



Institutionen för vattenbyggnad  
Chalmers Tekniska Högskola

Department of Hydraulics  
Chalmers University of Technology

ISSN 0348 - 1069

# Rörelseekvationer för en kabel

av

Jan Lindahl

Report

Series B: 24

Göteborg 1981



Institutionen för Vattenbyggnad  
Chalmers Tekniska Högskola

Department of Hydraulics  
Chalmers University of Technology

Rörelseekvationer för en kabel

av

Jan Lindahl

Report

Series B:24

Göteborg 1981

---

Adress:            Institutionen för Vattenbyggnad  
                     Chalmers Tekniska Högskola  
                     412 96 Göteborg

Telefon:           031/81 01 00

## FÖRORD

Detta häfte är utfört i anslutning till en fortsättningskurs i Teknisk svängningslära. Kursen har hållits av univ.lektor Christian Högfors, inst.f. mekanik, CTH. Han skall ha ett tack för den handledning som givits.

## INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	sid.
FÖRORD	
INLEDNING	
1. EN PLAN KURVAS GEOMETRI M.M.	1
2. HAMILTONS PRINCIP	6
3. RÖRELSEEKVATIONER FÖR EN AXIALSTEL KABEL	11
3.1 Ekvationerna i cartesiska koordinater	11
3.2 Ekvationerna i tangent och normalkoordinater	13
4. RÖRELSEEKVATIONER FÖR EN AXIELLT ELASTISK KABEL	18
4.1 Ekvationerna i cartesiska koordinater	18
4.2 Ekvationerna i tangent och normalkoordinater	22
5. EN KABELS JÄMVIKTSLÄGE	25
6. SMÅ SVÄNGNINGAR AV EN AXIALELASTISK KABEL KRING ETT JÄMVIKTSLÄGE M.M.	28
REFERENSER	31

## INLEDNING

Det finns naturligtvis många olika differentialekvationer som beskriver en kabel<sup>\*)</sup> i jämvikt eller rörelse. Detta beror bl a på vilka koordinater som utnyttjas, vilka approximationer man anser sig kunna godta samt vilka yttre krafter som verkar på kabeln.

Kablar utnyttjas på flera olika sätt som element i konstruktioner. Till byggnadskonstruktioner användes dessa som huvudbärare i hängbroar och hängtak samt som stag till master. I samband med verksamhet till havs främst som förankringar till fartyg och flytande konstruktioner samt bogsering.

I detta häfte härledes vissa former av differentialekvationer som gäller för en "slak" kabel. Flera av ekvationerna är vanliga i samband med förankringskablar. Som yttre krafter medtages endast tyngdkrafter. Kabeln antages vara helt böjlig dvs moment och tvärkrafter försummas. Resultterande kraft i kabeln är då riktad tangentiellt till denna i varje punkt.

Fallen axialstel respektive axiellt elastisk kabel behandlas. Då kabeln antages elastisk härledes ekvationerna under antagande av små töjningar.

Ekvationerna härledes för det tvådimensionella fallet. Rörelseekvationerna bildas med Hamiltons princip. I vissa fall utnyttjas även kraftlagen direkt för att nå en bättre fysikalisk förståelse.

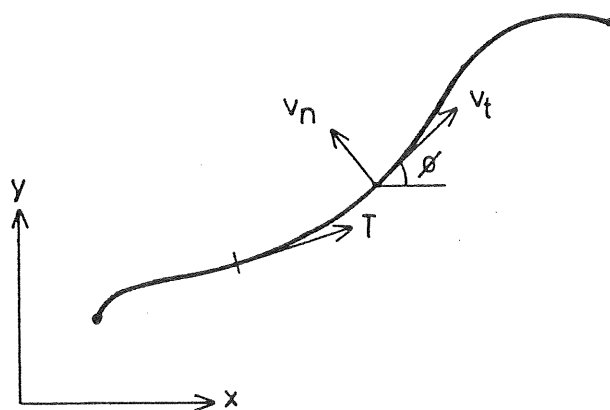
Ekvationerna beräknas kunna vara en bas för vidare studier av svängningar i förankringskablar.

---

<sup>\*)</sup> Med ordet kabel menas vajer, kätting eller lina av stål,

När kablar utnyttjas till förankring, bogsering etc. kompletteras ekvationerna med olika slag av hydrodynamiska krafter (eller aerodynamiska) etc. I litteraturen utnyttjas ofta empiriska uttryck för bestämning av dessa krafter. Randvillkoren kan vara olika beroende på problemets art. I de referenser som ges nedan kan studeras hur dessa krafter och randvillkor formulerats. Detta tillsammans med de lösningar (numeriska eller analytiska) som då presenteras har varit föremål för stora ansträngningar. Dessa problem omnämnes ej här.

En av de tidigaste publicerade formerna för rörelseekvationer för kablar man enkelt kan hitta ges av Routh [1]. Routh refererar till Poisson som ställde upp rörelseekvationerna i cartesiska koordinater år 1820. Routh härleder rörelseekvationerna i cartesiska koordinater samt i "tangential och normalkoordinater" för både axialstela och axiellt elastiska kablar. Med "tangential och normalkoordinater" innebär detta i hänförelse att man uttrycker ekvationerna i variablerna  $\phi$ ,  $v_t$ ,  $v_n$ ,  $\epsilon$ ,  $T$ , där  $\phi$  är kabelns lutningsvinkel,  $v_t$ ,  $v_n$  kabelns tangential- respektive normalhastighet samt  $\epsilon$ ,  $T$  är töjning respektive kraft i kabeln (se figur 1). För axialstela kablar utelämnas töjningen ( $\epsilon=0$ ).



Figur 1 En kabel i planet

Då kabeln är linjärt elastisk utnyttjas Hookes lag, kraften i kabeln är då:

$$T = K\varepsilon \quad \text{med} \quad \varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$$

där

$ds$  = ett element av kabeln i ett sträckt tillstånd

$ds_0$  = ett element av kabeln i ett osträckt tillstånd

$K$  = konstant

För både linjärt elastiska och axialstela kablar utnyttjar Routh kabelns osträckta längd  $s_0$  som oberoende geometrisk variabel. Då kabeln är axialstel gäller att  $\varepsilon=0$  och  $s=s_0$ . Formuleringar liknande Routh har ofta format en bas för att beskriva själva kabeln, dock tillkommer speciella krafter utefter kabeln etc. beroende på problemets art.

#### Axialstela kablar

I kap. 3.1 och 3.2 härledes rörelseekvationerna för axialstela kablar, dessa är i princip i enlighet med Ref. [1].

Pugsley [2] och Saxon, Cahn [3] studerar egenmoder och egenfrekvenser för axialstela kablar under inverkan av gravitationskrafter. Ekvationerna lineariseras. Jacob Abel [4] studerar bl.a. moder och egenfrekvenser för bogseringskablar.

#### Axialelastiska kablar

Ekvationerna i det elastiska fallet härledes i kap. 4.1, 4.2. Då kabeln uttryckes enligt ovan är ekvationerna i princip i enlighet med ref. [1].

Breslin [5,6] formulerar ekvationerna i tangential och normalkoordinater för att studera krafter i elastiska förankringskablar. Hoffman, Genin [7,8] utnyttjar även dessa koordinater men skriver dessutom om ekvationerna i dimensionslösa para-

metrar. De studerar bogsering med ett flygplan. Wilson och Garbaccio [9] samt Nath, Felix [10] studerar krafter i förankringskablar. Ekvationerna skrives i tangential- och normalkoordinater. I dessa två fall utnyttjas dock ej  $s_0$  som geometrisk variabel utan kabelns båglängd  $s$ . Nath och Felix antar dessutom att sambandet mellan spänning och töjning är icke-linjärt (styckevis linjärt). Per Johansson [11] formulerar de partiella differentialekvationerna i cartesiska koordinater för att studera krafterna i elastiska förankringskablar. För lösning av ekvationerna utnyttjas FEM (finita elementmetoden).

