Ослабленный синтез в гармоническом анализе и компактный синтез в теории операторов

И.Г.Тодоров, Л.Туровская и В.С.Шульман

1 Ослабленный синтез в гармоническом анализе

Напомним, вначале, как определяются (см. [4]) некоторые понятия гармонического анализа в случае некоммутативных групп (то есть, в отсутствие дуальной группы).

Пусть G — локально компактная группа. Обозначим через $\lambda : G \to \mathcal{B}(L^2(G))$, $s \mapsto \lambda_s$, ее левое регулярное представление: $(\lambda_s \xi)(s) = \xi(s^{-1}s)$. Тем же символом мы обозначаем и регулярное представление алгебры $L^1(G)$ на $L^2(G)$.

Приведенная групповая С*-алгебра $C_r^*(G)$ группы G — это замыкание по операторной норме алгебры $\lambda(L^1(G)) = \{\lambda(f) : f \in L^1(G)\}$; ее *-слабое замыкание $\mathrm{VN}(G)$ называется алгеброй фон Неймана группы G.

Алгеброй Фурье группы G называется алгебра $A(G)$ всех функций $u : G \to \mathbb{C}$ допускающих представление вида $u(x) = (\lambda_x \xi, \eta)$, где $\xi, \eta \in L^2(G)$. Это коммутативная регулярная банахова алгебра относительно нормы $\|u\| = \inf\{\|\xi\|\|\eta\|\}$. Ее идеалам сопоставляются множества нулей: $\mathrm{null}\, J = \{s \in G : u(s) = 0 \text{ для всех } u \in J\}$, и, напротив, замкнутым подмножествам $\delta \subset G$ сопоставляются идеалы $I(\delta) = \{f \in A(G) : f(s) = 0, s \in \delta\}$, $J_0(\delta) = \{f \in A(G) : f(s) = 0 \text{ в окрестности } \delta, \text{носитель } f \text{ компактен}\}$ — наибольший и наименьший идеалы с множеством нулей δ. Полагая $J(\delta) = \overline{J_0(\delta)}$, мы говорим, что δ является множеством синтеза, если $I(\delta) = J(\delta)$.

Чтобы определить понятие ослабленного синтеза, запишем это равенство, перейдя к аннуляторам в сопряженном пространстве: $I(\delta)^\perp = J(\delta)^\perp$. Пространство, сопряженное к $A(G)$, может быть отождествлено с $\mathrm{VN}(G)$ путем сопоставления каждому оператору $T \in \mathrm{VN}(G)$ функционала $u \mapsto (T\xi, \eta)$, где $u(s) = (\lambda_s \xi, \eta)$. Будем говорить, что замкнутое множество $\delta \subset G$ допускает ослабленный синтез, если

$$C_r^*(G) \cap I(\delta)^\perp = C_r^*(G) \cap J(\delta)^\perp.$$

В классическом случае $G = \mathbb{T}$ это означает, что все сосредоточенные на δ псевдофункции (распределения, коэффициенты Фурье которых стремятся к нулю), аппроксимируются мерами, сосредоточенными на δ. В частности, все множества единственности (т.е. не несущие ненулевых псевдофункций) допускают ослабленный синтез. Класс множеств единственности интенсивно изучался, поскольку он играет важную роль в теории тригонометрических рядов. В общем случае, говорят, что δ является множеством единственности (или U-множеством), если $C_r^*(G) \cap J(\delta)^\perp = \{0\}$.

