda linorna mäts med dynamometer mellan infästningspunkt och respektive linas ände. En vikt hängs i den fria noden och förskjutningen mäts med tumstock. Materialdata tas fram enligt avsnitt 3.2.1.



Figur 3-7 – Nivelleringslaser syns till vänster i bild. Dynamometrar mäter spänning i alla element. Mittnoden som belastas med olika vikter under experimentet syns i mitten av bilden med sin upphängningsanordning. Notera hur laserstrecket skär genom den obelastade noden.

3.2.2.1 Randvillkor experiment 2

Avstånd mellan fixa punkter nertill:	1 m
Avstånd mellan fixa punkter upptill:	1 m
Avstånd mellan undre och övre punkter:	1 m
Osträckt linlängd per lina:	$< \sqrt{2}/2$ m (beroende på praktisk förspänning)
Lindiameter:	Ø6 mm

Linorna fästs i en lastvagn med gallersidor. Infästningarna görs med hjälp av krokar som hakas i lastvagnens galler enligt Figur 3-7. Trycksträvor placeras in i korgen så att geometrin för de fixa punkterna hålls konstant.

3.2.2.2 Dokumentation av resultat

Osträckta längder mäts före och efter försök. En nivelleringslaser placeras så att horisontellt och vertikalt laserstreck möts i den obelastade noden. Förspänning avläses på alla dynamometrar. Noden belastas därefter och förskjutning mäts med tumstock längs det vertikala strecket upp till det horisontella. Ny förspänning i samtliga linor avläses och dokumenteras. Alla steg fotodokumenteras så att en så korrekt återgiven modell som möjligt kan konstrueras med hjälp av MATLAB. Randvillkor, det vill säga linornas längd och koordinaterna för de fixa punkterna, mäts och kontrolleras.

3.2.2.3 Material

- 2 resårband/linor, totalt $\sqrt{2}$ m + 0,5 m i reserv
- Träregel 45x45 mm, 5 m att använda som trycksträvor
- Ståltråd (för att skapa ögla i ändpunkter och fästa dynamometer)
- Tång och sax
- Fogsvans
- 5 vikter om 1–5 kg
- Metallkrok med skruvplatta för att montera vikt på lina samt fixera linorna i mittnod
- Nivelleringslaser/krysslaser
- Tumstock och måttband
- Dynamometrar i storleksordningen 10–100 N
- Våg

3.3 Bestämning av parametrar genom testning

Testning av funktionerna automatiseras så att en stor mängd data kan samlas in som underlag. Med hjälp av den automatiserade testningen prövas olika metoder för tillsättning av parametrar, till exempel dämpning. Metoderna jämförs med avseende på den totala andelen konvergerande problem. Utifrån konvergensinformationen kan slutsatser dras om hur parametrar kan optimeras med avseende på antal iterationer.

En separat funktion skrivs som testar ett problem med olika indata. Styvheten, de osträckta längderna och lasten varieras och antalet iterationer fram till konvergens mäts. Lika skalning av styvhet och last visar sig alltid ge samma resultat. Därför väljs lasten konstant till 10 N per nod, och de flesta problem testas med en varierad styvhet (EA) från 2 till $2 \cdot 10^{11}$ N. För referensproblemen i avsnitt 3.1 testas fem olika osträckta längder, vilket ger 60 olika varianter av varje problem att testa. För att inte ödsla tid på fall som inte konvergerar definieras divergens som att ett problem inte konvergerar inom ett visst antal iterationer. DRM kräver betydligt mindre tid per iteration än FDM, och därför sätts gränsen till 10^7 iterationer för DRM och $3 \cdot 10^5$ för FDM. Plottning, varningar för singularitet och utskrivning av svar stängs av för att snabba upp testningen.

3.4 Specifikationer för jämförelse av DRM och FDM

Funktionerna för DRM och FDM har olika kriterier för när konvergens uppnåtts och för att antalet iterationer ska bli jämförbart krävs en gemensam definition av konvergens. Konvergenskravet för DRM är att den kinetiska energin samt skillnaden i kraft kommit under en viss nivå (se avsnitt 2.1.3), medan FDM använder sig av ett kriterium för hur långt ifrån Hookes lag är att vara uppfylld, ekvation (2-42). Det går inte att använda energivillkoret i FDM, eftersom det inte finns någon hastighet för noderna att mäta. I stället körs DRM-testerna först och utifrån resultaten beräknas motsvarande fel (e) med Hookes lag. Felet används sedan som tolerans för FDM-funktionen. I de fall feltermen blir så stor att det bedöms kunna påverka resultatet ($e > 10^{-5}$) prioriteras lösningskvalitet framför iterationsjämförelse och i stället väljs en så liten tolerans som möjligt för FDM, i regel omkring 10^{-14} vilket är nära maskinepsilon.

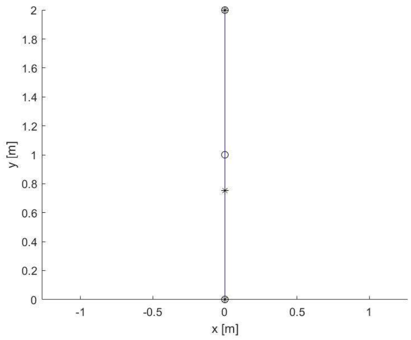
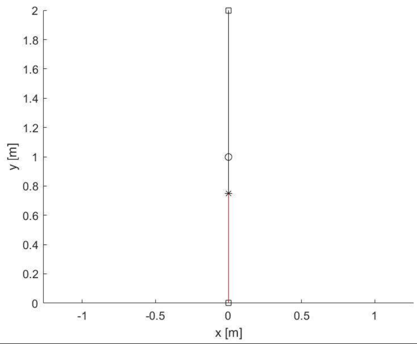
4. Resultat

Kommande kapitel behandlar resultaten från jämförelse av funktionerna baserade på DRM och FDM. Funktionerna jämförs mot de olika referensproblemen med avseende på felterm (förskjutningar och krafter) samt antal iterationer. Verifierande problem redovisas först, följt av validerande problem. Varje problem jämförs i ett antal kombinationer av parametrar ordnade i n antal fall enligt $(a, b, \dots, n)$.

4.1 Endimensionellt linbärverk

Här mäts förskjutningen av den fria mittnoden för olika laster och styvheter. Resultatet jämförs med den analytiska lösningen av referensproblem 1 i avsnitt 3.1.1, som erhålls med Hookes lag. Först testas $\frac{EA}{L}$ = 1 N/m och sedan ett EA motsvarande en stålstång (E = 210 GPa) med cirkulärt tvärsnitt r = 25 mm. Längden är L = 1 m. Resultaten redovisas i Tabell 4-1 nedan.

Tabell 4-1 – Resultat för referensproblem 1.

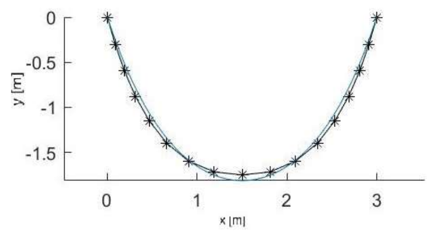
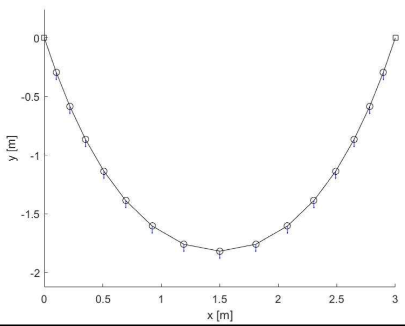
	DRM	**FDM**
Illustration av lösning		
a. $\frac{EA}{L}$ = 1 N/m, p_y = -0,25 N **Analytisk lösning: y = -0,25 m**		
Förskjutning [m]	-0,24592	-0,24994
Avvikelse [m]	**0,00408**	0,00006
Antal iterationer	10	1571
b. $\frac{EA}{L}$ = 1 N/m, p_y = -0,5 N **Analytisk lösning: y = -0,5 m**		
Förskjutning [m]	-0,49221	-0,49975
Avvikelse [m]	**0,00779**	0,00025
Antal iterationer	10	1941
c. $\frac{EA}{L}$ = 412 MN/m, p_y = -1 MN **Analytisk lösning: y = -0,00243 m**		
Förskjutning [m]	-0,00242	-0,00243
Avvikelse [m]	**0,00001**	0
Antal iterationer	19	1246
d. $\frac{EA}{L}$ = 412 MN, p_y = -100 MN **Analytisk lösning: y = -0,24252 m**		
Förskjutning [m]	-0,24252	-0,24246
Avvikelse [m]	0	**0,00006**
Antal iterationer	30	1380

FDM kom närmare den analytiska lösningen i fall 1 till 3 medan DRM var närmast i fall 4. Båda funktionerna kom dock mycket nära i samtliga fall. FDM krävde ungefär hundra gånger fler iterationer än DRM för att nå samma nivå av konvergens. Det tryckta elementet verkar endast ha haft marginell inverkan på resultatet, eftersom styvhetsreduktion implementerats i båda funktionerna. Inverkan av den nedre linans tryckstyvhet gjorde att deformationerna var något mindre än i det analytiska fallet. Störst avvikelse från den analytiska lösningen hade DRM i fall b, med en differens på 7,79 mm.

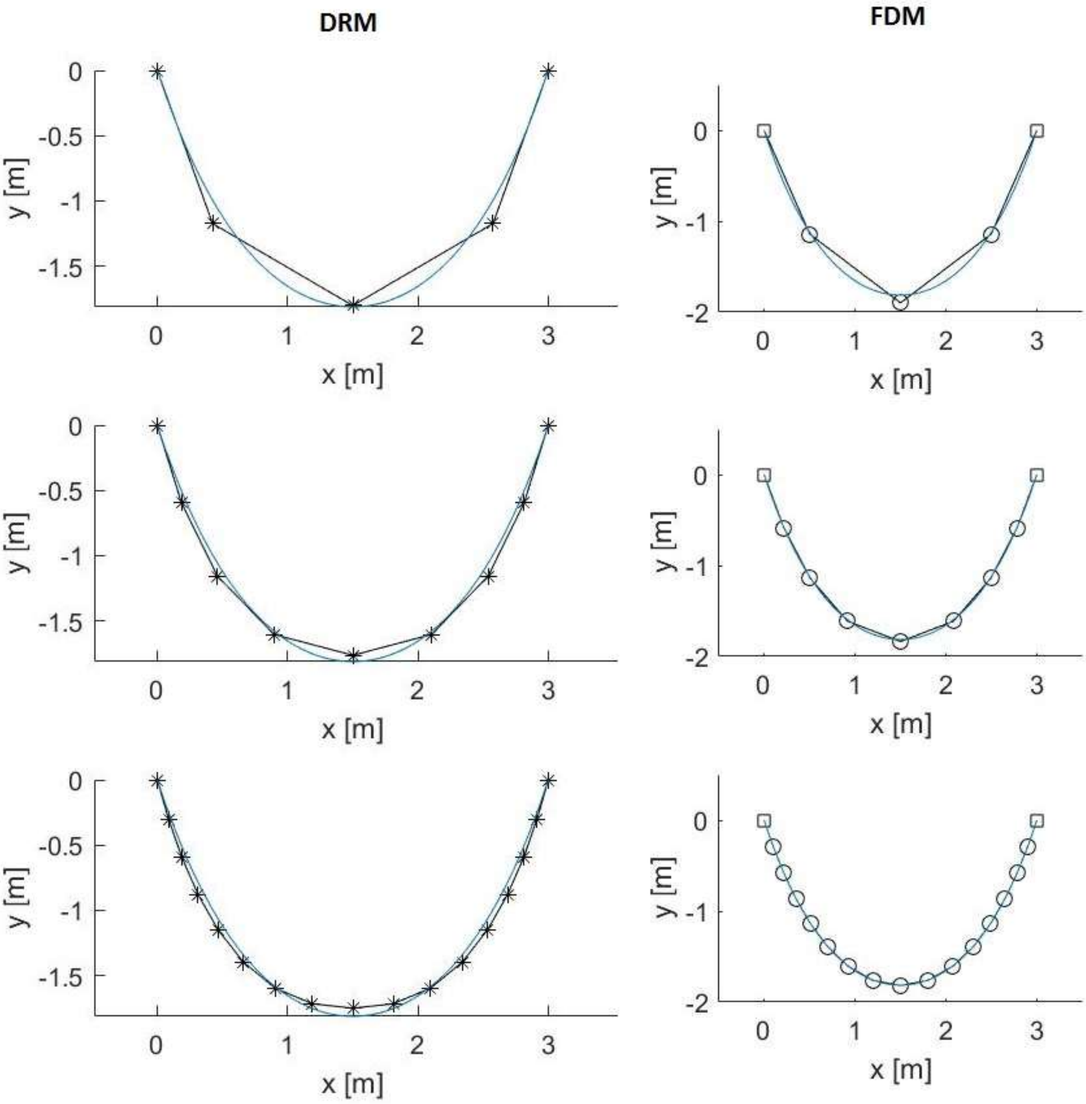
4.2 Kedjekurvan

Mittnodens vertikala avstånd till infästningarna mäts (linans maximala utböjning). Resultaten presenteras i Figur 4-1 med k = 4, 8 och 16 element för att se om de verkar konvergera mot den analytiska lösningen av referensproblem 2 i avsnitt 3.1.2. Styvheten i funktionerna motsvarar en lina med E = 120 GPa, r = 5 mm. Resultaten redovisas i Tabell 4-2 nedan.

Tabell 4-2 – Resultat för referensproblem 2.

	DRM	**FDM**
Illustration av lösning		
a. EA = 9,4248 MN, k = 4, $p_y = -\frac{1}{k}$ kN **Analytisk lösning: y = -1,81391 m**		
Förskjutning [m]	-1,80391	-1,89892
Avvikelse [m]	0,01	**0,08501**
Antal iterationer	129 686	439
b. EA = 9,4248 MN, k = 8, $p_y = -\frac{1}{k}$ kN **Analytisk lösning: y = -1,81391 m**		
Förskjutning [m]	-1,76491	-1,83608
Avvikelse [m]	**0,049**	0,02217
Antal iterationer	596 271	193
c. EA = 9,4248 MN, k = 16, $p_y = -\frac{1}{k}$ kN **Analytisk lösning: y = -1,81391 m**		
Förskjutning [m]	-1,75091	-1,81928
Avvikelse [m]	**0,063**	0,00537
Antal iterationer	2 538 585	1591

Inledningsvis testades $EA = 10^{10}$ N, $p_y = -100/k$ N, men problemet konvergerade bara för FDM och inte för DRM. För att möjliggöra jämförelse ändrades styvhet och last. Antalet iterationer var betydligt större för DRM än för FDM. Avståndet från den analytiska lösningen minskade med fler element för FDM, men ökade för DRM. Utböjningen för FDM hamnade nedanför den analytiska lösningen medan DRM-resultaten hamnade ovanför. Eftersom linan har viss elasticitet i funktionen bör utböjningen teoretiskt sett ha blivit lite större i funktionen än i det analytiska fallet. I Figur 4-1 visas resultatet för 4, 8 och 16 element. DRM-resultaten ser ut att konvergera mot en felaktig lösning, en lite trubbigare form än kedjekurvan. FDM närmar sig tydligt den analytiska lösningen. Störst avvikelse från den analytiska lösningen hade FDM i fall a, med en differens på 85,01 mm.

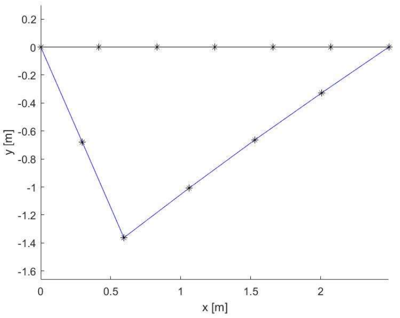
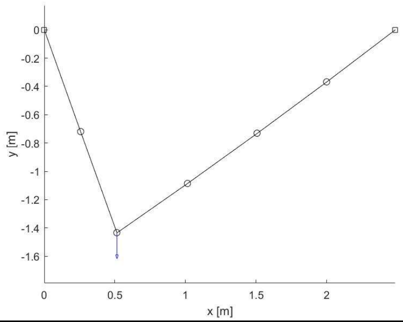


Figur 4-1 – Kedjekurvan för DRM (vänster) och FDM (höger) med 4, 8 och 16 element. Den analytiska lösningen visas med blå färg.

