



## Studio för mekanik och hållfasthetslära

Tillverkning och utveckling av demonstrationsexperiment

*Kandidatarbete i Tillämpad mekanik*

**KRSTE KOMAROVSKI**

Institutionen för Tillämpad mekanik

*Avdelningen för Material – och beräkningsmekanik och avdelningen för Dynamik*

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Göteborg, Sverige, 2014

Kandidatarbete 2014:07



KANDIDATARBETE 2014:07

# Studio i mekanik och hållfasthetslära

Tillverkning och utveckling av demonstrationsexperiment

Kandidatarbete i Tillämpad mekanik

KRSTE KOMAROVSKI

Institutionen för Tillämpad mekanik  
*Avdelningen för Material – och beräkningsmekanik och Dynamik*  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
Göteborg, Sverige 2014

Studio i mekanik och hållfasthetslära  
Tillverkning och utveckling av demonstrationsexperiment  
Kandidatarbete i Tillämpad mekanik  
KRSTE KOMAROVSKI

© KRSTE KOMAROVSKI, 2014

Kandidatarbete 2014:07  
ISSN 1654-4676  
Institutionen för Tillämpad mekanik  
Avdelningen för Material – och beräkningsmekanik och avdelningen för Dynamik  
Chalmers tekniska högskola  
SE-412 96 Göteborg  
Sverige  
Telefon: + 46 (0)31-772 1000

Omslag: Bild av tillverkade demonstrationsexperiment för Studion i mekanik och hållfasthetslära

Tryckeri/Institutionen för Tillämpad mekanik  
Göteborg, Sverige 2014



# Abstract

The purpose of this project is to develop demonstration experiments in engineering mechanics and mechanics of materials at Chalmers University of technology.

The experiments will give the students practical understanding for basic phenomena in engineering mechanics and mechanics of materials.

At first interviews were made with teachers within their respective field. An overview of old demonstration experiments at the Department of Applied Mechanics were also made.

The problems that were relevant for this project and therefore prioritised were friction, axial forces and deformation in bars of a truss structure and lateral movement of a point loaded continuous beam.

In this project three different demonstration experiment were constructed: An inclined plane, a model of a truss and a continuous beam.

The function of the inclined plane were tested with the help of blocks, castors and wires.

The truss model makes it possible to observe axial deformations in the diagonal bars.

For the continuously mounted beam the results from the real experiments were compared to the result of the simulation by use of computer program Ansys.

The results corresponds with each other.

The experiments can be used for successful learning and as inspiration for coming projects.

# Sammanfattning

Syftet med projektet är att ta fram fler demonstrationsexperiment till en studio för mekanik och hållfasthetslära vid Chalmers tekniska högskola.

Experimenten ska ge studenterna praktisk förståelse för grundläggande fenomen inom mekanik och hållfasthetslära.

Först gjordes intervjuer med lärare inom respektive ämnen och det gjordes även en översyn av gamla demonstrationsmodeller vid institutionen för Tillämpad mekanik.

Problemen som prioriterades och var relevanta för detta arbete var fenomenet friktion, stångverkan i ett fackverk och utböjningen av en punktbelastad kontinuerligt upplagd balk.

I projektet konstruerades tre olika demonstrationsexperiment: **ett lutande plan, en fackverksmodell och kontinuerligt upplagd balk.**

Funktionen hos det lutande planet testades med hjälp av klossar, trissor och linor.

För den kontinuerligt upplagda balken jämfördes resultaten från de verkliga experimenten med simuleringsresultat från analys med programmet Ansys. Resultaten överensstämmer väl med varandra.

Modellen av stångverkan i ett fackverk gör det möjligt att tydligt se förkortning av tryckta diagonalstänger och förlängning av dragta diagonalstänger.

Experimenten kan användas för ett framgångsrikt lärande och som inspiration för kommande projekt.

# Innehållsförteckning

<b>1. Inledning</b> .....	<b>1</b>
1.1 Syfte .....	1
1.2 Problembeskrivning och val av problemområden.....	1
1.3 Metod .....	3
1.4 Avgränsningar .....	3
<b>2. Teoretiskt ramverk</b> .....	<b>4</b>
2.1 Statik.....	4
2.2 Dynamik .....	5
2.3 Hållfasthetslära.....	6
<b>3. Konstruktion av demonstrationsexperiment</b> .....	<b>7</b>
3. 1 Lutande plan.....	7
3. 2 Punktbelastat kontinuerligt upplagd balk.....	10
3. 3 Fackverk.....	12
<b>4. Jämförelse mellan beräkningar och mätningar för de tillverkade demonstrationsexperimenten</b> .....	<b>13</b>
4.1 Lutande planet .....	13
4.1.1 Statikförsök .....	13
4.1.2 Dynamikproblem på det lutande planet med kloss i rörelse.....	15
4.2 Stångverkan i ett fackverk .....	17
4.3 Nedböjning av kontinuerligt upplagd balk .....	18
<b>5. Diskussion</b> .....	<b>21</b>
5.1 Lutande plan.....	21
5.2 Stångverkan i ett fackverk .....	21
5.2.1 Vidareutveckling .....	21
5.3 Den kontinuerligt upplagda balken .....	22
<b>6. Referenser</b> .....	<b>23</b>
<b>7. Appendix (Ritningar och fotografier)</b> .....	<b>24</b>
7.1 Kontinuerlig punktbelastad balk .....	24
7.2 Illustrationer av balkmodell med två balkfack .....	28
7.3 Matlab kod för kontinuerligt upplagd balk i tre fack .....	30
7.4 Ansys Project .....	31





# 1. Inledning

Överallt ser vi exempel på ingenjörskonst t.ex. byggnader, vägar, broar, bilar, bussar, spårvagnar med mera där statik, dynamik och hållfasthetslära tillämpas. Allt detta är ingenjörskunnande eller så kallat god ingenjörskonst. Men för bra ingenjörskap behövs det utbildning där Chalmers och även Studion i Mekanik och Hållfasthetslära som är en del av den kan göra skillnad. Tidigare framtagna demonstrationsexperiment från kandidatarbeten och examensarbeten tas till vara och utvecklas vidare.

Under 2013 genomfördes ett kandidatarbete (Eliasson S. et al) där följande experiment togs fram och tillverkades för Studion för Mekanik och Hållfasthetslära:

- Låda för att illustrera linkrafter
- Spänningsoptik
- Flytta moment
- Gemensam tyngdpunkt
- Stabilitetsmodell
- Eulers knäckningsfall
- Förflyttning av last på balk, nedböjning
- Modell av betongbalk med armeringsjärn

Deras huvudämnen var att illustrera ”Låda för att illustrera linkrafter” och ”Förflyttning av last på balk”. De försökte använda det pedagogiska tillvägagångssättet CDIO som betyder ”Conceive – Design – Operate” som arbetsmetod.

I Studion för Mekanik och Hållfasthetslära fattas många demonstrationsexperiment som förklarar problem som uppkommer under utbildningen inom statik, dynamik och hållfasthetslära. Man kan tillverka experiment för varje område inom statik, dynamik eller hållfasthetslära och demonstrera för studenterna på lektionerna. Kombination av fysiska experiment och teori ger lättare inläring genom ”Learning by doing and thinking” för studenten.

## 1.1 Syfte

Syftet med denna studie är att ta fram demonstrationsexperiment som kan användas i undervisningen som är särskilt viktiga för att förklara fenomen inom statik, dynamik och hållfasthetslära som t.ex. *friktion på ett lutande plan, stångverkan i ett fackverk och nedböjning av en kontinuerligt upplagd balk*. Studion är utformad för att illustrera demonstrationsexperiment som har anknytning till grundutbildningen eller civilingenjörsutbildningen på Chalmers. Studion ger även möjlighet att väcka intresse hos studenterna för ämnena statik, dynamik och hållfasthetslära för en framgångsrik utbildning.

## 1.2 Problembeskrivning och val av problemområden.

Inom områdena statik, dynamik och hållfasthetslära finns det olika problem som är lämpliga för undervisningen för ingenjörstudier på universitetsnivå. I samråd med lärare har vi kommit fram till de vanligaste problem som studenter har vid problemlösning på övningarna och även på tentamen. Problemen är:

Statik: friktion, tyngdpunkt, moment, Newtons tredje lag och momentvektor.

Dynamik: Centrifugalkraft, masströghetsmoment, rörelsemängdsmoment och friktion vid rörelse.

Hållfasthetslära: Stångverkan i ett fackverk och nedböjning av en kontinuerligt upplagd balk.

Kombinationen av teori och praktik ger lättare inläring av problemet. Byggandet av demoexperiment gör Studion för mekanik och hållfasthetslära attraktiv. Statiken som ämne lär studenterna att förstå fenomenet av kroppar som befinner sig i vila medan dynamiken som ämne lär studenterna om kropparnas rörelse.

Pughmatrisen är ett verktyg med vars hjälp man på ett så objektivt och systematiskt sätt som möjligt kan välja den bästa av flera möjliga lösningar på ett problem. Metoden är generell till sin natur, och kan därför användas för att välja en lösning för många olika typer av problem, men används oftast inom ingenjörsområdet för att lösa design och konstruktionsproblem. Pughmatrisen kan även användas för att värdera investeringar, inköp eller andra situationer som innefattar olika valmöjligheter. Viktning av olika problem görs i en Pughmatris där vi kommer att se vilka problem som prioriteras. För varje problem sätts betyg 1 till 3. Det maximala betyg problemen kan få är 9.

Vid prioritering bedöms hur intressanta, relevanta och genomförbara experimenten är. Nedan visas matrisen.

<b>Tabell 1. Statik</b>				
	<b>Intressant</b>	<b>Relevant</b>	<b>Tillverkningsbart</b>	<b>Summa</b>
Friktion	3	3	3	9
Tyngdpunkt	2	2	2	6
Moment	2	2	1	5
Newtons tredje lag	1	2	3	6
Momentvektor	1	1	1	3
<b>Tabell 2. Dynamik</b>				
	<b>Intressant</b>	<b>Relevant</b>	<b>Tillverkningsbart</b>	<b>Summa</b>
Centrifugalkraft	1	1	1	3
Masströghetsmoment	2	1	1	4
Rörelsemängdsmoment	1	1	1	3
Friktion vid rörelse	2	1	2	5
<b>Tabell 3. Hållfasthetslära</b>				
	<b>Intressant</b>	<b>Relevant</b>	<b>Tillverkningsbart</b>	<b>Summa</b>
Stångverkan i fackverk	2	1	3	7
Nedböjning av kontinuerligt upplagd balk	3	3	3	9

Med hjälp av Pughmatrisen har problemområden identifierats som behövdes illustreras med hjälp av experiment. (Johannesson, Persson och Pettersson). Det som har fått flest poäng valdes som fenomenen **friktion, nedböjning av kontinuerligt upplagd balk** och **stångverkan i ett fackverk**.

### **1.3 Metod**

Pughmatrisen gav möjlighet att välja vilka demonstrationsexperiment som ska tillverkas.

I projektet fanns två färdiga fysiska modeller som var bortglömda och angripna av rost. De fysiska modellerna undersöktes. Genom prövning bestämdes rimliga mått och dimensioner.

Följande frågeställningar är här intressanta:

Vad är det för fenomen som demonstrationsexperimenten ska visa inom ämnet statik dynamik eller hållfasthetslära?

Vad är det för material som ska användas vid eventuella komponentbyten i demonstrationsexperimenten?

Vilka fästelement ska användas?

Följande funktionskrav ställdes:

Demonstrationsexperimenten ska kunna ses från stort avstånd i en föreläsningssal.

Detta kan ställa krav på bakgrundsfärgen.

Modellerna måste vara slitstarka och robusta.

Vad kan man tänka sig att tillverka för kringutrustning som ska tydliggöra fenomenen som ska observeras?

Behövs eventuell tillverkning av helt nya demonstrationsexperiment?

Vilka arbetsmetoder för tillverkningen behövs?

Metod för att konstruera? Idéer och tankar tog form i tillverkningsprocessen (från idé till prototyp). Vid den praktiska tillverkningen användes: sågning, borring, klippning, slipning, fräsning, brotschning, målning. Vid montering av modellerna användes skruvförband.

Metod för att utvärdera? Färdigställda demonstrationsmodeller testades och resultaten jämfördes med beräkningsresultat från programmet Matlab och Ansys.

### **1.4 Avgränsningar**

Projektet är avgränsat till ämnena statik, dynamik och hållfasthetslära. Alla problem som presenteras här är mest relevanta för studenter som läser Maskinteknik, men är även relevanta för studenter på andra ingenjörsutbildningar.

Alla demonstrationsexperiment som tillverkas kommer att användas i utbildningssyfte och kommer att testas av studenterna. Denna utvärdering ligger dock utanför kandidatarbetets omfattning.

De ekonomiska begränsningarna är 2000 kronor.

## 2. Teoretiskt ramverk

### 2.1 Statik

**Statik** är läran om system av kroppar som befinner sig i vila. Enligt Grahn & Jansson (2000: 1) behandlar statiken följande områden:

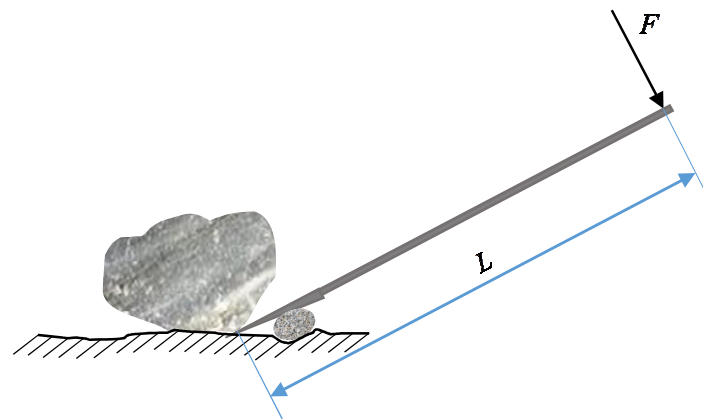
- Kraftgeometri som behandlar kraften som en vektor, elementaroperationer, krafter i två dimensioner och krafter i tre dimensioner.
- Jämviktslära som behandlar jämviktsvillkor, friläggning, tvådimensionella jämviktsproblem och tredimensionella jämviktsproblem.
- Masscentrum – tyngdpunkt
- Speciella tillämpningar

Vi behöver känna till några detaljer om statiken i den här rapporten för att närmare förklara fenomen som friktion, tyngdpunkt, moment, Newtons tredje lag och momentvektor.

**Friktion** är en tangentiell kraft mellan kontaktytor som uppkommer vid relativ rörelse av två föremål mot varandra. Friktionen beror bland annat på kontaktyternas skrovlighet. Friktionskoefficienten inom statiken betecknas med bokstaven  $\mu_s$  och den är något större än den kinematiska friktionskoefficienten som betecknas med bokstaven  $\mu_k$ .

**Tyngdpunkten** för en kropp eller en yta är den punkt där resultanten av tyngdkraftsfältet verkar.

**Momentet** är kraft multiplicerat med dess vinkelräta avstånd till momentpunkten. Med hjälp av moment kan man lyfta stora tyngder. I studion för Mekanik och Hållfasthetslära finns ett experiment som kan visa att ett rent moment kan förflyttas utan att ändras, så kallad translationsinvarians.



Figur 1. Moment

**Newtons tredje lag** eller lagen om verkan och motverkan och även reaktionslagen. Om vi påverkar en kropp med en viss kraft så motsätter sig kroppen med en lika stor motriktad kraft. Denna lag är mycket viktig exempelvis vid friläggning av en belastad kropp.

**Momentvektor** är momentet uttryckt i dess verkan kring vinkelräta axlar.

Enligt Grahn & Jansson (2000: 30) definieras kraftsystemets summa som *kraftsumma* eller

*totalkraften* och den betecknas med  $\sum \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$

Kraftsumman fås genom att addera de enskilda kraftvektorerna utan hänsyn till att de angriper i olika punkter.

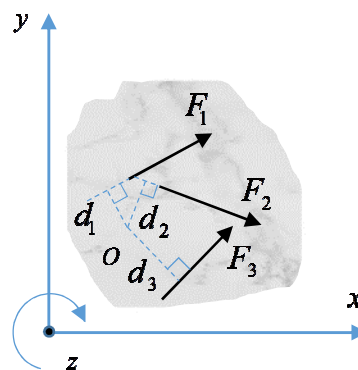
Momentsumman eller totalmoment med avseende på en axel  $o$ .

Momentsumman är  $\sum M_o = \sum_{i=1}^n M_{oi}$

$M_{oi}$  är kraftmoment med avseende på axel  $o$  för kraften  $\mathbf{F}_i$ .

Om vi antar positiv riktning medurs då beräknas momentet enligt figuren som:

$$\sum M_o = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 - F_3 \cdot d_3$$



Figur 2. Momentvektor

## 2.2 Dynamik är läran om system i rörelse.

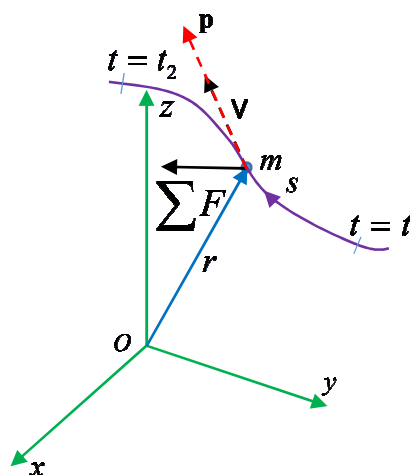
**Centrifugalkraft** eller tröghet som är en fiktiv kraft och ingen riktig kraft, kan vi uppleva när vi kör bil i en kurva. Vid bilåkning i en kurva har den egna kroppen sin naturliga tendens att fortsätta rakt fram i bantangentens riktning. Det blir konflikt med bilens styrda rörelse i en krökt bana. Kroppen vill separera sig från bilen. Orsaken till separationen i form av en kraft hänvisas till den fiktiva kraften "centrifugalkraften".