Max Irwine [12] utnyttjar cartesiska koordinater och härleder bl.a. analytiska uttryck för egenmoder och egenfrekvenser hos elastiska kablar. Kabeln förutsättes ha liten pilhöjd (1:8 eller mindre) samt vara fast upphängd i punkter på lika nivå.

Man kan också utnyttja Greens uttryck för töjning:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2}$$

Om  $\epsilon \ll 1$  gäller att  $\tilde{\epsilon} \approx \epsilon$ . Enklare rörelseekvationer kan då erhållas. Kabeln beter sig nästan linjärt elastiskt, om  $\epsilon \ll 1$ . Denna formulering ges av Sander, Geradin, Nyssen och Hogge [13]. (De härleder rörelseekvationerna med hjälp av Hamiltons princip och studerar bl.a. krafter i kraftledningarna påverkade av gravitationskrafter; temperatur samt elektrodynamiska krafter. Som lösningsmetod utnyttjas FEM, (olika tidsintegrationsmetoder jämföres). Detta uttryck för töjning utnyttjas i kap. 4 samt kap. 6. Ekvationerna (6-11), (6-12) i kap. 6 kan jämföras med ekvationer givna i Ref. [13].

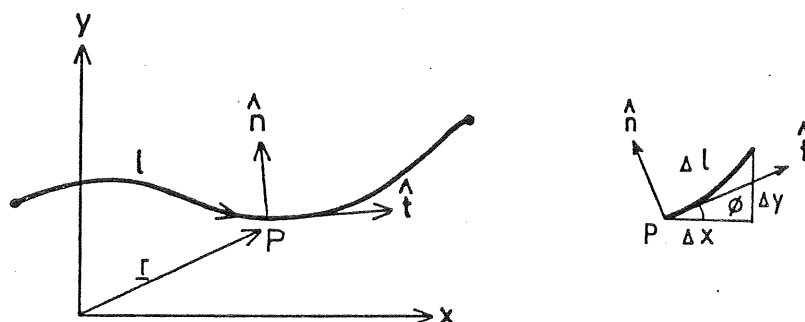
Ekvationerna härledes i det tvådimensionella fallet för att undvika komplikationer samt för att enkelt visa dess samband med varandra. De ekvationer som ges i cartesiska koordinater har samma form i det tredimensionella fallet. Ekvationerna i tangential- och normalkoordinater ges oftast i litteraturen i



det tvådimensionella fallet. Per Johansson [11] visar dock hur jämviktsekvationerna (inklusive hydrodynamiska krafter) givna i cartesiska koordinater kan transformeras till kabelns tangential-, normal- respektive binormalriktning. Denna typ av transformation utnyttjas här för att härleda rörelseekvationerna i tangential- och normalkoordinater.

## 1. EN PLAN KURVAS GEOMETRI M M

En kurva kan beskrivas på parameterform såsom  $x = x(p)$ ,  $y = y(p)$  där  $x$ ,  $y$  är koordinater på kurvan samt  $p$  är en parameter. Kurvans båglängd  $l$  kan exempelvis väljas som parameter (se figur 1). En vektor  $\underline{r} = [x(l), y(l)]$  anger då läget av en godtycklig punkt  $P$  på kurvan.



Figur 2 En plan kurva

Tangentvektorn  $\hat{t}$  i punkten  $P$  blir då

$$\hat{t} = \frac{d\underline{r}}{dl} = \left[ \frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl} \right] \quad (1-1)$$

Vektorn  $\hat{t}$  är en enhetsvektor ty  $dl^2 = dx^2 + dy^2$

eller  $\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 = 1$  dvs  $\left|\frac{d\underline{r}}{dl}\right| = 1$ .

Som enhetsvektor i normalriktningen ( $\perp \hat{t}$ ) erhålles:

$$\hat{n} = \left[ -\frac{dy}{dl}, \frac{dx}{dl} \right] \quad (1-2)$$

Införes kurvans lutningsvinkel  $\phi(l)$  gäller att

$$\frac{dx}{dl} = \cos \phi \quad (1-3)$$

$$\frac{dy}{dl} = \sin \phi \quad (1-4)$$

Om vi i stället väljer att beskriva kurvan med en annan godtycklig parameter  $p$  erhålles med  $\underline{r} = [x(p), y(p)]$  en enhetsvektor  $\hat{t}$  i tangentriftningen som

$$\hat{t} = \frac{\underline{r}'}{|\underline{r}'|} \quad (1-5)$$

där

$$\underline{r}' = \left[ \frac{dx}{dp}, \frac{dy}{dp} \right] \quad (1-6)$$

Vektorn  $\underline{r}'$  är en vektor i tangentriftningen ty

$$\underline{r}' = \left[ \frac{dx}{dp}, \frac{dy}{dp} \right] = \left[ \frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl} \right] \frac{dl}{dp}$$

men är ej en enhetsvektor ty  $\frac{dl}{dp} \neq 1$ .

Enhetsvektorn  $\hat{n}$  i normalriftningen erhålles som

$$\hat{n} = \frac{1}{|\underline{r}'|} \left[ -\frac{dy}{dp}, \frac{dx}{dp} \right] \quad (1-7)$$

Införes kurvans lutningsvinkel  $\phi(p)$  gäller att

$$\frac{1}{|\underline{r}'|} \frac{dx}{dp} = \cos \phi \quad (1-8)$$

$$\frac{1}{|\underline{r}'|} \frac{dy}{dp} = \sin \phi \quad (1-9)$$

Relationen  $l = f(p)$  ges av att:

$$l(p) = \int_0^p \left\{ \left( \frac{dx}{dp} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dp} \right)^2 \right\}^{1/2} dp$$

För transformation av en vektor  $\underline{F} = [F_x, F_y]$  som uttrycks i ett koordinatsystem  $oxy$  till ett annat koordinatsystem med axlar parallella med  $\hat{t}$  respektive  $\hat{n}$  gäller att

$$\tilde{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_t \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x & t_y \\ n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \underline{A} \underline{F} \quad (1-10)$$

där  $t_x, t_y, n_x, n_y$  är komponenter av  $\hat{t}$  respektive  $\hat{n}$ .  
 För transformationsmatrisen  $\underline{A}$  gäller att dess radvektorer  
 är normerade och ortogonala med varandra varför  $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$ .

En kabel i svängning kommer i varje tidsögonblick att beskriva en kurva. Vi antar att dess derivator enligt ovan existerar samt är kontinuerliga. Denna kurvas geometri kommer i det följande att beskrivas med exempelvis koordinaterna  $x = x(s_0, t)$ ,  $y = y(s_0, t)$  där  $s_0$  = kabelns osträckta längd samt  $t$ =tid. I fallet axialstel kabel kommer kabelns längd att hela tiden vara densamma, varför  $s_0$  då motsvarar kurvans båglängd  $l$ . Beaktas kabelns töjning (axiellt elastisk kabel) gäller att kabelns längd ändras i varje tidsögonblick. Vi utnyttjar då kabelns osträckta längd  $s_0$  som parameter  $p$  för att beskriva kabelns geometri (kurva). Kabelns axialkraft kommer hela tiden att vara riktad i kurvans tangentiella riktning  $\hat{t}$ .