Л.Шварц в знаменитой работе [9] показал, что сфера S^{n-1} не является множеством синтеза в группе $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$. С другой стороны, Варопулос [13] доказал, что S^2 допускает ослабленный синтез в $\mathbb{R}^3$. Оказывается, что на большие размерности этот результат не переносится:

Теорема 1.1 *(i) При $n \geq 4$ сфера S^{n-1} не является множеством ослабленного синтеза в $\mathbb{R}^n$.*

(ii) При $n \geq 6$ световой конус $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0\}$ не является множеством ослабленного синтеза в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство представляет собой модификацию метода Шварца. Замечая, что преобразование Фурье отображает $VN(\mathbb{R}^n)$ и $C_r^*(\mathbb{R}^n)$ на $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и, соответственно, $C_0(\mathbb{R}^n)$, можно строить необходимые псевдомеры в виде производных мер, получив, предварительно, оценки их преобразований Фурье. В случае (i) достаточно рассматривать стандартную меру на сфере; в случае (ii) мера подбирается более сложно.

Следующий результат усиливает известную теорему Мальявена [6]. Для коммутативных метризуемых групп он был получен Саеки [8].

Теорема 1.2 *Всякая недискретная локально компактная группа, имеющая открытую коммутативную подгруппу, содержит замкнутое множество, не являющееся множеством ослабленного синтеза.*

Доказательство теоремы разбивается в серию лемм, последовательно устанавливающих различные функториальные свойства класса всех групп, в которых нарушается ослабленный синтез; в частности то, что он содержит все прямые суммы, фактор-группы и открытые подгруппы своих элементов. Остается лишь воспользоваться классическим результатом [7] о существовании несинтезируемых псевдомер B на $\mathbb{T}$ с $\mathcal{F}(B) \in \ell^p(\mathbb{Z})$.

2 Компактный синтез

Пусть (X,μ) и (Y,ν) — стандартные пространства с мерами. Прямоугольниками в $X \times Y$ мы будем называть множества вида $\alpha \times \beta$, где $\alpha \subseteq X$ и $\beta \subseteq Y$ измеримы. Множество называется маргинально нулевым, если оно содержится в $(\alpha \times Y) \cup (X \times \beta)$, где α, β имеют нулевую меру. Подмножества $E, F \subseteq X \times Y$ *маргинально эквивалентны* ($E \simeq F$), если их симметрическая разность маргинально нулевая. Подмножество $E \subset X \times Y$ называется *ω-открытым*, если оно маргинально эквивалентно счетному объединению прямоугольников. Дополнения к ω-открытым множествам называются ω-замкнутыми [3].

Пусть $H_1 = L_2(X,\mu)$ и $H_2 = L_2(Y,\nu)$. Через $\mathcal{B}(H_1,H_2)$ обозначается пространство ограниченных линейных операторов из H_1 в H_2, а через $\mathcal{K}(H_1,H_2)$ ($\mathcal{C}_p(H_1,H_2)$) — пространство компактных операторов (соответственно, идеалы Шаттена).

Оператор умножения на $f \in L^\infty(X,\mu)$ в $L^2(X,\mu)$ обозначается M_f. Множество всех таких операторов образует максимальную абелеву самосопряженную алгебру операторов (masa) на $L^2(X,\mu)$. Для измеримого множества $\alpha \subseteq X$ мы обозначаем через χ_α его характеристическую функцию и полагаем $P(\alpha) = M_{\chi_\alpha}$. Подпространство $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}(H_1,H_2)$ называется *masa-бимодулем*, если $M_\psi T M_\varphi \in \mathcal{W}$ для всех $T \in \mathcal{W}$, $\varphi \in L^\infty(X,\mu)$ и $\psi \in L^\infty(Y,\nu)$.

Скажем, что ω-замкнутое подмножество $E \subseteq X \times Y$ *несет* оператор $T \in \mathcal{B}(H_1,H_2)$ (или T *сосредоточен на* E), если $P(\beta)TP(\alpha) = 0$, когда $(\alpha \times \beta) \cap E = \emptyset$. У любого $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H_1,H_2)$, существует *носитель*, то есть наименьшее (с точностью до маргинальной эквивалентности) ω-замкнутое множество $\operatorname{supp}\mathcal{M}$, несущее все операторы из $\mathcal{M}$ [3].