**Masströghetsmomentet** är ett mått på en kropps tröghet att rotera. Kan visualiseras med en sittande person på en roterande stol. Personens utsträckta armar ger större tröghet och lägre rotationshastighet medan indragna armar ger mindre tröghet och större rotationshastighet.

**Rörelsemängdsmoment** för en partikel är rörelsemängd multiplicerat med dess vinkelräta avstånd till momentpunkten. I translationsrörelse har vi begreppet rörelsemängd  $\mathbf{p}$ , som definieras som produkten av massa och hastighet  $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$ .

I rotationsrörelse och centralrörelse har vi ett motsvarande begrepp så kallat rörelsemängdsmoment som betecknas med bokstaven  $\mathbf{L}_o$ .

Beroende på om vi har centralrörelse eller rotationsrörelse får vi en aning olika uttryck för rörelsemängdsmomentet. Vi definierar partikelns rörelsemängdsmoment  $\mathbf{m}$  a  $\mathbf{p}$  punkten  $o$  som vektorn  $\mathbf{L}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .



Figur 3. Rörelsemängd, (Grahn & Jansson)

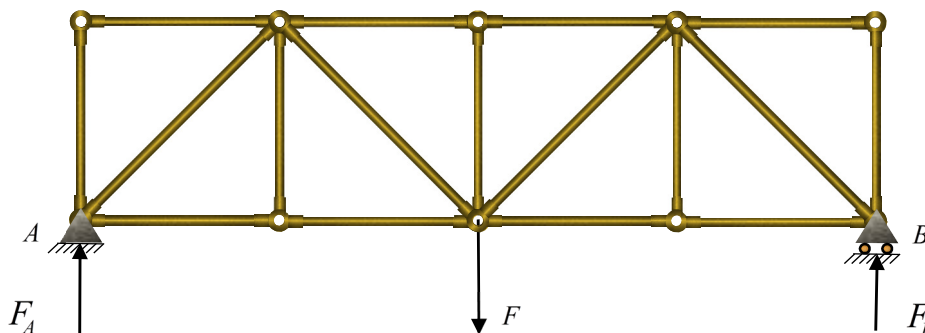
**Friktion vid rörelse.** För att rörelse hos en kloss ska uppstå så måste friktionskraften mellan kloss och underlag övervinnas. Om ett plan har vinkeln  $\alpha$  mot ett horisontalplan då blir det lättare att dra klossen nedåt.

Om vi ska dra klossen uppför det lutande planet så samverkar friktionskraften med tyngdkraften nedåt. Dessa nedåtriktade krafter måste övervinnas av dragkraften för att klossen ska röra sig uppåt.

Båda dessa rörelser kan lätt illustreras med det lutande planet.

**2.3 Hållfasthetslära** är en del av fysiken som beskriver förhållandet mellan statiska, dynamiska krafter och kropparnas eller konstruktionens deformerbarhet. Teorin är baserad på den klassiska mekaniken med Newtons rörelselagar, men innehåller också härledda lagar om specialfall. Vi behöver veta hur man gör beräkningar inom hållfasthetslära för att utföra rätt dimensionering av själva konstruktionen. Klen konstruktion utan säkerhet kan ge brott och brott kan ge ras för hela konstruktionen (Lundh 2000).

**Stångverkan i ett fackverk** är ett samspel mellan olika stänger förenade i knutar som ger en stabil och stark konstruktion. Stängerna i fackverket kan utsättas antingen för tryck- eller dragkrafter, som i sin tur ger upphov till tryck- eller dragspänningar i materialet.



Figur 4. Ny prototyp av en fackverksmodell

**Nedböjning av kontinuerligt upplagd balk.** Balken i figur 5 är upplagd på tre stycken stöd. Balken kan användas för att belysa fenomenet nedböjning. Verkliga nedböjningar av en kontinuerligt upplagd balk kan beräknas manuellt med hjälp av elementarfall och även med datorprogrammet Matlab eller programmet Ansys.



Figur 5. Nedböjning orsakad av punktlaster på en kontinuerligt upplagd balk

### 3 Konstruktion av demonstrationsexperiment

I detta projekt valdes ett **lutande plan**, **fackverk** och en **kontinuerligt upplagd balk** för tillverkning.

#### 3.1 Lutande plan

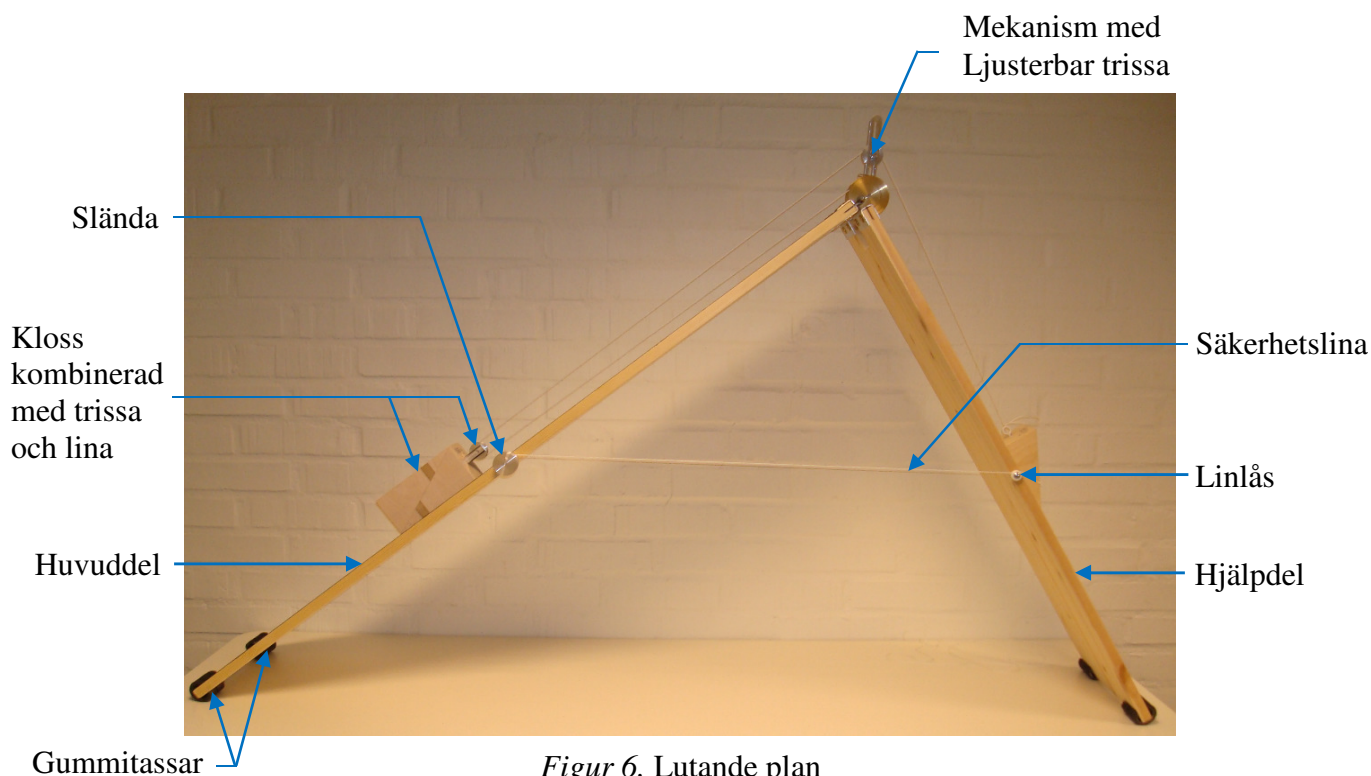
Tillvägagångsättet att bygga ett lutande plan gick till på följande vis.

Först sammanställdes en lista på funktionskrav för ett lutande plan.

1. För att kunna köra två klossar eller lådor nedåt på ett lutande plan med olika friktionskoefficienter samtidigt, så måste plankan göras tillräckligt bred.
2. Plankan ska dimensioneras i rätt längd för att studenterna ska se en klar och tydlig rörelse av klossar eller lådor från långt håll.
3. Variera lutningen på planet.
4. Planets ytor ska ha olika friktion d.v.s. skrovligheten hos ytan ska kunna varieras.
5. Det lutande planets delar ska enkelt kunna medföras till en föreläsningssal.

Av funktionskraven följer att plankan bör göras i två delar, en huvuddel och en hjälpdel. Båda delarna ska kunna användas som ett lutande plan.

Huvuddelen är den långa och hjälpdelen är den korta plankan. Klossar och/eller lådor ska kunna kopplas ihop med linor genom trissor i ett system.



Figur 6. Lutande plan

Dimensioner för huvuddelen valdes till 300×1400 mm och för hjälpdelen valdes 300×1200 mm (se figur 6).

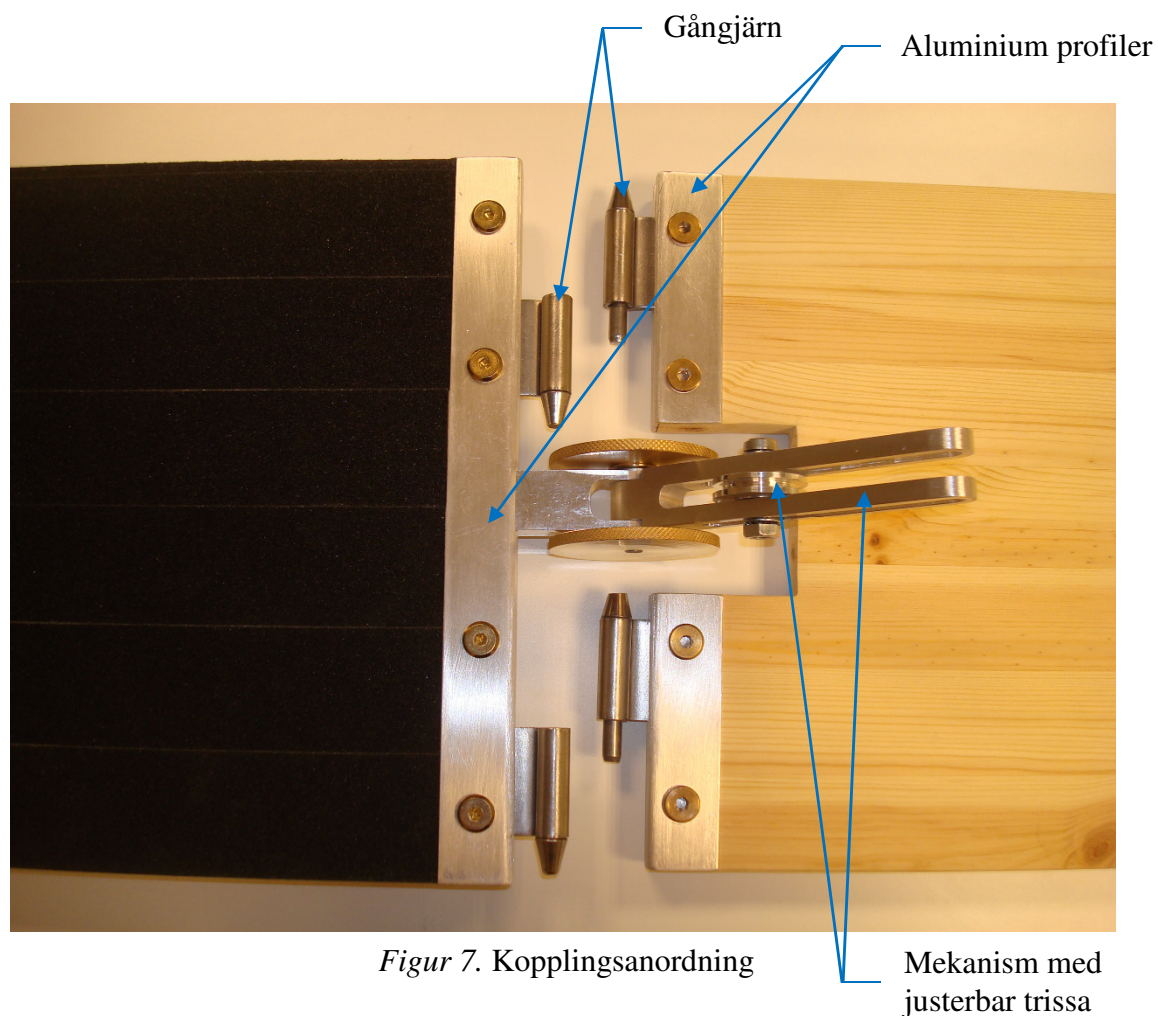
Problem uppstod angående hur plankorna skulle kopplas ihop? Flera tänkbara alternativ har därför undersökts.

Kopplingsdetaljen löstes genom att sätta gångjärn vid plankornas ändar.

Vid varje ände av de två plankdelarna på avståndet 35 mm från kanten borrades fyra hål med diameter 9 mm för att sätta fast gångjärnet. För att undvika sprickbildning vid

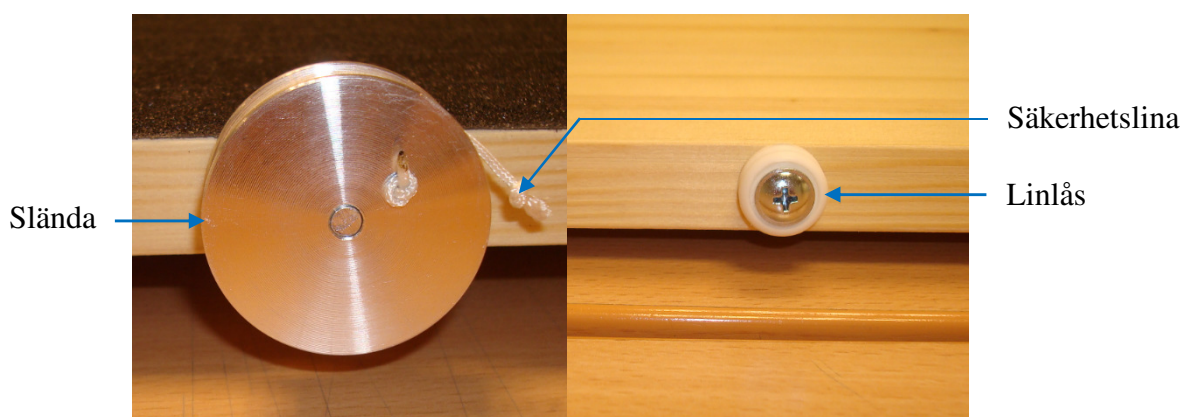


skruvning i furu så tillverkades aluminiumprofiler på båda sidor av plankorna för att förstärka materialet vid hålen (se figur 7 Uppkopplingsanordning).



Tassar med hög friktion tillverkades av gummihandtag och monterades med skruvar på plankändarna för att förhindra att plankorna glider isär när det lutande planet används (se figur 6 röda rektanglar).

En slända tillverkades och monterades på den långa plankan medan ett linlås monterades på den andra plankan. En säkerhetslina spänns mellan slända och linlås för att fixera det lutande planet i önskat läge. (se figur 6 och 8).



Plankans två sidor ska användas.

Från början hade plankan samma hyvlade ytor på båda sidor. På plankans ena sida önskades grövre struktur för att nå en hög friktionskoefficient. För att åstadkomma detta fanns två alternativ för ändamålet. Det ena alternativet var att använda tvåkomponents lackfärg som blandas med fin sand, och det andra alternativet var att använda dubbelhäftande halkskyddstejp gjord av sandpapper (se den svarta delen i figur 8). Alternativet med tvåkomponentsfärg har utgått på grund av miljövänliga skäl och tiden som det tar att applicera färgen.

Halkskyddstejp som klistrades fast valdes för att åstadkomma en högre friktionskoefficient.

Plankans funktionalitet utökades med hjälp av justerbara trissor. Då har vi möjlighet att dra klossar och lådor med linor.

Plankan kommer att lyftas vid ena änden och bilda vinkel  $\alpha$  med horisontalplanet (se figur 6).

En digital vinkelmätare (se figur 9) med magneter på undersidan används för att mäta planets lutning.



Figur 9. Digital vinkelmätare

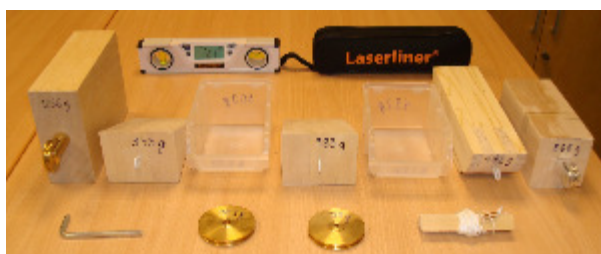
Vinkelmätaren ska klara av att sitta fast under användning på plankan utan att vi behöver hålla den, och efter användning ska den lätt kunna tas bort från plankan. För ändamålet monteras profilerat mjukt järn på plankan (se figur 10).



Figur 10. Profiler av mjukt järn

Följande utrustning för det lutande planet tillverkades: klossar med trissor och lösa trissor. Dessutom köptes två lådor och linor. (se figur 11).

Tillverkningsmetoderna som användes för att tillverka det lutande planet var: sågning, borrning, slipning limning, klippning, målning, fräsning, svarvning och brotschning.