## 2. HAMILTONS PRINCIP

I det följande beskrives kortfattat Hamiltons princip. Denna baseras på en funktional I den s.k. verkansintegralen. För ett dynamiskt system i ett "konservativt" kraftfält kan funktionalen I uttryckas som:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T-V) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2-1)$$

där

T = systemets kinetiska energi

V = systemets potentiella energi

$t_2 - t_1$  = ett tidsintervall

L är alltså ofta en funktion av lägeskoordinaterna och dess derivator. Hamiltons princip säger att funktionalen I har ett extremvärde eller att

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (2-2)$$

dvs variationen av I är noll. Detta kan visas med virtuella arbetets princip (se ref. 1). I det fall då vi har icke konservativa krafter i systemet kan integralen (2-1) kompletteras så att

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} W_d dt \quad (2-3)$$

$W_d$  = arbetet av de dissipativa krafterna.

I detta mera generella fall säger Hamiltons princip att

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_d dt = 0 \quad (2-4)$$

där  $\delta W_d$  är det virtuella arbetet av de icke konservativa krafterna. Ekvation (2-4) kan också visas med virtuella arbetets princip.

Ur variationsproblemet (2-4) eller (2-2) erhålles i första hand rörelseekvationerna för systemet och då också systemets rörelse om ekvationerna är lösbara. Lösningen av rörelseekvationerna motsvarar extremalerna till I.

Om ett dynamiskt system har ett tvångsvillkor  $G=0$  sökes extremaler till I under villkoret  $G=0$ . Då måste villkoren  $\delta G=0$  och  $\delta I=0$  uppfyllas. Då kan Lagranges multiplikatormetod utnyttjas. Följande variationsproblem kan då erhållas för ett konservativt system:

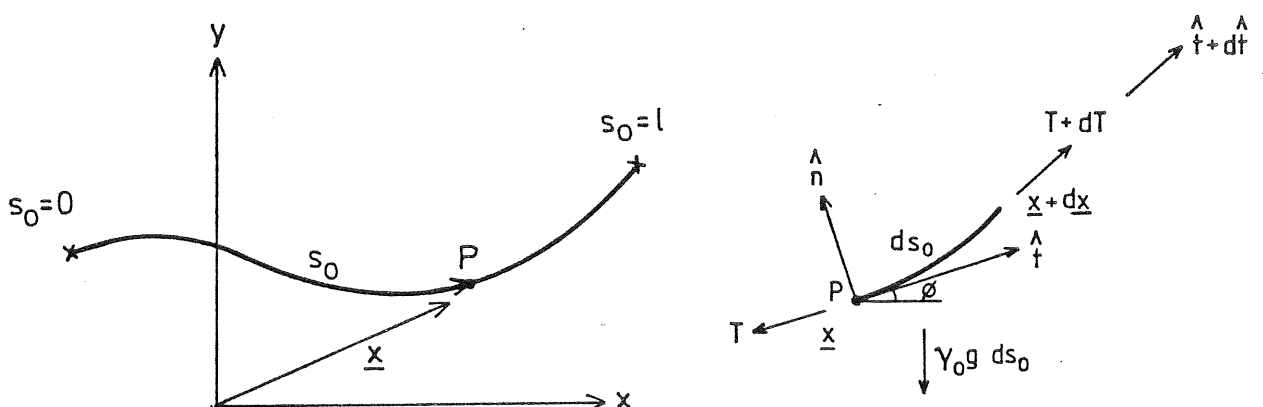
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + \lambda G) dt = 0 \quad (2-5)$$

där  $\lambda$  = Lagranges multiplikator. Ur variationsproblemet (2-5) erhålles då rörelseekvationerna, dock med  $\lambda$  som obekant. Som komplement till dessa gäller tvångsvillkoret. I mekaniska problem har  $\lambda$  en viss fysikalisk betydelse beroende på tvångsvillkorets karaktär (och vald formulering). Utförlig beskrivning av Hamiltons princip och dess tillämpning inom mekanik ges i ref. [14].

### 3. RÖRELSEEKVATIONER FÖR EN AXIALSTEL KABEL

#### 3.1 Ekvationerna i cartesiska koordinater

Studera en kabel som rör sig i  $xy$ -planet. En punkt  $P$  på kabeln beskrives med vektorn  $\underline{x} = [x(s_0, t), y(s_0, t)]$ , se figur 3. Kabeln förutsätts ha någon form av bekanta randvillkor.



Figur 3 En axialstel kabel

De krafter som verkar på ett kabelelement  $ds_0$  är kabelns axialkraft  $T(s_0, t)$  samt gravitationskrafter  $\underline{f} = [0, -\gamma_0 g]$  (se figur 3), där

- $\gamma_0$  = kabelns massa per längdenhet
- $g$  = gravitationskonstanten
- $s_0$  = kabelns längd till punkten  $P$
- $t$  = tid

Kabeln antages vara axialstel, dvs. krafter i dess tangentiella riktning kan ej ge någon töjning (i samma riktning), för övrigt antages den vara helt eftergivlig. Av geometrin i figur 3 framgår att:

$$\underline{\dot{x}} \cdot \underline{\dot{x}} = 1 \quad (3-1)$$

Primmet anger här (och kommer fortsättningsvis att ange) partiell derivata med avseende på variabeln  $s_0$ . Ekvation (3-1) är ett tvångsvillkor som innebär att kabeln måste ha samma längd hela tiden. Ekvation (3-1) kan också skrivas såsom:

$$G = \frac{1}{2} (\underline{\dot{x}} \cdot \underline{\dot{x}} - 1) = 0 \quad (3-2)$$

Kabelns potentiella energi är:

$$V = - \int_0^1 \underline{f} \cdot \underline{x} \, ds_0 \quad (3-3)$$

Kabelns kinetiska energi är:

$$T = \frac{\gamma_0}{2} \int_0^1 \underline{\dot{x}} \cdot \underline{\dot{x}} \, ds_0 \quad (3-4)$$

Hamiltons princip uttryckt enligt (2-5) ger med ekv, (3-2), (3-3) och (3-4) att:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \left( \frac{\gamma_0}{2} \underline{\dot{x}} \cdot \underline{\dot{x}} + \underline{f} \cdot \underline{x} - \lambda G \right) ds_0 dt = \quad (3-5)$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \mathcal{L} \, ds_0 \, dt = 0$$

där  $G$  uttryckes genom (3-2) samt där  $\lambda$  = Lagranges multiplikator.



Variationsproblemet (3-5) ger följande form för Euler Lagranges ekvationer:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad x_i = x, y \quad (3-6)$$

Ekvationerna (3-5) samt (3-6) ger direkt Newtons kraftlag för kabeln såsom:

$$\gamma_0 \ddot{\underline{x}} - \frac{\partial}{\partial s_0} (\lambda \underline{x}') - \underline{f} = 0 \quad (3-7)$$

Ekvationerna (3-7) samt (3-2) eller (3-1) är de partiella differentialekvationer som beskriver förloppet i koordinatsystemet oxy. Lagranges multiplikator blir kabelns axialkraft,  $\lambda = T(s_0, t)$ , vilket beror på att vi utnyttjade tvångsvillkoret på formen (3-2). Detta kan inses genom att utnyttja kraftlagen direkt. Studeras figur 3 ser man att tangentvektorn  $\hat{t}$  i punkten P är

$$\hat{t} = \underline{x}' \quad (3-8)$$

Kraftlagen för elementet  $ds_0$  ger:

$$\gamma_0 \ddot{\underline{x}} ds_0 = (T + dT) (\underline{x}' + d\underline{x}') - T \underline{x}' + \underline{f} ds_0$$

efter förenkling och försummelse av  $dT d\underline{x}'$  erhålles:

$$\gamma_0 \ddot{\underline{x}} - \frac{\partial}{\partial s_0} (T \underline{x}') - \underline{f} = 0 \quad (3-9)$$

Jämföres ekvation (3-7) med (3-9) erhålles att  $\lambda = T$ .

