



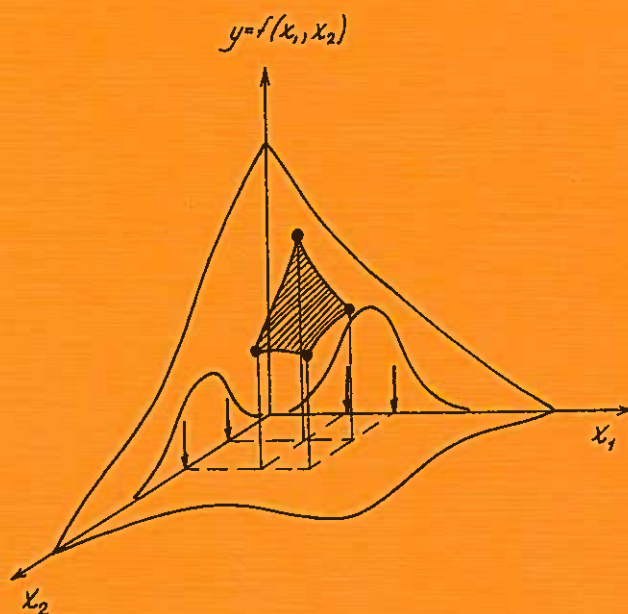
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GEOHYDROLOGISKA FORSKNINGSGRUPPEN

Geologi
Geoteknik med grundläggning
Vattenbyggnad
Vattenförsörjnings- och avloppsteknik

ISSN 0347 · 8165

Punktskattningsmetoden

En statistisk metod användbar på
geotekniska problem



GÖRAN SÄLLFORS



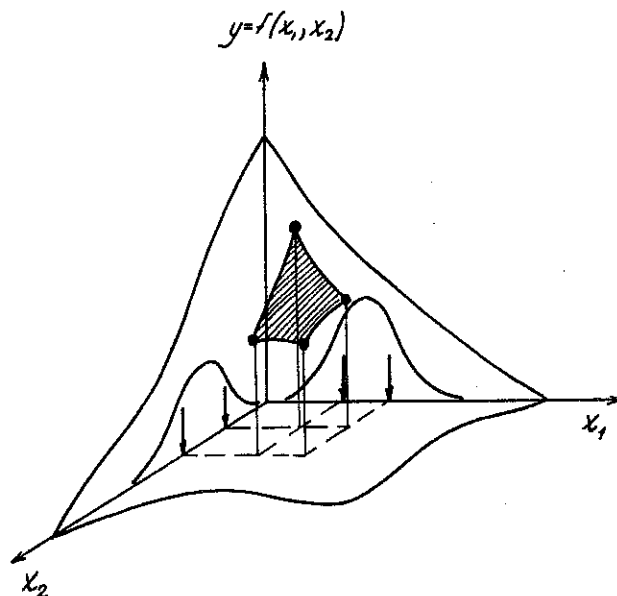
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GEOHYDROLOGISKA FORSKNINGSGRUPPEN

Geologi
Geoteknik med grundläggning
Vattenbyggnad
Vattenförsörjnings- och avloppsteknik

ISSN 0347 - 8165

Punktskattningsmetoden

En statistisk metod användbar på
geotekniska problem



GÖRAN SÄLLFORS

Adress : Geohydrologiska forskningsgruppen
Chalmers tekniska högskola
412 96 Göteborg
Tel. 031/72 21 67



FÖRORD

I en del tidigare publikationer i denna serie (78, 84, 86 och 87) har statistiska metoder använts vid analys av grundvattentrycknivåer. Ett liknande betraktelsesätt bör sedan användas i den fortsatta analysen, men att använda klassisk matematisk statistik på ingenjörstekniska problem är inte helt lätt. Randvillkoren för jord och konstruktioner är i den fysiska världen förhållandevis lättförståeliga, men då de skall formuleras matematiskt blir det ofta mycket komplicerat. Det medför att vissa förenklingar, ibland ganska långtgående sådana, måste göras. De metoder som redovisas i denna rapport bygger främst på ett betraktelsesätt som förespråkas av Professor M. Harr, Purdue University, USA (se referens 3), och är inte i alla avseenden invändningsfria. Det är emellertid författarens uppfattning att metoderna har en stor potential. Metoderna är relativt enkla att använda, och förhoppningsvis, kommer allt fler att skaffa sig egna erfarenheter genom att prova dem. Denna rapport syftar till att presentera metoderna och underlätta användandet för att på sikt få till stånd en konstruktiv debatt.

Arbetet ingår som en fristående del i BFR-projektet 870094-7.

Göteborg i september 1989

Göran Sällfors

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	<u>Sid</u>
FÖRORD	i
INNEHÅLLSFÖRTECKNING	ii
BETECKNINGAR OCH DEFINITIONER	iii
1. BAKGRUND	1
2. ELEMENTÄR STATISTIK	3
3. BEGRÄNSNINGAR	10
4. VAL AV SANNOLIKHETSFÖRDELNING	11
5. PROBLEM MED FLERA STOKASTISKA VARIABLER	16
5.1 Monte Carlo simulering	16
5.2 Punktskattningsmetoden, 1 variabel	18
5.3 Punktskattningsmetoden, 2 variabler	20
5.4 Punktskattningsmetoden, flera variabler	22
6. BROTTSTADIEBERÄKNINGAR	24
7. BRUKSSTADIEBERÄKNINGAR	36
8. TILLÄMPNING AV AVANCERADE STATISTISKA METODER INOM GEOTEKNIKEN	40
9. SLUTSATSER	43
REFERENSER	44



BETECKNINGAR OCH DEFINITIONER

A	area
A_1	delarea
A_2	delarea
Aa	acceleration
a	variabelns minsta värde
b	variabelns största värde
C	konstant i betafördelningen
c'	cohesion
\tilde{c}	nominell bärförmåga
\bar{c}	väntevärde för bärförmåga
\tilde{D}	nominell lasteffekt
\bar{D}	väntevärde för lasteffekten
dA	ytelement
$E[x]$	väntevärde
F	kraft
F	säkerhetsfaktor
F_c	säkerhetsfaktor vid odränerad analys
$F_{c\phi}$	säkerhetsfaktor vid dränerad analys
$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	funktion som beror av ett flertal stokastiska variabler
f_i	sannolikhet för att variabelvärdet är x_i
h	skiktjocklek
I	yttröghetsmoment
M	kompressionsmodul
m	massa
m_α	trigonometrisk funktion
N	antal i ett stickprov
p_+, p_-	punktskattning av en sannolikhetsfördelning
s	sättning
SM	säkerhetsmarginal
u	portryck
x	medelvärde, väntevärde
x_1, x_2, \dots, x_n	stokastiska variabler
x_i	variabelvärde
x_T	tyngdpunktens koordinat
x_-	x-koordinat för p_- angreppspunkt



x_+	x-koordinat för p_+ angreppspunkt
$V[x]$	varians
Vip	variationskoefficient
α	parameter i beta-fördelningen
β	parameter i beta-fördelningen
β_1	parameter för skevhet
β_2	parameter för toppighet
ρ_c, ϕ	korrelationskoefficient
τ_f	skjuvhållfasthet
$\bar{\tau}_f$	medelvärde för skjuvhållfasthet
$\bar{\tau}_{mob}$	medelvärde för mobiliserad skjuvspänning
σ	standardavvikelse
σ	spänning



1. Bakgrund

En ny byggnorm är under införande (BFS 1988:18), där den väsentliga förändringen är att dimensionering skall ske med ett statistiskt betraktelsesätt. Egentligen är det en revolution för alla statiker som är uppfostrade i en deterministisk värld. En värld där det mesta formuleras i matematiska modeller och där man sedan har en väldig tilltro till det resultat som räknats fram. Om man någon gång jämför beräkningsresultatet med vad som erhålls i form av krafter och deformationer i konstruktionen blir man kanske förvånad om det inte stämmer. I själva verket borde man bli överraskad om det stämmer.

Den nya byggnormen kräver att en konstruktion dimensioneras, dels för brottstadiet, dels för bruksstadiet. I brottstadieberäkningarna skall lastkapaciteten vara så stor att sannolikheten att lasteffekten når upp till den är mycket liten. Olika säkerhetsklasser gäller för olika typer av konstruktioner och konsekvenser vid eventuellt brott (BFS 1988:18). Detta anges med β -värden 2, 2,5 etc, vilket diskuteras mer i detalj i avsnitt 6.

Beträffande bruksstadiedimensioneringen sätts krav på främst deformation, t ex nedböjning, lutning, sättning. Även här måste man således dimensionera för mindre deformationer än vad som egentligen eftersträvas så att sannolikheten att deformationerna blir för stora är tillräckligt liten.

Alla beräkningar redovisar på det sättet inte vad man anser att deformationerna troligen blir, utan vad man i värsta fall befarar att de möjligtvis kan bli.

Detta statistiska betraktelsesätt skall nu användas av en kader av ingenjörer som har en starkt begränsad utbildning i statistik. Det är de facto så att statistikundervisningen vid de tekniska högskolorna utgörs av undervisning i

klassisk statistik, sannolikhetslära och matematisk statistik. Allt detta skall rymmas i en eller två kurser och förståelsen för statistiken är hos de flesta teknologer starkt begränsad. Endast ett fåtal fördjupar och vidareutvecklar detta under sitt yrkesverksamma liv.

Statistik kan göras begriplig och de flesta problemställningar kan angripas med ett enkelt statistiskt betraktelsesätt. I denna rapport görs först en enkel genomgång av några statistiska begrepp och vad vårt ingenjörsmässiga modellbyggande innebär. Därefter behandlas den s k beta-fördelningen och ett antal förenklade metoder som möjliggör att ett stort antal variablers variationer kan beaktas i en och samma problemställning.

2. Elementär statistik

Inom statistiken representeras en variabel antingen av en frekvensfunktion eller en fördelningsfunktion. Frekvensfunktionen definierar variabelns spridning och ytan under den är definitionsmässigt 1, se fig. 2.1a, och anger en slags täthetsfördelning. Sannolikheten för att en variabel är mindre än x_1 beräknas som arean A_1 dividerat med hela arean under frekvensfunktionen vilket är detsamma som A_1 , se fig 2.1b. På motsvarande sätt kan sannolikheten för att variabeln antar ett värde mellan x_2 och x_3 beräknas som A_2 , se fig. 2.1c (Blom, 1984).

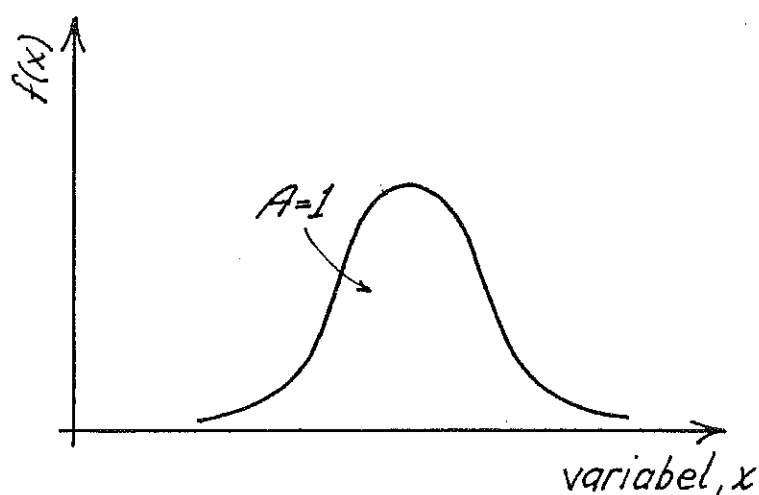


Fig. 2.1a Frekvensfunktion, $f(x)$, för en stokastisk variabel x .