Figur 11. Kringutrustning för lutande plan

### 3.2 Punktbelastad kontinuerligt upplagd balk

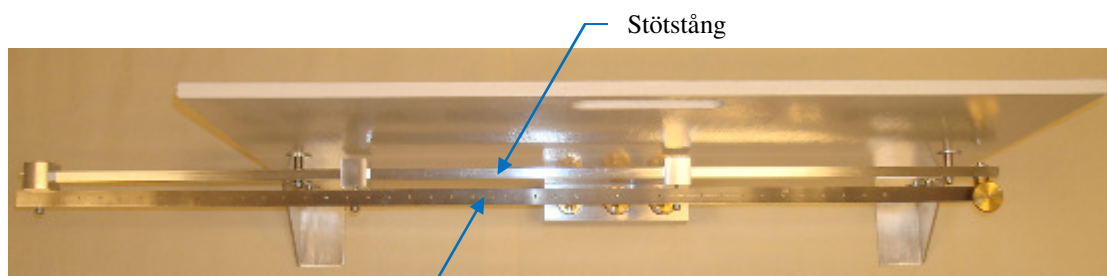
Idén för att bygga en **punktbelastad kontinuerligt upplagd balk** kom från handledaren Mats Ander och biträdande professor Mikael Enelund, som hittat ett gammalt, bortglömt, rostigt och dammigt demonstrationsexperiment i källaren.



Figur 12. Kontinuerlig upplagd balk i belastat läge

Vid tillverkningen av den kontinuerligt upplagda balken var det lättast att tillverka en helt ny punktbelastad kontinuerligt upplagd balk. Det enda som användes av den gamla modellen var själva balken.

Själva balken är illustrerad i figur 12 och figur 13.



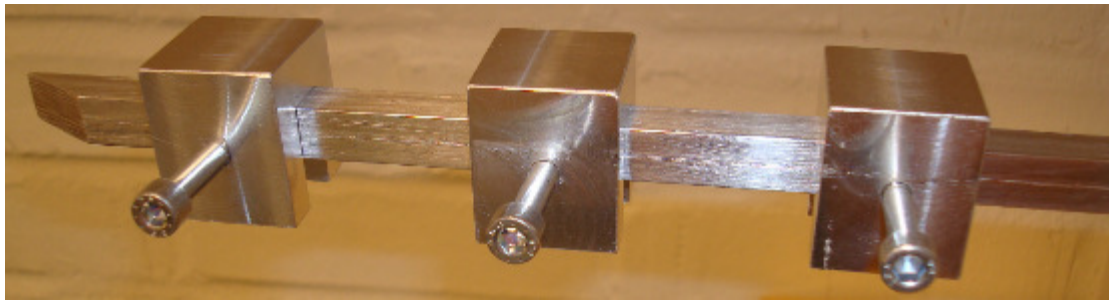
Figur 13. Balk

Först tillverkades en plywoodplatta som bearbetades med hål för handgrepp. Hål borrades även där utrustning till balken och stödben ska fästas fast på plattan för att uppnå en stabil konstruktion. Plattan både grund- och finmålades flera gånger för att få en bra bakgrundsfärg som möjliggör urskiljning av detaljerna på den punktbelastade balken från långt håll.

Stödben tillverkades av 2,5 mm tjock aluminiumplåt som bockades, förborrades, slipades och rengjordes för att de ska vara rena och blanka.

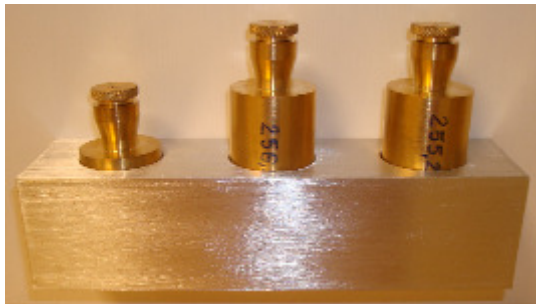
En lång aluminiumstödstång, nya rördelar som används som distans mellan plattan och stödstången tillverkades.

För stödstången tillverkades tre nya rörliga stöd. De tillverkades av aluminium med spår förenade med 5 mm skruvar som kan låsas på stödstången för önskat stödläge.



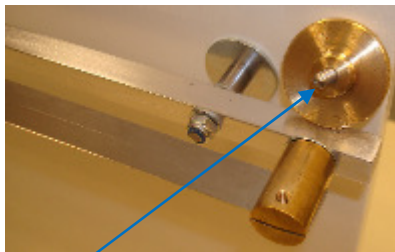
Figur 15. Rörliga stöd

För att åstadkomma nedböjningen tillverkades även vikter med skruvar som kan skruvas fast för hand på balken. För förvaring av vikterna tillverkades en vikthållare som är fastsatt på plattan. Detta visas i figur 12 och figur 16.

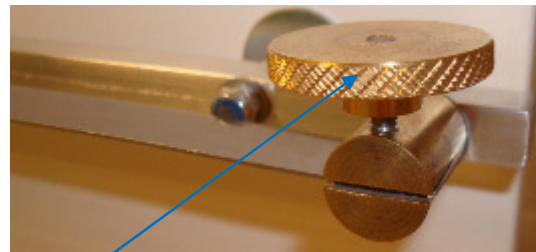


Figur 16. Vikthållare

En snabbskruv tillverkades för att kunna byta till en annan balk av ett annat material (se figur 17a och 17b).



Figur 17a. Snabb-skruv



Figur 17b. Snabb-skruv

## Montering

På plattan monterades först två stödben på vardera sidan med skruvar och stora brickor som gav en stabil konstruktion. Stången sattes fast på plattan med skruvar och stora brickor mellan rörelarna och plattan. På stången trädde de tre rörliga stöden in. Sist monterades balken och en vikthållare för förvaring av vikterna. Alla skruvar är insexskruvar med säkerhetsmuttrar (se figur 15 respektive 17).

### 3.3 Fackverk

Tillverkningen av fackverken genomfördes på följande sätt: Först tillverkades en platta av plywood som bearbetades med fräsning för handgrepp och borrarning av monteringshål där fackverken ska fästas. Dessutom sågades spår där stödbenen träs in i plattan för att åstadkomma en stabil konstruktion. Plattan både grund- och finmåladades för att få en bra bakgrundsfärg som möjliggör urskiljning av detaljerna på fackverken från långt håll.

Stödben tillverkades av 2,5 mm tjock aluminiumplåt som profilerades, förborrades, slipades och rengjordes för en professionell finish.

Fyra U-profiler av aluminium tillverkades och även två mindre profiler med spår av samma dimension som ska sitta fast på båda sidor av plattan. I spåren kommer fackverksknuten kunna röra sig horisontellt respektive vertikalt. För varje knut tillverkades lager som möjliggör fri knutrörelse. Fackverksstängerna förstärktes med hjälp av ett verktyg som tillverkades speciellt för ändamålet.

På varje sida tillverkades ett rör som sattes fast på en sida av stånghalvan medan andra stånghalvan var fri för att kunna röra sig in i röret och ut ur röret och på detta sätt visa förkortning eller förlängning av stången. Förkortningen motsvarar en tänkt tryckkraft och förlängningen en tänkt dragkraft i stången.

**Montering:** Först monterades alla stänger för respektive knut med lager, brickor och insexskruv. Systemet av stänger monterades på spåret av U-profilerna för respektive sida med brickor och muttrar. De knutpunkter som kommer att röra sig smörjdes för lätt rörlighet. U-profilen med systemet av stänger monterades på stödbenen på plattans båda sidor med insexskruvar och brickor. Efter det trädde den vitmålade plattan mellan U-profilerna, justerades och fästes med genomgående långa insexskruvar med brickor. Därigenom har vi fått en stabil och fungerande konstruktion för stångverka i fackverken. Slutligt utseende av fackverkets två sidor visas i figur 18 och figur 19.



*Figur 18. Fackverkets ena sida*



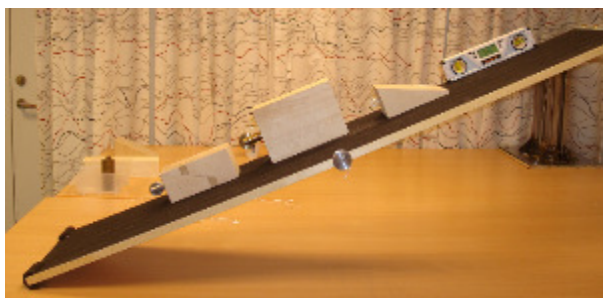
*Figur 19. Fackverkets andra sida*

## 4. Jämförelse mellan beräkningar och mätningar för de tillverkade demonstrationsexperimenten

### 4.1 Lutande planet

Det lutande planet ger oss möjlighet till beräkningar av friktionskoefficienter, klossarnas hastigheter och accelerationer, linkrafternas storlek, förhållandena mellan linornas utväxling. Här måste mekanikens lagar användas för att göra beräkningar med hjälp av differentialekvationer med tillhörande begynnelsevillkor och randvillkor.

**4.1.1 Statikförsök:** Vi kommer att testa på det lutande planet tre olika klossar för att bestämma friktionskoefficienten mellan kloss och plan (se figur 20). För att vi ska komma så nära som möjlig vinkeln  $\alpha$  precis innan klossen börjar glida gjordes sex försök. Medelvärdet på vinkeln  $\alpha$  från försöken bestämdes. Följande medelvärde för respektive kloss är sammanställt i tabellen nedan.



Figur 20. Lutande plan med tre olika klossar



Figur 21. Kloss 1 slät yta



kloss 2 halkskyddsytta

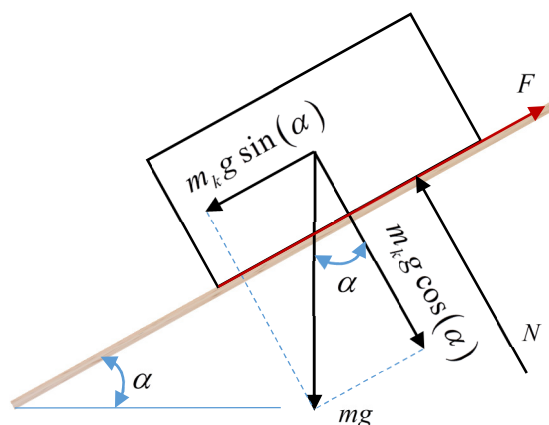


kloss 3 slät yta

Friläggningar för alla tre fall (se figur 22).

Lösning utförs bara för en kloss utförligt där man kan se hur man tar fram friktionskoefficienten:

**Klossar med olika massor på lutande plan med halkskyddsytta.**



Figur 22. Lutande plan med respektive kloss

$$\nearrow: -m_k g \sin(\alpha) + F = 0 \Rightarrow F = m_k g \sin(\alpha) \dots \dots \dots (1)$$

$$\nwarrow: N - m_k g \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow N = m_k g \cos(\alpha) \dots \dots \dots (2)$$

$$\mu_s \geq \frac{|F|}{|N|} = \frac{|m_k g \sin(\alpha)|}{|m_k g \cos(\alpha)|} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \dots (3)$$

<b>Ytans skrovlighet</b>		<b>Massan i gram</b>	
<b>Kloss 1</b>	Planhyvlad yta	566	
<b>Kloss 2</b>	Halkskyddsytta	355	
<b>Kloss 3</b>	Planhyvlad yta	1236	

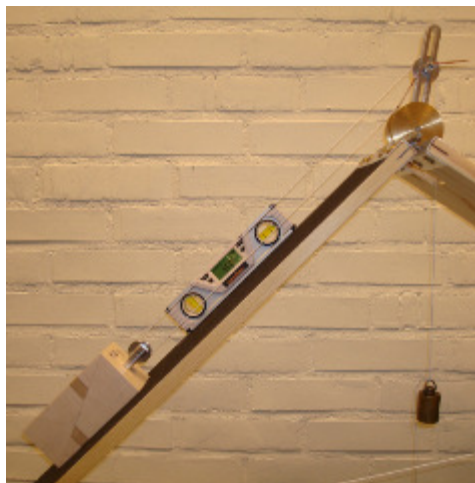
  

<b>Lutande plan</b>	Halkskyddsytta		Planhyvlad yta	
	$\alpha$	$\mu_s$	$\alpha$	$\mu_s$
<b>Kloss 1</b>	34°	0.675	22.2°	0.408
<b>Kloss 2</b>	45°	1.0	33°	0.649
<b>Kloss 3</b>	34,5°	0.687	21.9°	0.402

Kloss 1 och kloss 3 har samma skrovlighet d.v.s. friktionskoefficient och visar därför ungefär samma vinkel  $\alpha$ . Kloss 3 har störst vinkel och friktionskoefficient och detta beror på ytornas skrovlighet. Se tabellen.

### 4.1.2 Dynamikproblem på det lutande planet med kloss i rörelse

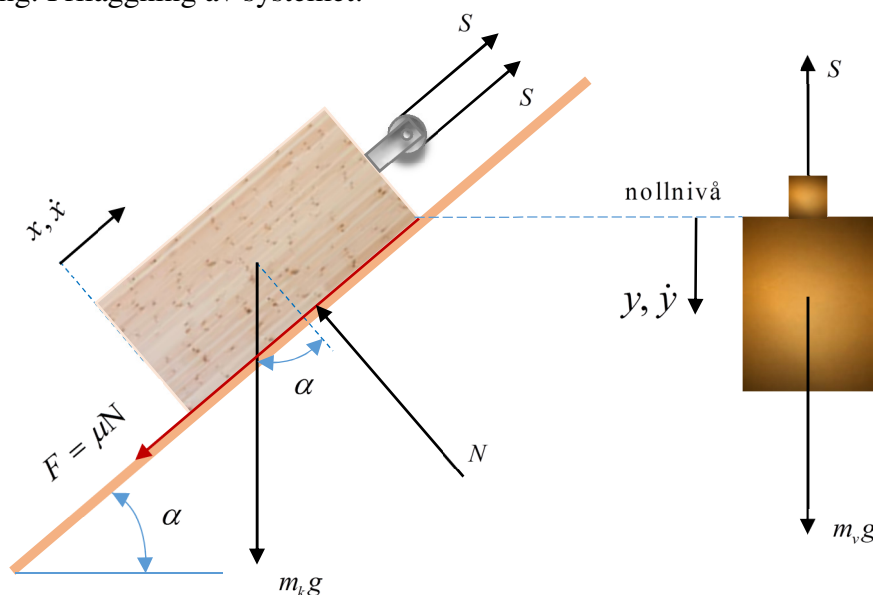
Två kroppar, klossen med massa  $m_k = 566 \text{ g}$  och vikten med massa  $m_v = 509.1 \text{ g}$  är arrangerade enligt figuren med lätta, friktionsfria trissor och linor. Vikten hänger fritt, medan klossen rör sig längs det lutande planet med lutning  $\alpha = 45^\circ$  och den kinematiska friktionskoefficienten som är framtagen genom test på lutande planet med friktionskoefficient  $\mu = 0.675$ . Systemets släpps från vila. Bestäm den hängande viktens fart när den rört sig sträckan  $h$  ! I vårt försök är sträckan  $h = 1 \text{ m}$ .



Figur 23. Kloss på lutande plan med

Anmärkning: Den statiska friktionskoefficienten  $\mu_s$  är samma som den kinematiska friktionskoefficienten  $\mu_k$  enligt testen som utfördes på det lutande planet med skrovligt yta.

Lösning: Friläggning av systemet:



Figur 24. Frilagd kloss och vikt på lutande plan

Kinematiskt samband:  $2x = y \Rightarrow x = \frac{y}{2} \dots (4)$  derivatan  $\dot{x} = \frac{\dot{y}}{2} \dots (5)$  och normalkraften

$$N = m_k g \cos(\alpha) \dots (6)$$

Energibetraktelse  $W^K = \Delta T + \Delta V$

$-\mu N x = \frac{1}{2} m_k \dot{x}^2 + m_k g x \sin(45) + \frac{1}{2} m_v \dot{y}^2 - m_v g y$  in med ekvation (4), (5) och (6) fås

$$-\mu m_k g \cos(\alpha) \frac{y}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} m_k g y + m_v g y = \frac{1}{8} m_k \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{y}^2 \Rightarrow$$



$$0.174 yg = 0.325 \dot{y}^2 \text{ Ansätt } y = h \Rightarrow \dot{y} = \sqrt{\frac{0.174 gh}{0.325}} = 0.731 \sqrt{gh}$$

Fysisk mätning av tyngden utfördes av en höjd  $h = 1 \text{ m}$  från golvet. Tiden det tog för vikten att falla 1 meter från nollnivån uppmättes till  $t = 1.3 \text{ s}$ . Vilket motsvarar hastigheten?

$$\dot{y} = 0.731 \sqrt{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m}} = 2.29 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ett annat sätt att lösa uppgiften gör enligt nedan.