### 3.2 Ekvationerna i tangent och normalkoordinater

Termerna i ekvation (3-9) är vektorer (krafter) uttryckta i koordinatsystemet oxy, dessa kan uttryckas med hjälp av koordinataxlar parallella med kabelns tangent och normalriktning. Transformationssambandet blir (jmf uttryck (1-1), (1-2) med (3-8)) enligt (1-10):

$$\begin{bmatrix} F_t \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^- & y^- \\ -y^- & x^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

eller kortare som

$$\underline{\tilde{F}} = \underline{A} \underline{F}$$

$\underline{F}$  = en vektor uttryckt i koordinatsystemet oxy

$\underline{\tilde{F}}$  = en vektor uttryckt i koordinatsystem med axlar parallella med  $\hat{t}$  resp  $\hat{n}$ .

Transformationsmatrisen  $\underline{A}$  är i detta fall tidsberoende. Transformation av ekv. (3-9) enligt ovan erhålles som:

$$\underline{A} \gamma_0 \ddot{\underline{x}} - \underline{A} \frac{\partial}{\partial s_0} (T \underline{x}^-) - \underline{A} \underline{f} = 0 \quad (3-11)$$

Utvecklas ekvation (3-11) kan följande erhållas:

$$\gamma_0 \ddot{x} x^- + \gamma_0 \ddot{y} y^- = T^- - \gamma_0 g y^- \quad (3-12)$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 \ddot{y} x^- - \gamma_0 \ddot{x} y^- &= T (x^- y'' - y^- x'') - \\ &- \gamma_0 g x^- \end{aligned} \quad (3-13)$$

Ekvationerna (3-12), (3-13) är ett uttryck av kraftlagen applicerad för kabeln i dess tangent respektive normalriktning (dock med variabler x,y).

Inför följande nya beroende variabler:

$$\begin{aligned} \phi (s_0, t) &= \text{kabelkurvans lutningsvinkel} \\ v_t (s_0, t) &= \text{kabelns tangentiella hastighet} \\ v_n (s_0, t) &= \text{kabelns normalhastighet } (\perp \hat{t}) \end{aligned}$$

Utnyttjas den inversa relationen av transformationen (3-10) erhålles relationen mellan hastigheterna som:

$$\dot{x} = v_t x' - v_n y'$$

$$\dot{y} = v_t y' + v_n x'$$

Deriveras dessa partiellt med avseende på tiden erhålles

$$\ddot{x} = \dot{v}_t x' + v_t \dot{x}' - \dot{v}_n y' - v_n \dot{y}' \quad (3-14)$$

$$\ddot{y} = \dot{v}_t y' + v_t \dot{y}' + \dot{v}_n x' + v_n \dot{x}' \quad (3-15)$$

För kabelkurvans lutningsvinkel  $\phi$  gäller i detta fall (jmf uttryck 1-3, 1-4) att

$$x' = \cos\phi \quad (3-16)$$

$$y' = \sin\phi \quad (3-17)$$

Substitution av ekvation (3-14), (3-15) i vänsterledet av ekvation (3-12) ger med uttryck (3-16), (3-17) att

$$\begin{aligned} \gamma_0 \ddot{x} x' + \gamma_0 \ddot{y} y' &= \gamma_0 (\dot{v}_t - v_t \ddot{\phi} \sin\phi \cos\phi - \\ &- \dot{v}_n \sin\phi \cos\phi - v_n \dot{\phi} \cos^2\phi + v_t \cos\phi \sin\phi + \\ &+ \dot{v}_n \cos\phi \sin\phi - v_n \dot{\phi} \sin^2\phi) = \\ &= \gamma_0 \dot{v}_t - \gamma_0 v_n \dot{\phi} \end{aligned} \quad (3-18)$$

Substitution av ekvation (3-14) (3-15) i vänsterledet av ekvation (3-13) ger med uttryck (3-16), (3-17) att

$$\begin{aligned}
\gamma_0 \ddot{y}x^- - \gamma_0 \ddot{x}y^- &= \gamma_0 (\dot{v}_t \sin\phi \cos\phi + v_t \dot{\phi} \cos^2\phi \\
&+ \dot{v}_n \cos^2\phi - v_n \dot{\phi} \sin\phi \cos\phi - \dot{v}_t \sin\phi \cos\phi \\
&+ v_t \dot{\phi} \sin^2\phi + \dot{v}_n \sin^2\phi + v_n \dot{\phi} \cos\phi \sin\phi) \\
&= \gamma_0 \dot{v}_n + \gamma_0 v_t \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{3-19}$$

Införes uttrycken (3-16), (3-17) i högerledet i ekvationerna (3-12) och (3-13) erhålles med likheterna (3-18), (3-19) att:

$$\gamma_0 \dot{v}_t - \gamma_0 v_n \dot{\phi} = T^- - \gamma_0 g \sin\phi \tag{3-20}$$

$$\gamma_0 \dot{v}_n + \gamma_0 v_t \dot{\phi} = T\phi - \gamma_0 g \cos\phi \tag{3-21}$$

Ekvationerna (3-20) och (3-21) uttrycker samma sak som ekvationerna (3-12) och (3-13) men har andra beroende variabler.

Tvångsvillkoret (3-1) kan uttryckas med två ekvationer. Detta är redan utfört genom uttryck (3-16) och (3-17). Tidsderiveras ekv. (3-16) samt (3-17) partiellt med avseende på tiden  $t$  erhålles:

$$\dot{x}^- = -\dot{\phi} \sin\phi \tag{3-22}$$

$$\dot{y}^- = \dot{\phi} \cos\phi \tag{3-23}$$

Utnyttjas transformationssambandet (3-10) med uttryck (3-16) och (3-17) erhålles relationen mellan hastigheter som

$$v_t = \dot{x} \cos\phi + \dot{y} \sin\phi \tag{3-24}$$

$$v_n = \dot{y} \cos\phi - \dot{x} \sin\phi \tag{3-25}$$

Derivering av dessa partiellt med avseende på  $s_0$  ger:

$$v_t^- = \dot{x}^- \cos\phi - \dot{x}\phi^- \sin\phi + \dot{y}^- \sin\phi + \dot{y}\phi^- \cos\phi \quad (3-26)$$

$$v_n^- = \dot{y}^- \cos\phi - \dot{y}\phi^- \sin\phi - \dot{x}^- \sin\phi - \dot{x}\phi^- \cos\phi \quad (3-27)$$

Substitution av uttryck (3-22), (3-23) i ekv. (3-26), (3-27) ger med uttryck (3-24) och (3-25) att

$$v_t^- = \phi^- v_n \quad (3-28)$$

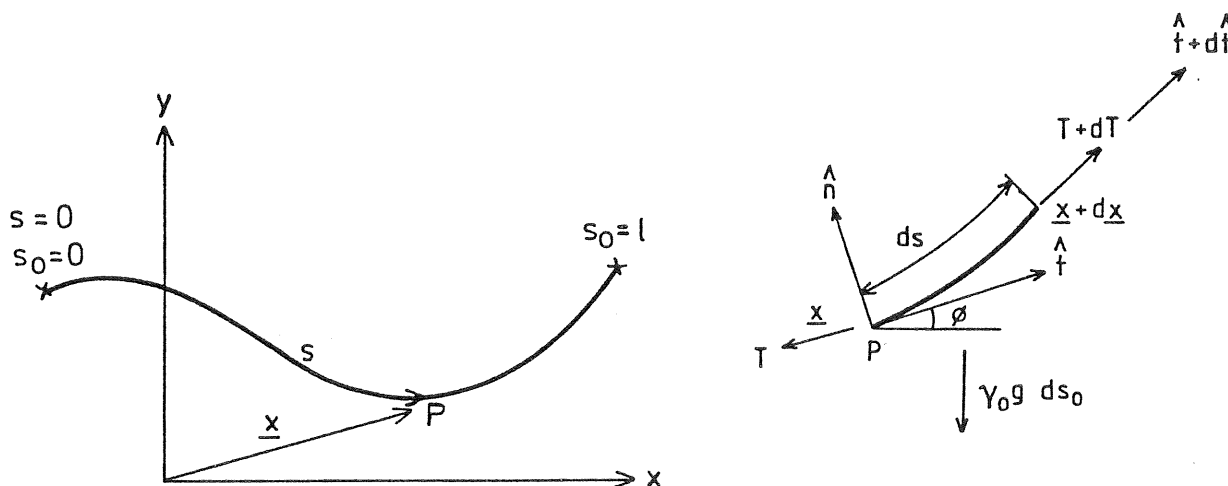
$$v_n^- = \dot{\phi} - v_t \phi^- \quad (3-29)$$