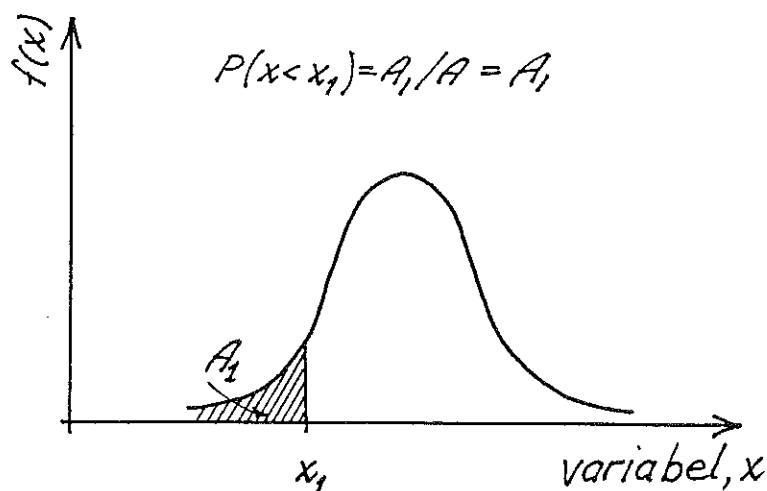


Fig. 2.1b Bestämning av $P(x < x_1)$
($P(x < x_1)$ utläses sannolikheten för att x är mindre än x_1).

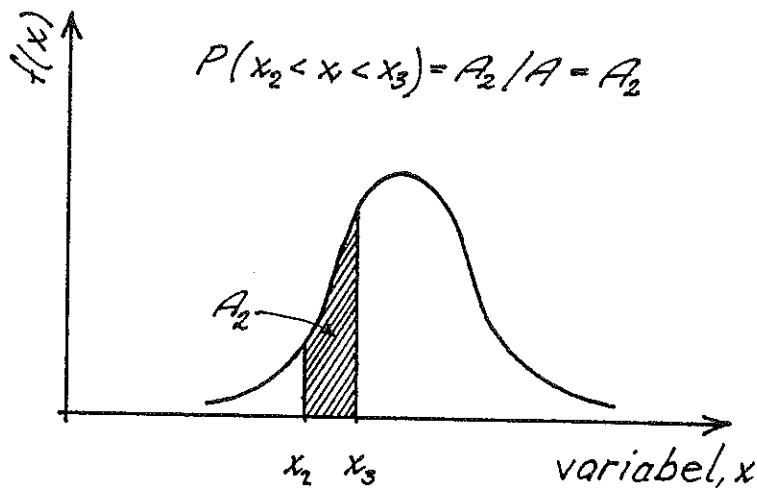


Fig. 2.1c Bestämning av $P(x_2 < x < x_3)$.

Ett annat sätt att representera en variabel är att ange dess fördelningsfunktion, som är integralen av frekvensfunktionen. Fördelningsfunktionen antar därför alltid ett värde större än (eller lika med) 0 och mindre än (eller lika med) 1. På motsvarande sätt kan sannolikheten för att ett värde x_1 underskrids, enkelt läses ur fig. 2.2a som $F(x_1)$. På motsvarande sätt kan sannolikheten att en variabel antar ett värde mellan x_2 och x_3 beräknas som $F(x_3) - F(x_2)$, se fig. 2.2b-c (Blom, 1984).

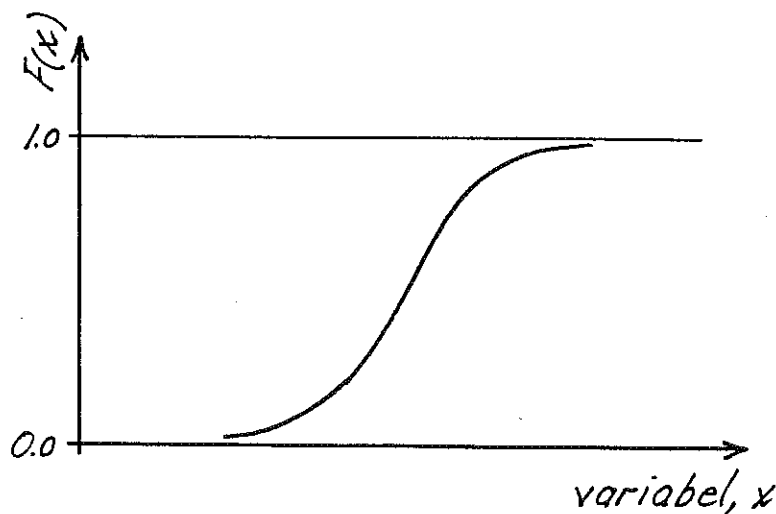


Fig. 2.2a Fördelningsfunktion, $F(x)$, för en stokastisk variabel x .

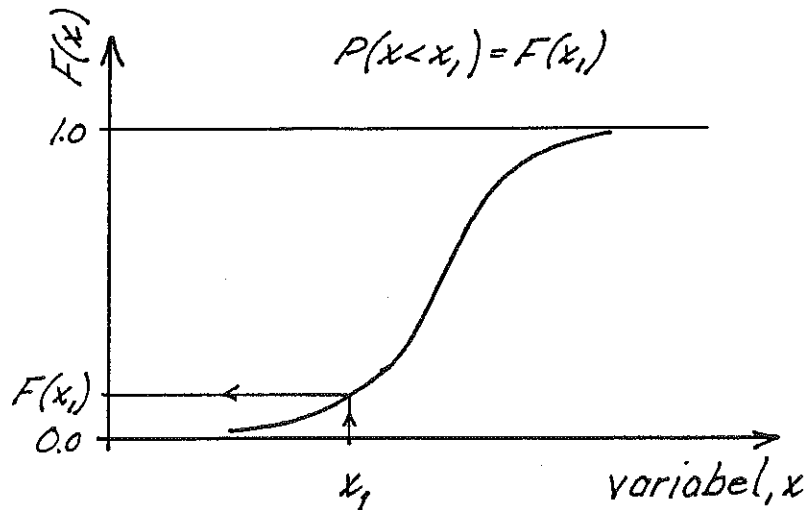


Fig. 2.2b Bestämning av $P(x < x_1)$.

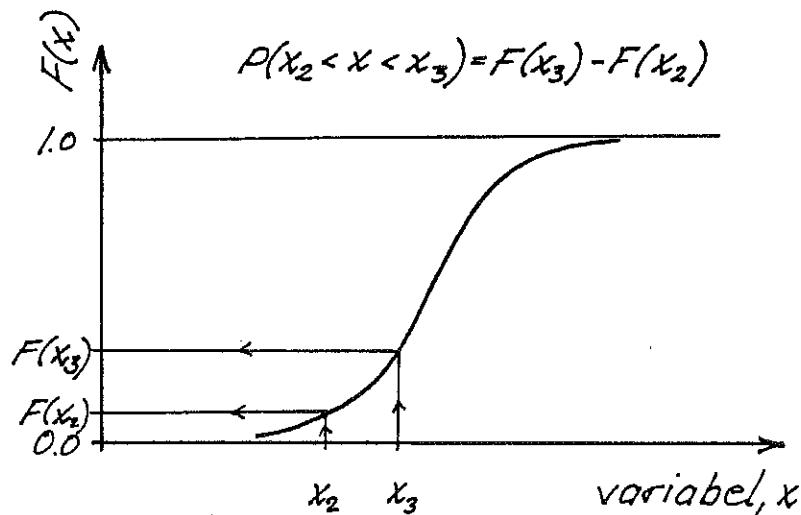


Fig. 2.2c Bestämning av $P(x_2 < x < x_3)$.

Formen på frekvensfunktionen och fördelningsfunktionen anges genom matematiska formler. Inom statistiken används uteslutande monotona fördelningsfunktioner och frekvensfunktioner med en topp. Det är ett begränsat antal fördelningar som har använts i stor utsträckning, främst beroende på att den matematiska formulering för dessa är enkel och hanterbar. En annan faktor som har styrts har varit tillgången på tabellerade värden, som underlättar hanteringen.

I de flesta fall är det lämpligt att beskriva fördelningen med hjälp av ett antal nyckelparametrar, istället för att ange hela frekvensfunktionen. Frekvensfunktionen, definierar en area och precis som för ett balktvärsnitt är tyngdpunkten en viktig parameter. Tyngdpunkten för frekvensfunktionen är funktionens väntevärde \bar{x} (betecknas även $E[x]$) och beräknas som, se fig. 2.3a

$$E[x] = \bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i \cdot f_i \quad (2.1)$$

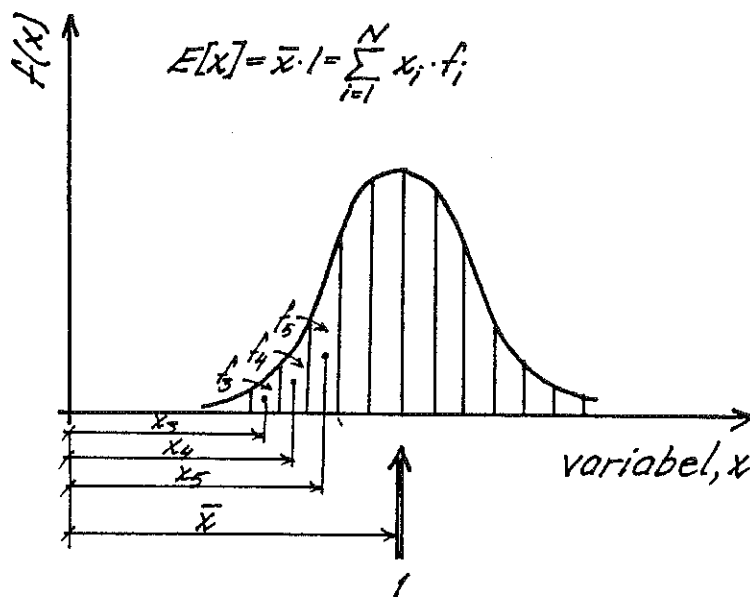


Fig. 2.3a Bestämning av en fördelnings väntevärde (tyngdpunkt).

Jämför resultantens läge för en balk som belastas av krafterna $f_1 - f_n$ eller en utbredd last $q(x)$, fig. 2.3b. Notera att för frekvensfunktionen är $\sum f_i = 1$, varför vänsterledet i ekv 2.1 egentligen är $1 \cdot \bar{x}$.