4.3 Punktbelastad lina

Här mäts den belastade nodens vertikala och horisontella position i förhållande till den vänstra infästningen. Övriga noder belastas med en kraft motsvarande linans egenvikt, 24 g/m. Lösningarna jämförs med resultaten från referensproblem 3 i avsnitt 3.1.3. Styvheten och lasterna motsvarar uppmätt styvhet och last från experimentet. Resultaten redovisas i Tabell 4-3 nedan.

Tabell 4-3 – Resultat för referensproblem 3.

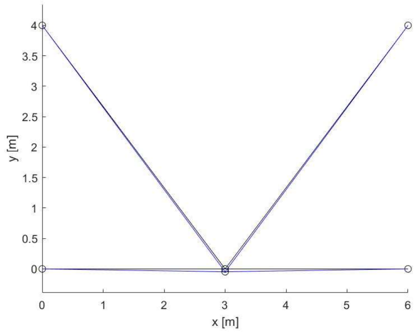
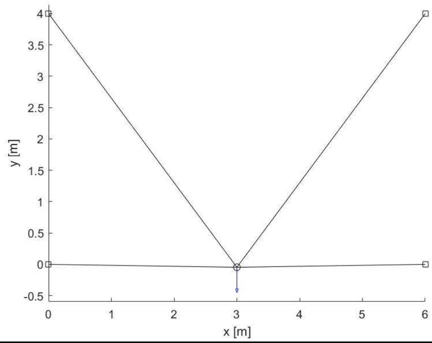
	DRM	**FDM**
Illustration av lösning		
a. EA = 32,74 N, p_y = -10,3 N **Experimentell lösning: x = 0,650 m, y = -0,825 m**		
x-position [m]	0,52834	0,53438
Avvikelse[m]	**0,12166**	0,11562
y-position [m]	-1,01532	-1,16095
Avvikelse [m]	0,19032	**0,33595**
Antal iterationer	10^7 (max innan avbrott)	1617
b. EA = 32,74 N, p_y = -20,1 N **Experimentell lösning: x = 0,662 m, y = -1,080 m**		
x-position [m]	0,59364	0,51452
Avvikelse [m]	0,06836	**0,14748**
y-position [m]	-1,36213	-1,43106
Avvikelse [m]	0,28213	**0,35106**
Antal iterationer	94	2004
c. EA = 32,74 N, p_y = -30,0 N **Experimentell lösning: x = 0,682 m, y = -1,35 m**		
x-position [m]	0,59952	0,51798
Avvikelse [m]	0,08248	**0,16402**
y-position [m]	-2,20627	-1,68688
Avvikelse [m]	**0,85627**	0,33688
Antal iterationer	77	2848

DRM konvergerade inte i det första fallet (a) men konvergerade snabbare än FDM i de andra två (b och c). För både experimentet och funktionerna är x-positionen relativt konstant för olika laster, medan y-positionen ökar tydligt med lasten, alltså samma elastiska beteende som observerades i experimentet. Den huvudsakliga formen för strukturen är densamma för funktionerna men resultaten i y-position skiljer sig avsevärt. FDM ligger i samtliga fall mellan 33 och 35 cm under den experimentella lösningens y-värde, medan DRM påverkas betydligt mer av lastskillnader med större utböjning som följd. Den högra delen av linan i DRM ser ut att böja av något uppåt medan FDM-linan har en viss utböjning nedåt, även om båda linorna är nästan helt utsträckta.

4.4 Stångbärverk

Förskjutningen av den fria mittnoden och normalkrafter i de diagonala stängerna mäts för två olika laster. Resultaten jämförs med CALFEM-lösningen för referensproblem 4 i avsnitt 3.1.4. Styvheten motsvarar en stålstång med r = 25 mm. Resultaten redovisas i Tabell 4-4 nedan.

Tabell 4-4 – Resultat för referensproblem 4.

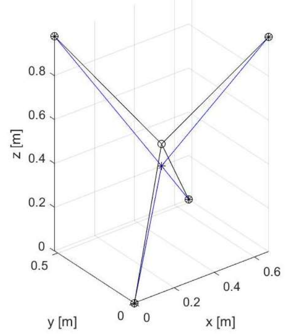
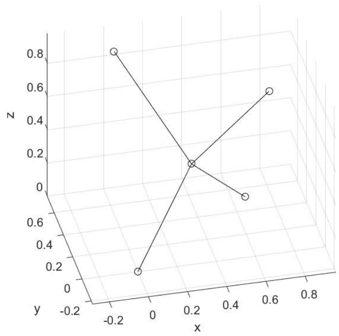
	DRM	**FDM**
Illustration av lösning		
a. $\boldsymbol{EA}$ **= 412,33 MN,** $\boldsymbol{p_y}$ **= -100 kN** **CALFEM-lösning:** $\boldsymbol{y}$ **= -0,0009616 m,** $\boldsymbol{N_{\mathrm{diag}}}$ **= 58,31 kN,** $\boldsymbol{N_{\mathrm{hor}}}$ **= 0 N**		
Förskjutning y-led [m]	-0,00094312	-0,00094723
Avvikelse [m]	**0,00001848**	0,00001437
Normalkraft diagonal stång [N]	62224	62495
Avvikelse [N]	3914	**4185**
Normalkraft horisontell stång [N]	20,37589	20,55357
Avvikelse [N]	20,37589	**20,55357**
Antal iterationer	30	35 060
b. $\boldsymbol{EA}$ **= 412,33 MN,** $\boldsymbol{p_y}$ **= -5 MN** **CALFEM-lösning:** $\boldsymbol{y}$ **= -0,04808 m,** $\boldsymbol{N_{\mathrm{diag}}}$ **= 2,915 MN,** $\boldsymbol{N_{\mathrm{hor}}}$ **= 0 N**		
Förskjutning y-led [m]	-0,04705	-0,04706
Avvikelse [m]	**0,00103**	0,00102
Normalkraft diagonal stång [N]	$3{,}11071 \cdot 10^6$	$3{,}11098 \cdot 10^6$
Avvikelse [N]	$0{,}19571 \cdot 10^6$	$\boldsymbol{0{,}19598 \cdot 10^6}$
Normalkraft horisontell stång [N]	$5{,}07115 \cdot 10^4$	$5{,}07203 \cdot 10^4$
Avvikelse [N]	$5{,}07115 \cdot 10^4$	$\boldsymbol{5{,}07203 \cdot 10^4}$
Antal iterationer	51	25 511

Resultaten för DRM och FDM överensstämde väl, men DRM konvergerade med avsevärt färre iterationer. Lösningarna var även nära CALFEM:s resultat, men krafterna blev högre och förskjutningarna något mindre än i CALFEM. I DRM och FDM introducerades en kraft i de horisontella linorna, medan den kraften var noll i CALFEM.

4.5 Tredimensionellt bärverk

Här mäts förskjutningen av den fria mittnoden och normalkrafter i alla fyra linor för tre olika laster. Resultaten jämförs med experimentell lösning av referensproblem 5 i avsnitt 3.1.5. Styvheten och lasterna motsvarar de som mättes upp i experimentet. Resultaten redovisas i Tabell 4-5 nedan.

Tabell 4-5 – Resultat för referensproblem 5.

	DRM	**FDM**
Illustration av lösning		
a. EA = 32,74 N, p_y = -9,8691 N **Experiment: förskjutning -0,033 m, krafter 18 N övre och 11 N nedre**		
Förskjutning y-led [m]	-0,043234	-0,067386
Avvikelse [m]	0,00934	**0,034386**
Normalkraft övre stång [N]	17,44580	8,20666
Avvikelse [N]	0,5542	**9,79334**
Normalkraft nedre stång [N]	12,12657	2,26204
Avvikelse [N]	1,12657	**8,73796**
Antal iterationer	9	33 834
b. EA = 32,74 N, p_y = -19,6891 N **Experiment: förskjutning -0,066 m, krafter 20 N övre och 7 N nedre**		
Förskjutning y-led [m]	-0,10029	-0,14380
Avvikelse [m]	0,03429	**0,0778**
Normalkraft övre stång [N]	20,10742	11,84450
Avvikelse [N]	0,1042	**8,1555**
Normalkraft nedre stång [N]	9,78550	-0,00044193
Avvikelse [N]	2,7855	**7,00044193**
Antal iterationer	10	1861
c. EA = 32,74 N, p_y = -29,568 N **Experiment: förskjutning -0,10 m, krafter 22 N övre och 3 N nedre**		
Förskjutning y-led [m]	-0,13752	-0,24844
Avvikelse [m]	0,03752	**0,14844**
Normalkraft övre stång [N]	22,88381	17,046123
Avvikelse [N]	0,88381	**4,953877**
Normalkraft nedre stång [N]	0	-0,0038000
Avvikelse [N]	3	**3,0038**
Antal iterationer	10^7 (max innan avbrott)	2055

Än en gång konvergerar DRM mycket fortare än FDM, förutom i fall c där konvergens inte uppnås. I samtliga fall leder högre last till större förskjutning, större krafter i de övre elementen och mindre i de nedre. Förskjutningarna för både DRM och FDM är större än de uppmätta förskjutningarna. Vad gäller normalkrafter ligger DRM relativt nära resultaten från experimentet, medan FDM får lägre krafter. De nedre linorna börjar slakna för FDM redan vid 20 N last, representerat av de små negativa krafterna, men i experimentet blev linorna slaka först vid 30 N last.

4.6 Sammanfattning av resultat

För att få en överskådlig bild har resultaten sammanställts i Tabell 4-6. De framräknade värdena i sammanställningen är medelvärden. Medianvärde har använts i referensproblem 3 och 5 för att ta hänsyn till antalet iterationers extremvärden. På så sätt erhålls ett mer representativt sammanställt värde, då ett problem som inte konvergerar skulle höja medelvärdet kraftigt.

Tabell 4-6 – Jämförelse av funktionerna baserade på DRM och FDM för de olika referensproblemen.
e_x beskriver genomsnittlig procentuell avvikelse i x-led.
e_y beskriver genomsnittlig procentuell avvikelse i y-led.
$\bar{n}$ beskriver genomsnittligt antal iterationer för samtliga fall.

		e_x	e_y	$\bar{n}$
Endimensionellt linbärverk	**DRM**	-	0.90 %	17
	FDM	-	0.025 %	1535
Kedjekurva	**DRM**	-	2.24 %	1088000
	FDM	-	0.76 %**	741
Punktbelastad lina	**DRM**	13.71 %	37.54 %	86*
	FDM	21.37 %	32.73 %	2156
Stångbärverk	**DRM**	-	2.03 %	41
	FDM	-	1.81 %	30286
Tredimensionellt bärverk	**DRM**	-	37.52 %	10*
	FDM	-	123.51 %	12583

* Konvergens ej uppnådd i samtliga fall, maxgräns nådd. Medianvärde används för resterande fall.

** Ett fall avvek så mycket att det utesluts vid medelvärdesberäkning.

5. Diskussion

Nedan diskuteras för- och nackdelar med DRM och FDM och metoderna jämförs med avseende på användarvänlighet, tänkbara felkällor samt hur de presterar i respektive referensproblem. Sedan redovisas DRM och FDM separat och erfarenheter vid utveckling, förhållningssätt till teori, val av konvergensvillkor, lämpligt val av parametrar, samt utvecklingspotential behandlas.

5.1 Jämförelse av DRM och FDM

DRM och FDM jämförs här med avseende på referensproblem och användarvänlighet. Kommentarer ges också på giltigheten i experimenten.

5.1.1 Avvikelse från referens och antal iterationer

DRM och FDM presterar olika väl för de olika referensproblemen. Det kommer sig främst av att funktionerna skiljer sig i metod och utformning. För DRM sätts tryckta element till 1 % av sin ursprungliga styvhet och för FDM sätts styvheten till en liten konstant multiplicerat med medelvärdet för lasterna, $0{,}001 \cdot P$. Respektive ansättning av reduktionsparameter kommenteras i 5.2.2 respektive 5.3.3. I de referensproblem som innehåller tryckta element (problem 1, avsnitt 4.1 och till viss del problem 5, avsnitt 4.5), är ett fel i storleksordningen 1 % väntat för DRM på grund av tryckkrafter, och ett olika stort fel för FDM beroende på last och ursprunglig styvhet. När problem 1c och 1d jämförs framgår att FDM är bättre i fall 1c medan DRM ligger närmare analytiska lösningen för 1d. För FDM beror det antagligen på att lasten är 100 gånger större i Fall 1d. Tryckkraften, och därmed felet, ökar således med en faktor 100. DRM har däremot samma tryckkraft i fall 1c som i 1d och eftersom lasten ökar med en faktor 100 får tryckkraften mindre inverkan i 1d, vilket får resultatet att närma sig den analytiska lösningen.

I referensproblem 2, kedjekurvan, kan stora skillnader avläsas i Tabell 4-2 vad gäller fel och antal iterationer. Det är tydligt att DRM, med ett ökat antal element, både kräver ett större antal iterationer och samtidigt konvergerar mot en felaktig lösning. FDM konvergerar istället mot en alltmer korrekt lösning, och det med färre iterationer.

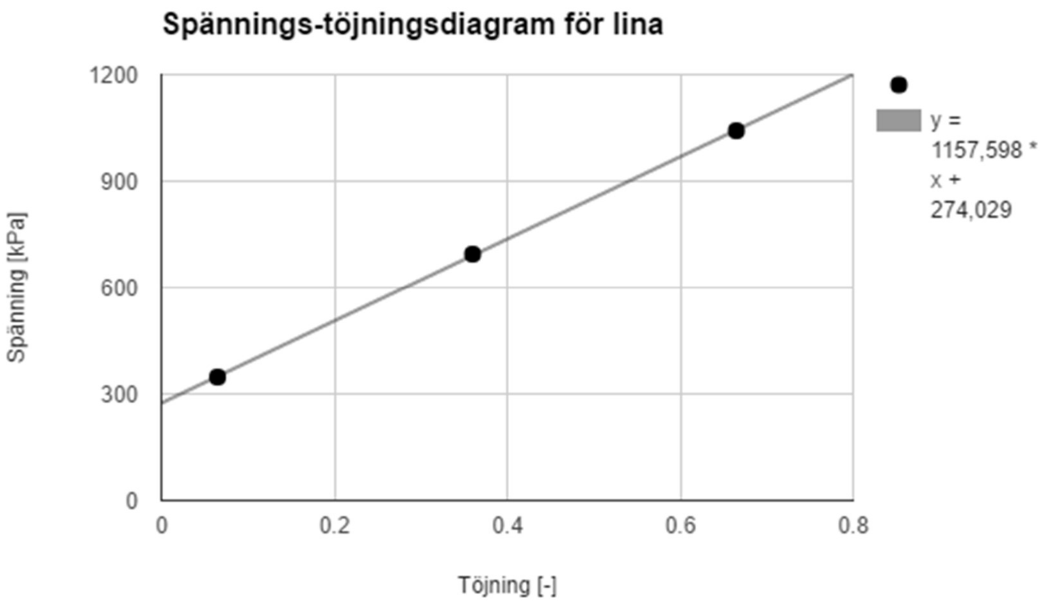
Resultatet visar att DRM-funktionen presterar väl när en känd struktur föreligger. Funktionen kräver generellt färre iterationer än FDM och med rätt konvergensvillkor nås ett relativt korrekt svar. För okända strukturer, såsom kedjekurvan, kräver DRM desto fler iterationer. FDM för kända strukturer kräver fler iterationer än för okända strukturer. För en okänd struktur uppnås omgående ett litet fel när formbestämningen är klar, men för förspända strukturer med stora krafter minskar felet allt långsammare med fler iterationer. Det är förklaringen till de utdragna konvergensförloppen för FDM i problem 4 och 5a (se Tabell 4-4 och Tabell 4-5).

FDM verkar utifrån resultaten för respektive referensproblem mer robust än DRM (se Tabell 4-6). Det fanns två problem där FDM konvergerade men inte DRM. DRM är å andra sidan snabbare i de flesta fall, mätt både i antal iterationer och tid per iteration.

5.1.2 Felkällor i experimenten

Båda funktionerna beräknar en förskjutning som ligger nära referensvärdet för problem 1, 2 och 4, alltså referensproblemen med analytisk eller numerisk lösning. Förskjutningarna ligger längre ifrån referensvärdena i de experimentella problemen 3 och 5, vilket sannolikt beror mer på experimenten och styvhetsmodelleringen än på implementeringen av själva metoderna.