Ekvationerna (3-20), (3-21) uttrycker kraftlagen för kabeln, ekv. (3-28) och (3-29) är tvångsvillkoren. Dessa fyra partiella differentialekvationer beskriver förloppet. De fyra obekanta beroende variablerna är  $\phi$ ,  $v_t$ ,  $v_n$  och T.

## 4. RÖRELSEEKVATIONER FÖR EN AXIELLT ELASTISK KABEL

4.1 Ekvationerna i cartesiska koordinater

En elastisk kabel rör sig i  $xy$ -planet. En punkt  $P$  på kabeln beskrives med en vektor  $\underline{x} = [x(s_0, t), y(s_0, t)]$  (se figur 4), där  $s_0$  är kabelns osträckta längd ifrån  $s_0 = 0$  till punkten  $P$ , samt  $t$  är tid. Kabeln förutsättes ha någon form av bekanta randvillkor.



Figur 4 En axiellt elastisk kabel

Vid ett givet tidsögonblick är kabelns längd ifrån  $s=0$  till punkten  $P$   $s$ , denna längd ändras hela tiden eftersom kabeln töjer sig. En oberoende variabel med vilken vi kan beskriva en punkt  $P$  är kabelns osträckta längd  $s_0$ , dvs. punkten  $P$  är i fysikalisk mening en punkt som vi märkt, med exempelvis färg, då kabeln är helt otöjd.

För ett kabelelement  $ds$  antages massan vara konstant så att

$$\gamma_0 ds_0 = \gamma ds \quad (4-1)$$

där

$\gamma_0$  = kabelns massa per längdenhet osträckt längd

$\gamma$  = kabelns massa per längdenhet i ett sträckt tillstånd

Kabeln antages axiellt elastisk men för övrigt helt böjlig. Spänningarna är jämnt fördelade över ett tvärsnitt. Kabelkraften  $T(s_0, t)$  verkar i dess tangentiella riktning och antages följa följande konstitutiva samband:

$$T = K \varepsilon \quad (4-2)$$

$K =$  konstant

$\varepsilon =$  kabelns tangentiella töjning

Töjningen  $\varepsilon$  kan definieras som

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (4-3)$$

Ekvation (4-3) uttrycker kabelelementets längdändring. Ekvation (4-2) samt (4-3) ger tillsammans:

$$T = K \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (4-4)$$

Ekvation (4-4) uttrycker att kabelkraften  $T$  är proportionell med kabelns längdändring, detta är Hookes lag för kabeln. Denna form kan i praktiken tillämpas endast om töjningarna är små. Angående materialegenskaper hos förankringskablar se [15].

Ekvation (4-3) kan skrivas om som

$$\varepsilon + 1 = \frac{ds}{ds_0} \quad (4-5)$$

Kvadrering på båda sidor ger:

$$\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1 = \frac{ds^2}{ds_0^2} \quad (4-6)$$

Försummas första termen i vänsterledet ( $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$  om  $\varepsilon \ll 1$ ) erhålles ett annat uttryck för töjning:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2} \quad (4-7)$$

Uttrycken (4-3) och (4-7) är nästan lika om  $\epsilon \ll 1$ , då är  $\epsilon \approx \tilde{\epsilon}$ . Ekv. (4-7) är Greens uttryck för töjning.

Studerar figur (4) inses att:

$$ds^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x} \quad (4-8)$$

Ekvationerna (4-3), (4-8) respektive (4-7), (4-8) ger följande uttryck:

$$\epsilon = (\underline{x}^- \cdot \underline{x}^-)^{1/2} - 1 \quad (4-9)$$

samt

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{x}^- \cdot \underline{x}^- - 1) \quad (4-10)$$

Kraften  $T$  i kabeln uträttar ett arbete. Arbetet  $dW$  som uträttats på elementet  $ds$  är för en kabel som följer Hookes lag (dvs. ekv. (4-2), (4-3), (4-4)):

$$dW = \frac{1}{2} K \epsilon^2 ds_0 \quad (4-11)$$

Det arbete  $dW$  som uträttats är lika med elementets töjningsenergi för denna materialmodell. För en kabel med längden  $l$  erhålles dess totala töjningsenergi genom integrering av (4-11) som

$$V_t = \frac{1}{2} K \int_0^l \epsilon^2 ds_0 \quad (4-12)$$

Vi kan nu bestämma kabelns töjningsenergi med ekv. (4-9) och (4-12). För små töjningar är  $\epsilon \approx \tilde{\epsilon}$  varför vi även utnyttjar ekv. (4-10) tillsammans med ekv. (4-12).

Kabelns kinetiska energi  $T$  blir med (4-1)

$$T = \frac{1}{2} \gamma_0 \int_0^l \dot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} ds_0 \quad (4-13)$$



På kabeln verkar gravitationskrafter  $\underline{f} = [0, -\gamma_0 g]$ . Dess lägesenergi  $V_1$  blir

$$V_1 = - \int_0^1 \underline{f} \cdot \underline{x} \, ds_0 \quad (4-14)$$

Kabelns totala potentiella energi  $V$  blir

$$V = V_1 + V_t \quad (4-15)$$

Hamiltons princip uttryckt enligt (2-2) ger med ekv, (4-12), (4-13), (4-14) och (4-15) att

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \mathcal{L} \, ds_0 \, dt = 0 \quad (4-16)$$

där Lagrangetätheten  $\mathcal{L}$  är

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \gamma_0 \underline{\dot{x}} \cdot \underline{\dot{x}} + \underline{f} \cdot \underline{x} - \frac{1}{2} K \epsilon^2 \quad (4-17)$$

Euler Lagranges ekvationer blir i detta fall samma som tidigare:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad (4-18)$$

där

$$x_i = x, y.$$

Utföres derivering enligt (4-18) med  $\mathcal{L}$  enligt (4-17) och med töjningarna bestämda enligt (4-9) respektive (4-10) erhålles två typer av rörelseekvationer för kabeln:

$$\gamma \underline{\ddot{x}} - \frac{\partial}{\partial s_0} \left( K \epsilon \frac{\underline{x}'}{1+\epsilon} \right) - \underline{f} = 0 \quad (4-19)$$

med  $\epsilon$  enligt (4-9)

$$\gamma \ddot{\underline{x}} - \frac{\partial}{\partial s_0} (K \tilde{\epsilon} \underline{x}') - \underline{f} = 0 \quad (4-20)$$

med  $\tilde{\epsilon}$  enligt (4-10).