$E[x]$ är medelvärdet för en frekvensfunktion, vilket kan jämföras med medelvärdesberäkning för ett stickprov där alla värden har samma sannolikhet (f),

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot f}{f \cdot N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (2.2)$$

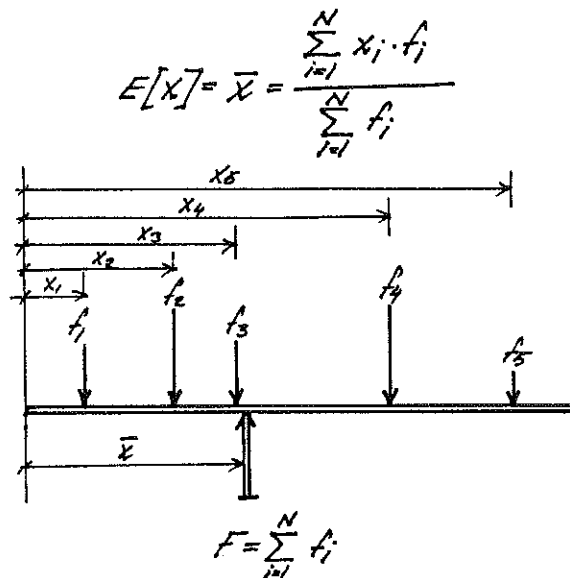


Fig. 2.3b Bestämning av resultantens läge för en balk med yttre belastning.

Frekvensfunktionens form beaktas automatiskt, genom att fler värden erhålls vid stickprov där frekvensfunktionen antar de största värdena.

Inom statiken används yttröghetsmomentet (andra centralmomentet) som ett mått på ytans spridning.

$$I = \int r^2 dA \approx \sum_{i=1}^N (x_i - x_T)^2 \cdot dA \quad (2.3)$$

Samma definition används inom statistiken för frekvensfunktionen och kallas då variansen $V[x]$

$$V[x] = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 f_i = E[(x_i - \bar{x})^2] \quad (2.4)$$

Ofta används standardavvikelsen $\sigma = \sqrt{V(x)}$, som då har samma dimension som medelvärdet, \bar{x} . Den motsvaras inom statiken av tröghetsradien $r = \sqrt{I/A}$ eftersom i statistiken är $A=1$.

I analogi med förflyttningsslagen för yttröghetsmomentet $I_1 = I - x^2 \cdot A$, (Harr, 1987) kan man visa att

$$V[x] = E[x^2] - (E[x])^2 \quad (2.5)$$

vilket är ett mycket användbart samband.

En fördelnings medelvärde anger således var den har sin tyngdpunkt och standardavvikelsen är ett mått på fördelningens spridning kring medelvärdet. Av intresse är också att veta något om huruvida fördelningen är symmetrisk eller skev åt ena eller andra hållet samt om den är toppig eller platt, se fig. 2.4a-b.

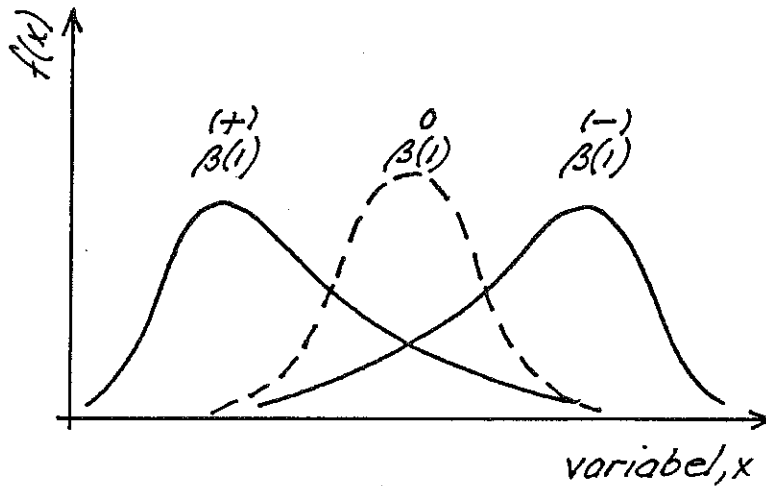


Fig. 2.4a Exempel på fördelningar med olika skevhet.

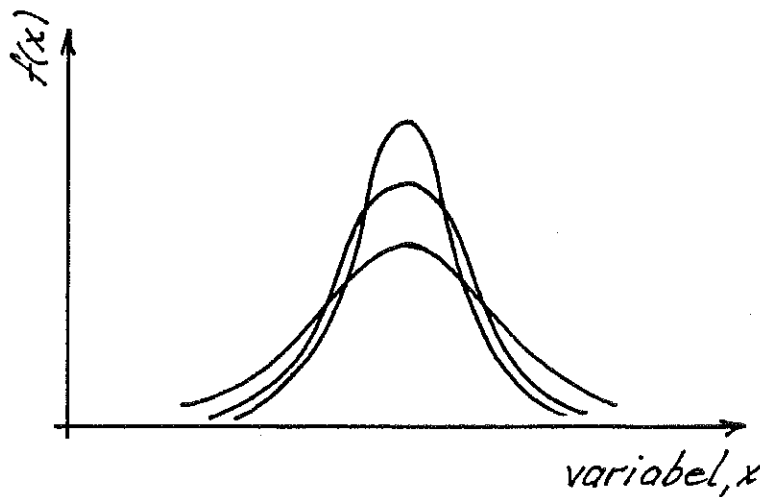


Fig. 2.4b Exempel på fördelningar med olika toppighet.

För skevheten används tredje centralmomentet och för toppigheten (kurtosis) används fjärde centralmomentet. Dessa parametrar divideras oftast med standardavvikelsen upphöjt till 3 resp 4 och då erhålls två dimensionslösa parametrar

$$\beta_1 = \frac{E[(x-\bar{x})^3]}{(\sigma[x])^3} \quad (2.6)$$

$$\beta_2 = \frac{E[(x-\bar{x})^4]}{(\sigma[x])^4} \quad (2.7)$$

När β är 0 är fördelningen symmetrisk medan ett positivt värde på β_1 anger att fördelningen har sitt medelvärde förskjutet åt vänster. Normalfördelningen har således $\beta_1 = 0$ medan för log-normalfördelningen β_1 är mellan 0 och 2. Större värden än 2 förekommer ej för β_1 .

β_2 kan vara mellan 1 och 9 och fördelningen är toppigare ju högre β_2 är. För normalfördelningen är $\beta_2 = 3$.

De fyra parametrarna \bar{x} , σ , β_1 och β_2 ger således mycket information om fördelningens utseende.

En annan parameter som kommit att användas allt mer är variationskoefficienten (Vip) som även den är dimensionslös

$$\text{Vip} = \frac{\sigma[x]}{\bar{x}}$$

Den anger i procent av medelvärdet "avståndet" till en standardavvikelse.

Det har visat sig att variationskoefficienten är relativt konstant för en och samma parameter (Harr, 1987). Om den är känd räcker det att göra stickprovtagningen så att medelvärdet kan skattas, vilket kräver ett betydligt mindre stickprov än om även standardavvikelsen skulle skattas. Detta behandlas mer ingående senare.

3. Begränsningar

När en analys av en struktur skall göras förenklas verkligheten i många led. Modellen är ofta 2-dimensionell, materialet antas homogent med väldefinierade egenskaper, stöd görs oeftergivliga, lasterna är ej kända, beräkningsmodellen är förenklad för att bli hanterbar, etc. Att resultaten av beräkningarna kan avvika från vad som i verkligheten inträffar är därför inte förvånande. En del av denna osäkerhet kan emellertid kvantifieras genom att så många parametrar som möjligt behandlas som stokastiska variabler, dvs att spridningen beaktas.

4. Val av sannolikhetsfördelning

Den vanligaste formen av frekvensdiagram är ett histogram som enkelt kan upprättas på basis av resultat från ett antal utförda försök. Variabeln indelas i ett antal lika stora intervall, resultaten sorteras in i dessa intervall och antalet i varje sådan intervall räknas och inritas i ett blockdiagram. Ju större antalet mätvärden är, desto smalare kan de enskilda stolparna göras och desto mer likt en kontinuerlig frekvensfunktion blir den, se fig. 4.1. Det är emellertid alltid möjligt att matematiskt anpassa en frekvensfunktion till ett givet set av data. Hurpass bra anpassningen blir beror bl a på antalet mätpunkter.

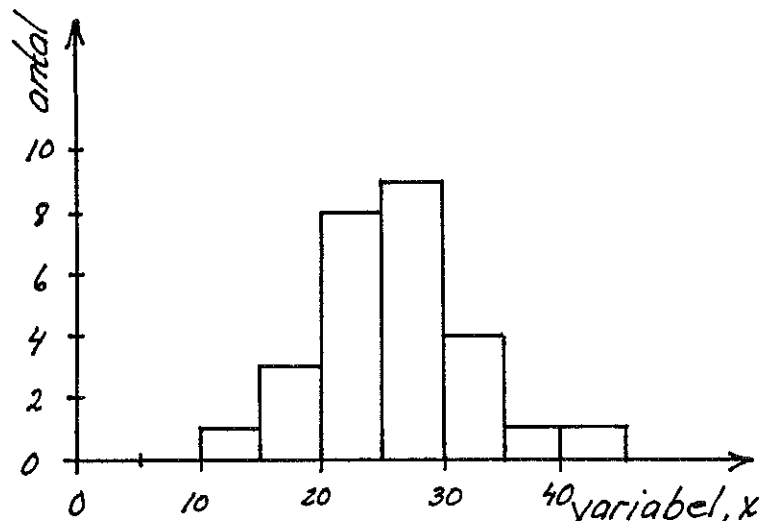


Fig. 4.1a Histogram konstruerat från ett stickprov bestående av 27 mätvärden.

Vanligast är att man använder resultat från en stickprovsundersökning till att skatta ett antal parametrar, t ex medelvärde och standardavvikelse. Problemet är bara att det finns ett stort antal olika typer av fördelningar med samma medelvärde och standardavvikelse; skevhet och toppighet är nämligen mycket avgörande. I de allra flesta fall antas då att den är normalfördelad utan vidare bevis och därmed negligeras många gånger väsentlig information.

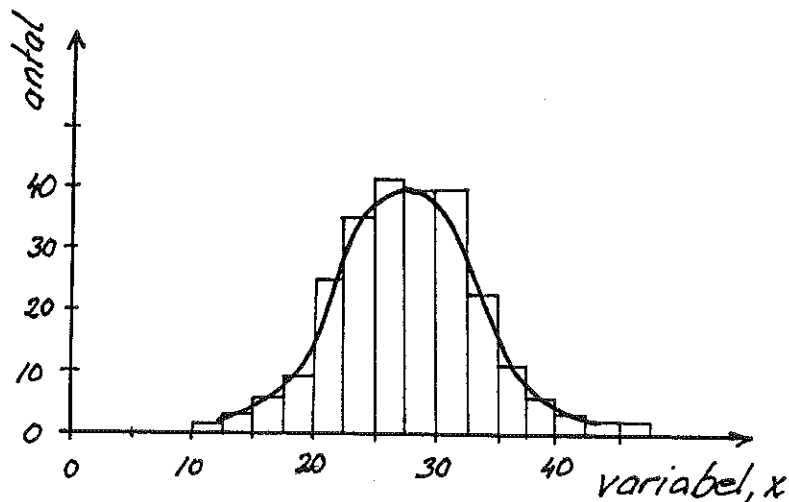


Fig. 4.1b Histogram konstruerat från ett stickprov bestående av ett stort antal (ca 100) mätpunkter.