Vid referensproblem 3 skiljer sig både DRM och FDM betydligt från det experimentella värdet för förskjutningen. Det beror med stor sannolikhet på styvhetsmodelleringen av den lina som användes i experimentet. Vid mätning visade sig linan bete sig linjärt, men endast över en viss spänning (Figur 5-1). En spänning på 274 kPa krävs innan linan börjar deformeras, och materialet är alltså förspänt. Vid modelleringen av linans elasticitet i funktionerna användes den uppmätta elasticitetsmodulen, men utan förspänningen i materialet. Matematiskt bör alltså elasticiteten uttryckas med en affin funktion (polynom av grad 1, $y = kx +$), i stället för den linjära funktion (i begreppets egentliga betydelse, $y = kx$) som funktionerna använder. Någon sådan modellering finns dock i nuläget inte implementerad i våra funktioner. Däremot förklarar skillnaden i modellering varför resultatet från FDM- funktionen ligger i genomsnitt 0,35 m under experimentet. Den extra förskjutningen motsvarar den förspänningskraft som behövde appliceras i experimentet innan deformation uppstod. Samma modelleringsproblem föreligger i referensproblem 5, men där avviker funktionernas resultat mer från den experimentella lösningen. Det beror sannolikt på att linorna slaknar och att problemet därmed blir icke-linjärt.



Figur 5-1 – Spännings-töjningsförhållandet i linan som används i experimenten. Lutningen är elasticitetsmodulen.

Att normalkrafterna i DRM hamnar nära de uppmätta krafterna i de experimentella referensproblemen beror sannolikt på att DRM använder de uppmätta förspänningarna som indata. FDM använder i stället den osträckta längden som indata och jämför med den sträckta för att beräkna elementets normalkraft. Det är därför svårt att jämföra resultaten för DRM och FDM i de experimentella referensproblemen 3 och 5 (se Tabell 4-3 och Tabell 4-5).

I referensproblem 5 konstaterades att dynamometrarnas andel av elementens längder var så stor att det påverkade resultatet betydligt. Dynamometrarna var mindre styva än linan, vilket förmodligen ledde till för stor förskjutning av mittnoden. För att erhålla mer korrekta resultat borde hänsyn till dynamometrarnas styvhet tas med i funktionerna. Alternativt borde experimentet utföras i större skala så att dynamometern ger en mindre relativ påverkan.

5.1.3 Anpassning till CALFEM och användarvänlighet

Vid jämförelse av de båda funktionernas användarvänlighet skiljer de sig något åt. För en användare med erfarenhet inom CALFEM blir det lättare att snabbt läsa in sig på DRM, eftersom alla indata är på samma form. I FDM är inparametrarna på en annan form, som dock borde vara mer intuitiv för en användare utan CALFEM-erfarenhet. Exempelvis anges koordinaterna för respektive nod och inte för varje element, och användaren behöver inte ta fram någon styvhetsmatris. Vi valde att inte anpassa invariablerna i FDM-funktionen efter CALFEM trots att ett av projektets mål var CALFEM-kompatibilitet, eftersom vi upplevde att det skulle ge en felaktig bild av hur FDM fungerar och dessutom göra inmatning av data mer omständlig. Det tillhör ett framtida projekt att skriva funktioner som kan omvandla CALFEM-struktur till FDM-struktur för enkel inmatning av data i båda funktionerna. DRM liknar funktionen step2 i CALFEM och det har därför varit lätt att anpassa strukturen därefter.

5.2 Dynamic relaxation method

Två funktioner har tagits fram, cable2drm och cable3drm. Funktionerna skiljer sig åt genom att cable2drm hanterar element i R^2 och cable3drm hanterar element i R^3. R^1 kan ses som ett specialfall av R^2.

5.2.1 In- och utparametrar för cable2drm respektive cable3drm

De båda funktionerna löser liknande problem som CALFEM:s redan existerande funktionsfiler; bar2e, bar3e, assem och solveq, men cable2drm och cable3drm löser system av linor i stället för stänger. Därför har liknande in- och utparametrar valts. Genom att efterlikna CALFEM:s struktur uppnås en hög igenkänningsfaktor för de som använt CALFEM tidigare.

De inparametrar som skiljer sig åt från CALFEM:s är inparametern element properties, $\boldsymbol{ep}$, som i DRM-funktionerna heter element properties augmented, $\boldsymbol{epa}$. $\boldsymbol{epa}$ är en utvecklad matris som utöver arean, $\boldsymbol{A}$, och elasticitetsmodulen, $\boldsymbol{E}$, även tar hänsyn till förspänningar, $\boldsymbol{T}$, och osträckta längder, $\boldsymbol{L}_{\mathbf{u}}$. De osträckta längderna behövs för att avgöra vilka element som är i tryck.

Utparametrar är av samma struktur som CALFEM där $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{q}$ beskriver nodernas förflyttningar respektive nodkrafter. I cable2drm och cable3drm skickas $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{T}$ och $\boldsymbol{a}_{\mathbf{snap}}$ ut. $\boldsymbol{T}$ är en vektor som anger normalkraften för respektive linelement och $\boldsymbol{a}$ är förskjutningsvektorn. I step2, en funktion i CALFEM som löser dynamiska problem, finns en utparameter $\boldsymbol{d}_{\mathbf{snap}}$. Samma parameter används i DRM-funktionerna och heter $\boldsymbol{a}_{\mathbf{snap}}$. $\boldsymbol{a}_{\mathbf{snap}}$ skapar en matris som sparar vektorn $\boldsymbol{a}$ för varje tidssteg. Genom $\boldsymbol{a}_{\mathbf{snap}}$ möjliggörs diagram som visar hur systemet oscillerar och konvergerar mot lösningen.

5.2.2 Konvergensvillkor

För att säkerställa att systemet är i jämvikt behövs särskilda konvergensvillkor. Villkoren syftar till att avsluta funktionen när en form tillräckligt nära statisk jämvikt har uppnåtts. Sammanlagt har det för funktionerna formulerats tre villkor som alla måste vara uppfyllda för att avbryta iterationsprocessen. Teorin beskriver två villkor. Det har visat sig under utveckling av funktionen att villkoren ibland är otillräckliga. De villkor som beaktas är att den kinetiska energin är låg, att skillnaden i kraft som verkar i en nod mellan tidsstegen är låg, samt ett extra villkor som tar hänsyn till osträckta längder.

Till en början formulerades ett konvergensvillkor om att nodernas hastigheter ska vara mindre än en given tolerans. Detta kräver dock ett större antal iterationer. För att hålla nere antalet iterationer testades ett villkor om att systemets totala kinetiska energi ska vara tillräckligt liten enligt ekvation (2-16). Maxvärdet för systemets totala kinetiska energi, vid vilken iterationsprocessen ska avbrytas, valdes till 1 mJ i enighet med Hüttner, Máca och Fajman (2014). Maxvärdet testades för de olika referensproblemen. För referensproblem 2 konvergerade dock inte funktionen på grund av det hårda kravet på den kinetiska energin. Detta gav upphov till att ett mildare krav sattes på den kinetiska energin för okända strukturer, vilket tydliggörs i Tabell 5-1.

En liten pålagd last kan ge upphov till en låg hastighet hos systemet, vilket i sin tur ger upphov till låg kinetisk energi. Detta gör att iterationsprocessen bryts trots att systemet inte nått villkoren för statisk jämvikt. Därför infördes ett konvergensvillkor för förändringen av residualkraft. Detta villkor säkerhetsställer att systemet konvergerar mot rätt lösning även vid små krafter. Skillnaden i kraft gör att om den maximala skillnaden mellan två krafter på samma nod mellan två tidssteg är mindre än 1 %, av den maximalt pålagda kraften på en nod, anses funktionen ha konvergerat. Anledningen till att 1 % valdes var att nodkrafterna inte ansågs medföra någon betydande skillnad. Detta verifierades empiriskt genom testkörningar.

DRM har problem att hantera osträckta längder. Det uppstår ett specialfall vid approximation av kedjekurvan i de fall då summan av de osträckta längderna blir större än avståndet mellan de fixa noderna, det vill säga linans infästningspunkter. För att komma runt problemet formulerades ekvation (5-1) som tillämpas då $L < L_{\mathrm{u}}$.

$$\sum_{i=1}^{n} L_i \leq c \times \sum_{i=1}^{n} L_{0,i} \tag{5-1}$$

där
L_i är varje elements längd vid given tidpunkt
$L_{0,i}$ är varje elements ursprungliga längd
c är en faktor som varierar med antalet element och har bestäms empiriskt. Lämpliga värden för c redovisas i Tabell 5-1.

Tabell 5-1 – Visar hur konstanterna behöver justeras för fall kedjekurvan, referensproblem 2.

Antal element	< 5	< 7	< 9	$9 \leq$
$c\ [-]$	0,9980	0,9990	0,9995	0,9999
$U_{\max}\ \left[\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}\right]$	0,00555	0,00221	0,00118	0,000737

Ett maxvärde för antalet iterationer har valts för att undvika att funktionen hamnar i en oändlig loop. Detta har valts empiriskt utifrån kedjekurvan, vilken resulterat i det största antalet iterationer när det approximeras med ett stort antal element.

5.2.3 Linans egenskaper – hur tryckta element hanteras

I avsnitt 2.1.2 framgår hur tryckkrafter hanteras genom att sätta linans styvhet och förspänning till noll då den belastas i tryck (Barnes, 1999). Det har observerats att element utan styvhet som kopplas till element i drag beter sig singulärt och konvergens omöjliggörs. Detta ledde till problem i referensproblem 2 (kedjekurvan), som inte konvergerade när styvheter för tryckta element sattes till noll.

För att åtgärda problemet sattes elasticitetsmodulen till en liten del av elementets ursprungliga styvhet. Tester visade att styvheten hos tryckta element bör sättas till 1 % av den ursprungliga elementstyvheten. För att hålla sig nära den teoretiska definitionen, det vill säga att styvheten sätts till noll för tryckta element, valdes det att inte ha en högre andel än 1 %. Vid test att sätta styvheten till en mindre andel än 1 % krävdes det fler iterationer för konvergens. Val av konstant är därmed en avvägning. Att inte sätta styvheten till noll är en avvikelse från teorin, men vid test av de övriga referensproblemen konstaterades att avvikelsen inte gjorde någon väsentlig skillnad.

5.2.4 Kända respektive okända strukturer

Med kända strukturer menas strukturer med sträckta linor, det vill säga en förspänning större än noll. Det har visat sig att DRM kräver färre iterationer för konvergens när strukturen är känd sedan tidigare, och vid vissa av dessa fall uppnås konvergens på mindre än 50 iterationer. Det beror på att förskjutningarna är små, och därför behövs färre iterationer innan konvergensvillkoren är uppfyllda. Kända strukturer gav ett resultat som var väldigt nära referensproblemens resultat, vilket tydligt går att se i jämförelsen med referensproblem 1 och 4, se avsnitt 4.

Okända strukturer är strukturer som består av minst en osträckt lina. De kräver i regel betydligt fler iterationer än kända strukturer, då det krävs ett antal iterationer för att först komma till ett läge där alla linelement är sträckta. Exempelvis kan den pålagda kraften vara för liten för att systemet ska konvergera innan det maximala antalet iterationer är uppnått. Strukturer som har linelement som hamnar i gränsläget mellan tryck och drag har också svårt att konvergera.

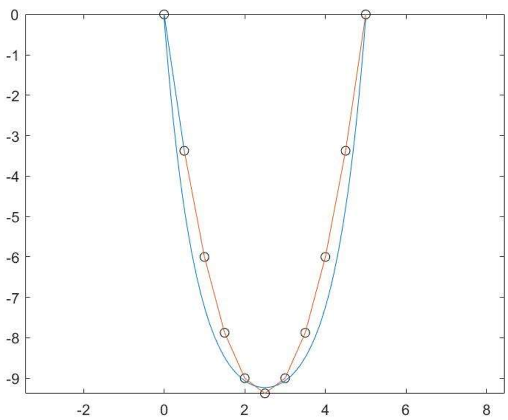
5.3 Force density method

Diskussion kring programutvecklingen baserad på FDM redovisas nedan i kronologisk ordning. Avsnitt 5.3.1 behandlar implementering av en linjär och direkt formbestämning. Den utökades sedan till en iterativ metod som också tog hänsyn till styvheter och osträckta längder, vilket går att läsa mer om i 5.3.2.

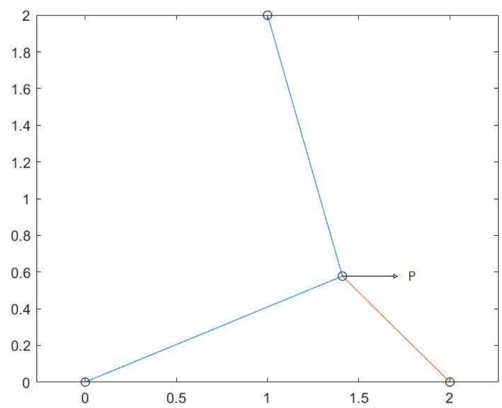
En stor andel av utvecklingstiden lades på att optimera ett antal olika parametrar med avseende på lösningskvalitet och konvergenshastighet. Tryckspänningar har fått ett eget avsnitt (5.3.3) eftersom det är en central parameter för programmets funktion. Övriga parametrar har samlats under 5.3.4. Olika sätt att definiera fel beskrivs närmare i avsnitt 5.3.5. Resterande avsnitt behandlar funktionens tillförlitlighet och utvecklingspotential.

5.3.1 Linjär formbestämning

Direkt beräkning av deformationer utifrån givna förspänningar i alla element är den enklaste implementeringen av FDM. Problemet behöver inte lösas iterativt eftersom linorna alltid antas vara förspända och därför beter sig linjärt. I Figur 5-2 och Figur 5-3 syns resultat från två beräkningar. Figur 5-2 är för kedjekurvan, där linor spänns upp i serie mellan två punkter på samma höjd och utsätts för jämnt utbredd last lodrätt. Figur 5-3 visar ett enkelt linbärverk bestående av tre fast inspända noder i en liksidig triangel med en fri nod i mitten. Tre lika långa linor har kopplats till den fria noden, som sedan belastas i x-led.



Figur 5-2 – Utböjning för vertikalt jämnt belastad linje (orange) jämfört med hyperbolisk kurvanpassning $\boldsymbol{y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$*,* $\boldsymbol{a}$*=0.77 (blå). Funktionens första version.*

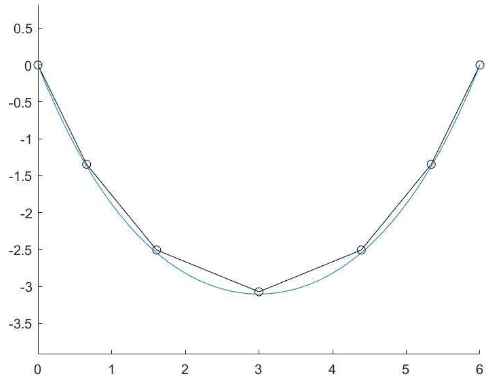


Figur 5-3 – Enkelt linbärverk med horisontellt belastad mittnod. Funktionens första version.

Fördelen med linjär formbestämning är att det existerar en entydig lösning för varje ansatt förspänningsvektor, vilket ger en snabb och pålitlig lösning. Det krävs alltså inga iterativa beräkningar. Modellen som metoden bygger på är dock för enkel för att den ska vara pålitlig. Antagandet att alla element alltid befinner sig i drag är orimligt eftersom verkliga linor har en osträckt längd, det vill säga den kortaste längd där linan kan anses ha ett linjärt elastiskt beteende. Om linans längd blir kortare än den osträckta längden bör linan förlora all sin lastbärande förmåga. Ett annat problem med den linjära FDM-metoden är att det inte finns någon intuitiv implementering för styvhet i linorna.