Högra figuren ger:

$$\downarrow: m_v g - S = m_v \ddot{y} \Rightarrow S = m_v g - m_v \ddot{y} \dots (1)$$

Västra figuren ger:

$$\nearrow: 2S - \mu N - m_k g \sin(\alpha) = m_k \ddot{x} \dots (2)$$

$$\nwarrow: N - m_k g \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow N = m_k g \cos(\alpha) \dots (3)$$

Ekv (3) i (2)  $\Rightarrow$

$$2S - \mu m_k g \cos(\alpha) - m_k g \sin(\alpha) = m_k \ddot{x} \text{ och med } \ddot{x} = \frac{\ddot{y}}{2} \Rightarrow 2S - m_k g (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) = m_k \frac{\ddot{y}}{2}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{4S}{m_k} - 2g (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \dots (4)$$

$$\text{Ekv. (1) i (4)} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{4m_v g - 4m_v \ddot{y}}{m_k} - 2g (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$$

$$\ddot{y} = \frac{4m_v g}{m_k} - \frac{4m_v \ddot{y}}{m_k} - 2g (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \Rightarrow \ddot{y} + \frac{4m_v \ddot{y}}{m_k} = \frac{4m_v g}{m_k} - 2g (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$$

$$\ddot{y} (m_k + 4m_v) = 4m_v g - 2m_k g (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \Rightarrow \ddot{y} = \frac{4m_v g - 2m_k g (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{m_k + 4m_v}$$

$$\text{Integrera! } \int_0^y d\ddot{y} = \int_0^t \frac{4m_v g - 2m_k g (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{4m_v + m_k} dt \Rightarrow \dot{y} = \frac{4m_v g - 2m_k g (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{4m_v + m_k} [t]_0^t =$$

$$\dot{y} = \frac{4m_v g - 2m_k g (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{4m_v + m_k} t = \left. \begin{array}{l} m_k = 566 \text{ g,} \\ m_v = 509.1 \text{ g} \\ \mu = 0.675 \\ \alpha = 45^\circ \\ t = 1.3 \text{ s} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{4 \cdot 509.1 \cdot 9.81 - 2 \cdot 566 \cdot 9.81 (0.675 \cos(45) + \sin(45))}{4 \cdot 509 + 566} \cdot 1.3 = 3.42 \text{ m / s}$$

Skillnaden i resultaten kan bero på att trissor har sina massor som ger rotationströghet och är inte beaktad i ovanstående beräkningar.

## 4.2 Stångverkan i ett fackverk

Modellen har två stycken fackverk ett på varje sida.

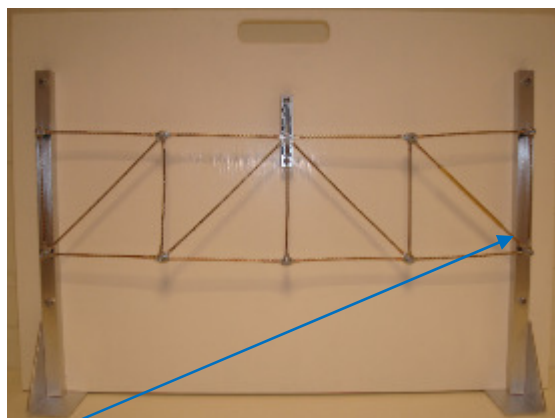
Fackverket som har helrenoverats är statiskt obestämt då fackverkets upplagsknutar bara kan röra sig horisontellt i U-profilens spår. Fackverkets mittknut kan bara röra sig vertikalt i sitt U-profilspår.

Tester utfördes med en vikt med massan  $m=1\text{kg}$ .

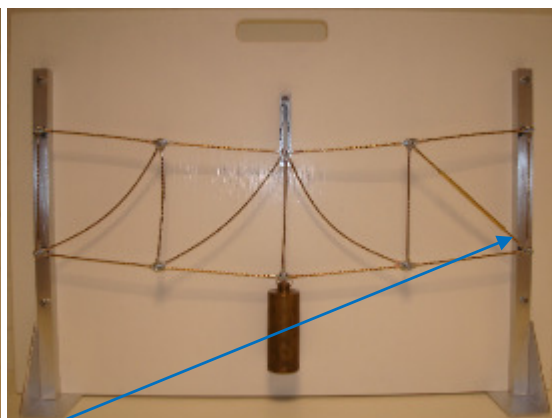
Fackverkets beteende visas och förklaras nedan.

Vi vill veta stångens beteende i förhållande till de krafter som belastar den. Stängerna i fackverket kan utsättas antingen för tryck- eller dragkrafter, som i sin tur ger upphov till tryck- eller dragspänningar i materialet. Detta kan vi se i figurerna nedan.

När vi applicerar en tyngd av 1 kg som ger en kraft av  $F = 9.81\text{ N}$  på mitten av fackverket (se figur 26) ser vi en tydlig förkortning av tryckta diagonalstänger. Jämför med det obelastade fackverket i figur 25. Detta betyder att diagonalstängerna utsätts för tryckspänningar. Medan stången med röret förkortas.



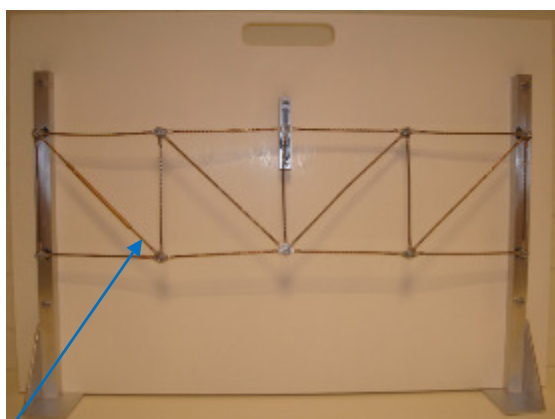
Figur 25. Diagonalstång i obelastat läge



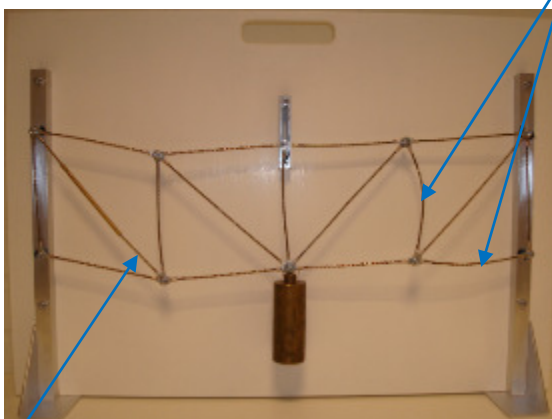
Figur 26. Förkortning av diagonalstång i belastat läge

Fackverket i figur 28 visar istället förlängning av dragna diagonalstänger vid

Tryckta vertikala och horisontella stänger



Figur 27. Diagonalstång i obelastat läge



Figur 28. Förlängning av diagonalstång i belastat läge

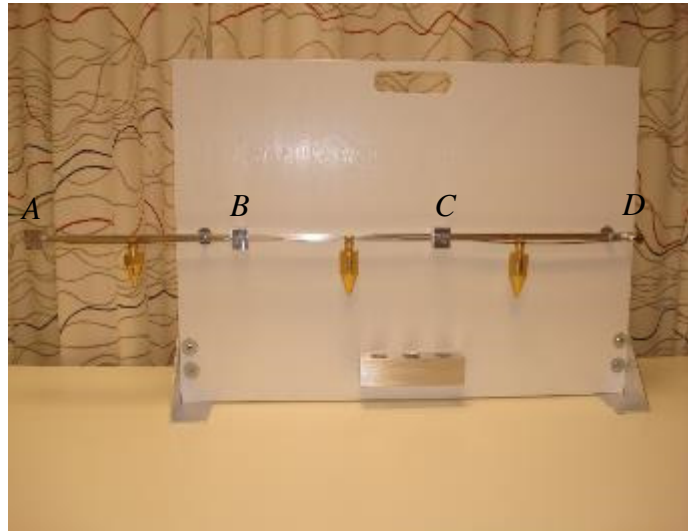
motsvarande belastning och betyder att där verkar dragspänningar. Vi ser också att den vertikala och den horisontella stången i figur 28 är utsatta för tryckkrafter jämfört med det obelastade fackverket i figur 27.

### 4.3 Nedböjning av kontinuerligt upplagd balk

Den **kontinuerligt upplagda balken** är ett demonstrationsexperiment som ger oss möjligheter att testa våra antaganden, göra mätningar, jämföra beräknade resultat och se allt detta fysiskt med våra ögon. Demonstrationsmodellen består av en platta på vilken all kringutrustning som stödben, balk, balkstång med tre rörliga stöd, vikter och vikthållare är monterade.

Fenomenet nedböjning av en kontinuerligt upplagd balk är viktig för kunna dimensionera rätt både ur säkerhets- såväl som ekonomisk synpunkt.

Jämförelsen gjordes när balken blev belastat med tre olika vikter som är 148, 256.2 och 255 gram. Se figur 29.



Figur 29. Kontinuerlig upplagd balk i belastat läge

Ansys är ett kommersiellt finita element program som bland annat har balkelement för modellering och analys av kontinuerliga balkar (Ansys Project). Användaren anger vilka laster som verkar på balken, och var de är placerade. När programmet Ansys exekveras beräknas alla reaktionskrafter, tvärkrafter, snittmoment. Programmet ritar även tvärkraftsdiagram, momentdiagram och nedböjningsdiagram.

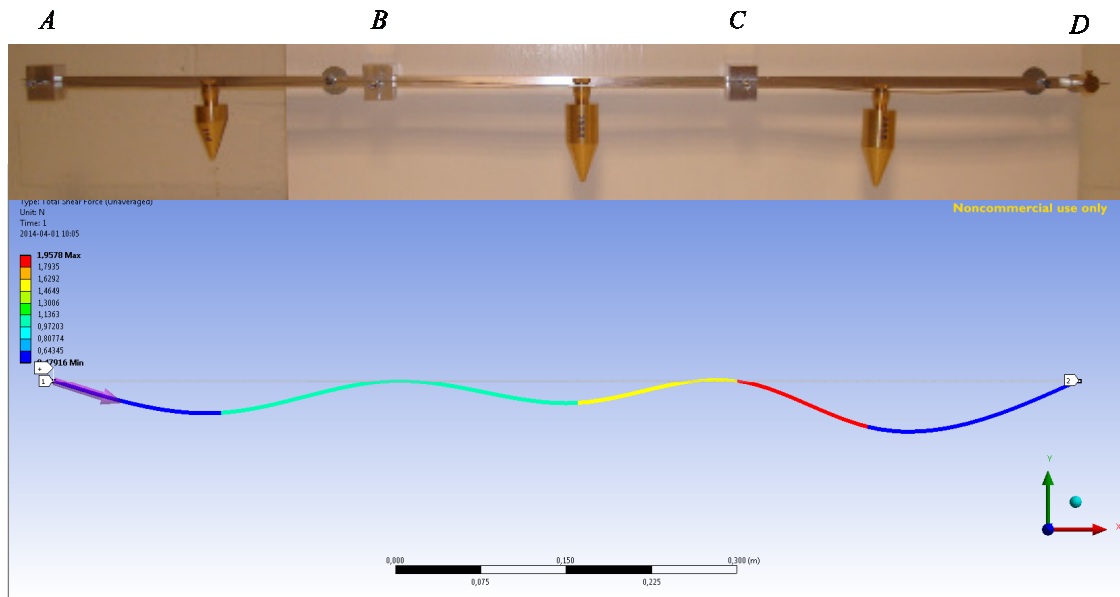
Maximal tvärkraft är  $1.96 \text{ N}$  på avståndet  $667 \text{ mm}$  från stöd A och maximalt böjmoment är  $0.124 \text{ Nm}$  på avståndet  $600 \text{ mm}$  från stöd A.

Nedböjningen mättes i förhållande till balkens centrumlinje då balken var obelastad. Vid belastning mättes den maximala nedböjningen till  $5.7 \text{ mm}$ .

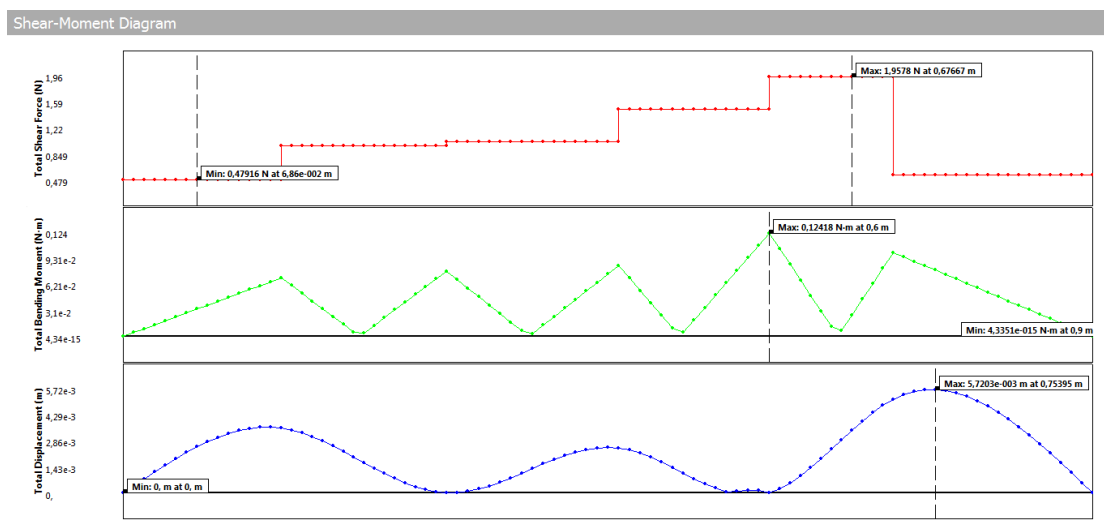
Programmet Ansys visar maximal nedböjning  $\delta=5.72 \text{ mm}$  på avståndet  $774 \text{ mm}$  till höger om stöd A. Se figur 31.

Nedböjningen i ytterfacket är större än nedböjningen i mittfacket. Detta fås på grund av balken i mittfacket är styvare än balkdelarna i ytterfacket på grund av den kontinuerliga uppläggnings över mellanstöden.

Detta kan vi observera även i den verkliga mätningen (se figur 30).



Figur 30. Jämförelse av verkliga nedböjningar och nedböjningsdiagram ritad av Ansys programmen



Figur 31. Tvärkraftsdiagram, momentdiagram och nedböjningsdiagram från analys med Ansys programmet

Tvärkrafts-data, moment-data och nedböjnings-data representerat i tabellen nedan:

<i>Avstånd från infästet i mm</i>	<i>Tvärkraft i N</i>	<i>Böjmoment i Nmm</i>	<i>Nedböjning i mm</i>
<i>A = 0</i>	<i>0.48</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>68.6</i>	<i>0.48</i>	<i>32.9</i>	<i>2.55</i>
<i>147</i>	<i>Ej definierad</i>	<i>70.4</i>	<i>3.58</i>
<i>213.9</i>	<i>0.97274</i>	<i>5.3242</i>	<i>1.99</i>
<i>B = 300</i>	<i>Ej definierad</i>	<i>78.392</i>	<i>0</i>
<i>380</i>	<i>1.0216</i>	<i>3.3399</i>	<i>1.3472</i>
<i>460</i>	<i>Ej definierad</i>	<i>85.072</i>	<i>2.4917</i>
<i>530</i>	<i>1.4947</i>	<i>19.554</i>	<i>0.79161</i>
<i>C = 600</i>	<i>Ej definierad</i>	<i>124.18</i>	<i>0</i>
<i>657.5</i>	<i>1.9578</i>	<i>11.608</i>	<i>2.4123</i>
<i>715</i>	<i>Ej definierad</i>	<i>100.96</i>	<i>5.1885</i>
<i>773.4</i>	<i>0.54574</i>	<i>69.08</i>	<i>5.5371</i>
<i>D = 900</i>	<i>0.54574</i>	<i>0</i>	<i>0</i>

## 5. Diskussion

### 5.1 Lutande plan

Med hjälp av det lutande planet har vi beräknat statisk friktionskoefficient.

Vinkeln  $\alpha$  avläses innan klossen börjar glida (med hjälp av vinkelmätaren). När det gäller den kinematiska friktionskoefficienten förväntas den vara mindre än den statiska vilket också har visats.

För lutande plan med skrovlig yta gav kloss 2 högst friktionskoefficient  $\mu=1.0$  medan kloss 1 och 3 som har olika massor och olika friktionsarea under proven visade ungefär samma friktionskoefficient  $\mu=0.675$  respektive  $\mu=0.687$ .

Även för lutande plan med planhyvlad yta gav högst friktionskoefficient kloss 2 med  $\mu=0.649$  medan kloss 1 och 3 gav friktionskoefficient  $\mu=0.408$  respektive  $\mu=0.402$ .

**Slutsats:** Friktionskoefficienten  $\mu$  är en materialkonstant som är beroende av egenskaperna hos de två ytorna som är i kontakt med varandra.

Många klossar och trissor har tillverkats. Även lådor och linor har köptes in som resurser för experiment.

Med dessa resurser kan man utforska många dynamiska problem med kombinationer av trissor, linor och tyngder.

För ökad funktionalitet skulle det ha varit bra om man tillverkar en justerbar stång med mekanism som kan lyfta planet sakta med hjälp av vevning eller med en domkraft. Detta får bli arbete för nästa kandidatarbete.

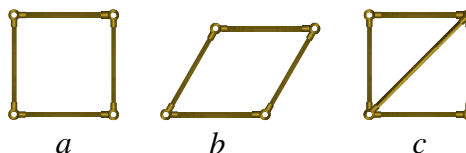
### 5.2 Stångverkan i ett fackverk

Vi har visat att när man applicerar en kraft  $F$  på mitten av fackverken så får vi antingen drag- eller tryckkrafter på diagonalstänger beroende på vilken sida av fackverken vi jobbar med. Se figur 26 och 28. Stångverkan kan exempelvis beräknas i programmet Ansys men detta ingår inte i kandidatarbetet.