Ekvationerna (4-19) eller (4-20) är de partiella differential-  
ekvationer som beskriver förloppet för en axiellt elastisk ka-  
bel. De obekanta är  $\underline{x} = [x, y]$ . Vi noterar samtidigt att kabel-  
kurvans tangentvektor  $\hat{t}$  enligt ekv. (4-19) blir

$$\hat{t} = \frac{1}{1+\epsilon} \underline{x}' \quad (4-21)$$

Om vi jämför ekv. (4-19) med (4-20) så kan vi genom identifika-  
tion se att kabelkraften i ekv. (4-20) följer sambandet

$$T = K \tilde{\epsilon} (1 + \epsilon)$$

Om vi hade en kabel som följde detta samband så skulle ekv. (4-20)  
vara exakt oberoende om kabelns längdändring var stor eller liten.  
För små töjningar erhålles:

$$T = K \tilde{\epsilon} (1 + \epsilon) \approx K \tilde{\epsilon} \approx K \epsilon$$

Vi erhåller då en kabel som nästan beter sig linjärt elastiskt.

#### 4.2 Ekvationerna i tangent och normalkoordinater

Ekvationerna (4-19) kan uttryckas i "tangent och normal-  
koordinater". Proceduren som följer är i princip densamma  
som i tidigare avsnitt 3.2. Tangent och normalvektorn  $\hat{t}$   
resp.  $\hat{n}$  i punkten P kan erhållas som

$$\hat{t} = \frac{1}{1+\epsilon} [x', y'] \quad (4-22)$$

$$\hat{n} = \frac{1}{1+\epsilon} [-y', x'] \quad (4-23)$$

Transformationssambandet blir enligt (1-10), (4-22), (4-23)

$$\begin{bmatrix} F_t \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\epsilon} \begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \underline{A} \underline{F} \quad (4-24)$$

Införes lutningsvinkeln  $\phi$  ( $s_0$ ,  $t$ ) erhålles:

$$\cos\phi = \frac{1}{1+\epsilon} \dot{x} \quad (4-25)$$

$$\sin\phi = \frac{1}{1+\epsilon} \dot{y} \quad (4-26)$$

Införes uttryck (4-25) och (4-26) för lutningsvinkeln i transformationsmatrisen  $\underline{A}$  erhålles:

$$\begin{bmatrix} F_t \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

Införes nu kraften  $T = K\epsilon$  i ekv, (4-19) kan differential-ekvationerna transformeras enligt (4-27) på samma sätt som tidigare. Ekvationerna har samma form (jmfv ekv (3-20), (3-21)).

$$\gamma_0 \dot{v}_t - \gamma_0 v_n \dot{\phi} = T - \gamma_0 g \sin\phi \quad (4-28)$$

$$\gamma_0 \dot{v}_n + \gamma_0 v_t \dot{\phi} = T\phi - \gamma_0 g \cos\phi \quad (4-29)$$

Men i detta fall gäller att  $T = K\epsilon$  och de geometriska sambanden uttryckes genom ekv. (4-25) och (4-26). Deriveras dessa partiellt med avseende på tiden  $t$  ger detta att

$$\dot{\dot{x}} = \dot{\epsilon} \cos\phi - (1+\epsilon) \dot{\phi} \sin\phi \quad (4-30)$$

$$\dot{\dot{y}} = \dot{\epsilon} \sin\phi + (1+\epsilon) \dot{\phi} \cos\phi \quad (4-31)$$

Tangenthastigheten  $v_t$  och normalhastigheten  $v_n$  erhålles enligt (4-27) som

$$v_t = \dot{x} \cos\phi + \dot{y} \sin\phi \quad (4-32)$$

$$v_n = \dot{y} \cos\phi - \dot{x} \sin\phi \quad (4-33)$$

Partiell derivering av dessa med avseende på  $s_0$  ger

$$v_t^- = \dot{x}^- \cos \phi - \dot{x} \phi^- \sin \phi + \dot{y}^- \sin \phi + \dot{y} \phi^- \cos \phi \quad (4-34)$$

$$v_n^- = \dot{y}^- \cos \phi - \dot{y} \phi^- \sin \phi - \dot{x}^- \sin \phi - \dot{x} \phi^- \cos \phi \quad (4-35)$$

Substitution av ekv. (4-30) och (4-31) i ekvationerna (4-34) och (4-35) ger

$$v_t^- = \dot{\epsilon} \cos^2 \phi - (1+\epsilon) \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \dot{x} \phi^- \sin \phi \quad (4-36)$$

$$+ \dot{\epsilon} \sin^2 \phi + (1+\epsilon) \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + \dot{y} \phi^- \cos \phi$$

$$v_n^- = \dot{\epsilon} \sin \phi \cos \phi + (1+\epsilon) \dot{\phi} \cos^2 \phi - \dot{y} \phi^- \sin \phi \quad (4-37)$$

$$- \dot{\epsilon} \sin \phi \cos \phi + (1+\epsilon) \dot{\phi} \sin^2 \phi - \dot{x} \phi^- \cos \phi$$

Efter förenkling av uttryck (4-36), (4-37) ger relationen mellan hastigheterna enligt uttryck (4-32), (4-33) de geometriska sambanden i nya beroende variabler som:

$$v_t^- = \dot{\epsilon} + v_n^- \phi^- \quad (4-38)$$

$$v_n^- = (1+\epsilon) \dot{\phi} - v_t^- \phi^- \quad (4-39)$$

Ekvationerna (4-2), (4-28), (4-29), (4-38) samt (4-39) är de fem ekvationer som beskriver förloppet. De beroende variablerna är  $\epsilon$ ,  $T$ ,  $\phi$ ,  $v_t^-$  och  $v_n^-$ . Genom substitution av ekv. (4-2) i ekv. (4-28) och (4-29) elimineras kabelkraften  $T$ . Sättes töjningen  $\epsilon = 0$  i ekv. (4-38) och (4-39) erhålles samma differentialekvationer som i avsnitt 3.2.

## 5. EN KABELS JÄMVIKTLÄGE

I det följande anges en slak kabels jämviktsläge för fallen axialstel respektive axialelastisk kabel under inverkan av gravitationskrafter. Vi utgår ifrån ekvation (4-19) samt sätter  $\gamma \underline{x} = 0$ . Utveckling av denna ger:

$$\frac{d}{ds_0} \left( K \epsilon_0 \frac{x'_0}{1 + \epsilon_0} \right) = 0 \quad (5-1)$$

$$\frac{d}{ds_0} \left( K \epsilon_0 \frac{y'_0}{1 + \epsilon_0} \right) = \gamma_0 g \quad (5-2)$$

där  $x_0 = x_0(s_0)$ ,  $y_0 = y_0(s_0)$  nu anger koordinaterna för ett jämviktsläge.