5.3.2 Icke-linjär formbestämning (osträckta längder)

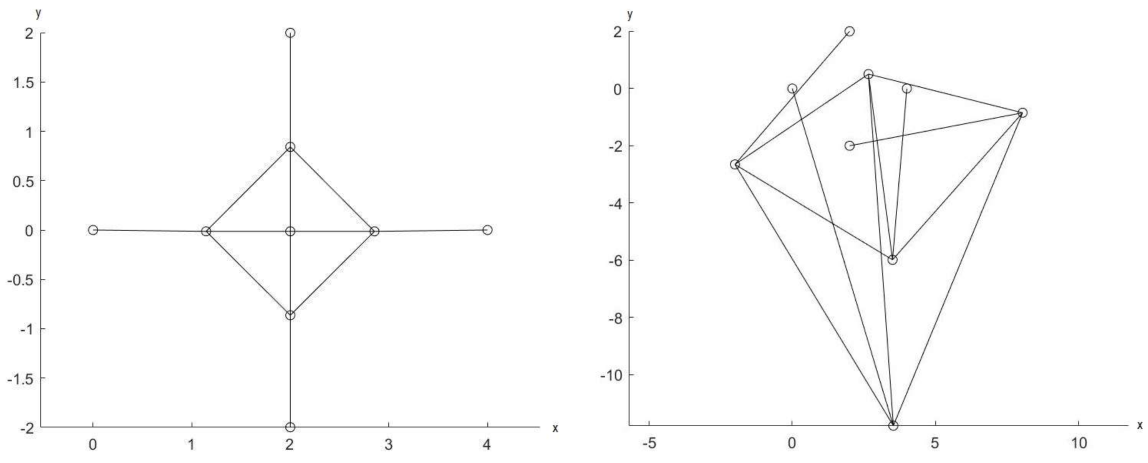
Problemen med osträckta längder och styvheter avhjälps genom att implementera särskilda villkor för elementen. Varje lina får en osträckt längd l_u och en styvhet h, och som villkor används en omskrivning av Hookes lag enligt avsnitt 2.2.2.2. Lösningen på problemet tas sedan fram iterativt. Implementeringen ger som väntat annorlunda resultat. Det är tydligt att högre styvheter ger mindre deformationer. Resultaten hamnar närmare analytiska lösningar, exempelvis för kurvanpassning av kedjelinjen (Figur 5-4).



Figur 5-4 – Utböjning för vertikalt jämnt belastad linje (svart) och hyperbolisk kurvanpassning (blå), $\boldsymbol{a}$ =2,72. Funktionen tar hänsyn till styvhet och osträckt längd.

Metoden har även brister. För att nå konvergens krävs i de flesta fall dämpning, och funktionen är känslig för valet av dämpningsfaktor. För stor dämpning leder till en långsam konvergens, och om dämpningen väljs för liten uppstår ofta vibrationer eller förvrängning av geometrin (Figur 5-5). Vid väl vald dämpning uppnås dock konvergens i nästan alla testade fall. Ett viktigt undantag är strukturer med stora laster i förhållande till styvheterna, där ett mycket stort antal iterationer krävs för att uppnå konvergens. Det rör sig om antal i storleksordningen 10^6 iterationer eller ännu mer. Problem uppstår också i vissa fall vid stora styvheter relativt en liten last, vilket ofta får strukturen att oscillera.

Elementen beter sig fortfarande linjärt, vilket är ett avgörande problem i implementeringen av styvheter och osträckta längder. I modellen uppstår en tryckkraft enligt Hookes lag om en lina blir kortare än sin osträckta längd. För att korrekt modellera en lina krävs att tryckkraften blir noll eller försumbar vilket beskrivs närmare i avsnitt 5.3.3.



Figur 5-5 Enkelt förspänt kabelnät. Förväntad form (vänster) och förvrängd form (höger). Förvrängningar uppstår till följd av felaktigt vald dämpning.

5.3.3.1 h-metoden

Det finns flera sätt att identifiera tryckta element. Utgångspunkten kan vara antingen krafter eller geometriska villkor. Som kraftindikatorer går det att välja element utifrån villkoren $s < 0$ eller $q < 0$, men efter tester konstaterades att det går betydligt fortare att nå konvergens genom att studera element där $l < l_\mathrm{u}$. Enligt Hookes lag borde resultatet bli detsamma, men eftersom q uppdateras i varje iteration och förändringen sker långsamt finns det en tröghet i systemet, så att kraften kan vara positiv samtidigt som längden är kortare än den osträckta längden. Att studera längderna är därför ett effektivare sätt att identifiera tryckta element än att studera krafterna.

För att uppnå konvergens med h-metoden krävs att tre parametrar ansätts väl: s_0, h_red och d, där s_0 är startgissningen för elementkrafterna, h_red beskriver reduktionsfaktorn för styvheten i tryckta element och d är dämpningsfaktorn. s_0 är viktig för att bestämma den ursprungliga strukturen. Väljs s_0 för stort i förhållande till last kan noderna implodera till samma punkt och det krävs väldigt många iterationer för att nå konvergens. Ett alltför litet s_0 kan å andra sidan leda till singulariteter. Reduktionsfaktorn h_red är avgörande för konvergenshastigheten. Ett mindre h_red ger noggrannare resultat men långsammare konvergens. En större reduktionsfaktor ökar konvergenshastigheten, men introducerar samtidigt ett större fel eftersom tryckkrafterna blir större. I fall med höga styvheter i förhållande till lasten uppstår lätt vibrationer om h_red väljs för stort. Det beror förmodligen på att tryckkrafterna hamnar i samma storleksordning som lasten. Vibrationerna kan förhindras med hjälp av dämpningsfaktorn d, som dock måste väljas tillräckligt liten för att inte göra konvergensförloppet alltför långsamt. I de flesta fall visade det sig vara bäst att inte använda dämpning i h-metoden, alltså $d = 0$. Med väl valda parametrar s_0, h_red och d (utförligare beskrivet i avsnitt 5.3.4) uppnås konvergens i de flesta testade referensproblem, och funktionen kan även lösa problem där element blir kortare än sina osträckta längder.

5.3.4 Val av parametervärden

Att testa sig fram till lämpliga parametervärden är tidsödande och ointressant för funktionens framtida användare. Därför bör parametrarna sättas av funktionen själv. För att kunna automatisera den processen krävs tillräckligt med testdata, och omfattande testning ledde till följande slutsatser.

Startgissningen s_0 bör vara i samma storleksordning som de yttre nodlasterna och inte ta hänsyn till styvheterna, trots att den slutgiltiga spänningen i högsta grad påverkas av styvheten. En bra gissning ligger inte nödvändigtvis nära slutvärdet, utan syftet med startgissningen är att få en initial struktur som ger robusta beräkningar. Vi har valt s_0 lika i alla element som medelvärdet av samtliga nodlastvärden. Testerna redovisas i Bilaga B.

För att nå konvergens verkar reduktionsfaktorn h_red i ett element behöva sättas till ett värde som är omvänt proportionellt mot styvheten. I praktiken betyder det att styvheten i tryckta element inte bör sättas till en bråkdel av dragstyvheten enligt $h = h_\mathrm{red}EA$, utan till en liten konstant h_k, så att $h = h_\mathrm{k}$. Större h_k underlättar ofta konvergens, men introducerar större tryckkrafter och därför större fel. Tabell 5-2 redogör för hur felet beror av h_k och beskriver även hur felet är definierat. Lämpligt ansatt tryckstyvhet visade sig också vara proportionell mot nodlasterna. Tester tyder på att styvheten i tryckta element bör väljas enligt $h = h_\mathrm{k}p$ med $h_\mathrm{k} = 0{,}001$, där p är medelvärdet av alla nodlasters belopp. Vi har inte provat elementspecifika h_k. Samtliga tester och tillhörande parametervärden redovisas i Bilaga C.

Tabell 5-2 – Felet, $\boldsymbol{e}$, som funktion av h_k i verifieringsproblem 1, med $\boldsymbol{p_y} = \mathbf{1}$. Felet mäts som mittnodens förskjutning jämfört med förskjutningen i den analytiska lösningen, normerat mot elementens ursprungliga längd. Felet är proportionellt mot h_k men för större noggrannhet krävs fler iterationer.

h_{red}	0,2	0,1	0,02	0,01	0,002	0,001	$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}
e	$-4.55 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}38 \cdot 10^{-2}$	$-4{,}94 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}48 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}89 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}39 \cdot 10^{-4}$	$-3{,}96 \cdot 10^{-5}$	$6{,}33 \cdot 10^{-6}$
Iterationer	3273	72	113	159	550	1045	5035	100017

Dämpning behövs främst för fall med hög styvhet och förspända element. Undersökningar visar att lämpligt vald dämpning är omvänt proportionell mot styvheten, $d = \frac{c}{(EA)^2}$ för ett värde c som varierar något från fall till fall. På grund av svårigheter att bestämma ett samband för c valdes en konstant, som genom tester kunde bestämmas till ungefär c = 2500. Vi valde också att tillämpa dämpning i de fall som även konvergerade utan dämpning, eftersom våra tester indikerade att det inte påverkade konvergensen eller antalet iterationer nämnvärt. Samtliga tester och tillhörande parametervärden redovisas i Bilaga D.

Vissa problem kräver flera miljoner iterationer för att konvergera då låga styvheter ansätts och stora deformationer uppstår. Det tar lång tid för krafterna att komma upp i rätt värden, vilket beror på att steglängden dq för elementens force density är liten. Experiment har utförts med en parameter f, med egenskapen att q uppdateras enligt $q_i = q_{i-1} + f\, dq$. f sattes till en konstant och dämpning infördes. Med lämpligt valda parametrar kunde flera problem fås att konvergera ungefär tio gånger fortare. Risken var emellertid stor för vibrationer och förvrängningar.

5.3.5 Feldefinitioner

Felet vid lösning med hjälp av FDM kan mätas på flera sätt. Metoden minimerar $\boldsymbol{dq^t dq}$, vilket också kan användas som mått på felet, eventuellt gjort dimensionslöst till exempel genom

$$e = \frac{\boldsymbol{dq}^t \boldsymbol{dq}}{\boldsymbol{q}_0^2} \tag{5-2}$$

Att $\boldsymbol{dq}$ går mot noll innebär dock inte nödvändigtvis att problemet konvergerar mot rätt svar. I vissa fall, till exempel när lasten är större än styvheten, minskar konvergenshastigheten kraftigt innan konvergens uppnåtts. Vi föreslår i stället att $\boldsymbol{r}$ används i felmätningen, eftersom det är ett mått på hur långt ifrån elementlängderna är att uppfylla Hookes lag, bivillkoret beskrivet i avsnitt 2.2.2.2. Medelvärdet av $\boldsymbol{r}$ är att föredra framför $\mathrm{norm}(\boldsymbol{r})$, eftersom normen ökar med antalet element. Ännu bättre är $\max(\boldsymbol{r})$, eftersom det är oberoende av antalet element. Oavsett bör felet göras dimensionslöst, till exempel enligt

$$e = \max\left|\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{l_u}}\right| \tag{5-3}$$

med $\boldsymbol{r}$ och $\boldsymbol{l}_{\mathbf{u}}$ för alla element. Hur felet görs dimensionslöst spelar i sig inte så stor roll. Notera dock att $\boldsymbol{r}$ inte säger något om de fel som introduceras av h_{k} genom tryckkrafter, och det finns därför ingen anledning att sätta toleransen för e mycket lägre än h_{k}-felet, som är i storleksordningen 10^{-5}.

5.3.6 h-metodens robusthet

När s_0, h_k och d väljs enligt rekommendationer i avsnitt 5.3.4 uppnås konvergens inom ansatt maxgräns för antal iterationer i 197 av 240 testade fall (82 %). I merparten av de fall som inte konvergerar är lasten högre än styvheten. Eftersom sådana fall i princip aldrig uppkommer i verkligheten arbetade vi inte vidare med just de problemen. För att lösa dem krävs att $\boldsymbol{dq}$ manipuleras på något sätt, och i det fallet föreslår vi faktorn f enligt ovan. Förutom fallen där lasten är högre än styvheten finns några andra studerade problem som divergerar. Det rör sig om problem med liten last i förhållande till styvheten ($\frac{p}{EA} < 10^{-4}$) (förutsatt $l = 1$) och där den slutgiltiga längden hamnade i närheten av den osträckta längden för vissa element. Det är svårt att hitta en orsak till varför problemen inte konvergerar, men i vissa fall uppstår vibrationer som bara i enstaka fall kan avhjälpas med mer dämpning, och i andra fall stannar konvergensen upp och $\boldsymbol{dq}$ går mot noll trots att $\boldsymbol{r}$-villkoren är långt ifrån uppfyllda. I några fall varnar MATLAB för singulariteter. Ofta verkar det dock bero på att skillnaden i force density mellan olika element blir så stor att kvoten mellan vissa element i $\boldsymbol{G}$-matrisen närmar sig maskinepsilon. I vissa fall uppnås konvergens trots varningarna.

Några ytterligare problem har observerats. Om någon nod inte är kopplad direkt eller indirekt till en fix nod, utan ”svävar fritt”, uppstår singulariteter. Om ett förspänt element kopplas mellan två fixa noder uppnås generellt inte konvergens. Tryckkrafter kan få inverkan på formen om ena noden på ett element belastas transversellt av ett element i tryck, trots att tryckkraften är mycket liten. Det beror på att elementet inte tar last i sidled, men att problemet uppkommer är ovanligt. I några fall uppkommer helt oförutsägbart vibrationer även för mycket enkla system.

5.3.7 Skalning av inparametrar

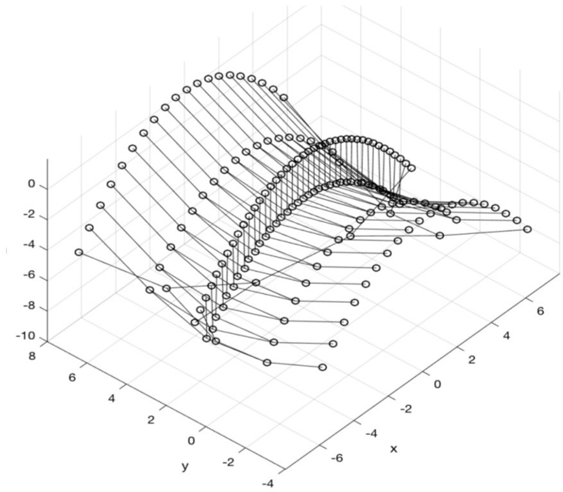
Under programutvecklingens gång har vi noterat att funktionen för en del kombinationer av inparametrar inte konvergerar, eller att det krävs mycket dämpning för att undvika vibrationer. I dessa fall krävs dessutom ett stort antal iterationer. I samband med att funktionen utvärderades mot referensproblem 3 upptäcktes att lösningen till strukturen inte konvergerade för osträckta elementlängder $l_\mathrm{u} < 1$. När elementlängderna ansattes större än 1 konvergerade dock lösningen på ett betydligt mindre antal iterationer. För att studera detta närmare genomfördes därför ett enkelt skalningsförsök på samma problem genom att låta faktorn $1/\min(l_\mathrm{u})$ skala last, styvhet och geometri, för att sedan skala tillbaka när systemet konvergerat. Problem som tidigare orsakat vibrationer konvergerade nu vilket ledde oss till fördjupade testkörningar. Fördjupad analys visade att en skalfaktor på 1,2/min(l_u) fick flest problem att konvergera. Även problem med $l_\mathrm{u} > 1$ som tidigare inte konvergerat utan mycket hög dämpning gick nu att lösa betydligt snabbare. Tabellerna i Bilaga E visar tester för skalfaktorer upp till $1{,}4/\min(l_\mathrm{u})$ för respektive referensproblem. Trenden för högre skalfaktorer är fler iterationer, så redovisade data har begränsats för att förbättra överskådligheten.

Skalning har stor potential och det finns utrymme för vidareutveckling. Vi noterade detta fenomen sent under programutvecklingen, och därför har eventuell samverkan mellan skalning och dämpning samt övriga parametrar inte hunnit undersökas fullt ut. Ett översiktligt test antydde att lägre dämpning kunde nyttjas, vilket fick alla testade problem att konvergera upp till 10 gånger snabbare samtidigt som totalt antal konvergerade problem var likvärdigt. Antalet iterationer som krävs för konvergens står nämligen i direkt proportion till dämpning, så en minskad dämpning med 10^{-1} minskar antalet iterationer med en faktor 10^{-1}. Det finns med stor sannolikhet andra parametrar som är beroende av varandra och här rekommenderas vidare studier för att förbättra funktionen ytterligare.