#### 5.2.1 Vidareutveckling

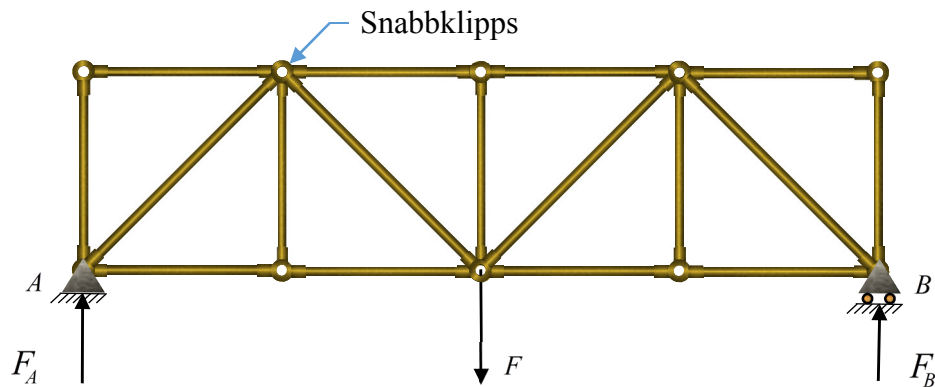
Om tidsresurser fanns skulle ett helt nytt fackverk inspirerad av någon tentauppgift ha tillverkats. Fackverket skulle ha varit flexibelt och man skulle ha byggt det stegvis, där stängerna skulle ha kopplats med snabbklipps som i figur 33. Några fasta och några rörliga stöd skulle ha tillverkats som skulle ha gett en stabil konstruktion för framgångsrika experiment.

Figur 32 a-b visar fyra stänger hopkopplade med snabbklipps. Figur 32 b visar ett instabilt system så kallade mekanism. Figur 32 c visar stabilt system med den diagonala stängen. På så sätt kan man bygga sitt fackverk hur man vill. Det viktiga är att man hittar rätt material som t.ex. vajer av fjäderstål som kan visa riktiga deformationer som indikerar tryck- eller dragspänning i stängen.



Figur 32

Det färdiga fackverket skulle ha sett ut som på bilden nedan se figur 33.



Figur 33. Ny prototyp av ett fackverk

### 5.3 Den kontinuerligt upplagda balken

För balken gjord av fjäderstål har vi visat jämförelsen mellan responsen hos den fysiska modellen och responsen hos modellen som programmet Ansys har beräknat. Resultaten som vi har fått överensstämmer väl.

Balkmodellen möjliggör också undersökning med olika stödlägen, antal stöd, lastlägen och antal laster.

Vi kan inte göra tester när det gäller balkar av andra material så som trä, plast, keramer och kompositer. Detta överlämnas till andra kommande kandidatarbeten.

Studion för mekanik och hållfasthetslära med dessa viktiga tillskott till modellexperimenten erbjuder nya möjligheter att prova sig fram för många lärorika upplevelser.

## 6. Referenser

*Ansys Project* Chalmers Tekniska Högskola 2014

Ekh Magnus och Hansbo Peter *Formelsamling i Hållfasthetslära, Tillämpad Mekanik* Chalmers 2010

Eliasson S. *et al Studio i mekanik och hållfasthetslära – utveckling av laborationer för förståelse av grundläggande principer och fenomen* Kandidatarbete inom Tillämpad Mekanik 2013

Grahn Ragnar och Jansson Per-Åke *Statik*, Studentlitteratur 2000

Grahn Ragnar och Jansson Per-Åke Jansson *Dynamik*, Studentlitteratur 1995

Johannesson, Persson och Pettersson, *Produktutveckling*, Liber 2004

Jönsson Per *Matlab beräkningar inom teknik och naturvetenskap*, Studentlitteratur 2010

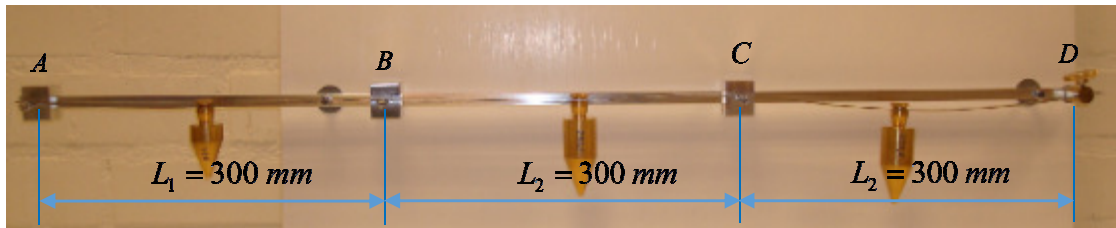
Lundh Hans *Grundläggande Hållfasthetslära* KTH Stockholm år 2000.

Sundström Bengt *Handbok och formelsamling i Hållfasthets* KTH 2005.



## 7. Appendix (Ritningar och fotografier)

### 7.1 Kontinuerlig punktbelastad balk



#### Beräkning av balk

**Givet:** Tre vikter  $m_1 = 148 \text{ g}$ ,  $m_2 = 256.5 \text{ g}$  och  $m_3 = 255.2 \text{ g}$  som ger krafterna  $P_1 = 1.45 \text{ N}$ ,  $P_2 = 2.52 \text{ N}$  och  $P_3 = 2.50 \text{ N}$ , tjockleken på balken är  $h = 1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$  och bredden  $b_1 = 12 \text{ mm} = 0,012 \text{ m}$ .

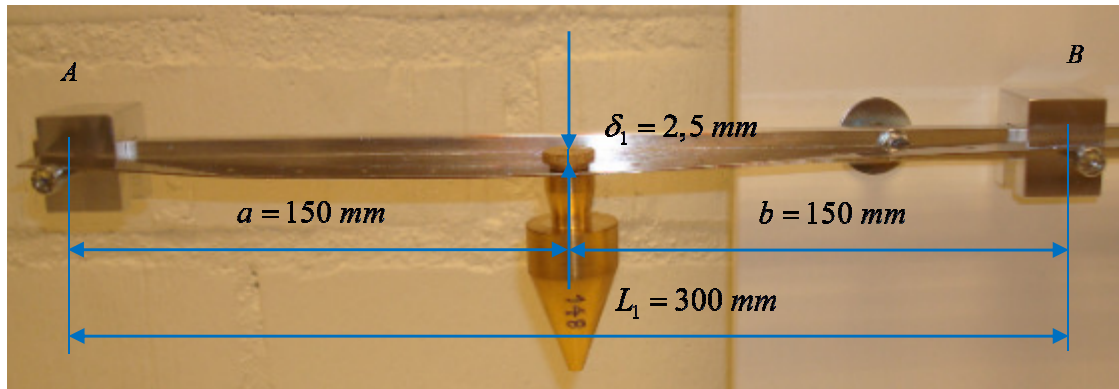
Enligt Sundström (1998:372) har legerade och härdat stål en elasticitetsmodul  $E = 205 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ . Balktvärsnittet har yttroghetsmomentet för elastisk böjning kring y-axeln:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.012\text{m} \cdot (0.001\text{m})^3}{12} = 1.0 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4.$$

Elementarfall 6.3 Fri uppläggning enligt Ekh och Hansbo (2010)

1. Teckning av  $\theta_i$  som funktion av  $M_j$  och  $P_k$

#### Balkelement 1

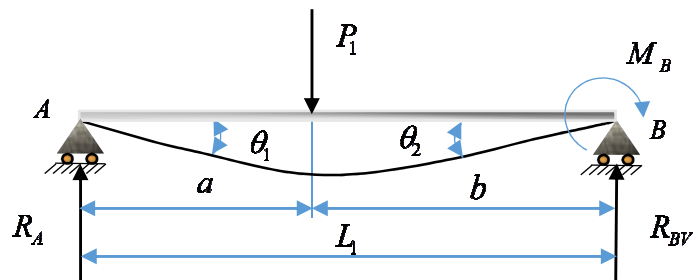


Avståndet

$$a = b = 150 \text{ mm} = 0.15 \text{ m},$$

$$L_1 = 300 \text{ mm} = 0.3 \text{ m}.$$

$$\theta_2 = -M_B \frac{L_1}{3EI} + P_1 \frac{aL_1}{6EI} \left( 1 - \frac{a^2}{L_1^2} \right) =$$



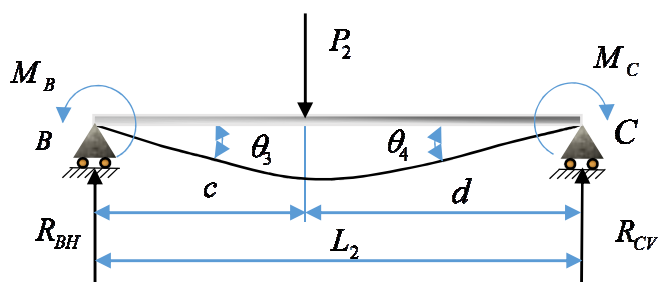
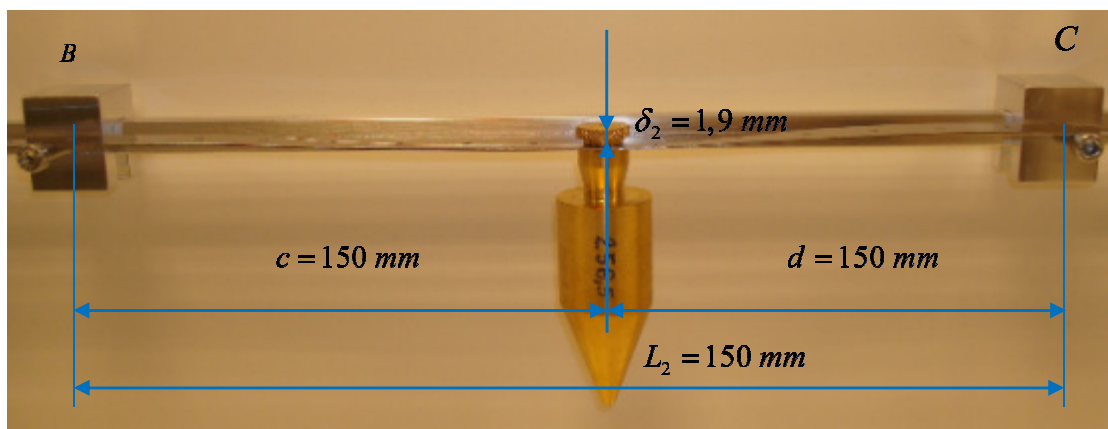
Beräkningen med siffror.

$$\theta_2 = -M_B \frac{0.3 \mu\text{t}}{3 \cdot 205 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12} \text{m}^4} + 1.45 \text{N} \frac{0.15 \mu\text{t} \cdot 0.3 \mu\text{t}}{6 \cdot 205 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12} \text{m}^4} \left( 1 - \frac{(0.15 \text{m})^2}{(0.3 \text{m})^2} \right) =$$

$$\theta_2 = -0.4878 M_B + 0.0398$$

Anmärkning: Enheter anges bara en gång.

## Balkelement 2



$$\theta_3 = -M_B \frac{L_2}{3EI} - M_C \frac{L_2}{6EI} + P_2 \frac{dL_2}{6EI} \left( 1 - \frac{d^2}{L_2^2} \right) =$$

$$\theta_3 = -M_B \frac{0.3}{3 \cdot 205 \cdot 10^{11} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} - M_C \frac{0.3}{6 \cdot 205 \cdot 10^{11} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} + 2.52 \cdot \frac{0.155 \cdot 0.3}{6 \cdot 205 \cdot 10^{11} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} \left( 1 - \frac{0.155^2}{0.3^2} \right) =$$

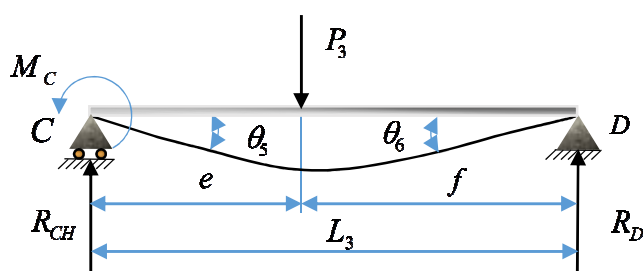
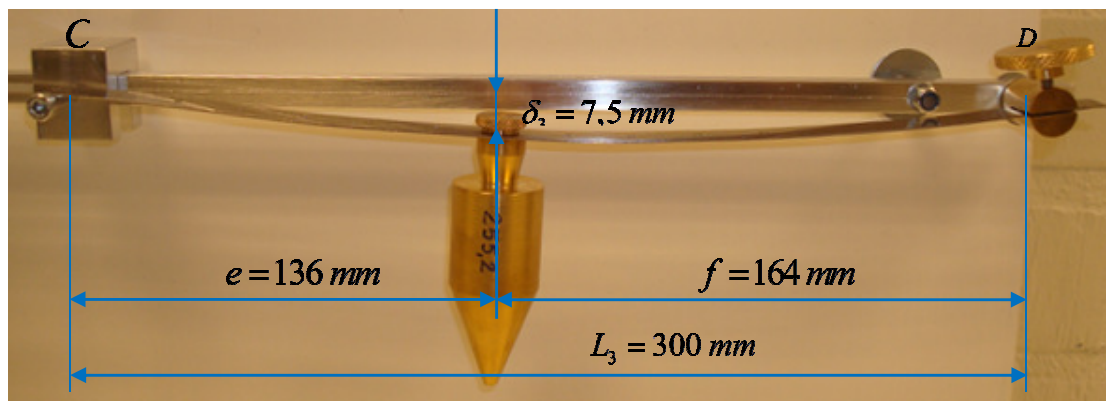
$$\theta_3 = -0.4878 M_B - 0.2439 M_C + 0.0697$$

$$\theta_4 = -M_B \frac{L_2}{6EI} - M_C \frac{L_2}{3EI} + P_2 \frac{cL_2}{6EI} \left( 1 - \frac{c^2}{L_2^2} \right) =$$

$$\theta_4 = -M_B \frac{0.3}{6 \cdot 205 \cdot 10^{11} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} - M_C \frac{0.3}{3 \cdot 205 \cdot 10^{11} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} + P_2 \frac{0.145 \cdot 0.3}{6 \cdot 205 \cdot 10^{11} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} \left( 1 - \frac{0.145^2}{0.3^2} \right) =$$

$$\theta_4 = -0.2439 M_B - 0.4878 M_C + 0.0682$$

### Balkelement 3



$$\theta_5 = -M_C \frac{L_3}{3EI} + P_3 \frac{fL_3}{6EI} \left(1 - \frac{f^2}{L_3^2}\right) =$$

$$\theta_5 = -M_C \frac{0.3}{3 \cdot 2.05 \cdot 10^{11} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} + 2.50 \frac{0.164 \cdot 0.3}{6 \cdot 2.05 \cdot 10^{11} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} \left(1 - \frac{0.164^2}{0.30^2}\right) =$$

$$\theta_5 = -0.4878M_C + 0.0702$$

2. Uppställning av deformationsvillkor:

$$\begin{cases} \theta_2 + \theta_3 = 0 \\ \theta_4 + \theta_5 = 0 \end{cases}$$

3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -0.4878M_B + 0.0398 - 0.4878M_B - 0.2439M_C + 0.0697 \\ -0.2439M_B - 0.4878M_C + 0.0682 - 0.4878M_C + 0.0702 \\ 0.9756M_B + 0.2439M_C = 0.1096 \cdot \left(-\frac{1}{0.9756} \cdot 0.2439\right) \Rightarrow -0.9146M_C + 0.111 = 0 \\ 0.2439M_B + 0.9756M_C = 0.1384 \end{cases}$$

$$M_C = \frac{0.111}{0.9146} = 0.121 \text{ Nm} \text{ och}$$

$$0.9756M_B + 0.2439M_C = 0.1096 \Rightarrow 0.9756M_B + 0.2439 \cdot 0.121 = 0.1096$$

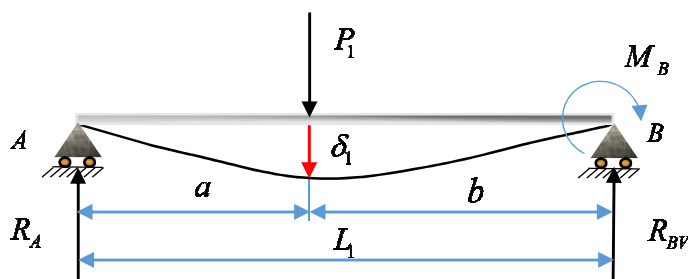
$$M_B + 0.2439 \cdot 0.121 = 0 \Rightarrow M_B = \frac{0.1096 - 0.0296}{0.9756} = 0.082 \text{ Nm}$$