Om fördelningen tycks vara påtagligt skev används ofta en log-normalfördelning. Endast i ett fåtal tillämpningar används en Pearson typ III, eller någon liknande.

För att visa inverkan av just skevhet, β_1 , och toppighet β_2 visas i fig. 4.2 Pearson's klassificering av sannolikhetsfördelningar (Pearson, 1972). Notera särskilt att den tidigare nämnda normalfördelningen representeras av en enda punkt i diagrammet, med $\beta_1=0$ och $\beta_2=3$.

En fördelning som befunnits mycket användbar är den s k beta-fördelningen, betecknad typ I i fig. 4.2. Den har fördelen att den kan göras skev åt ena eller andra hållet, liksom att den kan vara symmetrisk. Dessutom har den en undre och en övre begränsning, a respektive b. Detta är av särskilt intresse då de flesta ingenjörsmässiga parametrar inte kan anta värden nära $\pm \infty$. Om värdena \bar{x} -a och b- \bar{x} är stora, närmar sig beta-fördelningen normalfördelningen.

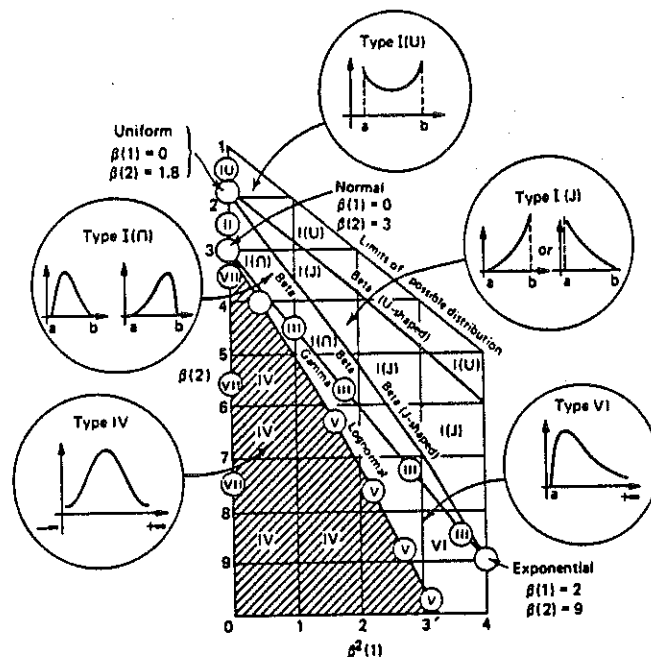


Fig. 4.2 Sannolikhetsfördelningar enligt Pearson (Pearson & Hortley, 1972).

Det matematiska uttrycket för beta-fördelningens frekvensfunktion ges nedan, men all vidare hantering av beta-fördelningen görs med hjälp av mycket enkla PC-baserade datorprogram, inte ens några tabellverk är längre nödvändiga.

$$f(x) = C(x-a)^\alpha (b-x)^\beta \quad (4.1)$$

där $C = \frac{C(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\beta!(b-a)^{\alpha+\beta+1}}$ (4.2)

$$\alpha = \frac{(\bar{x}-a)^2}{\sigma^2} \left(1 - \frac{\bar{x}-a}{b-a}\right) - \left(1 + \frac{\bar{x}-a}{b-a}\right) \quad (4.3)$$

$$\beta = \frac{(\alpha+1)(b-a)}{(\bar{x}-a)} - (\alpha+2) \quad (4.4)$$

där \bar{x} = medelvärde

σ = standardavvikelse

a = minsta värde som parametern kan anta

b = största värde som parametern kan anta

Som framgår av ekv 4.1 definieras beta-fördelningens frekvensfunktion entydigt av de fyra parametrarna \bar{x} , σ , a och b .

Utan att i detalj utreda skall här endast nämnas att en parallell inom statistiken till termodynamikens andra lag, anger vilken statistisk fördelning som är bäst att använda för en variabel, beroende på hur mycket information som finns tillgänglig, se fig.4.3. Där framgår att om endast medelvärde och standardavvikelse är kända är normalfördelningen det bästa valet. Men så snart som ett definitionsområde för variabeln är känt är beta-fördelningen det bästa valet. Det skall här åter påpekas att om $(\bar{x}-a)$ och $(b-\bar{x})$ är stora tal, säg $5 \cdot \sigma$, så är skillnaden mellan den så erhållna beta-fördelningen och tillhörande normalfördelningen mycket liten.

Fig. 4.3 Val av bästa fördelning enligt principen maximerad entropi (Harr, 1987).

Kända fakta	Bästa fördelning
$\int_a^b f(x) dx = 1$	Rektangulär
$\int_a^b f(x) dx = 1$ Väntevärde	Exponentiell
$\int_a^b f(x) dx = 1$ Väntevärde standardavvikelse	
$\int_a^b f(x) dx = 1$ Väntevärde standardavvikelse intervall (a,b)	Beta

Det framgår härvid tydligare att variationskoefficienten (Vip) är en ytterligt värdefull parameter. Medelvärdet av en variabel kan skattas ganska väl med relativt få prov. Några vingsonderingar ger ett fullgott underlag för en skattning av medelvärdet för skjuvhållfastheten. Är sedan variationskoefficienten känd för jorden ifråga kan standardavvikelsen beräknas. På basis av tidigare erfarenheter kan sedan variabelns undre och övre gränser a respektive b väljas. Som regel behöver aldrig mindre resp större värden än $a = \bar{x} - 3\sigma$ och $b = \bar{x} + 3\sigma$ väljas, utan kan användas då inget bättre värde är känt.

5. Problem med flera stokastiska variabler

I föregående avsnitt angavs hur en frekvensfunktion kan anpassas till en variabel när ett stickprov föreligger. De flesta ingenjörproblem leder emellertid som regel till beräkningar där flera stokastiska variabler ingår. Den matematiska behandlingen blir då mycket omständlig, t ex kan en Taylorutveckling användas. Felet i uppskattningen kan dock bli stort och det matematiska arbetet kan bli mycket omfattande och komplicerat. Andra approximativa metoder har därför utarbetats.

Här diskuteras emellertid enbart Monte Carlo simulering, och en relativt ny metod, punktskattningsmetoden.

5.1. Monte Carlo simulering

När ett problem inte längre kan lösas analytiskt tillgrips ofta inom den tillämpade matematiken en numerisk metod. Inom statistiken använder man då istället någon form av simulering.

Om den funktion (y) vars statistiska fördelning sökes, är en funktion av ett antal stokastiska variabler ($x_1, x_2 \dots x_n$), så att

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_n)$$

kan ett stickprov på funktionen y erhållas genom följande metod, ofta benämnd Monte Carlo-metoden.

Det krävs då att frekvensfunktionerna för $x_1, x_2 \dots x_n$ är kända, så att deras fördelningsfunktioner också är kända. Simuleringen tillgår på följande sätt. Med hjälp av en slumpgenerator genereras ett slumptal, i intervallet 0-1000 för varje variabel. Detta divideras sedan med 1000, så att alla slumptal faller mellan 0 och 1. Slumptalen

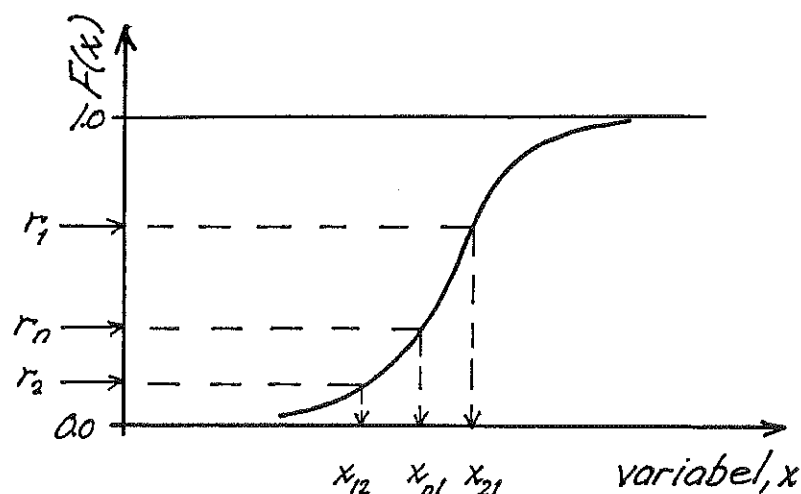


Fig. 5.1 Generering av slumpmässigt valda värden på variablerna $x_1, x_2 \dots x_n$. $r_1, r_2 \dots r_n$ är slumpstal mellan 0 och 1.

kallas här $r_1, r_2 \dots r_n$. Dessa betraktas sedan som värden på fördelningsfunktionen och med hjälp av fördelningsfunktionen, se fig. 5.1 bestäms tillhörande värden på variabeln, $x_1, x_2 \dots x_n$. Därigenom har en uppsättning slumpmässigt valda värden på variablerna $x_1, x_2 \dots x_n$ bestämts och det första slumpmässiga värdet på funktionen, $f_1(x_1, x_2 \dots x_n)$ kan beräknas. Sedan upprepas proceduren ett stort antal gånger och ett stickprov av $y=f(x_1, x_2 \dots x_n)$ erhålls, till vilken en statistisk fördelning kan anpassas, eller alternativt kan medelvärde och standardavvikelse beräknas.

Tidigare påpekades att de enskilda variablernas fördelningsfunktioner måste vara kända. Det är då mycket vanligt att man utan vidare bevis antar att alla variabler är normalfördelade, antagligen helt enkelt därför att man då gör beräkningsmässiga vinster.

När antalet variabler ökar ökar kravet på antalet genomförda beräkningar och beräkningsarbetet blir, även med de största datorerna ogenomförbart. Att använda Finita elementberäkningar för Monte Carlo-simulering såsom den del gör leder ofta till fel p g a för litet antal genomförda beräkningar.