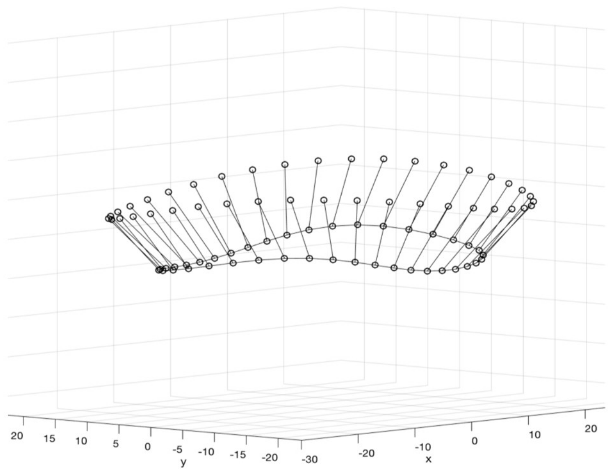
5.3.8 Funktionens användbarhet och potential

Funktionen baserad på FDM klarar även av att beräkna betydligt mer komplexa strukturer än de vi använt som referensproblem. Strukturer med storleksordningen 200 element, samt ungefär hälften så många noder, konvergerar beroende av olika ingångsvärden på 1000–10000 iterationer.

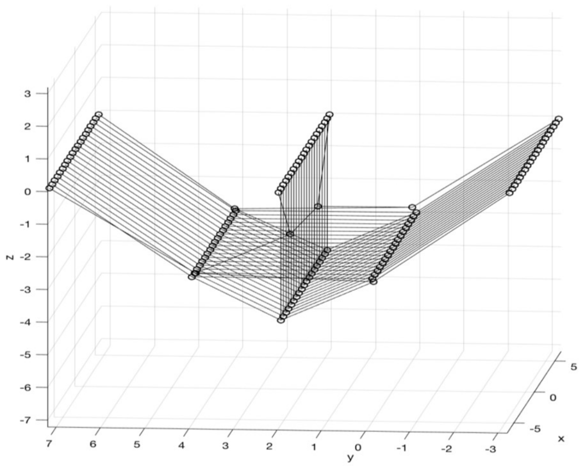
Konvergenshastigheten är dock kraftigt beroende av gissningen på de fria nodernas slutliga position och strukturens elementlängder. Nedan följer ett antal exempel (Figur 5-6 - Figur 5-9) på strukturer som automatgenererats av ett skript som tagits fram baserat på parametriserade kurvor. Funktionen placerar ut noder på en parametriserad kurva med en steglängd bestämd av Δt. Till exempel ger $\Delta t = \pi$ två noder utplacerade på en ellips medan $\Delta t = \pi/2$ för samma exempel ger fyra noder.



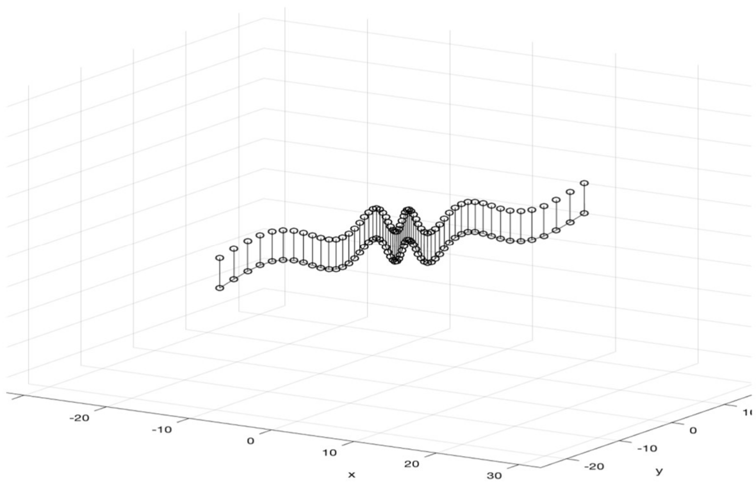
Figur 5-6 – Strukturens fixa koordinater är framtagna enligt $x_{fi} = t$, $y_{fi} = 2 + 6\sin 10\,t$, $z_{fi} = -0.15t^2$, $\Delta t = \frac{2\pi}{40}$. 40 fixa noder, 40 fria noder. Steglängden påverkar drastiskt ytans uttryck och form. Dubbla steglängden (hälften så många noder) placerar till exempel ut alla noder i ett enda vertikalt plan istället. Konvergerar på 749 iterationer.



Figur 5-7 – Strukturens fixa koordinater är framtagna enligt $x_{fi} = 30\cos t$, $y_{fi} = 20\sin t$, $z_{fi} = 2\sin 2t$, $\Delta t = \frac{2\pi}{40}$. 40 fixa noder, 40 fria noder. Osträckta elementlängder 10, respektive 3 m i den inre dragbelastade ellipsen. Konvergerar på 15 813 iterationer. Med kortare elementlängder där fria och fixa noder hamnar nära varandra i z-led konvergerar problemet på runt 1000 iterationer.



Figur 5-8 – Strukturens fixa koordinater är framtagna enligt $x_{fi} = t,\ y_{fi} = 2 + 6\sin 10t,\ z_{fi} = 0\,,\ \Delta t = \frac{2\pi}{30}$. 30 fixa noder, 30 fria noder. Konvergerar på 1015 iterationer. Lägg särskilt märke till hur parametriseringen i y har lett till tre räta upphängningslinjer, snarare än någon uppenbar trigonometrisk form. En snabb ändring av steglängden skulle generera en helt annan typ av struktur, med helt annat verkningssätt, vilket gör parametrisering till ett både kreativt och kraftfullt sätt att generera godtyckliga strukturer.



Figur 5-9 – Strukturens fixa koordinater är framtagna enligt $x_{fi} = t,\ y_{fi} = 0.1t^3, z = 2\sin 2t\,, \Delta t = \frac{2\pi}{30}$. 30 fixa noder, 30 fria noder. Strukturen konvergerar ej. Ett fåtal element i mitten på strukturen genererar ett stort fel under formbestämningen, och vibrationer uppstår. Strukturen kan sannolikt fås att konvergera med mer lämpligt valda osträckta elementlängder och en bra startgissning på de fria koordinaterna. Exempelstrukturens verkningssätt gör den ganska oanvändbar som konstruktionselement i en byggnad. Exemplet är istället framtaget för att visa på funktionens andra tänkbara användningsområden, som till exempel formgivningsverktyg.

6. Slutsats

Projektets syfte var att implementera två beräkningsmetoder för analys av linbärverk i CALFEM. Två funktioner har skrivits som med varsin metod (DRM och FDM) beräknar slutgiltig form och krafter i belastade linbärverk, och syftet har därmed uppnåtts. En ansträngning har gjorts att efterlikna CALFEM:s struktur och tillhörande manualer har skrivits.

Funktionerna har verifierats mot analytiska och numeriska problem och därefter validerats mot experimenten. Funktionernas lösningar av problemen stämde relativt väl överens med de analytiska och numeriska lösningarna både med avseende på form och spänning. I de analytiska fallen var felmarginalen aldrig över en procent för FDM medan DRM hade en avvikelse upp till ungefär tre procent, se Tabell 4-6. I det numeriska fallet, jämförelsen med CALFEM:s lösningar, observerades en avvikelse på omkring sju procent för båda funktionerna vad gäller värden på elementkrafterna. I de experimentella fallen avvek funktionerna betydligt från experimentlösningen. Detta berodde förmodligen på att funktionernas modell av styvheten i linorna inte stämde överens med verkligheten. Överlag visar referensproblemen att funktionerna kan åstadkomma lösningar för spänning och deformation som ligger rätt inom några procents felmarginal, åtminstone jämfört med analytiskt och numeriskt utförda beräkningar. Lösningarna är alltså giltiga men med varierande precision.

En jämförelse av funktionerna för DRM och FDM ger vid handen att FDM är stabilare och konvergerar oftare, men DRM konvergerar snabbare när det väl fungerar. Det finns problem som ingen av funktionerna kan lösa. Det största problemet med funktionerna anser vi därför vara robustheten. DRM fungerar bättre när strukturen är känd på förhand, till exempel förspända strukturer, medan FDM visat sig bra på att modellera fritt hängande strukturer, framför allt kedjekurvan. Funktionerna har olika bra precision i olika fall, beroende på last och styvhet. Det beror på att styvheten i tryckta element implementerats på olika sätt i funktionerna. DRM ligger närmare CALFEM:s struktur medan FDM kan vara lättare att ta till sig om CALFEM-erfarenhet saknas. Resultaten redovisade i denna rapport bör i första hand ses som ett mått på hur funktionerna presterar och inte nödvändigtvis hur väl metoderna fungerar. Detta eftersom implementeringen av metoderna skiljer sig något åt mellan funktionerna och att programmeringen har gjorts av olika personer.

Att ta fram och implementera teorin bakom metoderna utgjorde inga större svårigheter, men det fanns betydligt mindre dokumentation att tillgå om lämpliga värden på parametrar för startgissning, dämpning, tidssteg med mera. En stor del av projektet bestod av att ta fram och analysera data för att bestämma funktioner för sådana parametrar. Parameterfunktionerna bör vara till nytta för andra som vill implementera DRM och FDM. I slutskedet av utvecklingen av FDM upptäcktes att genom att skala alla strukturer till en bestämd storlek kunde konvergensenshastigheten snabbas upp och få fler problem att konvergera. Studier av skalfaktorn hann dock bara påbörjas, därför rekommenderar vi att vidare arbete med FDM fokuseras på att undersöka möjligheterna med skalning. Det skulle kunna få fler problem att konvergera och därmed öka funktionens användbarhet.

Vidare arbete skulle kunna utföras med att anpassa FDM-funktionen mer till CALFEM. Här rekommenderar vi att en funktion skrivs som kan omvandla DRM:s inparametrar till FDM:s, så att samma problem kan köras med båda funktionerna. Vill användaren lära sig hur FDM fungerar finns det dock en pedagogisk poäng i att behålla nuvarande inparametrar. Därför vore det bra med en separat omvandlingsfunktion, så att användaren själv kan välja formen på inparametrarna.

Litteraturförteckning

(April 2017). Hämtat från Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_transform

Barnes, M. (1999). Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation. *International Journal of Space Structures, 14*(2), 89-104.

Dahlblom, O., & Olsson, K.-G. (2015). *Strukturmekanik.* Lund, Sverige: Studentlitteratur.

Emery, J. (den 3 July 2003). Hämtat från The Stem Society: http://www.stem2.org/je/catenary.pdf

Hüttner, M., Máca, J., & Fajman, P. (2014). Analysis of cable-membrane structures using the dynamic relaxation method. *Proceedings of the 9th international conference on structural dynamics.* Porto.

Linkwitz, K. (2014). Force density method: design of a timber shell. i S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenedaal, & C. Williams, *Shell structures for architecture.* New York: Routledge.

Rodriguez Garcia, J. (2011). *Numerical study of dynamic relaxation methods and contribution to the modelling of inflatable lifejackets.* Université de Bretagne Sud, Sciences de l'Ingénieur, Lorient.

Samuelsson, A., & Wiberg, N.-E. (1997). *Byggnadsmekanik Strukturmekanik.* Lund, Sverige: Studentlitteratur.

Schek, H.-J. (1974). The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer methods in applied mechanics and engineering*(3), 115-134.

Zhang, J. Y., & Ohsaki, M. (2005). *Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures.* Kyoto University, Kyoto.

Bildförteckning

Försättsbild: https://sv.wikipedia.org/wiki/Fil:2014_Olympiastadion_Munich.jpg
Figur 1-1: https://sv.m.wikipedia.org/wiki/Fil:%C3%84lvsborgsbron-16.jpg
Figur 1-2: https://sv.wikipedia.org/wiki/Fil:2014_Olympiastadion_Munich.jpg
Figur 1-3: https://sv.wikipedia.org/wiki/Fil:KurilpaBridgeConstruction7.JPG
Figur 1-4: https://sv.wikipedia.org/wiki/Fil:British_Museum_1120002_1120026.jpg

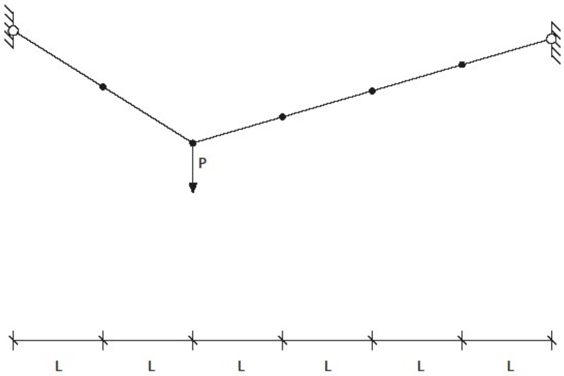
Bilagor

Bilaga A: Resultat av experiment

Två experiment utfördes för att kunna jämföra utdata från de egenskrivna funktionerna med experimentella testdata. De experiment som utfördes motsvarar referensproblem 3 och 5.

Experiment 1: Punktbelastad lina

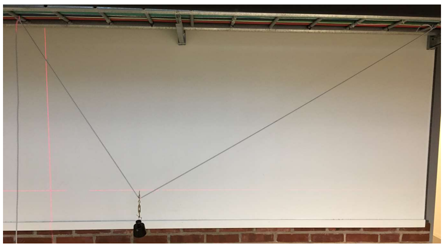
En 3 m lång lina fästes mellan två punkter och en vikt hängs i en punkt, 1 m in på linan (Figur A-1). Avståndet mellan infästningarna, som kan ses som fasta momentfria infästningar, är 2,485 m och de vikter som hängdes på linan vid de olika experimenten hade massorna 1, 2 respektive 3 kg. Koordinater för den belastade noden togs fram för de tre olika lastfallen.



Figur A-1 – Visualisering av experiment 1.

Metod, experiment 1

Mätningen av den belastade nodens koordinater utfördes genom att placera en nivelleringslaser som projicerade ett horisontellt och ett vertikalt streck, som tillsammans formade ett kryss. Genom att placera det vertikala laserstrecket så att det skar vänster infästningspunkt, samt det horisontella strecket så att det skar belastad nod, kunde x- och y-koordinat mätas upp som avståndet mellan laserkrysset och respektive nod. Linans elasticitetsmodul togs fram genom att mäta nodförskjutningen för de tre olika vikterna.



Figur A-2 – Foto på experiment 1.

Antaganden, experiment 1

Linan antas bete sig linjärt elastiskt inom det belastade området. Arean på linan antas vara oförändrad efter belastning.

Resultat, experiment 1

Resultatet från experiment 1 åskådliggörs i Tabell A-1 nedan.

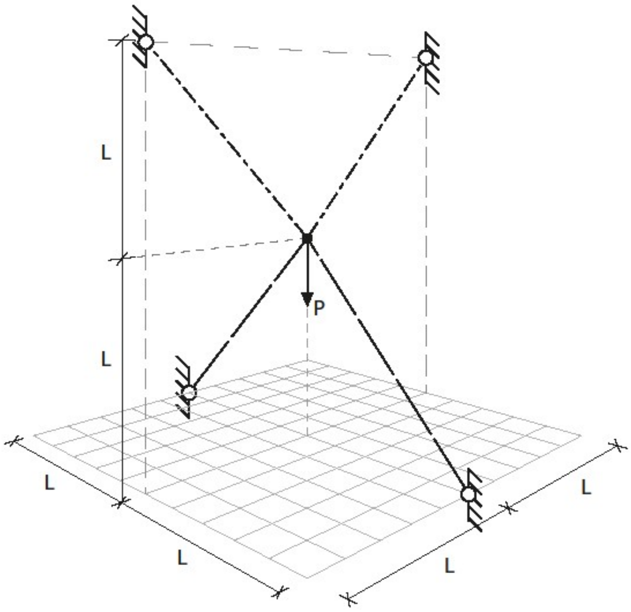
Tabell A-1 – Mätdata för tre olika lastfall för experiment 1.

Påhängd vikt i den belastade noden [kg]	x-koordinat [m]	y-koordinat [m]
1,049	0,65	-0,825
2,049	0,662	-1,08
3,055	0,682	-1,35

Värt att notera i alla lastfall är att linan är sträckt på båda sidor av vikten (Figur A-2).

Experiment 2: Tredimensionellt bärverk

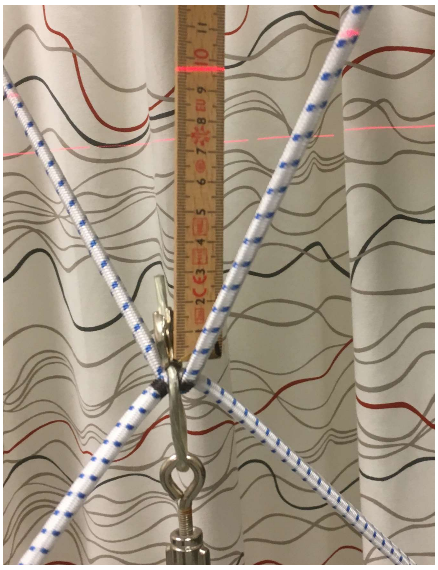
En tredimensionell struktur byggdes med två förspända linor (Figur A-3). Ena linan gick från den övre vänstra infästningen, via skärningspunkten mellan linorna, till den övre högra infästningen. Den andra linan gick från den nedre vänstra infästningen, via skärningspunkten mellan linorna, till den nedre högra infästningen. Linorna drogs åt så att de fick en förspänning, mätt med hjälp av dynamometrar som hade fästs i ändarna på alla linor. Infästningarna kan ses som fasta momentfria infästningar. En vikt hängdes i den fria noden, som antas vara momentfri, vilket gav upphov till en förskjutning och ändrade spänningar i linorna. De nya spänningarna mättes med dynamometrarna och förskjutningen mättes med hjälp av lasern och en tumstock.