4. Beräkna stödreaktionerna och M-diagram och T-diagram

5. Bestäm nedböjningarna under punktlasterna

### Nedböjning balkelement 1

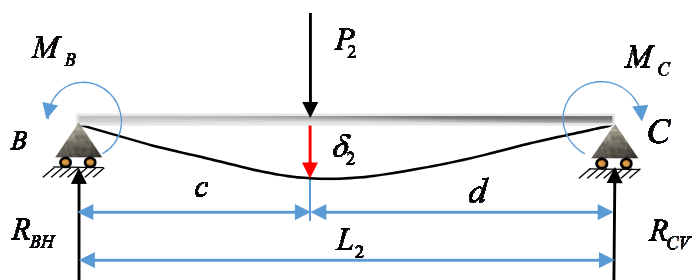
$$\delta_1 = -M_B \frac{aL_1}{6EI} \left( 1 - \frac{a^2}{L_1^2} \right) + P_1 \frac{a^2 b^2}{3EIL_1}$$



$$\delta_1 = -0.082 Nm \frac{0.15m \cdot 0.3m}{6 \cdot 205 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12} m^4} \left( 1 - \frac{0.15^2}{0.30^2} \right) + 1.452 \frac{0.15^2 \cdot 0.15^2}{3 \cdot 205 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \cdot 1.0 \cdot 10^{-12} m^4 \cdot 0.3m} =$$

$$\delta_1 = 0.0017 m = 1.7 mm$$

### Nedböjning balkelement 2



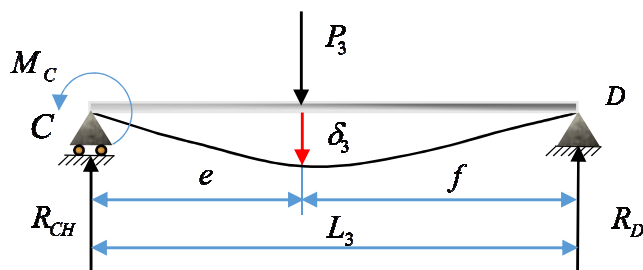
$$\delta_2 = -M_B \frac{dL_2}{6EI} \left( 1 - \frac{d^2}{L_2^2} \right) - M_C \frac{cL_2}{6EI} \left( 1 - \frac{c^2}{L_2^2} \right) + P_2 \frac{c^2 d^2}{3EIL_2}$$

$$\delta_2 = -0.082 \frac{0.155 \cdot 0.3}{6 \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} \left( 1 - \frac{0.155^2}{0.3^2} \right) - 0.121 \frac{0.145 \cdot 0.3}{6 \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} \left( 1 - \frac{0.145^2}{0.3^2} \right) + P_2 \frac{0.145^2 \cdot 0.155^2}{3 \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 1.0 \cdot 10^{-12} \cdot 0.3} =$$

$$\delta_2 = 0.0013 m = 1.3 mm$$

### Nedböjning balkelement 3

$$\delta_3 = -M_C \frac{fL_3}{6EI} \left( 1 - \frac{f^2}{L_3^2} \right) + P_3 \frac{e^2 f^2}{3EIL_3}$$



$$\delta_3 = -0.121 \frac{0.164 \cdot 0.3}{6 \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 1.0 \cdot 10^{-12}} \left( 1 - \frac{0.164^2}{0.3^2} \right) + 2.5035 \frac{0.136^2 \cdot 0.164^2}{3 \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 1.0 \cdot 10^{-12} \cdot 0.3} =$$

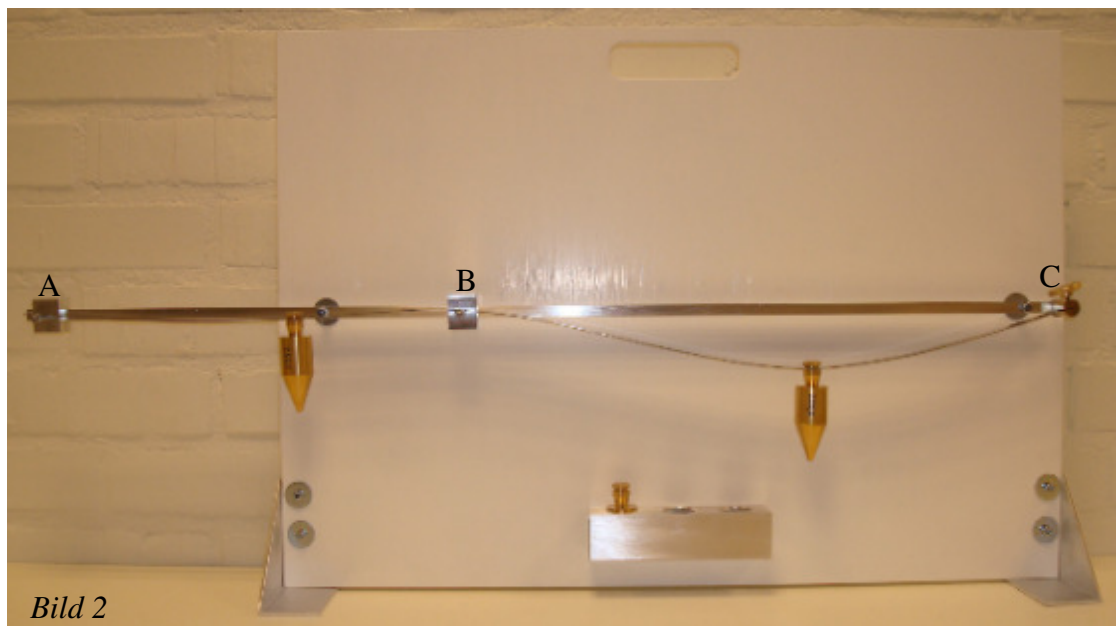
$$\delta_3 = 0.00336 m = 3.4 mm$$

## 7.2 Illustration av balkmodell med två balkfack

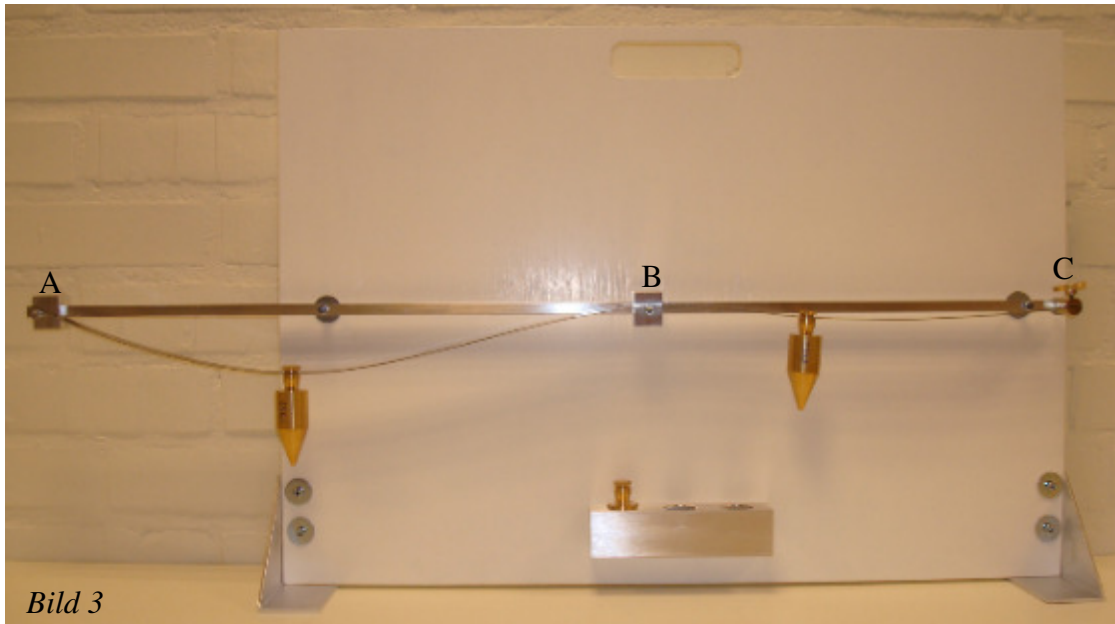
Bilderna nedan illustrerar nedböjningar.



Avståndet mellan A och B lika stort som avståndet B och C, samt att nedböjningen för båda är ungefär samma. (Se bild 1).



Vid förflyttning av mitt stöd B åt vänster blir avståndet mellan A och B 370 mm. Nedböjningen i detta fall mellan A och B blir  $\delta_1 = 8 \text{ mm}$  pga. tyngden 256.5 gram. Avståndet mellan B och C blir 530 mm. Nedböjningen uppmättes till  $\delta_2 = 50 \text{ mm}$  pga. tyngden 255.2 gram. (Se bild 2).



Om stöd B förflyttas 530 mm från stöd A, ses en nedböjning mellan A och B  
 $\delta_1 = 55 \text{ mm}$  under massan i gram.

Mellan B och C är avståndet 370 mm och pga. massa 255.2 gram fås en nedböjning  
 $\delta_2 = 9 \text{ mm}$  (Se bild 3).

Slutsats: Mellan bild 2 och bild 3 finns det skillnader mellan nedböjningarna. Detta orsakas på grund av att stången är fast vid stöd C, medan vid stöd A och B den är fritt upplagd.

## 7.3 Matlabkod för kontinuerligt upplagd balk i tre fack

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Matlabprogram
% Matlabprogram för kontinuerlig punktbelastad balk. Balken belastas
med
% massorna m1=148, m2=256,5 och m3=255,2 gram. Massorna omvandlas
till krafter
% och betecknas med "P" i Newton. Avståndet mellan stöden och kraften
% P betecknas med bokstäverna a, b, c, d, e och f är angivna i mm men
omvandlas
% till meter. Stödsavstånden för respektive balkelement betecknas med
L1 för
% balkelement A till B, L2 för balkelement B till C och L3 för
balkelement
% C till D.
% Som stödvinklar används theta1, theta2, theta3, theta4, theta5 och
theta6.
% Slutligen betecknas nedböjningarna med delta1, delat2 och delat3.
% Vi skriver en kod som först beräknar böjmomenten Mb och Mc vid
stöden med
% hjälp av deformationsvillkor uttryckta i stödvinklarna theta1,
theta2,
% theta3, theta4, theta5 och theta6.
% Detta ger ett ekvationsystem på formen Ax=B, som löses.
% Slutligen beräknas de eftersökta nedböjningar delta1, delat2 och
delat3.
%
% Krste Komarovski Maj 2014
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

% 1. Teckna theta som funktion av Mj och Pk?
P1=148e-3*9.81; % Beräknas kraften i Newton
h1=1e-3; b1=12e-3; E=205e9; I=(b1*h1^3)/12; % Tjockleken h=1mm,
bredden b=14mm,
% elasticitetsmodul E=205 MPa, yttröghetsmoment I=(b*h^3)/12

% Balkelement 1: a=150mm och b=150mm och L1=300mm elementarfall 6.3
a=150e-3; b=150e-3; L1=300e-3;
% theta_2=-Mb*L1/(3*E*I)+P1*a*L1/(6*E*I)*(1-a^2/L1^2)

% Balkelement 2: c=145mm, d=155mm, L2=300mm, kraften
P2=256.5/10^3*9.81 och
% elementarfall 6.3
c=145e-3; d=155e-3; L2=300e-3; P2=256.5e-3*9.81;
% theta_3=-Mb*L2/(3*E*I)-Mc*L2/(6*E*I)+P2*d*L2/(6*E*I)*(1-d^2/L2^2)
% theta_4=-Mb*L2/(6*E*I)-Mc*L2/(3*E*I)+P2*c*L2/(6*E*I)*(1-c^2/L2^2)

% Balkelement 3: e=136mm, f=164mm, L3=300mm,
P3=255.2/10^3*9.81;elementarfall 6.3
e=136e-3; f=164e-3; L3=300e-3; P3=255.2e-3*9.81;
% theta_5=-Mc*L3/(3*E*I)+P3*f*L3/(6*E*I)*(1-f^2/L3^2)

% 2. Ställ upp deformationsvillkor
% theta_2+theta_3=0
% theta_4+theta_5=0
```

```

b10=P1*a*L1/(6*E*I)*(1-a^2/L1^2)+P2*d*L2/(6*E*I)*(1-d^2/L2^2);
b20=P2*c*L2/(6*E*I)*(1-c^2/L2^2)+P3*f*L3/(6*E*I)*(1-f^2/L3^2);

% 3. Lös ekvationssystemet
A11=L1/(3*E*I)+L2/(3*E*I);
A12=L2/(6*E*I);
A21=L2/(6*E*I);
A22=L2/(3*E*I)+L3/(3*E*I);

A=[A11 A12; A21 A22];
B=[b10; b20];
M=A\B;
Mb=M(1)
Mc=M(2)

% 4. Beräkna stödreaktionerna och M-diagram och T-diagram
% 5. Bestäm nedböjningarna under punktlasterna

% Balkfack 1:
delta_1=-Mb*a*L1/(6*E*I)*(1-a^2/L1^2)+P1*a^2*b^2/(3*E*I*L1)

% Balkfack 2:
delta_2=-Mb*d*L2/(6*E*I)*(1-d^2/L2^2)-Mc*c*L2/(6*E*I)*(1-
c^2/L2^2)+P2*c^2*d^2/(3*E*I*L2)

% Balkfack 3:
delta_3=-Mc*f*L3/(6*E*I)*(1-f^2/L3^2)+P3*e^2*f^2/(3*E*I*L3)