Integration av ekv. (5-1) och (5-2) ger

$$H_0 = K \epsilon_0 \frac{x'_0}{1 + \epsilon_0} = \gamma g a \quad (5-3)$$

$$V_0 = K \epsilon_0 \frac{y'_0}{1 + \epsilon_0} = \gamma_0 g s_0 \quad (5-4)$$

där  $H_0$ ,  $V_0$  är kabelns horisontalkraft respektive vertikal-kraft samt  $a$  är en konstant (eller parameter). Kraften  $T_0(s_0)$  erhålles ur ekv (5-3) och (5-4) som

$$T_0 = \gamma_0 g \sqrt{a^2 + s_0^2} \quad (5-5)$$

Dessutom gäller att

$$T_0 = K \epsilon_0 \quad (5-6)$$

Ekvation (5-3), (5-5) och (5-6) ger tillsammans att:

$$x_0 = \int_0^{s_0} \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 + s_0^2}} + \frac{\gamma_0 g a}{K} \right\} ds_0 \quad (5-7)$$

Integrering av (5-7) ger

$$x_0 = a \operatorname{arcsinh} \left( \frac{s_0}{a} \right) + \frac{\gamma_0 g a}{K} s_0 \quad (5-8)$$

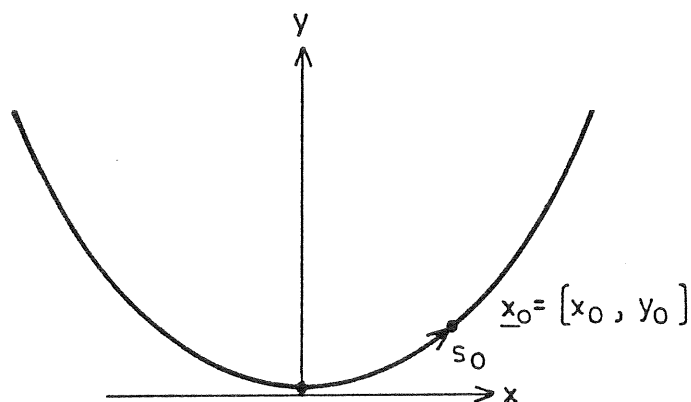
Ekvation (5-4), (5-5) och (5-6) ger tillsammans

$$y_0 = \int_0^{s_0} \left\{ \frac{s_0}{\sqrt{a^2 + s_0^2}} + \frac{\gamma_0 g s_0}{K} \right\} ds_0 \quad (5-9)$$

Integration av (5-9) ger

$$y_0 = \sqrt{a^2 + s_0^2} + \frac{\gamma_0 g s_0^2}{2K} - a \quad (5-10)$$

Vi har i uttrycken valt lämpliga integrationskonstanter så att kabelns lägsta punkt ligger i origo (se fig 5). Parametern  $s_0$  är noll i origo.



Figur 5

Låt  $K \rightarrow \infty$  i uttrycken (5-8) och (5-10). Då erhålles jämviktsläget för en axialstel kabel enligt följande:

$$x_0 = a \operatorname{arc} \sin h \left( \frac{s_0}{a} \right) \quad (5-11)$$

$$y_0 = \sqrt{a^2 + s_0^2} - a \quad (5-12)$$

För kabelkraften  $T$  gäller även här uttryck (5-5). Konstanten  $a$  bestämmes av randvillkoren, enklast genom ekv. (5-3) om kabelns horisontalkraft är känd. I det oelastiska fallet kan noteras att en substitution av ekv. (5-12) i ekv. (5-5) ger:

$$T_0 = \gamma g (y_0 + a) \quad (5-13)$$

Lösningarna enligt ovan är välkända, dessa ges i ref. [16]. Denna bok behandlar flera olika typer av lösningar, som kan vara bra att känna till.

6. SMÅ SVÄNGNINGAR AV EN AXIALELASTISK KABEL  
KRING ETT JÄMVIKTSLÄGE M.M.

Under antagande av små svängningar kring ett jämviktsläge kan rörelseekvationerna för en svängande kabel förenklas. Speciellt studeras kabelns töjningsenergi  $V_t$ , enligt ekv (4-12) gäller:

$$V_t = \frac{1}{2} K \int_0^1 \epsilon^2 ds_0 \quad (6-1)$$

med  $\epsilon$  enligt (4-10)

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{x}' \cdot \underline{x}' - 1) \quad (6-2)$$

Ändra variablerna så att  $\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{u}$  där  $\underline{x}_0 = [x_0, y_0]$  anger kabelns jämviktsläge och  $\underline{u} = [u, v]$  förskjutningar ifrån detta,  $\underline{x}_0$  är då oberoende av tiden. Töjningen i ekv. (6-1) kan uppdelas så att  $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_0 + \tilde{\epsilon}_d$  där  $\tilde{\epsilon}_0$  är den statiska töjningen och  $\tilde{\epsilon}_d$  är den dynamiska töjningen. Vi får då:

$$V_t = \frac{1}{2} K \int_0^1 (\tilde{\epsilon}_0^2 + \tilde{\epsilon}_d^2 + 2\tilde{\epsilon}_0 \tilde{\epsilon}_d) ds_0$$

Om vi ändrar referens får vi töjningsenergin "ifrån" jämviktsläget räknat som

$$V_t = \frac{1}{2} K \int_0^1 (\tilde{\epsilon}_d^2 + 2\tilde{\epsilon}_0 \tilde{\epsilon}_d) ds_0 \quad (6-3)$$

Substitutionen  $\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{u}$  i ekv (6-2) ger

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{x}'_0 \cdot \underline{x}'_0 - 1) + \underline{u}' \cdot \underline{x}'_0 + \frac{1}{2} \underline{u}' \cdot \underline{u}'$$



Vi får därav

$$\tilde{\epsilon}_0 = \frac{1}{2} (\underline{x}'_0 \cdot \underline{x}'_0 - 1) \quad (6-4)$$

$$\tilde{\epsilon}_d = \frac{1}{2} \underline{u}' \cdot \underline{u}' + \underline{u}' \cdot \underline{x}'_0 \quad (6-5)$$

Substitution av (6-4) och (6-5) i (6-3) ger om vi enbart medtager högst andra ordningens termer

$$V_t = \frac{1}{2} K \int_0^1 (\underline{u}' \cdot \underline{x}'_0)^2 + 2\tilde{\epsilon}_0 \left( \frac{1}{2} \underline{u}' \cdot \underline{u}' + \underline{u}' \cdot \underline{x}'_0 \right) ds_0 \quad (6-6)$$

Vi antar alltså att  $u', v' \ll 1$ . Kabelns lägesenergi är:

$$V_l = - \int_0^1 \underline{f} \cdot \underline{u} \, ds_0 \quad (6-7)$$

Kabelns kinetiska energi är:

$$T = \frac{1}{2} \gamma_0 \int_0^1 \dot{\underline{u}} \cdot \dot{\underline{u}} \, ds_0 \quad (6-8)$$

Hamiltons princip ger med (6-6), (6-7) och (6-8) att

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \dot{\underline{u}} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{f} \cdot \underline{u} - \frac{K}{2} (\underline{u}' \cdot \underline{x}'_0)^2 - K\tilde{\epsilon}_0 \left( \frac{1}{2} \underline{u}' \cdot \underline{u}' + \underline{u}' \cdot \underline{x}'_0 \right) \right\} ds_0 dt = 0$$

Rörelseekvationerna erhålles ur Euler Lagranges ekv. på samma sätt som tidigare

$$\gamma_0 \ddot{\underline{u}} - K \frac{\partial}{\partial s_0} (\tilde{\epsilon}_0 \underline{u}' + \tilde{\epsilon}_0 \underline{x}'_0 + (\underline{x}'_0 \cdot \underline{u}') \underline{x}'_0) - \underline{f} = 0$$

men  $K \frac{\partial}{\partial s_0} (\tilde{\epsilon}_0 \underline{x}'_0) + \underline{f} = 0$

varför vi får

$$\gamma_0 \ddot{\underline{u}} - K \frac{\partial}{\partial s_0} (\tilde{\epsilon}_0 \underline{u}' + (\underline{x}'_0 \cdot \underline{u}') \underline{x}'_0) = 0 \quad (6-9)$$

Ekv. (6-9) är rörelseekvationerna för små svängningar kring ett jämviktsläge.  $\underline{x}_0$  och  $\epsilon_0$  bestämmes genom en särskild statistisk analys. Hade högre ordningens termer ej försumrats i töjningsenergin hade vi i stället fått

$$\gamma_0 \ddot{\underline{u}} - \frac{\partial}{\partial s_0} (K \tilde{\epsilon}_0 \underline{u}' + \frac{1}{2} K (\underline{u}' + 2 \underline{x}'_0) \cdot \underline{u}') (\underline{x}'_0 + \underline{u}') = 0 \quad (6-10)$$

En annan form av ekvationer som kan vara lämpliga ur lösningssynpunkt erhålles om vi i stället gör substitutionen  $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{u}$  där  $\underline{x}_1$  beskriver en referenskonfiguration sådan att kabeln är helt osträckt (ex. den oelastiska kedjelinjen) samt  $\underline{u}$  svängningarna ifrån denna. Vi får då:

$$\gamma_0 \ddot{\underline{u}} - \frac{\partial}{\partial s_0} (K \tilde{\epsilon} (\underline{x}'_1 + \underline{u}')) - \underline{f} = 0 \quad (6-11)$$

med  $\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{u}' + 2 \underline{x}'_1) \cdot \underline{u}' \quad (6-12)$

Det bör påpekas; ekv. (6-10) samt ekv. (6-11), (6-12) gäller för stora svängningar till skillnad från ekv. (6-9). Angående lösning av (6-11), (6-12) se ref. [13].