5.2 Punktskattningsmetoden, 1 variabel

Punktskattningsmetoden presenterades av Rosenbluth (1972) och har vidareutvecklats av Harr (1987). Metoden i sig är mycket enkel att använda och principen illustreras bäst genom en hänvisning till den tidigare behandlade analogien mellan en sannolikhetsfördelning och en utbredd last på en balk. Detta kan användas för att göra en enkel skattning av frekvensfördelningen. Medelvärde är analogt med resultantens läge och dess storlek är 1, se fig. 5.2 och standardavvikelsen analog med dess tröghetsradie, jmf. avsnitt 2. Rosenbluth (1972) föreslog att detta kunde utnyttjas så att en fördelning kunde approximeras med två "laster", p_+ och p_- , som angriper vid x_- och x_+ , fig. 5.2b. p_+ och p_- kallas tvåpunktsapproximationen av fördelningen. Med hjälp

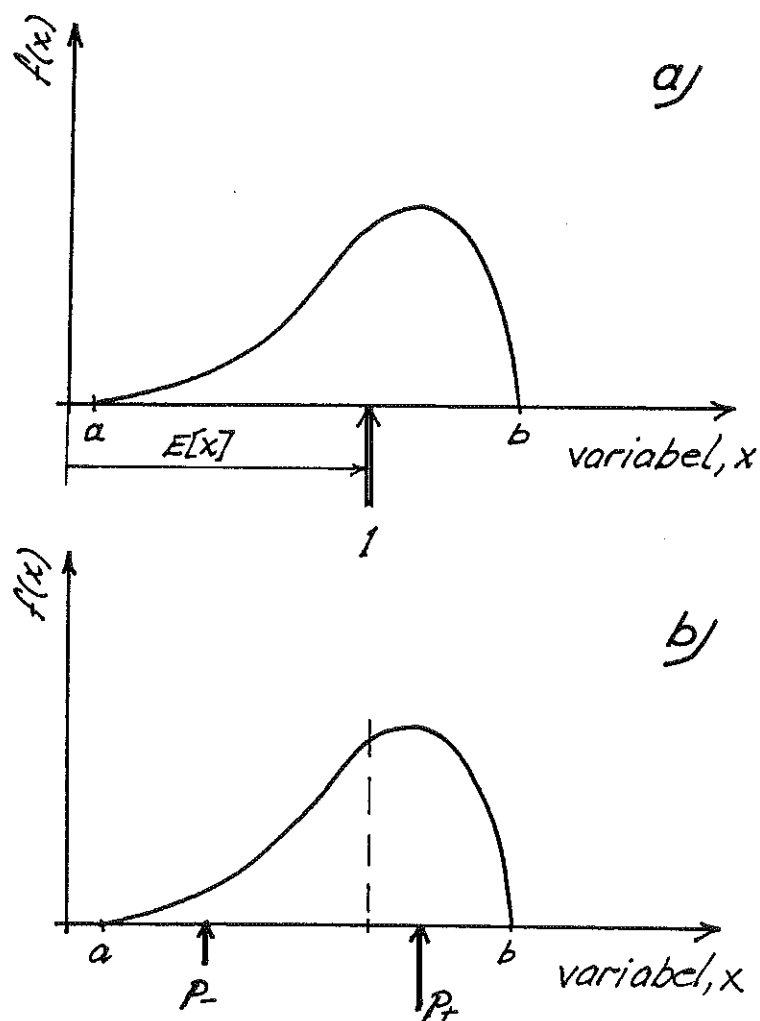


Fig. 5.2 Definition a) väntevärdet, $E[x]$
och b) standardavvikelse $\sigma[x]$.

av definitionerna av moment kan följande uttryck härledas

$$p_+ = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{1 + [\beta_1/2]^2}} \right] \quad (5.1)$$

$$p_- = \frac{1}{2} [1 - p_+] \quad (5.2)$$

$$x_+ = \bar{x} + \sigma[x] \sqrt{\frac{p_-}{p_+}} \quad (5.3)$$

$$x_- = \bar{x} - \sigma[x] \sqrt{\frac{p_+}{p_-}} \quad (5.4)$$

Tecknet framför rottecknet i ekv 5.1 skall vara det motsatta till vad β_1 har.

Om fördelningen antas symmetrisk, så är $\beta_1 = 0$, och ekv 5.1-5.4 får följande enkla utseende

$$p_+ = p_- = 1/2 \quad (5.5)$$

$$x_+ = \bar{x} + \sigma[x] \quad (5.6)$$

$$x_- = \bar{x} - \sigma[x] \quad (5.7)$$

Om en funktion $y=f(x)$ är given där x är en stokastisk variabel vars medelvärde, standardavvikelse och skevhet är kända, kan således motsvarande värden för funktionen beräknas.

Exempel

I ett kullager ingår 20 st stålsfärer med radien 10 mm. Variationskoefficienten för radien är 5% och stålets densitet antas vara $7,6 \text{ g/cm}^3$. Bestäm medelvärdet och variationskoefficienten för massan hos de 20 sfärerna.

Lösning

Eftersom uppgift om β_1 saknas, antas $\beta_1 = 0$ och ekv 5.5-5.7 kan då användas

$$E[r] = \bar{r} = 10$$

$$\sigma[r] = \text{Vip}(r) \cdot E[r] = 10 \cdot 0,05 = 0,5$$

$$r_+ = \bar{r} + \sigma[r] = 10,5 \text{ mm}$$

$$r_- = \bar{r} - \sigma[r] = 9,5 \text{ mm}$$

$$\text{massan} = f(r) = 20 \cdot 7,6 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot 10^{-3} \text{g}$$

$$f_+ = f(\bar{r} + \sigma[r]) = 737,1$$

$$f_- = f(\bar{r} - \sigma[r]) = 545,9$$

$$p_- = p_+ = 1/2$$

$$E[f] = 1/2(737,1 + 545,9) = 641,5$$

$$E[f^2] = 1/2(737,1^2 + 545,9^2) = 420622$$

$$\text{Men } V[f] = E[f^2] - (E[f])^2 \quad (\text{jfr ekv 2.5})$$

$$\text{Alltså } V[f] = 420\,622 - 641,5^2 = 9136$$

$$\sigma[f] = 95,6$$

$$\text{Vip} = \frac{95,6}{641,5} \times 100 = 15\%$$

Medelmassan för 20 kulor är således 642 g och dess variationskoefficient är 15%. Det framgår av exemplet att beräkningarna måste utföras för 2 kombinationer av variabelvärden.

5.3 Punktskattningsmetoden, 2 variabler

I föregående avsnitt jämfördes frekvensfunktionen med en utbredd last på en balk och skattningen gjordes som två upplagsreaktioner. En motsvarande analogi för två variabler leder till att belastningen på en platta kan approximeras till fyra upplagsreaktioner. Väntevärdet $E[y]$ kan för en funktion $y = f(x_1, x_2)$, där x_1 och x_2 är stokastiska variabler, beräknas som

$$E[Y] = p_{++} Y_{++} + p_{+-} Y_{+-} + p_{-+} Y_{-+} + p_{--} Y_{--} \quad (5.8)$$

där Y_{++} är funktionsvärden beräknade för värden på parametrarna x_1 och x_2 enligt följande:

$$Y_{++} = f(x_1 + \sigma[x_1], x_2 + \sigma[x_2]) \quad (5.9a)$$

$$Y_{+-} = f(x_1 + \sigma[x_1], x_2 - \sigma[x_2]) \quad (5.9b)$$

$$Y_{-+} = f(x_1 - \sigma[x_1], x_2 + \sigma[x_2]) \quad (5.9c)$$

$$Y_{--} = f(x_1 - \sigma[x_1], x_2 - \sigma[x_2]) \quad (5.9d)$$

$$p_{++} = p_{--} = \frac{1+\rho}{4} \quad (5.10a)$$

$$p_{+-} = p_{-+} = \frac{1-\rho}{4} \quad (5.10b)$$

ρ = korrelationskoefficienten för x_1 och x_2

Om de bägge parametrarna x_1 och x_2 ej är korrelerade med varandra är $\rho = 0$ och $p_{++} = p_{+-} = p_{-+} = p_{--} = 1/4$.

Exempel

Bestäm medelvärde och standardavvikelse för kraften

$F = m \cdot a$, om massan är 1 kg och accelerationen är 9,81 m/s². Variationskoefficienten för massan (Vip(m)) är 0,10 och för accelerationen (Vip(a)) är 0,55.

I detta exempel antas att m och a ej är korrelerade, alltså $\rho_{ma} = 0$.

$$E[m] = \bar{m} = 1$$

$$\sigma[m] = \text{Vip}(m) \cdot \bar{m} = 0,10$$

$$E[a] = 9,81$$

$$\sigma[a] = \text{Vip}(a) \cdot \bar{a} = 0,49$$

Lösning

$$m_+ = \bar{m} + \sigma[m] = 1,10$$

$$m_- = \bar{m} - \sigma[m] = 0,90$$

$$a_+ = \bar{a} + \sigma[a] = 10,30$$

$$a_- = \bar{a} - \sigma[a] = 9,32$$

$$\begin{array}{ll}
F_{++} = m_+ \cdot a_+ = 11,33 & (F_{++})^2 = 128,37 \\
F_{+-} = m_+ \cdot a_- = 10,25 & (F_{+-})^2 = 105,10 \\
F_{-+} = m_- \cdot a_+ = 9,27 & (F_{-+})^2 = 85,93 \\
F_{--} = m_- \cdot a_- = 8,39 & (F_{--})^2 = 70,36 \\
\sum F/4 = 9,81 & \sum F^2/4 = 97,44
\end{array}$$

$$V[F] = 97,44 - 9,81^2 = 1,20$$

$$\sigma[F] = \sqrt{V[F]} = 1,1$$

$$\text{Vip} = \frac{1,1}{9,81} \cdot 100 = 11\%$$

Medelvärde på kraften F blir 9,81 N och dess standardavvikelse är 1,1, vilket resulterar i en variationskoefficient som är 0,11, eller 11%.

För att kunna beräkna medelvärde och standardavvikelse för en funktion som i sig är en funktion av två variabler krävs således att funktionsvärdet beräknas för fyra (2^2) kombinationer av variabelvärden

5.4 Punktskattningsmetoden, flera variabler

Det är möjligt att generalisera beräkningarna för fler än två variabler, se Harr (1987). Om antalet variabler är n st, krävs att funktionsvärdet bestäms för 2^n kombinationer av parametrar. De olika variablernas inbördes korrelationer skall då anges med $\sum_{i=1}^{n-1}$ i korrelationskoefficienter.

Antalet erforderliga beräkningar växer snabbt då n ökar (antal beräkningar = 2^n). Om funktionen innehåller fem variabler erfordras 32 st beräkningar, vilket i sig inte är oöverkomligt. För att göra metoden rättvisa kan man jämföra med Monte Carlo-metoden som för 5 variabler skulle kräva flera tusentals körningar för att uppnå en fullgod noggrannhet.

I en artikel i Applied Mathematical Modelling visar Harr (1989) hur man genom att bestämma egenvärdena för korrelationsmatrisen kan begränsa antalet erforderliga beräkningar till $2 \cdot n$, istället för 2^n , utan att påtagligt försämrade noggrannheten. Redan vid säg 10 variabler innebär det att antalet erforderliga beräkningar minskar från $2^{10} = 1024$ till $2 \cdot 10 = 20$, vilket är ett fantastiskt framsteg och möjliggör behandling av problem med stor komplexitet.

6. Brottstadieberäkningar

Vid dimensionering för brottstadiet har traditionellt en viss säkerhetsfaktor mot brott eftersträvats. Därvid beräknas en nominell bärförmåga, (\tilde{C}), som är något lägre än väntevärdet \bar{C} . Lasteffekten, (\tilde{D}), beräknas också och är något större än väntevärdet \bar{D} . Säkerhetsfaktorn (F) beräknas sedan som, (se också fig. 6.1a.)

$$F = \frac{\tilde{C}}{\tilde{D}} \quad (6.1)$$

I själva verket är såväl bärförmåga som lasteffekt stokastiska variabler med viss spridning, se fig. 6.1a. Säkerhetsfaktorn ger i sig ingen information om sannolikheten för brott, men i figuren framgår att en viss sannolikhet för att lasteffekten är större än bärförmågan, den skrafferade arean i fig. 6.1a föreligger. I fig. 6.1b, visas att brottsannolikheten kan vara högst olika för en och samma säkerhetsfaktor, och beror av spridningen hos de bägge variablerna C och D . Säkerhetsfaktorn är således egentligen ett mycket trubbigt instrument som måste vara ordentligt empiriskt förankrat.