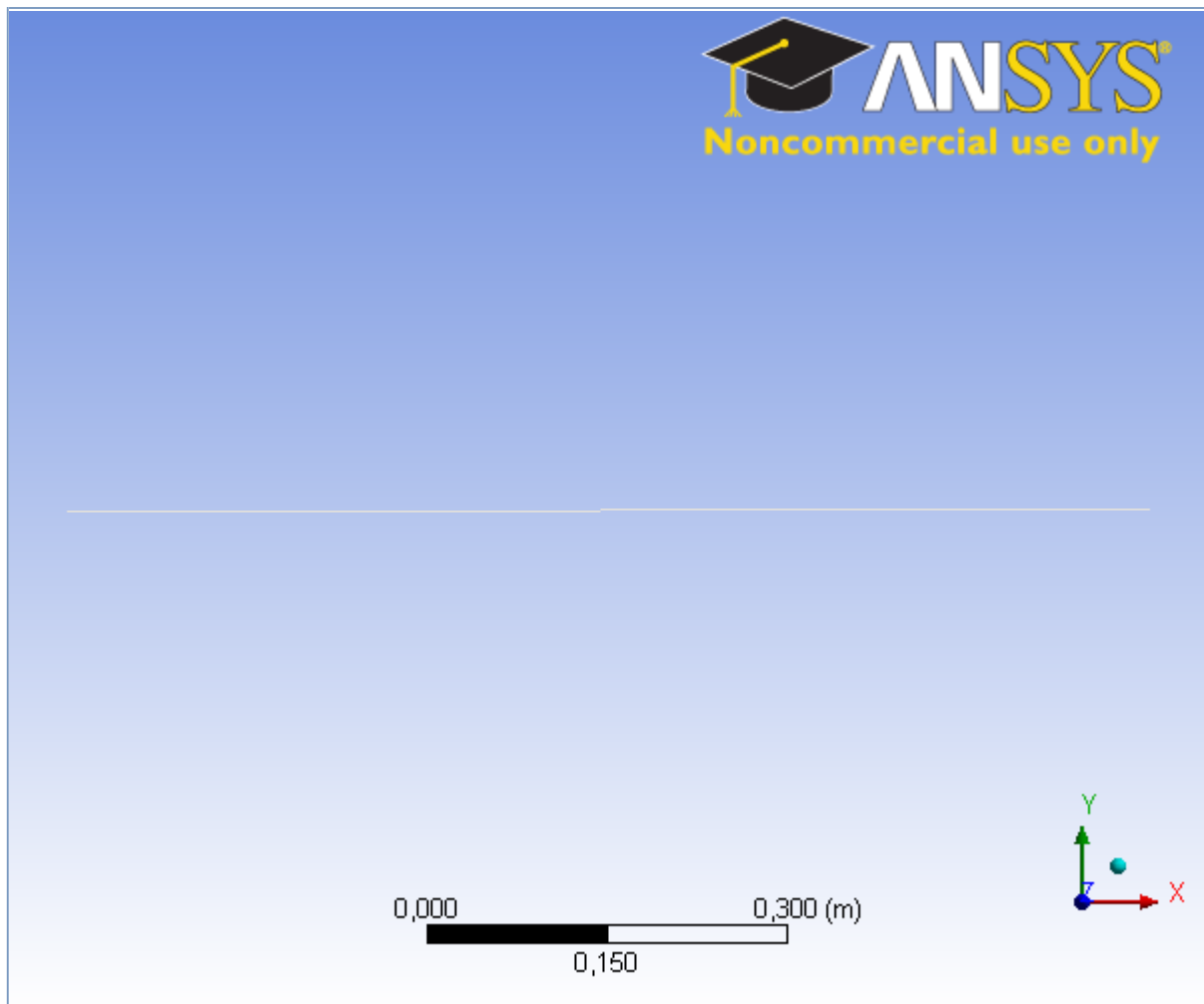
```





## Project

First Saved	Tuesday, April 01, 2014
Last Saved	Tuesday, April 01, 2014
Product Version	14.0 Release
Save Project Before Solution	No
Save Project After Solution	No



# Contents

- [Units](#)
- [Model \(A4\)](#)
  - [Geometry](#)
    - [Line Body](#)
  - [Construction Geometry](#)
    - [Path](#)
  - [Coordinate Systems](#)
  - [Mesh](#)
  - [Static Structural \(A5\)](#)
    - [Analysis Settings](#)
    - [Loads](#)
    - [Solution \(A6\)](#)
      - [Solution Information](#)
      - [Results](#)
- [Material Data](#)
  - [Structural Steel](#)

## Units

**TABLE 1**

Unit System	Metric (m, kg, N, s, V, A) Degrees rad/s Celsius
Angle	Degrees
Rotational Velocity	rad/s
Temperature	Celsius

## Model (A4)

### Geometry

**TABLE 2**  
**Model (A4) > Geometry**

Object Name	<i>Geometry</i>
State	Fully Defined
<b>Definition</b>	
Source	Z:\Mikesbalk_files\dp0\SYS\DM\SYS.agdb
Type	DesignModeler
Length Unit	Meters
Element Control	Program Controlled
Display Style	Body Color
<b>Bounding Box</b>	
Length X	0,9 m
Length Y	0, m
Length Z	0, m
<b>Properties</b>	
Volume	1,0125e-005 m <sup>3</sup>
Mass	7,9481e-002 kg
Scale Factor Value	1,
<b>Statistics</b>	
Bodies	1
Active Bodies	1

Nodes	185
Elements	92
Mesh Metric	None
<b>Basic Geometry Options</b>	
Parameters	Yes
Parameter Key	DS
Attributes	No
Named Selections	No
Material Properties	No
<b>Advanced Geometry Options</b>	
Use Associativity	Yes
Coordinate Systems	No
Reader Mode Saves Updated File	No
Use Instances	Yes
Smart CAD Update	No
Attach File Via Temp File	Yes
Temporary Directory	C:\Users\krste\AppData\Local\Temp
Analysis Type	3-D
Decompose Disjoint Faces	Yes
Enclosure and Symmetry Processing	Yes

**TABLE 3**  
**Model (A4) > Geometry > Parts**

Object Name	<i>Line Body</i>
State	Meshed
<b>Graphics Properties</b>	
Visible	Yes
Transparency	1
<b>Definition</b>	
Suppressed	No
Coordinate System	Default Coordinate System
Reference Temperature	By Environment
Offset Mode	Refresh on Update
Offset Type	Centroid
Model Type	Beam
<b>Material</b>	
Assignment	Structural Steel
Nonlinear Effects	Yes
Thermal Strain Effects	Yes
<b>Bounding Box</b>	
Length X	0,9 m
Length Y	0, m
Length Z	0, m
<b>Properties</b>	
Volume	1,0125e-005 m <sup>3</sup>
Mass	7,9481e-002 kg
Length	0,9 m
Cross Section	Rect1
Cross Section Area	1,125e-005 m <sup>2</sup>
Cross Section IYY	2,1094e-010 m <sup>2</sup> ·m <sup>2</sup>
Cross Section IZZ	5,2734e-013 m <sup>2</sup> ·m <sup>2</sup>
<b>Statistics</b>	
Nodes	185
Elements	92
Mesh Metric	None

**TABLE 4**  
**Model (A4) > Construction Geometry**

Object Name	<i>Construction Geometry</i>
State	Fully Defined
<b>Display</b>	
Show Mesh	No

**TABLE 5**  
**Model (A4) > Construction Geometry > Paths**

Object Name	<i>Path</i>
State	Fully Defined
<b>Definition</b>	
Path Type	Edge
Suppressed	No
<b>Scope</b>	
Geometry	6 Edges

## Coordinate Systems

**TABLE 6**  
**Model (A4) > Coordinate Systems > Coordinate System**

Object Name	<i>Global Coordinate System</i>
State	Fully Defined
<b>Definition</b>	
Type	Cartesian
Coordinate System ID	0,
<b>Origin</b>	
Origin X	0, m
Origin Y	0, m
Origin Z	0, m
<b>Directional Vectors</b>	
X Axis Data	[ 1, 0, 0, ]
Y Axis Data	[ 0, 1, 0, ]
Z Axis Data	[ 0, 0, 1, ]

## Mesh

**TABLE 7**  
**Model (A4) > Mesh**

Object Name	<i>Mesh</i>
State	Solved
<b>Defaults</b>	
Physics Preference	Mechanical
Relevance	0
<b>Sizing</b>	
Use Advanced Size Function	Off
Relevance Center	Coarse
Element Size	1,e-002 m
Initial Size Seed	Active Assembly
Smoothing	Medium
Transition	Fast
Span Angle Center	Coarse
Minimum Edge Length	0,1150 m
<b>Inflation</b>	
Use Automatic Inflation	None
Inflation Option	Smooth Transition

Transition Ratio	0,272
Maximum Layers	5
Growth Rate	1,2
Inflation Algorithm	Pre
View Advanced Options	No
<b>Patch Conforming Options</b>	
Triangle Surface Mesher	Program Controlled
<b>Advanced</b>	
Shape Checking	Standard Mechanical
Element Midside Nodes	Program Controlled
Number of Retries	Default (4)
Extra Retries For Assembly	Yes
Rigid Body Behavior	Dimensionally Reduced
Mesh Morphing	Disabled
<b>Defeaturing</b>	
Pinch Tolerance	Please Define
Generate Pinch on Refresh	No
Automatic Mesh Based Defeaturing	On
Defeaturing Tolerance	Default
<b>Statistics</b>	
Nodes	185
Elements	92
Mesh Metric	None

## Static Structural (A5)

**TABLE 8**  
**Model (A4) > Analysis**

Object Name	<i>Static Structural (A5)</i>
State	Solved
<b>Definition</b>	
Physics Type	Structural
Analysis Type	Static Structural
Solver Target	Mechanical APDL
<b>Options</b>	
Environment Temperature	22, °C
Generate Input Only	No

**TABLE 9**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Analysis Settings**

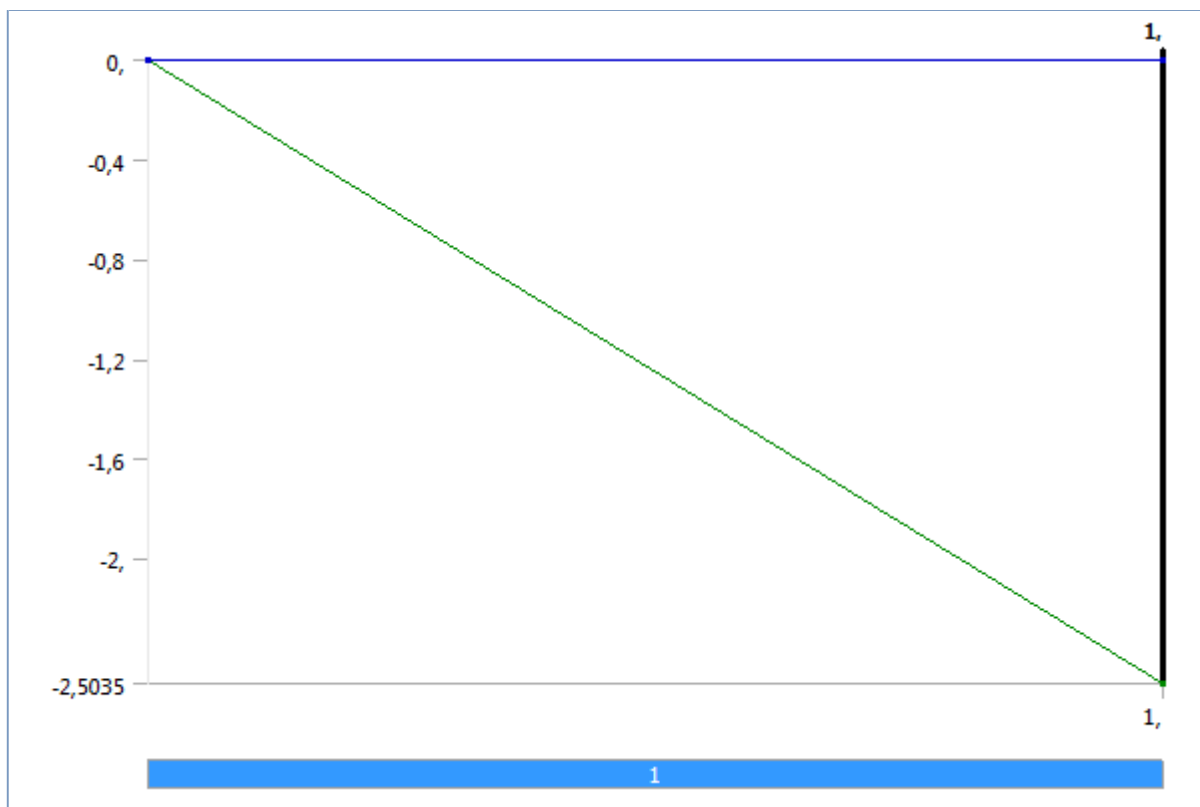
Object Name	<i>Analysis Settings</i>
State	Fully Defined
<b>Step Controls</b>	
Number Of Steps	1,
Current Step Number	1,
Step End Time	1, s
Auto Time Stepping	Program Controlled
<b>Solver Controls</b>	
Solver Type	Program Controlled
Weak Springs	Program Controlled
Large Deflection	Off
Inertia Relief	Off
<b>Restart Controls</b>	
Generate Restart Points	Program Controlled
Retain Files After Full Solve	No
<b>Nonlinear Controls</b>	

Force Convergence	Program Controlled
Moment Convergence	Program Controlled
Displacement Convergence	Program Controlled
Rotation Convergence	Program Controlled
Line Search	Program Controlled
Stabilization	Off
<b>Output Controls</b>	
Stress	Yes
Strain	Yes
Nodal Forces	No
Contact Miscellaneous	No
General Miscellaneous	No
Calculate Results At	All Time Points
Max Number of Result Sets	Program Controlled
<b>Analysis Data Management</b>	
Solver Files Directory	Z:\Mikesbalk_files\dp0\SYS\MECH\
Future Analysis	None
Scratch Solver Files Directory	
Save MAPDL db	No
Delete Unneeded Files	Yes
Nonlinear Solution	No
Solver Units	Active System
Solver Unit System	mks

**TABLE 10**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Loads**

Object Name	Force	Displacement	Force 2	Force 3	Displacement 2
State	Fully Defined				
<b>Scope</b>					
Scoping Method	Geometry Selection				
Geometry	1 Vertex				
<b>Definition</b>					
Type	Force	Displacement	Force		Displacement
Define By	Components				
Coordinate System	Global Coordinate System				
X Component	0, N (ramped)	Free	0, N (ramped)		Free
Y Component	-2,5035 N (ramped)	0, m (ramped)	-2,5163 N (ramped)	-1,4519 N (ramped)	0, m (ramped)
Z Component	0, N (ramped)	0, m (ramped)	0, N (ramped)		0, m (ramped)
Suppressed	No				

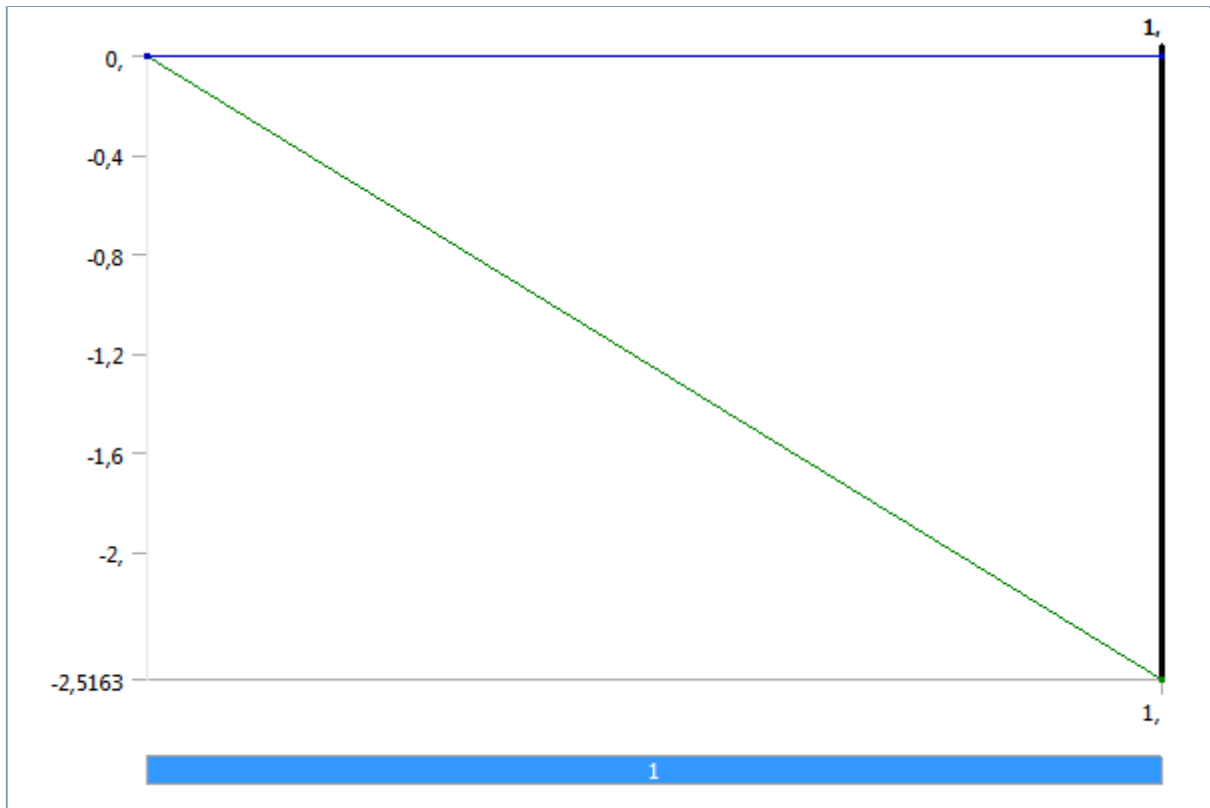
**FIGURE 1**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Force**



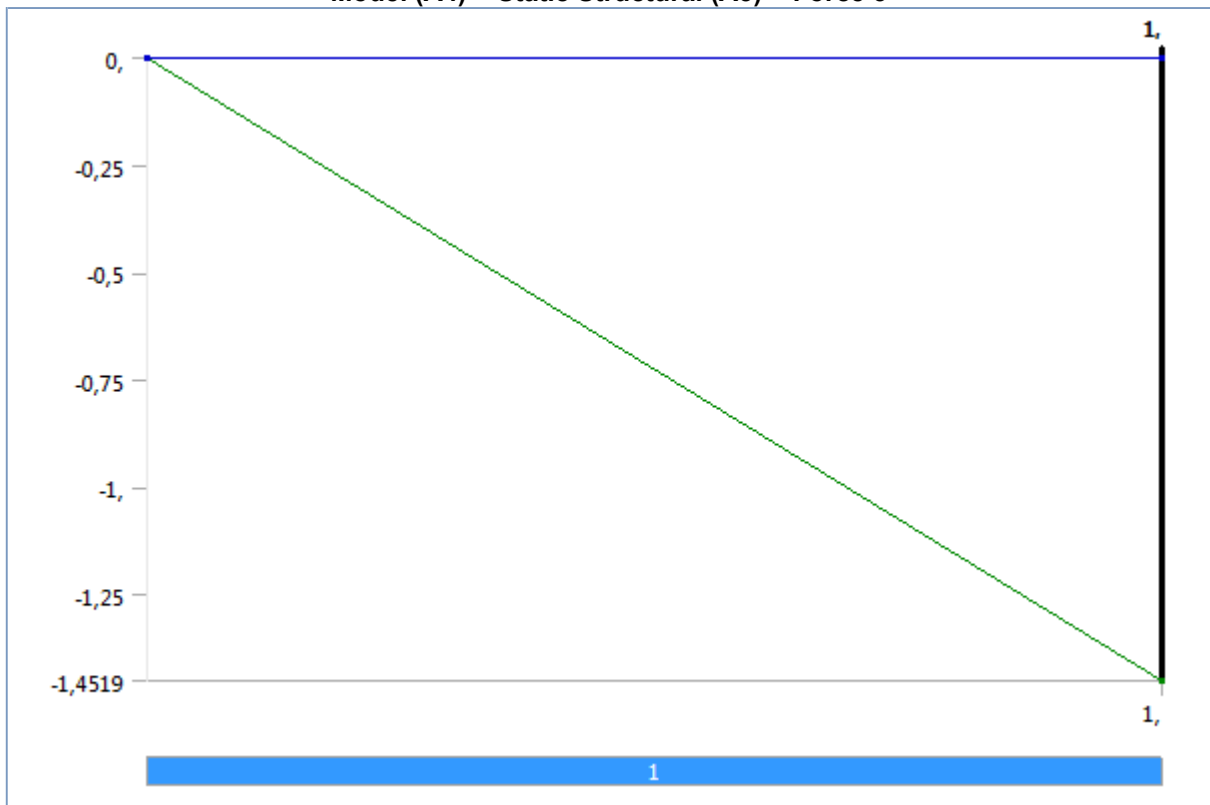
**FIGURE 2**  
Model (A4) > Static Structural (A5) > Displacement



**FIGURE 3**  
Model (A4) > Static Structural (A5) > Force 2

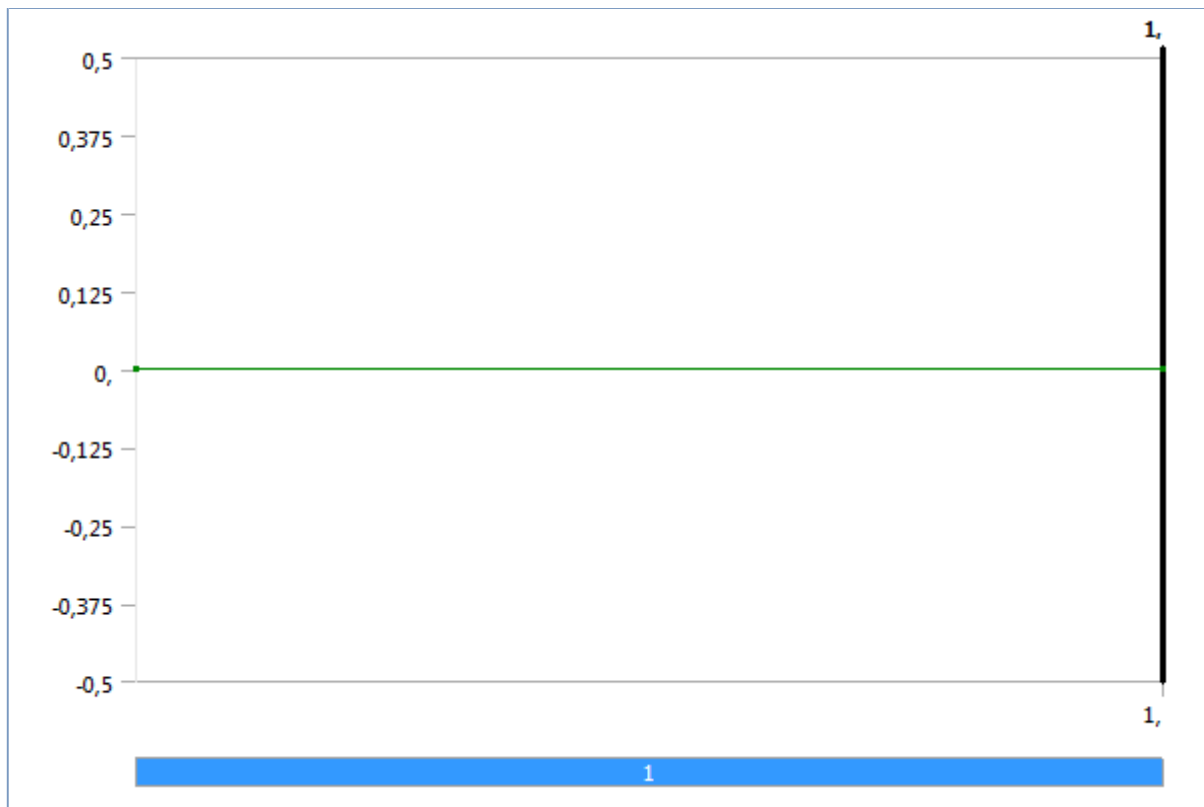


**FIGURE 4**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Force 3**



**FIGURE 5**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Displacement 2**

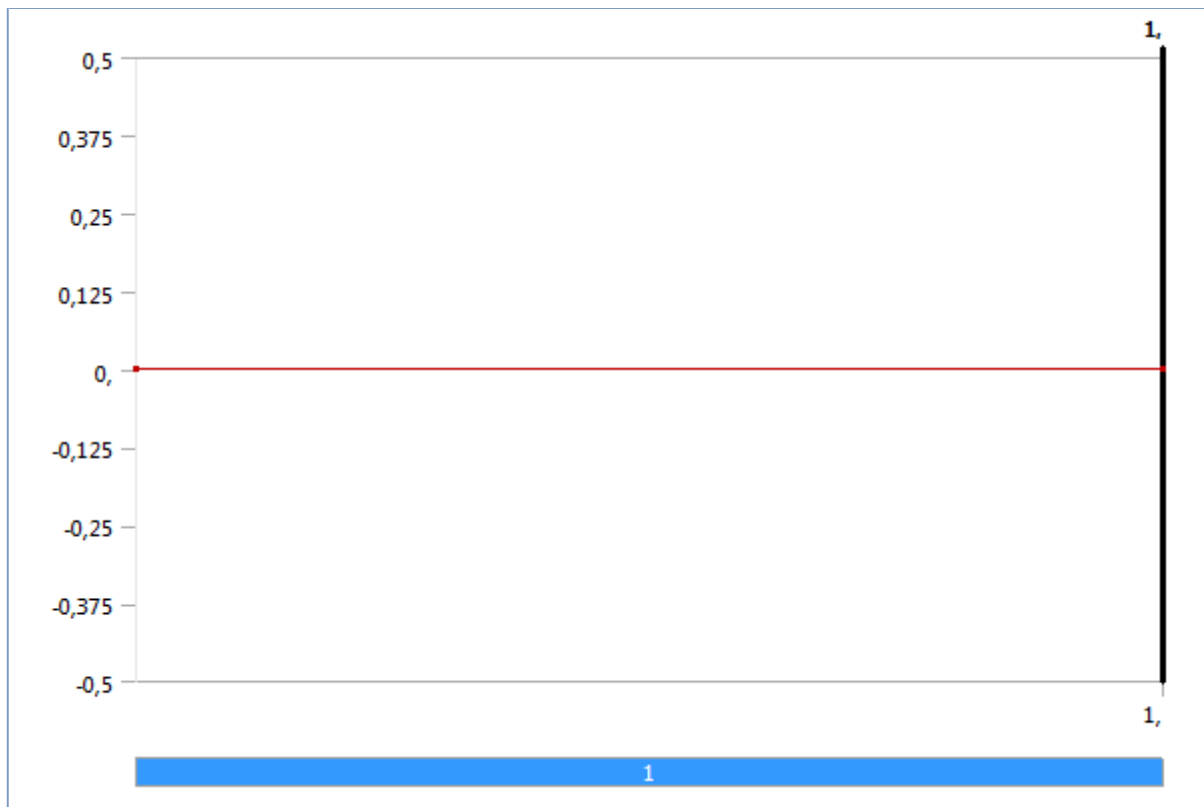




**TABLE 11**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Loads**

Object Name	<i>Simply Supported</i>	<i>Fixed Rotation</i>	<i>Displacement 3</i>
State	Fully Defined		