Figur A-3 – Visualisering av experiment 2.

Metod, experiment 2

Vid mätning av den belastade nodens förskjutning gjordes antagandet att noden endast förskjuts i z-led. Eventuella förskjutningar i x- respektive y-led försummades. För att mäta upp förskjutningen i z-led placerades nivelleringslasern så att det horisontella laserstrecket skar den mittersta noden då systemet var förspänt, men utan ytterligare belastning. Efter belastning mättes avståndet med tumstock från det horisontella laserstrecket till den belastade nodens nya position (Figur A-4).



Figur A-4 – Foto av mätningen av nodförskjutning.

Antaganden, experiment 2

Gallren på vagnen i Figur A-5 antogs vara ortogonala och tillsammans bilda ett koordinatsystem. Dynamometrarna har lägre styvhet än linorna, men antas i experimentet ha samma styvhet som linorna. Linorna antas vara viktlösa, likaså kroken som vikterna hängs på (Figur A-6). Linan antas bete sig linjärt elastiskt inom det belastade området. Arean på linan antas vara oförändrad efter belastning.

Värt att notera från det sista lastfallet var att de nedre linorna såg ut att vara osträckta. Trots det gav dynamometrarna ett litet utslag.

Figur A-5 – Foto över experimentet.

Figur A-6 – Foto över krok för påhängning av vikter.

Resultat, experiment 2

Resultat från experimentet åskådliggörs i Tabell A-2 – Tabell A-4 nedan.

Tabell A-2 – Ursprungskoordinater för noderna.

Ursprungskoordinater				
Nod	x	y	z	Kommentar
1	0	0	0	Nere till vänster
2	0	0,52	0,98	Uppe till vänster
3	0,67	0,52	0	Uppe till höger
4	0,67	0	0,98	Nere till höger
5	0,34	0,26	0,49	Mitten (fria noden)

Tabell A-3 – Förspänningar samt topologi för elementen.

Förspänningar i elementen			
Element	Startnod	Slutnod	T [N]
1	1	5	13,5
2	2	5	15
3	2	5	13
4	4	5	15,5

Tabell A-4 – Mätdata för tre olika lastfall för experiment 2.

Belastning [N]	Nodförflyttning [m]	Spänning [N]			
		Element 1	Element 2	Element 3	Element 4
-9,8691	-0,033 m nedåt	10,5	17,5	11	18
-19,6891	-0,066 m nedåt	7	19,5	7	20
-29,568	-0,1 m nedåt	2,5	21,5	3	22

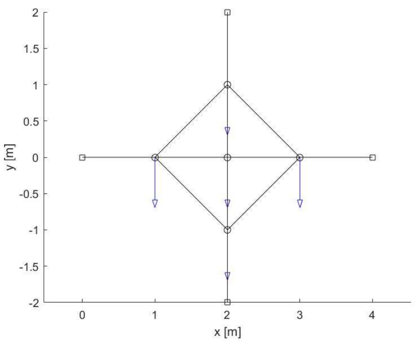
Bilaga B: Tester av startgissning för elementkrafter

I denna bilaga uttrycks tiopotenser med MATLAB-notationen, e. Problemet ”prob1.m” (se Figur B-1) med FDMbc, s0 enligt olika gissningsmetoder.

EA ("x") mellan 2 och 2e7, py = 10, och olika lu ("y") mellan 0,7 och 1,5. it = 300 000.

damp = 0, hred = 1e-5.

Tabellvärden representerar antal iterationer för olika kombinationer av EA, lu och s0.



Figur B-1 - prob1.m som användes till s0-testerna.

A. s0 i alla element som normen av alla nodlaster

Nedan visas utdrag ur MATLAB-kod för beräkning av s0.

```
s0 = norm(sqrt(px.^2+py.^2))
```

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7
0,7	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000
0,8	300 000	89 460	300 000	300 000	12 085	300 000	300 000	300 000
0,9	300 000	100 723	10 077	1018	110	300 000	300 000	300 000
1,0	300 000	111 829	11 195	1131	122	32	300 000	300 000
1,1	300 000	123 138	12 314	1243	134	37	300 000	300 000
1,5	300 000	168 544	16 831	1741	230	169	300 000	300 000

Antal konvergerade problem: 21 av 48.

Genomsnittligt antal iterationer för konvergerade problem: 31 531.

B. s0 enligt Hookes lag i respektive element med motsvarande nodlaster adderade

Nedan visas utdrag ur MATLAB-kod för beräkning av s0.

```
s0=(l-lu)./l. * EA;
s0(s0<0)=hred*s0(s0<0);
s0=s0+abs(C)*abs(px)+abs(C)*abs(py)
```

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7
0,7	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000
0,8	300 000	96 017	300 000	300 000	70 940	300 000	300 000	300 000
0,9	300 000	99 091	18 015	9914	9104	300 000	247 279	300 000
1,0	300 000	100 049	10 729	2015	1131	1184	300 000	300 000
1,1	300 000	110 102	22 170	11 650	10 597	10 494	300 000	300 000
1,5	300 000	150 838	15 052	1581	244	300 000	300 000	300 000

Antal konvergerade problem: 21 av 48.

Genomsnittligt antal iterationer för konvergerade problem: 47 533.

C. s0 lika i alla element som medelvärdet av alla nodlaster

Nedan visas utdrag ur MATLAB-kod för beräkning av s0.

```
s0 = mean(sqrt(px.^2+py.^2))
```

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7
0,7	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000
0,8	300 000	40 025	300 000	300 000	41 754	300 000	300 000	300 000
0,9	300 000	45 099	4514	1019	300 000	4745	300 000	300 000
1,0	300 000	50 025	5014	2261	5438	5266	300 000	300 000
1,1	300 000	55 153	5515	562	65	300 000	300 000	300 000
1,5	300 000	75 838	7559	813	217	300 000	300 000	300 000

Antal konvergerade problem: 19 av 48.

Genomsnittligt antal iterationer för konvergerade problem: 18 467.

…………………………………

Slutsats: Antalet konvergerade problem var ungefär samma oavsett metod för startgissning. s0 som medelvärde av nodlasterna (C) konvergerade snabbast och ansågs bäst eftersom den till skillnad från normen (B) är oberoende av antalet element. s0 valdes som medelvärdet av nodlasterna (C).

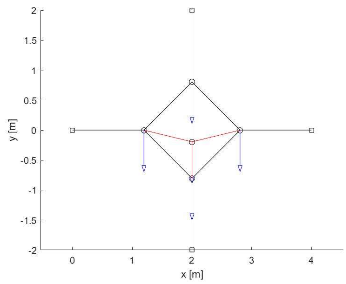
Bilaga C: FDM-tester av styvhetsreduktion i tryckta element

Reduktionsfaktor hred för styvhet i tryckta element

I denna bilaga uttrycks tiopotenser med MATLAB-notationen, e. Problemet ”prob1.m” (se Figur C-1) med FDM0322.m, hred enligt olika gissningsmetoder.

EA ("x") mellan 2 och 2e7, och py ("y") mellan -0,1 och -1e6. lu = 1, it = 300 000. damp = 0.

Tabellvärden representerar antal iterationer för olika kombinationer av EA, py och hred.



Figur C-1 – prob1.m som användes till hred-testerna.

A. hred = 1e-3

py/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7
1e-1	360	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1	70	360	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1e1	778	70	360	300000	300000	300000	300000	300000
1e2	263850	778	70	360	300000	300000	300000	300000
1e3	300000	263850	778	70	360	300000	300000	300000
1e4	300000	300000	263850	778	70	360	300000	300000
1e5	300000	300000	300000	263850	778	70	360	300000
1e6	300000	300000	300000	300000	263850	778	70	360

B. hred = 1e-4

py/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7
1e-1	223	546	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1	516	223	546	300000	300000	300000	300000	300000
1e1	5117	516	223	546	300000	300000	300000	300000
1e2	267788	5117	516	223	546	300000	300000	300000
1e3	300000	267788	5117	516	223	546	300000	300000
1e4	300000	300000	267788	5117	516	223	546	300000
1e5	300000	300000	300000	267788	5117	516	223	546
1e6	300000	300000	300000	300000	267788	5117	516	223

C. hred = 1e-5

py/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7
1e-1	2261	5438	5266	300000	300000	300000	300000	300000
1	5014	2261	5438	5266	300000	300000	300000	300000
1e1	50025	5014	2261	5438	5266	300000	300000	300000
1e2	300000	50025	5014	2261	5438	5266	300000	300000
1e3	300000	300000	50025	5014	2261	5438	5266	300000
1e4	300000	300000	300000	50025	5014	2261	5438	5266
1e5	300000	300000	300000	300000	50025	5014	2261	5438
1e6	300000	300000	300000	300000	300000	50025	5014	2261

D. hred = 1e-6

py/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7
1e-1	22722	1222	300000	52387	300000	300000	300000	300000
1	50017	22722	1222	300000	52387	300000	300000	300000
1e1	300000	50017	22722	1222	300000	52387	300000	300000
1e2	300000	300000	50017	22722	1222	300000	52388	300000
1e3	300000	300000	300000	50017	22722	1222	300000	52388
1e4	300000	300000	300000	300000	50017	22722	1222	300000
1e5	300000	300000	300000	300000	300000	50017	22722	1222
1e6	300000	300000	300000	300000	300000	300000	50017	22722

Tester för ännu mindre hred visade liknande mönster, men färre fall konvergerade.

....

Slutsats: Mindre hred är lämpligt för större styvheter. Sambandet är omvänt linjärt, så för en tio gånger högre styvhet krävs en tiondel så stor reduktionsfaktor. Större hred är lämpligt för större laster. Sambandet är linjärt, så en tio gånger större last kräver en tio gånger större reduktionsfaktor. Slutsatsen är att hred är på formen $hred = hk \cdot py/EA$ för någon konstant hk. Eftersom hred multipliceras med EA i tryckta element för att ge styvheten h blir det alltså $h = hred \cdot EA = hk \cdot py/EA \cdot EA = hk \cdot py$. Det är alltså lämpligare att använda sig av en konstant styvhet i tryckta element än en reduktionsfaktor för styvheten. Det för oss in i nästa test av konstant tryckstyvhet.

Val av hk för styvhet i tryckta element

Test 1: Antal konvergerade problem för olika hk

Problemen kördes med precis samma indata som s0-testerna, alltså prob1 med EA mellan 2 och 2e7 och lu mellan 0,7 och 1,5, totalt 8x6 = 48 problem. Tryckstyvheten sattes i samtliga fall till hk·mean(py).

hk	Antal konvergerade problem	Genomsnittligt antal iterationer för konvergerade problem
1e-1	28	19486
2e-2	29	24347
1e-2	31	27334
2e-3	33	21429
1e-3	32	27409
2e-4	29	25843
1e-4	29	33375
2e-5	28	83960
1e-6	0	-

Optimum ligger någonstans kring 2e-3. Ett mer detaljerat svar eftersöktes.

Test 2: Utökat test för olika hk

Ytterligare tester utfördes med samma indata, men dessutom för olika py mellan -1e-3 och -1e5 med tiopotensintervall, alltså totalt 8· 6· 9 = 432 problem. Resultatet blev följande.

hk	Antal konvergerade problem	% av 432
6e-3	171	39,6 %
5e-3	167	38,7 %
4e-3	194	44,9 %
3e-3	210	48,6 %
2e-3	210	48,6 %
1e-3	205	47,4 %
1e-4	196	45,4 %

Slutsats: hk = 2e3 ger mest konvergens, men ett större hk leder till ett större fel på grund av tryckspänningar. Avvägningen är svår att göra, vi valde hk = 1e-3.

Bilaga D: Analys av dämpningssamband

I denna bilaga uttrycks tiopotenser med MATLAB-notationen, E och e.

lu=0.7

s0 enligt mean(F), hred=1e-03·mean(F)

EA ("x") mellan 2 och 2e7, py ("y") mellan 0.1 och 1e6, och damp ("z"). lu=0.7

Max antal iterationer it = 300000

Problem konvergerar med dämpning

damp = 0

Problem konvergerar utan dämpning

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	38570	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	38570	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	38570	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	38570	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	38570	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	38570	300000	300000

6 av 60 konvergerade problem

damp = 100

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	17927	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	14579	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	37298	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

3 av 60 konvergerade problem

damp = 10

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	1802	180329	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	1613	179294	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	38455	143802	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	209351	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

7 av 60 konvergerade problem

damp = 1

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	193	18039	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	773	17927	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	38560	14579	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	37298	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

7 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-01

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	1813	180361	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	741	1802	180329	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	38569	1613	179294	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	38455	143802	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	209351	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

11 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-02

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	191	18043	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	741	193	18039	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	38570	773	17927	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	38560	14579	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	37298	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

11 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-03

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	1817	180361	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	300000	300000	1813	180361	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	38570	741	1802	180329	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	38569	1613	179294	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	38455	143802	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	209351	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

14 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-04

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	195	18043	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	300000	300000	191	18043	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	38570	741	193	18039	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	38570	773	17927	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	38560	14579	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	37298	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

14 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-05

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	1828	180376	300000	300000	300000
1,00E+00	300000	300000	300000	1817	180361	300000	300000	300000
1,00E+01	38570	300000	300000	1813	180361	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	38570	741	1802	180329	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	38569	1613	179294	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	38455	143802	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	209351	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

17 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-06

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	195	18044	300000	300000	300000
1,00E+00	300000	300000	300000	195	18043	300000	300000	300000
1,00E+01	38570	300000	300000	191	18043	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	38570	741	193	18039	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	38570	773	17927	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	38560	14579	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	37298	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

17 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-07

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	300000	1821	180368	300000	300000
1,00E+00	300000	300000	300000	300000	1828	180379	300000	300000
1,00E+01	38570	300000	300000	300000	1817	180361	300000	300000
1,00E+02	300000	38570	300000	300000	1813	180361	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	38570	741	1802	180329	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	38569	1613	179294	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	38455	143802	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	209351	300000	300000

20 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-08

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	300000	195	18041	300000	300000
1,00E+00	300000	300000	300000	300000	195	18044	300000	300000
1,00E+01	38570	300000	300000	300000	195	18043	300000	300000
1,00E+02	300000	38570	300000	300000	191	18043	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	38570	741	193	18039	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	38570	773	17927	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	38560	14579	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	37298	300000	300000

20 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-09

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	300000	300000	1819	180375	300000
1,00E+00	300000	300000	300000	300000	300000	1821	180358	300000
1,00E+01	38570	300000	300000	300000	300000	1828	180378	300000
1,00E+02	300000	38570	300000	300000	300000	1817	180361	300000
1,00E+03	300000	300000	38570	300000	300000	1813	180361	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	38570	741	1802	180329	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	38569	1613	179294	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	38455	143802	300000

22 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-10

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	300000	300000	195	18043	300000
1,00E+00	300000	300000	300000	300000	300000	195	18041	300000
1,00E+01	38570	300000	300000	300000	300000	195	18044	300000
1,00E+02	300000	38570	300000	300000	300000	195	18043	300000
1,00E+03	300000	300000	38570	300000	300000	191	18043	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	38570	741	193	18039	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	38570	773	17927	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	38560	14579	300000

22 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-11

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	300000	300000	300000	1820	180365
1,00E+00	300000	300000	300000	300000	300000	300000	1819	180370
1,00E+01	38570	300000	300000	300000	300000	300000	1821	180368
1,00E+02	300000	38570	300000	300000	300000	300000	1828	180378
1,00E+03	300000	300000	38570	300000	300000	300000	1817	180361
1,00E+04	300000	300000	300000	38570	300000	300000	1813	180361
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	38570	741	1802	180329
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	38569	1613	179294

23 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-12

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	300000	300000	300000	195	18047
1,00E+00	300000	300000	300000	300000	300000	300000	195	18047
1,00E+01	38570	300000	300000	300000	300000	300000	195	18041
1,00E+02	300000	38570	300000	300000	300000	300000	195	18044
1,00E+03	300000	300000	38570	300000	300000	300000	195	18043
1,00E+04	300000	300000	300000	38570	300000	300000	191	18043
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	38570	741	193	18039
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	38570	773	17927

23 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-13

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	1819
1,00E+00	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	1819
1,00E+01	38570	300000	300000	300000	300000	300000	300000	1819
1,00E+02	300000	38570	300000	300000	300000	300000	300000	1821
1,00E+03	300000	300000	38570	300000	300000	300000	300000	1828
1,00E+04	300000	300000	300000	38570	300000	300000	300000	1817
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	38570	300000	300000	1813
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	38570	741	1802

15 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-14

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	194
1,00E+00	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	195
1,00E+01	38570	300000	300000	300000	300000	300000	300000	195
1,00E+02	300000	38570	300000	300000	300000	300000	300000	195
1,00E+03	300000	300000	38570	300000	300000	300000	300000	195
1,00E+04	300000	300000	300000	38570	300000	300000	300000	195
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	38570	300000	300000	191
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	38570	741	193

15 av 60 konvergerade problem

Kommentar till tester:

Det observerade sambandet verkar följa $damp = k/(EA)^2$ för någon konstant k. Testkörningar för ett urval av konstanter ger följande resultat:

....