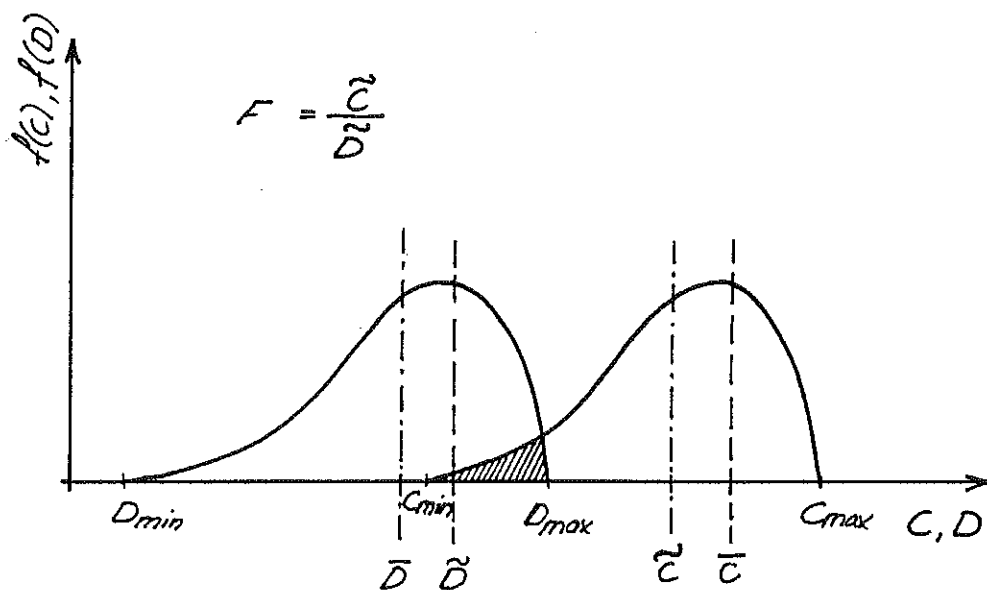


Fig. 6.1a Bärförmåga och lasteffekt (D) med tillhörande brottsannolikhet.

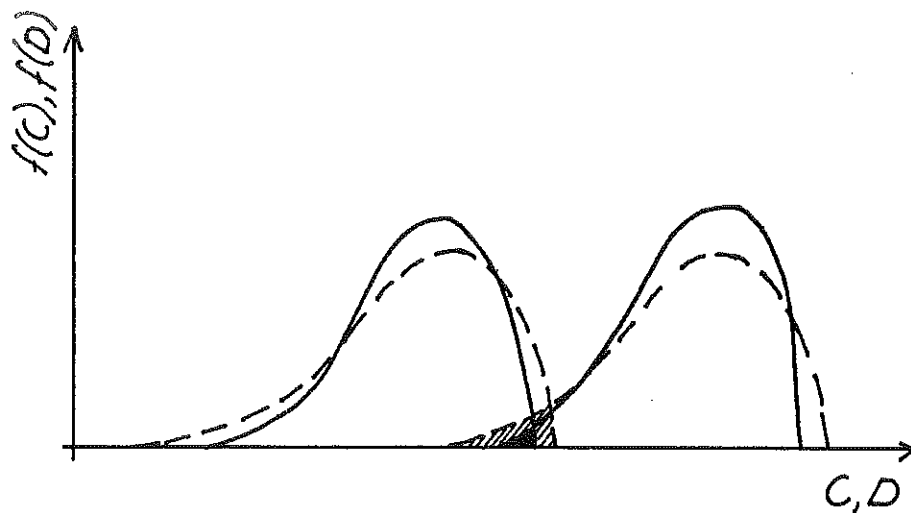


Fig. 6.1b Exempel på kombinationer av bärförmåga och brottsannolikhet med samma konventionella säkerhetsfaktor men olika brottsannolikheter.

Genom att beräkna skillnaden mellan bärförmåga och lasteffekt fås en ny variabel, säkerhetsmarginalen (SM), se fig. 6.1c (Harr, 1987). Sannolikheten för brott kan då beräknas som den skrafferade arean i fig. 6.1c, alltså då $SM \leq 0$.

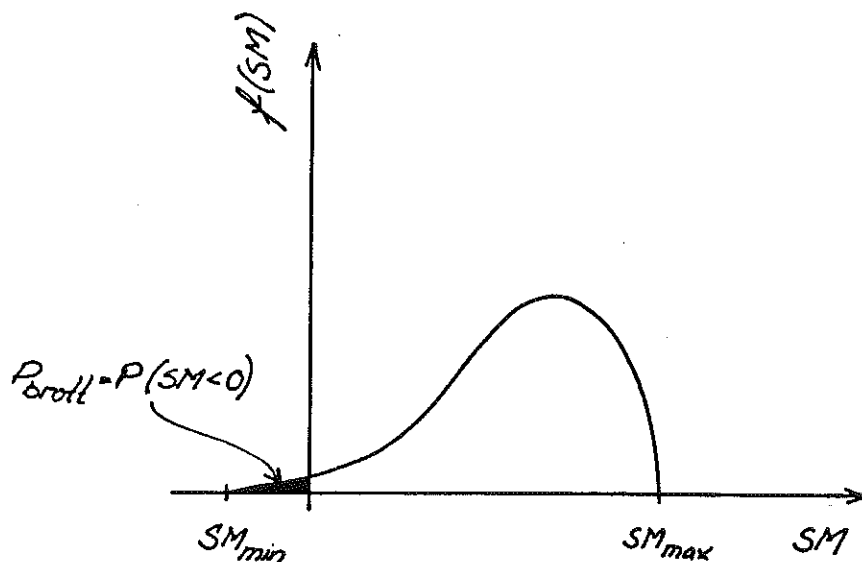


Fig. 6.1c Säkerhetsmarginaler.

Det skall här nämnas att den s k β -metoden som används i den nya byggnormen (BFS 1988:18) (ej att förväxla med den i denna artikel beskrivna beta-fördelningen) använder sig av variabeln SM. Metoden antar att SM är normalfördelad och β anger hur många standardavvikelser $\sigma(SM)$ det är mellan medelvärdet \bar{SM} och 0. β är således inversen av variationskoefficienten för säkerhetsmarginalen. Om SM är normalfördelad kan brottsannolikheten överslagsmässigt beräknas som $1 \cdot 10^{-\beta}$ (Harr, 1987).

Svårigheten i de flesta fall är att väga samman de i beräkningarna ingående stokastiska variablerna till en lasteffekt och en bärförmåga. I den nya byggnormen görs det genom att man gör en deterministisk analys och inför ett antal partialkoefficienter, vars storlek är beroende av en definierad säkerhetsklass. Därefter antas att dessa uttryck, dimensionerande lasteffekt och bärförmåga är normalfördelade och därmed kan β -värdet för säkerhetsmarginalen bestämmas.

Detta förfarande kan anses tillfredsställande för en rad konstruktioner där förutsättningar och material är relativt väldefinierade.

Inom geotekniken utgör ovanstående förfaringssätt visserligen en accepterad dimensioneringsfilosofi, men ger ingen information om förväntad brottsannolikhet, eller hellre funktionssäkerhet, som är 1- (brottsannolikheten). Metoden ger heller ingen information om hur brottsannolikheten kan förväntas variera, vid förändringar i befintlig design görs.

Nu kan man emellertid med den i avsnitt 4 beskrivna beta-fördelningen i kombination med punktskattningsmetoden, för vilken beräkningsmetod som helst, skatta fördelningarna för bärförmåga och lasteffekt. För varje ingående stokastisk variabel behöver medelvärdet bestämmas. Med variationskoefficienten känd sedan tidigare, kan standardav-

vikelsen beräknas. Därefter väljs ingenjörsmässiga max och minvärden för variabeln. (Om sådana saknas väljs $\bar{x} \pm 3\sigma$). Till varje variabel kan då en beta-fördelning anpassas och sedan används Point Estimate Method för att väga samman variablerna till bärförmåga och lasteffekt. Därefter kan sannolikheten för att lasteffekten överstiger bärförmågan beräknas, vilket är det samma som brottsannolikheten.

Inom geotekniken behandlar brottstadieberäkningar som regel bärighet, jordtryck eller släntstabilitet, vilka i grunden utgör samma brottproblem. Inom grundläggningstekniken tilldrar sig pålars brottlast det allt överskuggande intresset. I denna rapport väljs området släntstabilitet som exempel på brottstadieberäkningen, bl a för att potentialen hos ett statistiskt betraktelsesätt jämfört med en traditionell analys är så påtaglig.

Då stabiliteten för en slänt skall beräknas erhålls resultatet som regel i form av en säkerhetsfaktor, som är förhållandet mellan medelskjuvhållfasthet och mobiliserad medelskjuvspänning utefter en tänkt glidyta.

$$F = \frac{\bar{\tau}_f}{\bar{\tau}_{mob}} \quad (6.2)$$

De flesta beräkningsteorier baseras på ett plasticitetsteoretiskt antagande, vilket innebär att mobiliseringsgraden är densamma utefter hela glidytan. För att slänten skall betraktas som stabil och bebyggelse tillåtas krävs att säkerhetsfaktorn ej understiger ett visst värde, säg $F = 1,5$. Om F är lägre och det finns bebyggelse i området kan förstärkning bli aktuell. Som regel krävs då en viss procentuell förhöjning av F . Om F är mycket låg kan utrymning eller byggnadsförbud bli aktuellt. Dylika åtgärder är mycket kostsamma.

Det är då ytterst otillfredsställande att besluten skall baseras på ett så pass dåligt beslutsunderlag som en säkerhetsfaktor. Det som är av primärt intresse är brott-

sannolikheten och dess förändring vid eventuell åtgärd. Framförallt om olika åtgärder övervägs måste resultatet kunna jämföras i termer av förändrad brottsannolikhet för att den mest kostnadsbesparande åtgärden skall kunna användas.