## REFERENSER

- 1) E.J. Routh. Advanced dynamics of a system of rigid bodies. 6:e upplagan (1955).
- 2) A.G. Pugsley. On the natural frequencies of suspension chains. Quarterly Journal Mech. and Appl. Math. Pt. 4 (1949).
- 2) Saxon and Cahn. Quarterly Journal of Mech. and Appl. Math.
- 4) Jacob M. Abel. Cable interactions in a Depth Controlled Submersible.
- 5) John P. Breslin. Dynamic Forces Exerted by Oscillating Cables. Journal of Hydronautics. Vol. 8, No. 1. Jan.(1974).
- 6) Static and Dynamics of Anchoring Cables in Waves. Journal of Hydronautics. Oct. (1976). T.R. Goodman och J.P. Breslin.
- 7) The Dynamical Behaviour of a Flexible Cable in a Uniform Flow Field. R.R. Huffman och J. Genin. The Aeronautical Quarterly. 23. 183-195 (1971).
- 8) Coupling of Longitudinal and Transverse Motion of a Flexible Cable in a Uniform Flow Field. R.R. Huffman och J. Genin. The Journal of the Acoustical Society of America. Vol. 52, Num. 1 (part 2) (1972).
- 9) Dynamics of ship Anchor-lines in waves and current. B.W. Wilson och D.H. Garbaccio. Journal of the Waterways and Harbours Division. WH4, Nov. (1969).
- 10) Dynamics of single point mooring in deep water. John H. Nath, Michael P. Felix. Journal of the Waterways, Harbours and Coastal Eng. Division.
- 11) A finite element model for dynamic analysis of mooring cables. Per I. Johansson. Doktorsavhandling. Massachusetts Institute of Technology. Jan. (1976).

- 12) Studies in statics and dynamics of simple cable systems. Max Irvine. Avhandling för Civilingenjörsexamen. California Institute of Technology. Jan. (1974).
- 13) Accuracy versus computational efficiency in nonlinear dynamics. G. Sander, M. Geradin, C. Nyssen och M. Hogge. Computer methods in applied mechanics and engineering 17/18 (1979) 315-340.
- 14) Solid Mechanics: A Variational Approach Dym Shames. Mc Graw Hill (1973).
- 15) Elastic Characteristics of moorings. B.W. Wilson. Journal of the Waterways and Harbours Division. Nov. (1967).
- 16) Statics. A.S. Ramsey. Cambridge at the University Press (1960).

Department of Hydraulics  
Chalmers University of Technology

Report Series A

- A:1 Bergdahl, L.: Physics of ice and snow as affects thermal pressure. 1977.
- A:2 Bergdahl, L.: Thermal ice pressure in lake ice covers. 1978.
- A:3 Häggström, S.: Surface Discharge of Cooling Water. Effects of Distortion in Model Investigations. 1978.
- A:4 Sellgren, A.: Slurry Transportation of Ores and Industrial Minerals in a Vertical Pipe by Centrifugal Pumps. 1978.
- A:5 Arnell, V.: Description and Validation of the CTH-Urban Runoff Model. 1980.
- A:6 Sjöberg, A.: Calculation of Unsteady Flows in Regulated Rivers and Storm Sewer Systems. (in Swedish). 1976.
- A:7 Svensson, T.: Water Exchange and Mixing in Fjords. Mathematical Models and Field Studies in the Byfjord. 1980.

Report Series B

- B:1 Bergdahl, L.: Beräkning av vågkrafter. 1977. Ersatts med 1979:07
- B:2 Arnell, V.: Studier av amerikansk dagvattenteknik. 1977.
- B:3 Sellgren, A.: Hydraulic Hoisting of Crushed Ores. A feasibility study and pilot-plant investigation on coarse iron ore transportation by centrifugal pumps. 1977.
- B:4 Ringesten, B.: Energi ur havsströmmar. 1977.
- B:5 Sjöberg, A. and Asp, T.: Brukar-anvisning för ROUTE-S. En matematisk modell för beräkning av icke-stationära flöden i floder och kanaler vid strömmande tillstånd. 1977.
- B:6 Annual Report 76/77.
- B:7 Bergdahl, L. and Wernersson, L.: Calculated and expected Thermal Ice Pressures in Five Swedish Lakes. 1977.
- B:8 Göransson, C-G. and Svensson, T.: Drogue Tracking - Measuring Principles and Data Handling.
- B:9 Göransson, C-G.: Mathematical Model of Sewage Discharge into confined, stratified Basins - Especially Fjords.
- B:10 Arnell, V. and Lyngfelt, S.: Beräkning av dagvattenavrinning från urbana områden. 1978.
- B:11 Arnell, V.: Analysis of Rainfall Data for Use in Design of Storm Sewer Systems. 1978.
- B:12 Sjöberg, A.: On Models to be used in Sweden for Detailed Design and Analysis of Storm Drainage Systems. 1978.
- B:13 Lyngfelt, S.: An Analysis of Parameters in a Kinematic Wave Model of Overland Flow in Urban Areas. 1978.
- B:14 Sjöberg, A. and Lundgren, J.: Manual for ILLUDAS (Version S2). Ett datorprogram för dimensionering och analys av dagvattensystem.
- B:15 Annual Report 78/79.
- B:16 Nilsdal, J-A. and Sjöberg, A.: Dimensionerande regn vid höga vattenstånd i Göta Älv.
- B:17 Stöllman, L-E.: Närkes Svartå. Hydrologisk inventering. 1979.
- B:18 Svensson, T.: Tracer Measurements of Mixing in the Deep Water of a Small, Stratified Sill Fjord.
- B:19 Svensson, T., Degerman, E., Jansson, B. and Westerlund, S.: Energiutvinning ur sjö- och havssediment. En förstudie.

Report Series B

- B:20 Annual Report 1979
- B:21 Stöllman, L-E.: Närkes Svartå. Inventering av vattentillgång och vattenanvändning. 1980.
- B:22 Häggström, S. och Sjöberg, A.: Effects of Distortion in Physical Models of Cooling Water Discharge. 1979.
- B:23 Sellgren, A.: A Model for Calculating the Pumping Cost of Industrial Slurries. 1981.
- B:24 Lindahl, J.: Rörelseekvationen för en kabel. 1981
- B:25 Bergdahl, L. och Olsson, G.: Konstruktioner i havet. Vågkrafter, rörelser. En inventering av datorprogram.
- B:26 Annual Report 1980.
- B:27 Nilssdal, J-A.: Teknisk-ekonomisk dimensionering av avloppsledningar. En litteraturstudie om datormodeller. 1981.
- B:28 Sjöberg, A.: The Sewer Network Models DAGVL-A and DAGVL-DIFF. 1981.