Для фиксированного E множество $\mathfrak{M}_{\max}(E)$ всех операторов, сосредоточенных на E, является w^*-замкнутым masa-бимодулем с носителем E. Оно является наибольшим из бимодулей с этими свойствами (откуда и обозначение). Согласно [11], существует и наименьший w^*-замкнутый masa-бимодуль с носителем E, он обозначается $\mathfrak{M}_{\min}(E)$. Если $\mathfrak{M}_{\min}(E) = \mathfrak{M}_{\max}(E)$, то, по определению, E *допускает операторный синтез.* Если же выполнено более слабое условие $\mathfrak{M}_{min}(E) \cap \mathcal{K}(H_1, H_2) = \mathfrak{M}_{max}(E) \cap \mathcal{K}(H_1, H_2)$, то E *допускает компактный синтез.* Аналогично определяются $\mathcal{C}_p(H_1, H_2)$-синтезируемые множества.

Примерами компактно-синтезируемых множеств являются операторные U-множества, изучению которых посвящена работа [10].

Теорема 2.1 *Пусть G — локально компактная группа со второй аксиомой счетности, такая что алгебра $A(G)$ имеет (не обязательно ограниченную) аппроксимативную единицу. Замкнутое подмножество $\delta \subset G$ допускает ослабленный синтез тогда и только тогда, когда множество $\delta^* := \{(x, y) : yx^{-1} \in \delta\} \subset G \times G$ допускает компактный синтез (в $\mathcal{B}(L_2(X, \mu), L_2(X, \mu))$, где μ — левая мера Хаара в G).*

Набросок доказательства. Отождествляя ядерные операторы с их ядрами, можно считать, что предуальное пространство $\mathcal{T}(G)$ к $\mathcal{B}(L^2(G))$ состоит из функций $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)g_i(y)$, где $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_2^2 < \infty$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_2^2 < \infty$. Для $f : G \to \mathbb{C}$ определим $N(f) : G \times G \to \mathbb{C}$ равенством $N(f)(s, t) = f(ts^{-1})$. Как показано в [2], из $u \in A(G)$ следует $N(u)\mathcal{T}(G) \subseteq \mathcal{T}(G)$. Для $\varphi \in \mathcal{T}(G)$ и $T \in \mathcal{B}(L^2(G))$ отображение $u \mapsto \langle T, \varphi N(u)\rangle$ определяет элемент $A(G)^*$, то есть, некоторый оператор $\mathcal{E}_\varphi(T)$ из $\mathrm{VN}(G)$. Можно показать, что если T компактен, то $\mathcal{E}_\varphi(T) \in C_r^*(G)$. При этом если $T \in \mathfrak{M}_{max}(\delta^*)$, то $\mathcal{E}_\varphi(T) \in I(\delta)^\perp$ для любого $\varphi \in \mathcal{T}(G)$. Поэтому если $\delta \subseteq G$ — множество ослабленного синтеза, и $T \in \mathfrak{M}_{max}(\delta^*) \cap \mathcal{K}(L^2(G))$, то $\langle T, N(u)\varphi\chi_{K\times K}\rangle = 0$ для $u \in I(\delta)$ и компактного $K \subseteq G$. Используя теорему об аппроксимации из [5], можно заключить, что $\langle T, \psi\rangle = 0$ для всех $\psi \in \mathcal{T}(G)$, исчезающих на δ^*, что, в силу [11], дает $T \in \mathfrak{M}_{min}(\delta^*)$.

Обратно, если $\delta^* \subset G \times G$ — множество компактного синтеза и оператор $S \in C_r^*(G)$ принадлежит $J(\delta)^\perp$, то $S \in \mathfrak{M}_{max}(\delta^*)$ и для любого компакта $K \subset G$ оператор $S_K := P(K)SP(K)$ компактен. Следовательно, $S_K \in \mathfrak{M}_{min}(\delta^*)$, откуда $P(K)(u\cdot S)P(K) = 0$ для любого $u \in I(\delta)$ с компактным носителем (здесь $u\cdot S$ — оператор из $\mathrm{VN}(G)$, определенный равенством $\langle u \cdot S, v\rangle = \langle S, uv\rangle$). Поэтому $u \cdot S = 0$, а значит $S \in I(\delta)^\perp$.