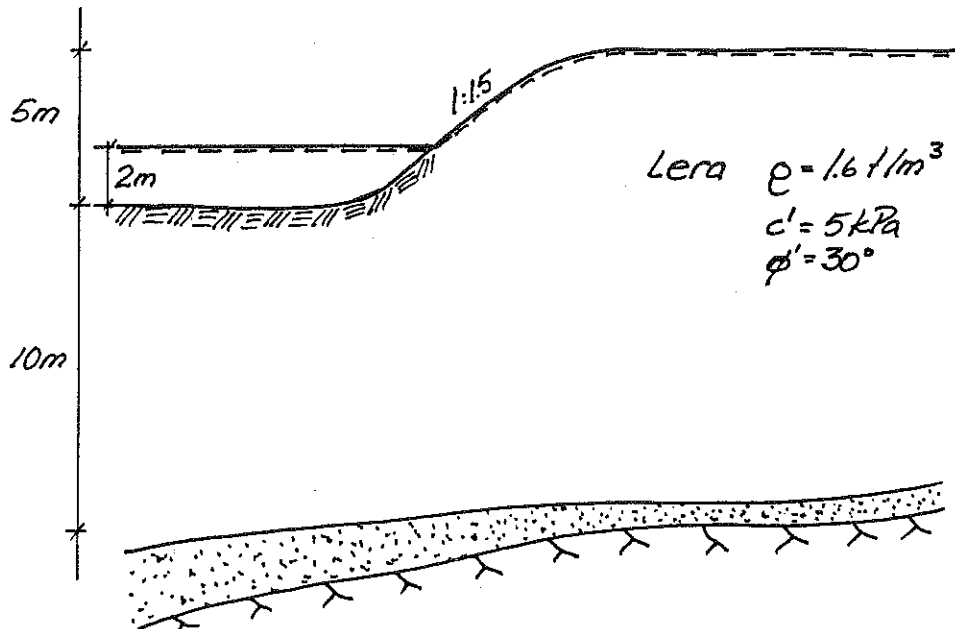


Fig. 6.2 Exempel på idealiserad slänt i lera.

Exempel

Här väljs som exempel en slänt i lera, se fig. 6.2. Säkerhetsfaktorn kan för dränerad analys beräknas som

$$F_{c\phi} = \frac{\bar{\tau}_{fd}}{\bar{\tau}_{mob}} = \frac{\sum c' + (\sigma - u) \tan \phi' / m_\alpha}{\sum p \sin \alpha} \quad (6.3)$$

För odränerad analys kan ekv 6.4 användas (Janbu, 1973)

$$F_c = \frac{\tau_{fu}}{\bar{\tau}_{mob}} = \frac{\sum \tau_{fu} / \cos \alpha}{\sum p \sin \alpha} \quad (6.4)$$

För enkelhetens skull betraktas enbart c' och ϕ' som variabler i den dränerade analysen, medan τ_{fu} är variabel i

den odränerade analysen har erfarenhetsmässigt en variationskoefficient $Vip(\phi)$ på 5 á 10%. Här väljs 7%. Variationskoefficienten för c' , $Vip(c')$, är högre ca 30%. En viss negativ korrelation finns mellan dessa variabler, men även här väljs för enkelhetens skull $\rho_{c',\phi'} = 0$. Porvattenstrycket u är förvisso en variabel, men beräkningarna utförs för ett högsta värde med grundvattenytan i markytan, och i övrigt hydrostatiska förhållanden. (Några artesiska förhållanden har inte noterats i området). Beräkningarna av F_{++} , F_{+-} , F_{-+} och F_{--} genomförs med hjälp av ett vanligt datorprogram för släntstabilitetsanalys. F_{++} är säkerhetsfaktorn beräknad för $c'+\sigma[c']$ och $\phi+\sigma[\phi']$, F_{+-} är säkerhetsfaktorn beräknad för $c'+\sigma[c']$ och $\phi'-\sigma[\phi']$ osv. Fyra beräkningar erfordras således och resultaten visas i Tabell 6.1. Eftersom geometri och densitet inte åsatts någon spridning, innebär det att brottsannolikheten, $P(\bar{\tau}_{fu} < \bar{\tau}_{mob})$, här är densamma som sannolikheten att $F \leq 1$. a och b värdena ansätts till $\bar{F} \mp 3 \cdot \sigma[F]$ och en betanpassning genomförs. Därmed kan brottsannolikheten beräknas och blir $6,9 \cdot 10^{-2}$, vilket i sig är en något hög brottsannolikhet. I tabell 6.1 anges också hur P_{brott} kan beräknas med antagande om att $\bar{\tau}_{fu}$ är normalfördelad.

Tabell 6.1 Beräkning av sannolikhet för brott för den i fig. 6.2 visade slänten, dränerad analys.

$$c' = 5 \text{ kPa} \rightarrow c' \pm \sigma[c'] = 5,0 \pm 0,20 \cdot 5,0 = 5,0 \pm 1,0$$

$$\phi' = 30^\circ \rightarrow \phi' \pm \sigma[\phi'] = 30 \pm 0,07 \cdot 30 = 30 \pm 2$$

	c'	ϕ'	$F_{c\phi}$	$F_{c\phi}^2$
F_{--}	4	28	1,023	1,047
F_{+-}	6	28	1,246	1,553
F_{-+}	4	32	1,122	1,259
F_{++}	6	32	1,347	1,820
	$\Sigma / 4$		1,185	1,42

$$E[F] = 1,18$$

$$V[F] = 1,42 - 1,185^2 = 0,015 \quad (\text{enligt ekv 2.5})$$

$$\sigma[F] \sqrt{0,015} = 0,123$$

$$\text{Vip}(F) = 0,123/1,18 = 10,4\%$$

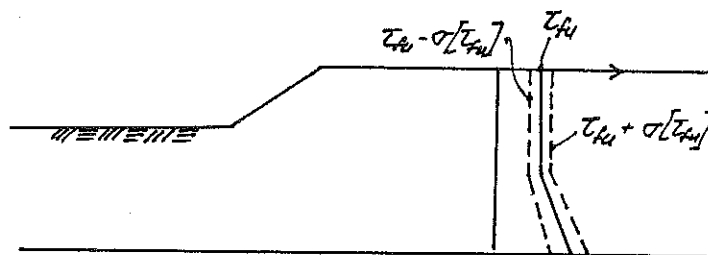
$$P(\tau_f < \tau_{\text{mob}}) = 0,069 \quad (*)$$

$$\psi(F) = \frac{1,18-1,0}{0,123} = 1,504 \rightarrow P(\bar{\tau}_f < \bar{\tau}_m) = 1-0,5-0,434=0,066 \quad (**)$$

(*) En beta-fördelning anpassas till F där medelvärde och standardavvikelse beräknats enligt ovan. a och b väljs till $E[F] \pm 3 \cdot \sigma[F]$, vilket ger a = $1,18 - 3 \cdot 0,123 = 0,81$ och b = 1,55. Sannolikheten för att $\tau_f < \tau_{\text{mob}}$ blir då 0,069, vilket beräknats med tidigare ovannämnda datorprogram.

(**) Alternativt erhålls om F antas vara normalt fördelad motsvarande sannolikhet till 0,066. $\psi(F)$ erhålls som $\frac{\bar{F}-1,0}{\sigma[F]}$ och anger hur långt koordinaten $\psi(F)$ ligger till vänster om medelvärdet, räknat i antal standardavvikelser. Med hjälp av en normalfördelningstabell erhålls för $\psi(F)=1,504$ värdet 0,434. Det innebär att arean under svansen kan beräknas till 0,066.

Tabell 6.2 Beräkning av sannolikhet för brott för den i fig. 6.2 visade slänten, odränerad analys.



	τ_f	F	F ²
F ₋	$\tau_{fu} - \sigma[\tau_{fu}]$	0,999	0,998
F ₊	$\tau_{fu} + \sigma[\tau_{fu}]$	1,363	1,858
	$\Sigma/4$	1,181	1,428

$$E[F] = 1,18$$

$$V[F] = 1,428 - 1,181^2 = 0,015$$

$$\sigma[F] = 0,182$$

$$\text{Vip}(F) = 0,182/1,181 = 15,4\%$$

$$P(\bar{\tau}_f < \bar{\tau}_m) = 0,17 (*)$$

$$\psi(F) = \frac{1,181-1}{0,182} = 0,995 \rightarrow P(\bar{\tau}_f < \bar{\tau}_m) = 1-0,5-0,34=0,16 (**)$$

(*) En beta-fördelning med medelvärde och standardavvikelse enligt ovan och med b respektive a ansatta till $E[F] \pm \sigma[F]$ ger den beräknade brottsannolikheten.

(**) Se tabell 6.1 för förklaring.

Om slänten skall stabiliseras kan det göras genom olika åtgärder. Här skall två åtgärder behandlas, avschaktning i aktivzonen (alt a, fig. 6.3) och utflackning av slänten (alt b). Portrycksfördelningen antas anpassa sig till hydrostatiskt tryck relativt markytan.

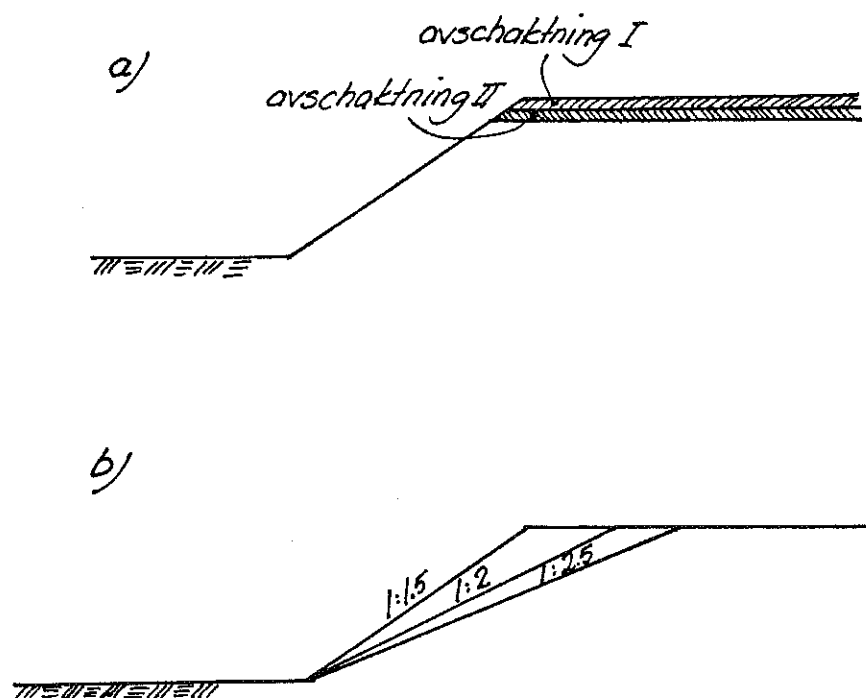


Fig. 6.3 Alternativa förstärkningsåtgärder
a) avschaktning
b) utflackning av slänt

Om en odränerad analys utförs och den odränerade hållfastheten antas vara sådan att säkerhetsfaktorn för odränerad analys (F_c) blir lika stor som vid dränerad analys ($F_{c\phi}$) kan man konstatera, se fig. 6.4, att brottsannolikheten är störst för den odränerade analysen trots att $F_c = F_{c\phi}$. Detta beror på att man i många fall kan anta att $Vip(\tau_{fu}) = 10-20\%$, vilket resulterar i en större spridning av resultaten och därmed ökar brottsannolikheten.