$damp = 1000/(EA)^2$

totalt antal konvergerade problem: 180 av 240

$damp = 1500/(EA)^2$

totalt antal konvergerade problem: 191 av 240

$damp = 2000/(EA)^2$

totalt antal konvergerade problem: 192 av 240

$damp = 2500/(EA)^2$

totalt antal konvergerade problem: 197 av 240

$damp = 3000/(EA)^2$

totalt antal konvergerade problem: 194 av 240

$damp = 4000/(EA)^2$

totalt antal konvergerade problem: 193 av 240

Testresultaten ger en optimal dämpning på 2500/(EA)^2 med avseende på antal iterationer.

lu=0.8

s0 enligt mean(F), hred=1e-03·mean(F)

EA ("x") mellan 2 och 2e7, py ("y") mellan 0.1 och 1e6, och damp ("z"). lu=0.8

Max antal iterationer it = 300000

Problem konvergerar med dämpning

Problem konvergerar utan dämpning

damp = 0

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	174246	130074	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	174106	131131	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	173919	131489	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	889	300000	300000	174838	131752	300000
1,00E+03	300000	300000	78031	889	300000	300000	174681	132505
1,00E+04	300000	300000	300000	78031	889	300000	300000	174953
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	78031	889	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	78031	889	300000

24 av 60 konvergerade problem

damp = 100

py/EA		2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	10271	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	8202	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	77550	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

3 av 60 konvergerade problem

damp = 10

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	1716	104480	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	1255	102790	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	77971	75194	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	123360	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

7 av 60 konvergerade problem

damp = 1

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	887	10271	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	78027	8202	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	77550	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

5 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-01

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	105512	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	1716	104480	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	78030	1255	102790	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	77971	75194	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	123360	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

10 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-02

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	11035	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	887	10271	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	78027	8202	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	77550	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

8 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-03

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	39579	106044	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	105426	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	1716	104480	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	78030	1255	102790	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	77971	75194	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	123360	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

14 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-04

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	116402	128110	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	12683	300000	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	887	10271	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	78027	8202	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	77550	300000	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

12 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-05

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	46036	**300000**	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	40393	107327	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	105104	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	889	1716	104480	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	78030	1255	102790	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	77971	75194	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	123360	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

17 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-06

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	200193	**300000**	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	115989	128286	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	10645	300000	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	889	300000	300000	300000	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	78031	887	10271	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	78027	8202	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	77550	300000	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000

15 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-07

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	175368	264460	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	45835	**300000**	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	39324	105741	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	889	300000	300000	106070	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	78031	889	1716	104480	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	78030	1255	102790	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	77971	75194	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	123360	300000	300000

21 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-08

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	174583	163257	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	200848	**300000**	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	116850	128160	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	889	300000	300000	11793	300000	300000
1,00E+03	300000	300000	78031	889	300000	300000	300000	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	78031	887	10271	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	78027	8202	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	77550	300000	300000

19 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-09

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	174522	133538	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	175600	264424	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	47136	**300000**	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	889	300000	300000	39569	105912	300000
1,00E+03	300000	300000	78031	889	300000	300000	106203	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	78031	889	1716	104480	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	78030	1255	102790	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	77971	75194	300000

24 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-10

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	176709	130856	77191	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	174537	163878	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	200340	**300000**	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	889	300000	300000	116501	128196	300000
1,00E+03	300000	300000	78031	889	300000	300000	12814	300000
1,00E+04	300000	300000	300000	78031	889	300000	300000	300000
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	78031	887	10271	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	78027	8202	300000

23 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-11

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	174455	130337	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	174080	133084	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	175462	265017	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	889	300000	300000	45738	**300000**	300000
1,00E+03	300000	300000	78031	889	300000	300000	39337	107645
1,00E+04	300000	300000	300000	78031	889	300000	300000	105745
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	78031	889	1716	104480
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	78030	1255	102790

26 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-12

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	175684	130190	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	174045	130780	76689	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	175300	163367	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	889	300000	300000	200599	**300000**	300000
1,00E+03	300000	300000	78031	889	300000	300000	117921	128065
1,00E+04	300000	300000	300000	78031	889	300000	300000	11181
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	78031	889	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	78031	887	10271

25 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-13

py/EA	2E+00	2E+01	2E+02	2E+03	2E+04	2E+05	2E+06	2E+07
1,00E-01	300000	300000	173921	130489	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	174088	130351	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	173996	133178	300000	300000
1,00E+02	300000	78031	889	300000	300000	177053	264831	300000
1,00E+03	300000	300000	78031	889	300000	300000	46905	**300000**
1,00E+04	300000	300000	300000	78031	889	300000	300000	41112
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	78031	889	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	78031	889	1716

24 av 60 konvergerade problem

damp = 1e-14

py/EA	**2E+00**	**2E+01**	**2E+02**	**2E+03**	**2E+04**	**2E+05**	**2E+06**	**2E+07**
1,00E-01	300000	300000	174415	129920	300000	300000	300000	300000
1,00E+00	889	300000	300000	174751	130746	300000	300000	300000
1,00E+01	78031	889	300000	300000	174250	130390	77222	300000
1,00E+02	300000	78031	889	300000	300000	175124	163619	300000
1,00E+03	300000	300000	78031	889	300000	300000	202805	**300000**
1,00E+04	300000	300000	300000	78031	889	300000	300000	117185
1,00E+05	300000	300000	300000	300000	78031	889	300000	300000
1,00E+06	300000	300000	300000	300000	300000	78031	889	300000

24 av 60 konvergerade problem

Kommentar till tester:

Sambandet är inte lika uppenbart för denna sammansättning av parametrar. Samtidigt verkar tidigare konstaterat samband $damp = 2500/(EA)^2$ i en utökad test inte minska antalet konvergerade problem för denna sammansättning av parametrar. Därmed förbättrar dämpning fortfarande funktionens robusthet generellt.

Bilaga E: Skalningstester

I denna bilaga uttrycks tiopotenser med MATLAB-notationen, e.

Verifieringsproblem1 med FDM2f, skalning 1 < f < 2,

EA ("x") mellan 2 och 2e11, py = 10, och lu ("y") mellan 0.6:0.2:1.4. Max antal iterationer = 300000

s0 enligt medelvärdesprincip, styvhetsreduktion hred=1e-3·mean(F), dämpning enligt damp=2500/(EA)^2

Tabellvärden representerar antal iterationer för olika kombinationer av EA, lu och f

....

f = unscaled

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
0,6	171312	168650	196323	196582	196517	196516	196516	196516	196515	196517	196515	196518
0,8	60347	8366	58031	59128	59153	59161	59161	59160	59161	59162	59163	59274
1	25331	1310	1039	1012	1012	1012	1012	1012	1012	1012	1012	1006
1,2	23407	1343	1223	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212
1,4	56137	1791	1430	1413	1413	1413	1413	1413	1413	1413	1413	1413

mean(it) 51833 — 60 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,0

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
0,6	32115	22555	25398	25496	25499	25498	25498	25498	25498	25498	300000	300000
0,8	26376	1712	23652	24227	24264	24265	24265	24265	24265	24265	24265	300000
1	25331	1310	1039	1012	1012	1012	1012	1012	1012	1012	1012	1006
1,2	22300	1273	1036	1012	1012	1012	1012	1012	1012	1012	1012	1012
1,4	26199	1311	1037	1013	1013	1013	1013	1013	1013	1013	1013	1013

mean(it) 25209 — 57 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,2

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
0,6	51953	11445	12237	12302	12301	12300	12300	12300	12300	300000	12301	12301
0,8	30843	1376	11358	11689	11708	11705	11705	11705	11705	11705	300000	300000
1	24714	1354	1224	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1213	1213
1,2	23407	1343	1223	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212	1212
1,4	22338	1374	1224	1213	1213	1213	1213	1213	1213	1213	1213	1213

mean(it) 21841 — 57 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,4

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
0,6	141839	6026	6610	6650	6644	6642	6642	6642	6642	6974	7024	6644
0,8	93816	1852	6116	6321	6326	6321	6321	6321	6321	6321	6322	300000
1	73211	1804	1437	1416	1412	1412	1412	1412	1412	1412	300000	300000
1,2	62575	1740	1434	1413	1413	1413	1413	1413	1413	1413	1413	1413
1,4	56137	1791	1430	1413	1413	1413	1413	1413	1413	1413	1413	1413

mean(it) 25070 — 57 av 60 konvergerade problem

Verifieringsproblem2 med FDM2f, skalning 1 < f < 2

EA ("x") mellan 2 och 2e11, py = 10, och lu ("y") mellan 0.7:0.2:1.5. Max antal iterationer = 300000

s0 enligt medelvärdesprincip, styvhetsreduktion hred=1e-3·mean(F), dämpning enligt damp=2500/(EA)^2

....

f = unscaled

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
0,7	300000	15338	6933	325	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
0,9	300000	2112	493	32	91	300000	300000	300000	300000	300000	300000	300000
1,1	300000	1112	408	337	331	330	331	331	331	332	331	331
1,3	300000	2460	682	650	639	643	643	643	643	643	643	643
1,5	300000	6141	988	939	915	924	925	925	925	925	925	925

mean(it) 100904 40 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,0

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
0,7	300000	1140	365	42	31	31	32	32	33	300000	34	34
0,9	300000	1066	223	35	30	30	30	30	30	30	30	30
1,1	300000	1016	364	232	227	227	227	227	227	300000	300000	300000
1,3	300000	985	431	326	323	323	323	323	323	300000	300000	323
1,5	300000	966	468	378	376	375	375	375	375	375	300000	300000

mean(it) 65230 47 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,2

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
0,7	300000	1477	148	74	70	70	70	70	70	70	70	70
0,9	300000	1466	335	247	234	235	227	228	228	228	228	228
1,1	300000	1388	494	445	435	429	429	430	430	430	430	430
1,3	300000	1247	571	539	530	531	531	531	531	531	531	531
1,5	300000	922	614	590	583	585	586	586	586	586	586	586

mean(it) 25422 55 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,4

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
0,7	300000	4094	233	149	142	141	141	141	141	141	141	141
0,9	300000	4024	560	476	449	434	436	437	437	438	448	455
1,1	300000	4007	726	672	650	659	631	633	660	660	643	654
1,3	300000	4004	807	766	746	745	747	747	747	747	747	747
1,5	300000	4004	853	817	794	804	805	805	805	805	805	805

mean(it) 25807 55 av 60 konvergerade problem

Verifieringsproblem3 med FDM2f, skalning 1 < f < 2

EA ("x") mellan 2 och 2e11, py = 10, lu ("y") mellan 60-140%*lu, Max antal iterationer = 300000

s0 enligt medelvärdesprincip, styvhetsreduktion hred=1e-3·mean(F), dämpning enligt damp=2500/(EA)^2

....

f = unscaled

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
60%	300000	300000	300000	300000	300000	260984	225383	213677	300000	300000	300000	300000
80%	300000	300000	300000	300000	300000	83319	44515	4625	8452	300000	300000	300000
100%	300000	300000	300000	300000	300000	26667	12753	2473	300000	300000	300000	300000
120%	300000	300000	300000	300000	300000	13046	2234	2795	3329	3753	300000	300000
140%	300000	300000	300000	300000	300000	30250	1035	2416	78	77	77	77

mean(it) 205700 22 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,0

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
60%	300000	300000	300000	300000	300000	15400	2203	4511	16690	20333	20586	20622
80%	300000	300000	300000	300000	300000	15483	2407	1007	56	54	1295	1295
100%	300000	300000	300000	300000	300000	15604	2512	2266	55	54	2956	2956
120%	300000	300000	300000	300000	300000	15712	1748	2733	2853	58	3279	3714
140%	300000	300000	300000	300000	300000	15791	1314	2889	3011	62	3709	300000

mean(it) 133420 34 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,2

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
60%	300000	300000	300000	300000	300000	45780	546	1088	6865	9751	9921	9948
80%	300000	300000	300000	300000	300000	45610	608	124	107	106	106	106
100%	300000	300000	300000	300000	300000	45661	637	120	103	102	102	102
120%	300000	300000	300000	300000	300000	45722	861	1254	101	100	100	100
140%	300000	300000	300000	300000	300000	45766	906	1559	100	99	99	99

mean(it) 129573 35 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,4

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
60%	300000	300000	300000	300000	300000	115694	680	432	2889	5234	5352	5371
80%	300000	300000	300000	300000	300000	115222	611	225	201	199	198	198
100%	300000	300000	300000	300000	300000	115343	842	216	193	191	190	190
120%	300000	300000	300000	300000	300000	115534	1165	213	188	186	186	186
140%	300000	300000	300000	300000	300000	115681	1295	1144	1142	1136	1137	1136

mean(it) 135167 35 av 60 konvergerade problem

Verifieringsproblem4 med FDM2f, skalning 1 < f < 2

EA ("x") mellan 2 och 2e11, py = 10, och lu ("y") mellan 60-140%*lu. Max antal iterationer = 300000

s0 enligt medelvärdesprincip, styvhetsreduktion hred=1e-3·mean(F), dämpning enligt damp=2500/(EA)^2

....

f = unscaled

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
60%	300000	23042	13811	12857	12875	14792	15025	15015	300000	300000	300000	300000
80%	300000	90230	37085	33221	24000	36612	37507	37039	300000	33064	33478	33047
100%	300000	284421	145445	96757	57298	50268	300000	300000	300000	300000	300000	300000
120%	300000	300000	300000	280115	168565	56811	13216	13216	13216	13216	13216	13216
140%	300000	300000	300000	300000	300000	107667	28976	28976	28976	28976	28976	28976

mean(it) 143387 38 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,0

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
60%	38092	24584	23301	23210	23204	23223	23235	23237	23237	23237	23232	23238
80%	34078	27138	22663	22939	22969	22977	22984	22986	22986	22986	22980	300000
100%	33354	22924	21683	18489	14915	11188	7399	3583	1049	1049	1049	300000
120%	18431	16806	1283	1215	1156	1139	1145	1146	1146	1146	1146	1146
140%	18844	16089	1306	1229	1214	1219	1219	1219	1219	1219	1219	1219

mean(it) 23225 58 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,2

lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
60%	35325	12630	11084	11062	11086	11155	11181	11185	11185	11185	11036	300000
80%	28872	12584	10747	11020	11034	11059	11076	11079	11080	11078	300000	11081
100%	25500	10278	10735	9187	7386	5552	3708	20146	1388	87269	300000	300000
120%	18165	8691	2004	1794	1520	1634	1641	1641	1641	1641	1641	1641
140%	17114	8313	2025	1811	1650	1702	1706	1706	1706	1706	1706	1706

mean(it) 29275 56 av 60 konvergerade problem

----

f = 1,4

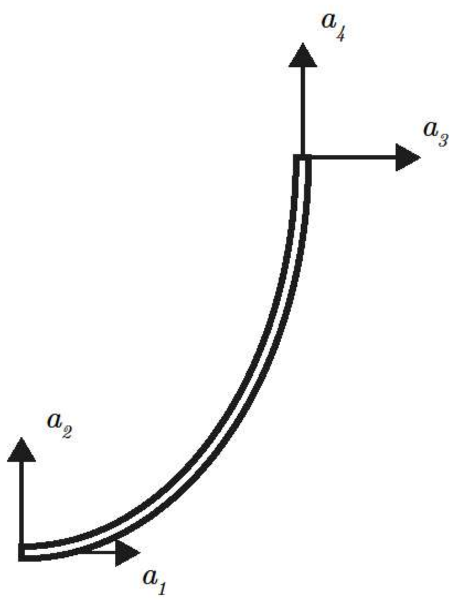
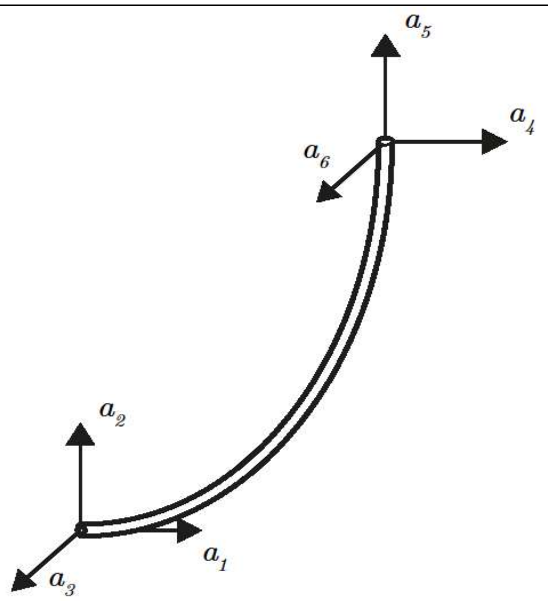
lu/EA	2e0	2e1	2e2	2e3	2e4	2e5	2e6	2e7	2e8	2e9	2e10	2e11
60%	80313	7017	5215	5279	5448	5716	5785	5794	5795	5795	300000	5186
80%	51983	7275	5561	5806	5822	5900	5941	5947	5947	5946	5832	5832
100%	39858	6713	6091	5366	4375	3368	2363	1881	1753	1736	300000	300000
120%	29872	6342	3222	2663	2394	2469	2475	2476	2476	2476	2476	2476
140%	26030	6399	3238	2678	2429	2498	2504	2504	2504	2504	2504	2504

mean(it) 22479 57 av 60 konvergerade problem

Bilaga F: CALFEM-manual

5.8 Cable elements

Cable elements are available for one-, two- and three-dimensional analysis with two different methods, Dynamic Relaxation Method (DRM) and Force Density Method (FDM).