Теорема 2.1 работает "в обе стороны" — операторный подход часто удобнее спектрального, а результаты и конструкции гармонического анализа получают полезные операторные приложения. В частности, используя теорему 2.1 и теорему 1.1, легко показать, что пересечение двух множеств компактного синтеза может не допускать компактный синтез. Вопрос о компактной синтезируемости объединения двух множеств компактного синтеза открыт, так же как аналогичный вопрос для операторного и для спектрального синтеза (последний — это одна из известнейших проблем гармонического анализа).

Нашей следующей задачей является нахождение удобных критериев компактной синтезируемости.

Предложение 2.2 *Пусть E — ω-замкнутое подмножество в $X \times Y$. (i) Если любой компактный оператор, сосредоточенный на E, является *-слабым пределом операторов*

Гильберта-Шмидта, сосредоточенных на E, то E является множеством компактного синтеза.

(ii) При условии, что E является ω-замыканием своей ω-внутренности, верно и обратное; более того, из компактной синтезируемости следует в этом случае, что $\mathfrak{M}_{max}(E) \cap \mathcal{K}(H_1, H_2)$ является замкнутой по операторной норме линейной оболочкой операторов ранга 1, сосредоточенных на E.

Чтобы получить "структурные" критерии компактной синтезируемости, введем некоторые определения.

Подмножество $Q \subset X \times Y$ называется *элементарным*, если оно является объединением конечного числа прямоугольников (их можно считать непересекающимися): $Q = \cup_{i=1}^{n} \Pi_i, \quad \Pi_i = A_i \times B_i$. Такое множество определяет проектор $T \mapsto \sum_{i=1}^{n} P_{A_i} T P_{B_i}$ в $\mathcal{B}(H_1, H_2)$, который мы обозначим π_Q. Его образом является $\mathfrak{M}_{\max}(Q)$.

Будем называть множество $E \subset X \times Y$ *тонким*, если оно является пересечением убывающей последовательности элементарных множеств $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$, такой что $\|\pi_{Q_n}(T)\| \to 0$ для любого компактного оператора T. Множество, представимое в виде объединения тонкого и ω-открытого множества, называется множеством с тонкой границей.

Следующая теорема устанавливает, что множества с тонкой границей образуют "стабилизирующий" подкласс в классе множеств компактного синтеза.

Теорема 2.3 *Если $E_1 \subset X \times Y$ — множество компактного синтеза, а E_2 — множество с тонкой границей, то их объединение и пересечение — множества компактного синтеза.*

В доказательстве используется "принцип ε-компактности" из [3], позволяющий аппроксимировать операторы $T \in \mathfrak{M}_{max}(M) \cap \mathcal{K}$ операторами $\pi_Q(T)$, где Q — система элементарных проекторов, соответствующих множествам вида $D_1 \cup D_2$, причем D_1 исчерпывает $M \setminus \partial M$ снизу, D_2 стягивается к ∂M сверху.

Множества вида $E = \{(x, y) \in X \times Y : f_j(x) \leq g_j(y), j = 1, \ldots, n\}$, где $f_j : X \to \mathbb{R}$, $g_j : Y \to \mathbb{R}$ — измеримые функции, назваются множествами конечной ширины. Известно [11], что множества конечной ширины допускают операторный синтез; этот результат обобщает теорему Арвесона [1] о рефлексивности коммутативных решеток, порожденных конечным числом цепочек.