<b>Scope</b>			
Scoping Method	Geometry Selection		
Geometry	1 Vertex		
<b>Definition</b>			
Type	Simply Supported	Fixed Rotation	Displacement
Suppressed	No		
Coordinate System	Global Coordinate System		
Rotation X	Fixed		
Rotation Y	Free		
Rotation Z	Free		
Define By	Components		
X Component	Free		
Y Component	0, m (ramped)		
Z Component	Free		

**FIGURE 6**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Displacement 3**



### Solution (A6)

**TABLE 12**  
Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution

Object Name	<i>Solution (A6)</i>
State	Solved
<b>Adaptive Mesh Refinement</b>	
Max Refinement Loops	1,
Refinement Depth	2,
<b>Information</b>	
Status	Done

**TABLE 13**  
Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Solution Information

Object Name	<i>Solution Information</i>
State	Solved
<b>Solution Information</b>	
Solution Output	Solver Output
Newton-Raphson Residuals	0
Update Interval	2,5 s
Display Points	All
<b>FE Connection Visibility</b>	
Activate Visibility	Yes
Display	All FE Connectors
Draw Connections Attached To	All Nodes
Line Color	Connection Type
Visible on Results	No
Line Thickness	Single
Display Type	Lines

**TABLE 14**  
Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Results

Object Name	Total Deformation	Directional Deformation	Total Shear Force	Total Shear-Moment Diagram
State	Solved			
<b>Scope</b>				
Scoping Method	Geometry Selection		Path	
Geometry	All Bodies		All Line Bodies	
Path				Path
<b>Definition</b>				
Type	Total Deformation	Directional Deformation	Total Shear Force	Total Shear-Moment Diagram
By	Time			
Display Time	Last			
Calculate Time History	Yes			
Identifier				
Suppressed	No			
Orientation	Y Axis			
Coordinate System	Global Coordinate System			
Graphics Display				Total Shear Force
<b>Results</b>				
Minimum	0, m	-5,7203e-003 m	0,47916 N	
Maximum	5,7203e-003 m	1,4995e-004 m	1,9578 N	
<b>Information</b>				
Time	1, s			
Load Step	1			
Substep	1			
Iteration Number	1			
<b>Integration Point Results</b>				
Display Option				Unaveraged
<b>Graph Controls</b>				
X-Axis				S

**FIGURE 7**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Total Shear-Moment Diagram**

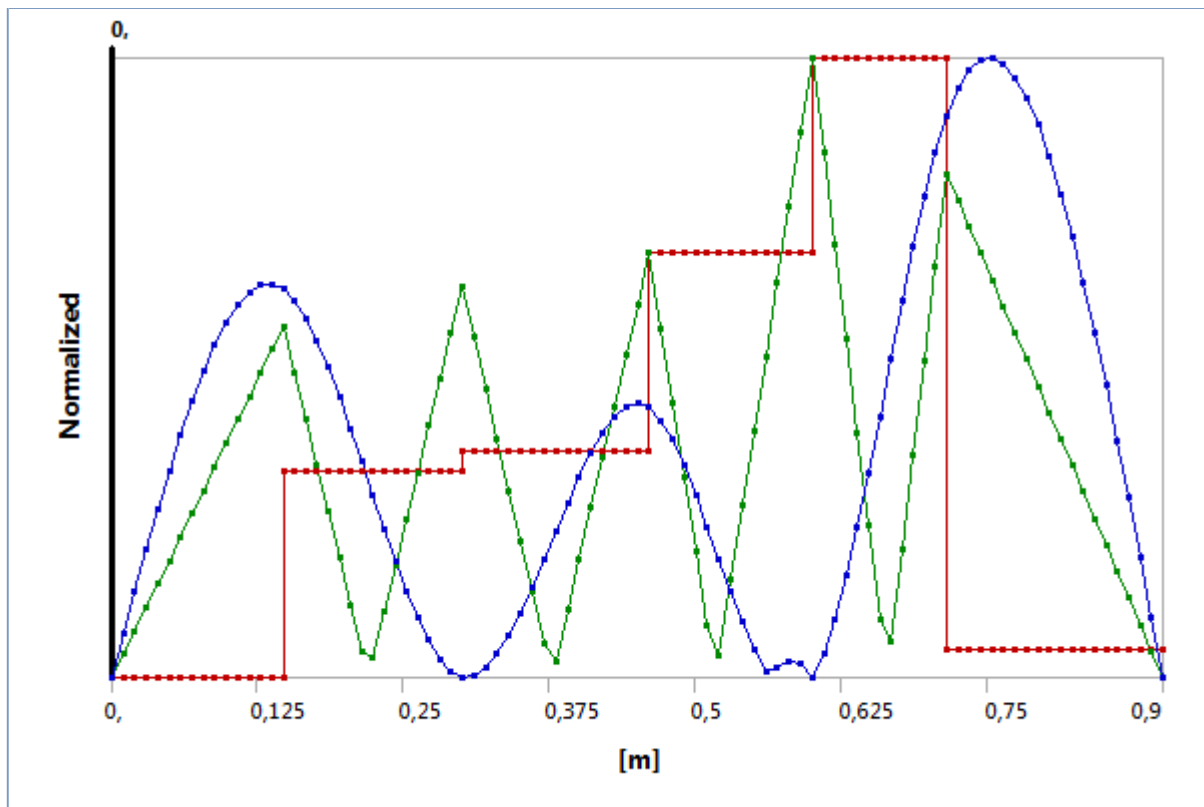


TABLE 15

## Model (A4) &gt; Static Structural (A5) &gt; Solution (A6) &gt; Total Shear-Moment Diagram

Length [m]	Total Shear Force [N]	Total Bending Moment [N·m]	Total Displacement [m]
0,		9,3345e-015	0,
9,8e-003		4,6958e-003	3,9871e-004
1,96e-002		9,3916e-003	7,9314e-004
2,94e-002		1,4087e-002	1,179e-003
3,92e-002		1,8783e-002	1,5521e-003
4,9e-002		2,3479e-002	1,908e-003
5,88e-002		2,8175e-002	2,2426e-003
6,86e-002		3,2871e-002	2,5515e-003
7,84e-002	0,47916	3,7566e-002	2,8305e-003
8,82e-002		4,2262e-002	3,0752e-003
9,8e-002		4,6958e-002	3,2815e-003
0,1078		5,1654e-002	3,4451e-003
0,1176		5,6349e-002	3,5616e-003
0,1274		6,1045e-002	3,6267e-003
0,1372		6,5741e-002	3,6363e-003
0,147		7,0437e-002	3,586e-003
0,15656		6,1135e-002	3,4772e-003
0,16613		5,1833e-002	3,3153e-003
0,17569		4,2531e-002	3,1085e-003
0,18525		3,323e-002	2,8648e-003
0,19481		2,3928e-002	2,5924e-003
0,20438		1,4626e-002	2,2991e-003
0,21394	0,97274	5,3242e-003	1,9932e-003
0,2235		3,9776e-003	1,6827e-003
0,23306		1,3279e-002	1,3756e-003
0,24263		2,2581e-002	1,08e-003
0,25219		3,1883e-002	8,0403e-004
0,26175		4,1185e-002	5,5568e-004
0,27131		5,0487e-002	3,4304e-004

0,28088		5,9788e-002	1,7417e-004	
0,29044		6,909e-002	5,7132e-005	
0,3	1,0216	7,8392e-002	9,7763e-021	
0,31		6,8176e-002	9,9625e-006	
0,32		5,7959e-002	8,4565e-005	
0,33		4,7743e-002	2,1412e-004	
0,34		3,7526e-002	3,8895e-004	
0,35		2,731e-002	5,9935e-004	
0,36		1,7093e-002	8,3565e-004	
0,37		6,8766e-003	1,0882e-003	
0,38		3,3399e-003	1,3472e-003	
0,39		1,3556e-002	1,603e-003	
0,4		2,3773e-002	1,846e-003	
0,41		3,3989e-002	2,0665e-003	
0,42		4,4206e-002	2,2547e-003	
0,43		5,4422e-002	2,4011e-003	
0,44	6,4639e-002	2,4958e-003		
0,45	7,4855e-002	2,5292e-003		
0,46	1,4947	8,5072e-002	2,4917e-003	
0,47		7,0125e-002	2,3774e-003	
0,48		5,5179e-002	2,1967e-003	
0,49		4,0232e-002	1,9636e-003	
0,5		2,5286e-002	1,6924e-003	
0,51		1,0339e-002	1,3972e-003	
0,52		4,6073e-003	1,0922e-003	
0,53		1,9554e-002	7,9161e-004	
0,54		3,45e-002	5,0953e-004	
0,55		4,9447e-002	2,6017e-004	
0,56		6,4393e-002	5,7681e-005	
0,57		7,934e-002	8,3749e-005	
0,58		9,4286e-002	1,4995e-004	
0,59		0,10923	1,2676e-004	
0,6	1,9578	0,12418	0,	
0,60958		0,10542	2,2702e-004	
0,61917		8,6656e-002	5,4584e-004	
0,62875		6,7894e-002	9,4012e-004	
0,63833		4,9132e-002	1,3935e-003	
0,64792		3,037e-002	1,8897e-003	
0,6575		1,1608e-002	2,4123e-003	
0,66708		7,1534e-003	2,9451e-003	
0,67667		2,5915e-002	3,4716e-003	
0,68625		4,4677e-002	3,9755e-003	
0,69583		6,3439e-002	4,4405e-003	
0,70542		8,2201e-002	4,8503e-003	
0,715		0,54574	0,10096	5,1885e-003
0,72474			9,5649e-002	5,4457e-003
0,73447	9,0335e-002		5,6168e-003	
0,74421	8,5021e-002		5,7068e-003	
0,75395	7,9707e-002		5,7203e-003	
0,76368	7,4393e-002		5,6621e-003	
0,77342	6,908e-002		5,5371e-003	
0,78316	6,3766e-002		5,35e-003	
0,79289	5,8452e-002		5,1056e-003	
0,80263	5,3138e-002		4,8086e-003	
0,81237	4,7824e-002		4,4639e-003	
0,82211	4,2511e-002		4,0762e-003	

0,83184	3,7197e-002	3,6503e-003
0,84158	3,1883e-002	3,1909e-003
0,85132	2,6569e-002	2,7029e-003
0,86105	2,1255e-002	2,1909e-003
0,87079	1,5941e-002	1,6599e-003
0,88053	1,0628e-002	1,1146e-003
0,89026	5,3138e-003	5,5968e-004
0,9	4,3351e-015	0,

## Material Data

### Structural Steel

**TABLE 16**  
**Structural Steel > Constants**

Density	7850, kg m <sup>-3</sup>
Coefficient of Thermal Expansion	1,2e-005 C <sup>-1</sup>
Specific Heat	434, J kg <sup>-1</sup> C <sup>-1</sup>
Thermal Conductivity	60,5 W m <sup>-1</sup> C <sup>-1</sup>
Resistivity	1,7e-007 ohm m

**TABLE 17**  
**Structural Steel > Compressive Ultimate Strength**

Compressive Ultimate Strength Pa
0,

**TABLE 18**  
**Structural Steel > Compressive Yield Strength**

Compressive Yield Strength Pa
2,5e+008

**TABLE 19**  
**Structural Steel > Tensile Yield Strength**

Tensile Yield Strength Pa
2,5e+008

**TABLE 20**  
**Structural Steel > Tensile Ultimate Strength**

Tensile Ultimate Strength Pa
4,6e+008

**TABLE 21**  
**Structural Steel > Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion**

Reference Temperature C
22,

**TABLE 22**  
**Structural Steel > Alternating Stress Mean Stress**

Alternating Stress Pa	Cycles	Mean Stress Pa
3,999e+009	10,	0,
2,827e+009	20,	0,
1,896e+009	50,	0,
1,413e+009	100,	0,
1,069e+009	200,	0,
4,41e+008	2000,	0,
2,62e+008	10000	0,

2,14e+008	20000	0,
1,38e+008	1,e+005	0,
1,14e+008	2,e+005	0,
8,62e+007	1,e+006	0,

**TABLE 23**  
**Structural Steel > Strain-Life Parameters**

Strength Coefficient Pa	Strength Exponent	Ductility Coefficient	Ductility Exponent	Cyclic Strength Coefficient Pa	Cyclic Strain Hardening Exponent
9,2e+008	-0,106	0,213	-0,47	1,e+009	0,2

**TABLE 24**  
**Structural Steel > Isotropic Elasticity**

Temperature C	Young's Modulus Pa	Poisson's Ratio	Bulk Modulus Pa	Shear Modulus Pa
	2,e+011	0,3	1,6667e+011	7,6923e+010

**TABLE 25**  
**Structural Steel > Isotropic Relative Permeability**

Relative Permeability
10000