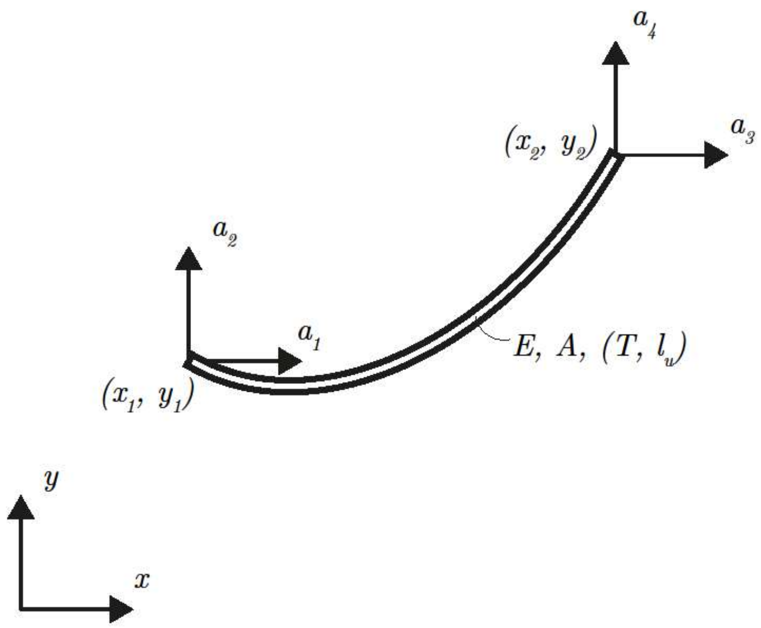
Cable elements	
 cable2drm cable2fdm	 cable3drm cable3fdm

Two-dimensional cable functions	
cable2drm	Compute deformations and normal forces using DRM
cable2fdm	Compute element lengths, normal forces and coordinates using FDM

Three-dimensional cable functions	
cable3drm	Compute deformations and normal forces using DRM
cable3fdm	Compute element lengths, normal forces and coordinates using FDM

Purpose:

Compute nodal deformations and normal forces for a cable element in (one and) two dimensions using DRM.



Syntax:

[a,T] = cable2drm(ex,ey,epa.edof,f,bc)

Description:

cable2drm provides the deformation vector **a** and the normal force vector **T** for one- & two-dimensional cable elements.

The input variables

the nodal coordinates in x- & y-directions

ex=$[x_1\ x_2]$ ey=$[y_1\ y_2]$

the modulus of elasticity E and cross section areas A

epa=$[E\ A]$

(with pre-tensions T)

epa=$[E\ A\ T]$

(with unstrained lengths l_u)

epa=$[E\ A\ T\ l_u]$

(if at least one of the variables are different for the elements the previous vectors must be written as follows)

epa = [E_1 A_1 E_2 A_2...E_m A_m]

epa = [E_1 A_1 T_1 E_2 A_2 T_2 ... E_m A_m T_m]

epa = [E_1 A_1 T_1 Lu_1 E_2 A_2 T_2 Lu_2 … E_m A_m T_m Lu_m]

(where m is the number of elements)

the element topology matrix (since two dimensional cables always have two degrees of freedom per node there will always be four dofs per element)

edof = [el_1 dof_1 dof_2 dof_3 dof_4
el_2 dof_1. . . . . dof_4
.
.
el_n dof_1. . . . . dof_4]

the applied forces
f= [f_{x1} f_{y1} f_{x2} f_{y2} …. f_{xn} f_{yn}] (where n is number of nodes)

the boundary conditions
bc = [dof_i a_i] (where *i* is the number of the node with a corresponding boundary condition)

Theory:

DRM starts from the second order differential equation for dynamic analysis

$$\boldsymbol{M\ddot{a}} + \boldsymbol{C\dot{a}} + \boldsymbol{Ka} = \boldsymbol{f}$$

where

$$\boldsymbol{M} = Mass\ matrix \qquad \boldsymbol{\ddot{a}} = acceleration\ vector$$
$$\boldsymbol{C} = Damping\ matrix \qquad \boldsymbol{\dot{a}} = velocity\ vector$$
$$\boldsymbol{K} = Stiffness\ matr \qquad \boldsymbol{a} = displacement\ vector$$
$$\boldsymbol{f} = load\ vector$$

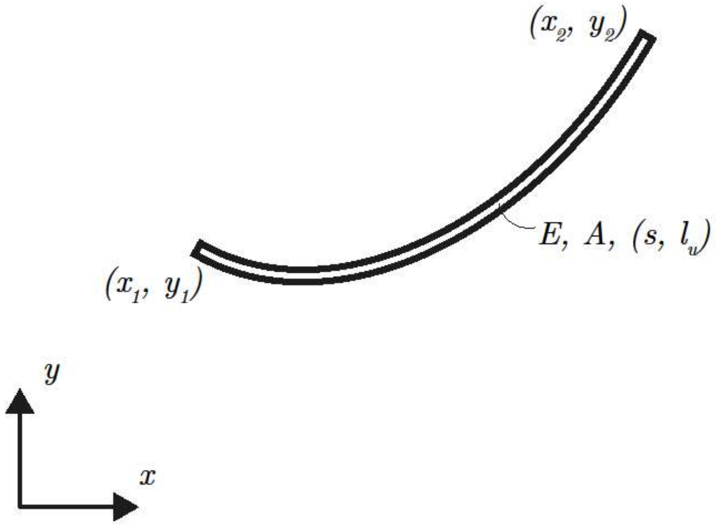
The velocity and displacements are calculated iteratively in every node for any time step and known forces, stiffness, masses and dampings. The dampings and masses are only fictitious and do not affect the resulting displacements. The purpose of the masses and dampings is to slow down the motion of the nodes caused by the initial force. The iterations are finished when the velocity of the nodes is zero or very close to zero so that the problem is static and described by:

$$\boldsymbol{Ka} = \boldsymbol{f}$$

As a result, the shape of the cables is now given by the displacements.

Purpose:

Compute strained element lengths and normal forces for a cable element in (one and) two dimensions using FDM.



Syntax:

[s,l,e,i,coord] = cable2fdm(Cs,x,xf,y,yf,z,zf,F,ep,show)

[s,l,e,i,coord] = cable2fdm(Cs,x,xf,y,yf,z,zf,F,ep)

Description:

cable2fdm provides the element force vector **s**, the element lengths vector **l**, the error **e**, the number of iterations **i**, and the node coordinates matrix **coord** for one- and two-dimensional cable elements.

The input variables consist of the global topology matrix 'Cs' and the plot frequency variable 'show', along with

x = $[x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T$ y = $[y_1\ y_2\ \dots\ y_n]^T$

xf = $\left[x_1^f\ x_2^f\ \dots\ x_n^f\right]^T$ yf = $\left[y_1^f\ y_2^f\ \dots\ y_n^f\right]^T$

px = $[p_{x1}\ p_{x2}\ \dots\ p_{xn}]^T$ F = [px py]

py = $\left[p_{y1}\ p_{y2}\ \dots\ p_{yn}\right]^T$

where x and y supply the coordinates of the free nodes, xf and yf supply the coordinates of the fixed nodes, px and py supply the external forces applied to the system, all in the x- and y-direction respectively.

The variable

ep = $[E\ A\ l_u]$

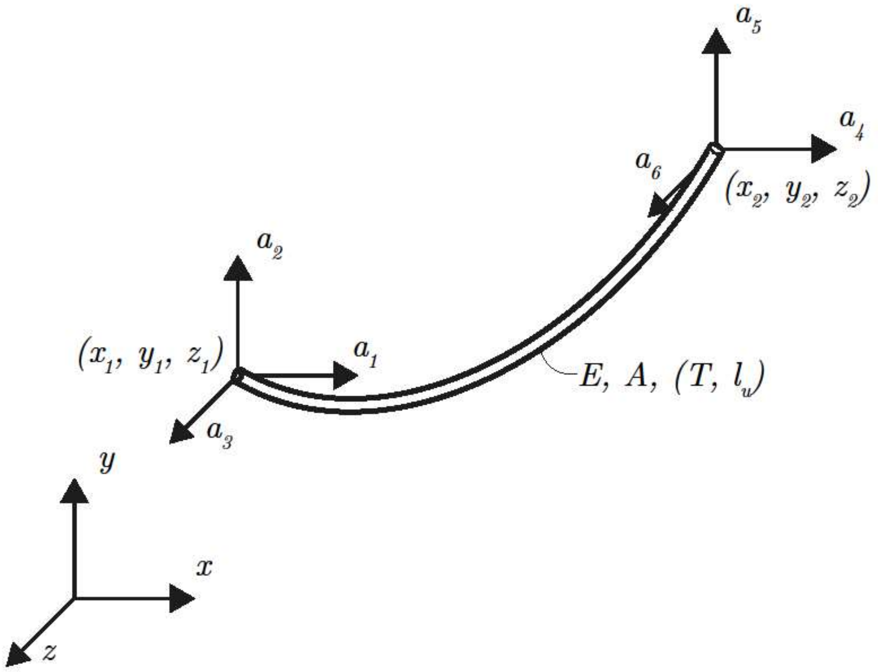
supplies Young's modulus E, the cross-sectional area A and the element lengths l_u.

Theory:

FDM is based on a transformation of non-linear equilibrium equations to a set of linear equations during the form-finding process. These linear equations are based upon a fraction $\boldsymbol{q}$, the so-called force density, that is the fraction between normal force and length. With $\boldsymbol{q}$ it is possible to establish an equilibrium matrix, where each of the structures elements only depends on the relation between its normal force and its length.

Purpose:

Compute nodal deformations and normal forces for a cable element in three dimensions using DRM.



Syntax:

[a,T] = cable3drm (ex,ey,ez,epa,edof,f,bc)

Description:

cable3drm provides the displacement vector **a** and the normal force vector **T** for one dimensional cable elements.

The input variables supply the elements with:

the nodal coordinates in x-, y- & z-directions.

ex = $[x_1\ x_2\ \dots\ x_n]$ ey = $[y_1\ y_2\ \dots\ y_n]$ ez = $[z_1\ z_2\ \dots\ z_n]$

epa and bc as in cable2drm

the element topology matrix (since three dimension cables always have three degrees of freedom per node there will always be six dofs per element)

edof = [el_1 dof_1 dof_2 dof_3 dof_4 dof_5 dof_6
el_2 dof_1. . . . . dof_4 dof_5 dof_6
. .
. .
el_m dof_1. . . . . dof_4 dof_5 dof_6]   (where m is the number of elements)

the applied forces

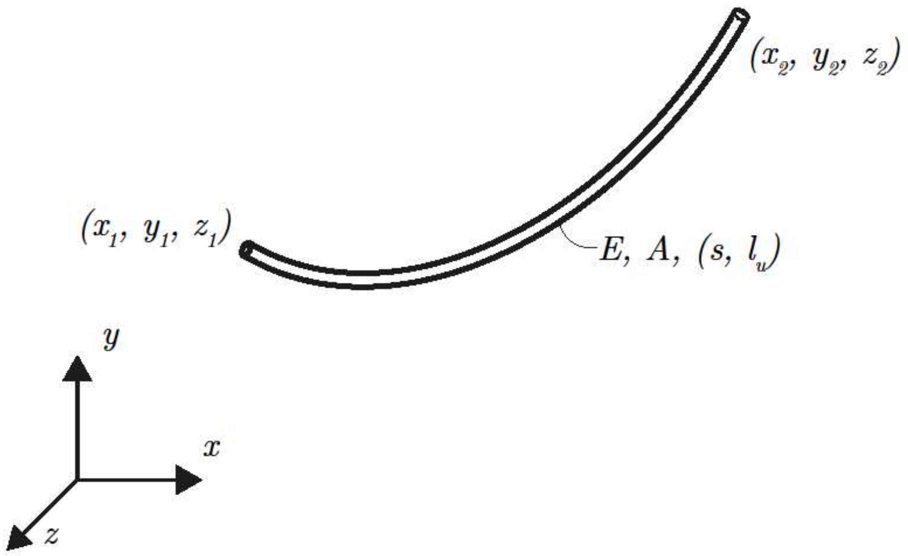
f = [f_{x1} f_{y1} f_{z1} f_{x2} f_{y2} f_{z2}….f_{xn} f_{yn}]   (where n is the number of nodes)

Theory:

The theory is the same as in the two-dimensional case.

Purpose:

Compute strained element lengths and normal forces for a cable element in three dimensions using FDM.



Syntax:

[s,l,e,i,coord] = cable3fdm(Cs,x,xf,y,yf,z,zf,F,ep,show)
[s,l,e,i,coord] = cable3fdm(Cs,x,xf,y,yf,z,zf,F,ep)

Description:

cable3fdm provides the element force vector **s**, the element lengths vector **l**, the error **e**, the number of iterations **i**, and the node coordinates matrix **coord** for three-dimensional cable elements.

The input variables consist of the global topology matrix 'Cs' and the plot frequency variable 'show', along with

x = $[x_1\ x_2\ ...\ x_n]^T$ y = $[y_1\ y_2\ ...\ y_n]^T$ z = $[z_1\ z_2\ ...\ z_n]^T$

xf = $\left[x_1^f\ x_2^f\ ...\ x_n^f\right]^T$ yf = $\left[y_1^f\ y_2^f\ ...\ y_n^f\right]^T$ zf = $\left[z_1^f\ z_2^f\ ...\ z_n^f\right]^T$

px = $[p_{x1}\ p_{x2}\ \cdots\ p_{xn}]^T$
py = $\left[p_{y1}\ p_{y2}\ \cdots\ p_{yn}\right]^T$ F = [px py pz]
pz = $[p_{z1}\ p_{z2}\ \cdots\ p_{zn}]^T$

where x, y and z supply the coordinates of the free nodes, xf, yf and zf supply the coordinates of the fixed nodes, px, py and pz supply the external loads on the system, all in the x-, y-, and z-direction respectively.

The variable

ep = $[E\ A\ l_u]$

is the same as in the two-dimensional case.

Theory:

The theory is the same as in the two-dimensional case.