Предложение 2.4 *Всякое множество конечной ширины имеет тонкую границу.*

Основной момент доказательства состоит в построении системы элементарных покрытий со специальными свойствами "тонкости"для множеств вида $\{(x, y) : f(x) = g(y)\}$, где $f : X \to Z, g : y \to Z$ — отображения пространств с мерами, не постоянные на множествах ненулевой меры.

Применяя теорему 2.3, мы заключаем, что пересечение (и объединение) множества конечной ширины с множеством компактного синтеза являются множествами компактного синтеза. Прямой аналог этого результата для операторного синтеза (в части пересечений) неверен, как показывает [11, теорема 4.9].

Примеры множеств компактного синтеза, имеющие более сложную структуру, можно получить, используя теорему 2.1 и известные конструкции гармонического анализа.

В заключение укажем одно применение полученных результатов к теории линейных операторных уравнений "Фуглидова типа".

Теорема 2.5 *Пусть $p > 2$. Для любого натурального числа $m > (24p-12)/(p-2)$ существуют коммутативные семейства нормальных операторов $\{A_i\}_{i=1}^m$, $\{B_i\}_{i=1}^m$ и оператор $X \in \mathcal{C}_p$, такие что $\sum_{i=1}^m A_i X B_i = 0$, но $\sum_{i=1}^m A_i^* X B_i^* \neq 0$.*

Компактный оператор, различающий данные уравнения можно найти, когда $m \geq 25$.

Доказательство основано на построении псевдомеры Φ и многочлена p на $\mathbb{R}^n$, для которых $p\Phi = 0$, но $\bar{p}\Phi \neq 0$. Записывая $p(x-y)$ в виде $\sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\beta_i(y)$, мы далее полагаем $a_i = u\alpha_i$, $b_i = v\beta_i$, где u, v — правильно подобранные финитные функции. В качестве коэффициентов операторных уравнений берутся операторы умножения $A_i = M_{a_i}$, $B_i = M_{b_i}$, а в качестве различающего оператора — оператор $X = \mathcal{F}^{-1}M_{\mathcal{F}\Phi}\mathcal{F}M_c$, где $c \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Ограничения на m накладываются для получения нужной асимптотики преобразований Фурье псевдомер.

Заметим, что в классе $\mathcal{C}_2$ данные линейные операторные уравнения эквивалентны. Другие достаточные условия эквивалентности этих (и близких к ним) уравнений можно найти в [12].

Список литературы

[1] W.B. Arveson, Ann. Math. (2) 100(1974), 433-532

[2] M. Bożejko and G. Fendler, Boll. Un. Mat. Ital. A (6) 2 (1984), no. 2, 297-302.

[3] J.A. Erdos, A. Katavolos and V.S. Shulman, J. Funct. Anal. 157 No.2 (1998), 554-587

[4] P. Eymard, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), 181-236

[5] J. Ludwig and L. Turowska, J. Funct. Anal. 233 (2006), 206-227

[6] P.Mallyavin, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 1959, p. 85-92

[7] W.Rudin, Fourier analysis on groups, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990

[8] S.Saeki, Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975), 371-377

[9] L.Schwartz, C. R. Acad. Sci. Paris 227(1948), 424-426

[10] V.S. Shulman, I.G. Todorov and L. Turowska, J.Funct.Anal. 268 (2015), no.6, 1454-1508

[11] V.S. Shulman and L. Turowska, J. Funct. Anal. 209 (2004), 293-331

[12] V.S. Shulman and L. Turowska, J. Reine Angew. Math. 590 (2006), 143-187

[13] N.Th. Varopoulos, Proc. Cambridge Philos. Soc. 62(1966), 379-387.

Pure Mathematics Research Centre, Queen's University Belfast, Belfast BT7 1NN, United Kingdom, i.todorov@qub.ac.uk

Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and the University of Gothenburg, Gothenburg SE-412 96, Sweden, turowska@chalmers.se

кафедра высшей математики, Вологодский Государственный университет, Вологда, Россия, shulman.victor80@gmail.com