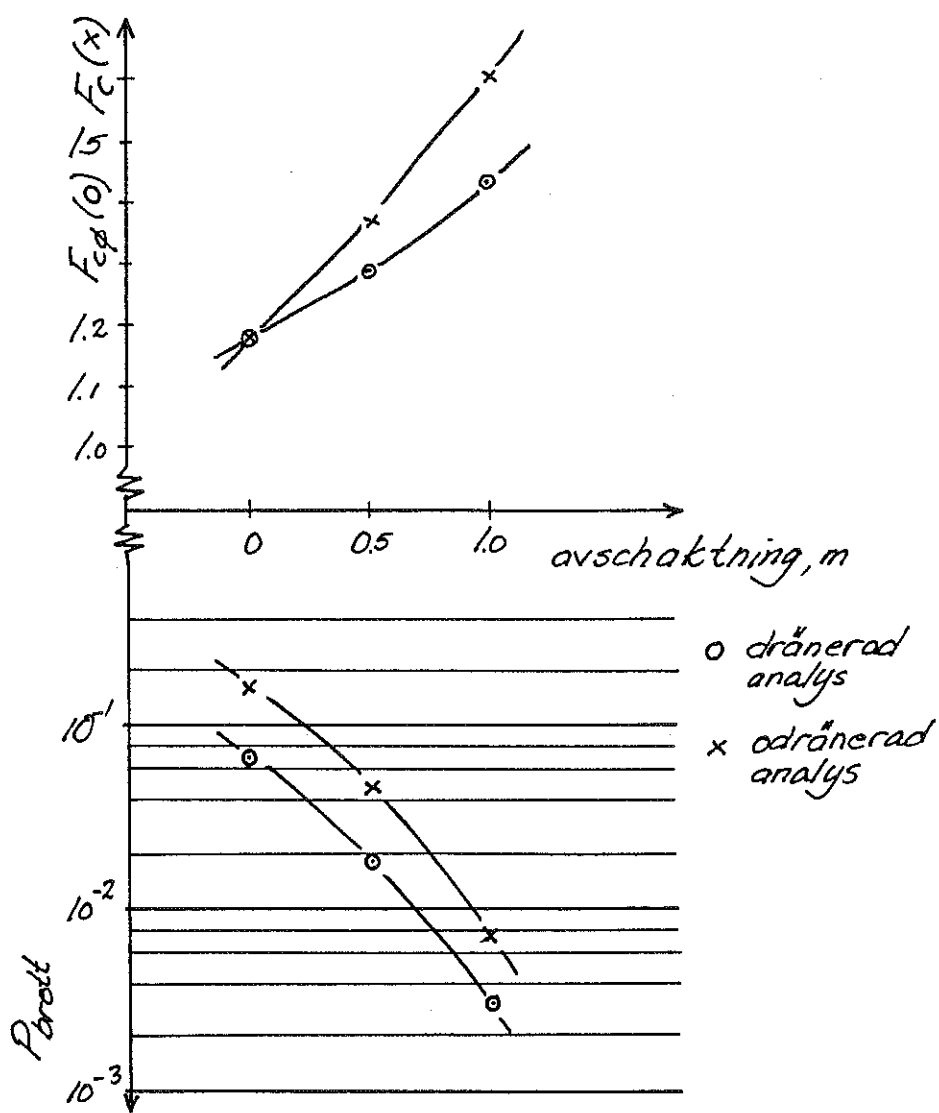


Fig. 6.4 Säkerhetsfaktorer och brottsannolikheter vid olika avschaktningarnivåer.

Beräkning av säkerhetsfaktor och sannolikhet för brott har utförts för dränerad såväl som odränerad analys för de i fig. 6.3 redovisade förstärkningsåtgärderna. Resultaten redovisas i tabell 6.3 och i figur 6.4 framgår att den skillnad i brottsannolikhet som finns mellan dränerad och odränerad analys består vid olika avschaktningsnivåer.

Tabell 6.3 Säkerhetsfaktorer och brottsannolikheter vid olika förstärkningsalternativ.

	$F_{C\phi}$	$P_{\text{brott}}\%$	F_C	$P_{\text{brott}}\%$
avsch. II	1,43	0,30	1,60	0,75
avsch. I	1,29	1,8	1,36	0,30
Nat.slänt	1,18	6,6	1,18	16,0
utflackn I	1,39	0,25	1,22	12,0
utflackn II	1,53	0,02	1,26	9,0

Fig. 6.5 visar däremot att en utflackning av slänten påverkar den odränerade analysen endast i ringa omfattning medan den dränerade analysen påverkas dramatiskt.

Ovanstående exempel visar tydligt att en sannolikhetsbaserad stabilitetsanalys ger viktig kompletterande information som bör beaktas då förstärkningsåtgärder skall dimensioneras. Det framgår vidare att man vid dränerad analys som regel kan nöja sig med en något lägre säkerhetsfaktor än vid odränerad analys, om målet är att säkerställa en viss högsta brottsannolikhet. Detta stämmer väl med praxis där man är benägen att acceptera ett lägre värde på F för dränerad analys än vid odränerad analys.

Man kan konstatera att om endast ett fåtal provningar gjorts i ett område är skattningen av medelvärdet osäker och en högre variationskoefficient bör då väljas. Om undersökningarna utökas, kan variationskoefficienten visa sig vara lägre och en lägre säkerhetsfaktor kan då väljas, med bibehållen brottsannolikhet. Det är ett incitament för

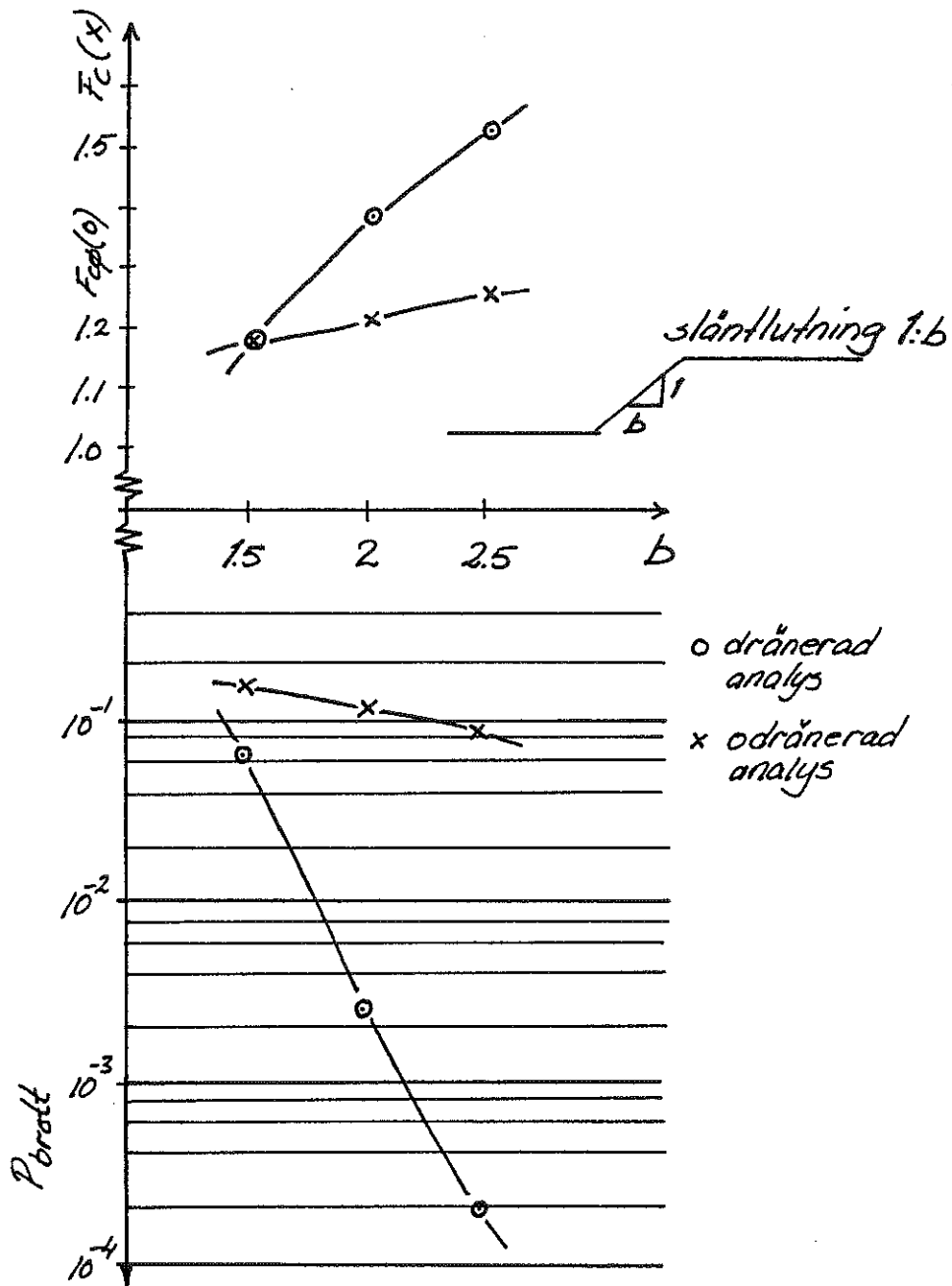


Fig. 6.5 Säkerhetsfaktorer och brottsannolikheter vid olika släntlutningar.

att utföra mer geotekniska undersökningar, vilket till viss del har sin motsvarighet i den nya normens säkerhetsklassificering.

Det är önskvärt att geotekniker i allmänhet kompletterar de traditionella beräkningarna med den här redovisade typen av sannolikhetskalkyl. På så sätt byggs en erfarenhet upp och tekniker vänjer sig vid att tänka i termer av sannolikheter och risker.

Författaren har gentemot beställare redovisat analys av den här typen och därigenom ej besvarat en fråga med ja eller nej, utan redovisat en trolig brottsannolikhet. Beställaren har funnit det mycket intressant och har därmed givits möjlighet att väga den med geotekniken förknippade risken mot andra kostnader och risker i projektet. Inte minst i detta ligger en stor potential hos metoden.

7. Bruksstadieberäkningar

Den nya normen använder sig av en partialsäkerhetsfaktor även då det gäller deformationsberäkning. Det innebär att ett nominellt värde beräknas, som är större än väntevärdet. Partialsäkerhetsfaktorn är i stort alltid densamma, vilket medför att de beräknade sättningarna anger ett värde, som med en viss sannolikhet ej överskrids beror av spridningen hos de ingående parametrarna.

Geoteknikern väljer dessutom ofta parametrarna lite på säkra sidan så att de beräknade sättningarna är vad han "i värsta fall befarar att de kan bli". Detta har sin grund i att om sättningarna blir större än vad som förutspåtts hålls geoteknikern ansvarig, medan om de blir mindre är "alla glada", förutsatt att de beräknade sättningarna kan anses rimliga.

Ett mer tilltalande sätt att hantera beräkningarna är att betrakta de ingående parametrarna som stokastiska variabler, använda punktskattningsmetoden för att väga samman parametrarna så att den beta-fördelning erhålls som beskriver sättningarna. Därmed kan uttalanden göras av typen "med 80% sannolikhet" blir sättningarna mellan x och y centimeter med ett förväntat värde på z cm. Parallellt bör naturligtvis traditionella beräkningar genomföras. Därmed vinns med tiden en insikt i vilket värde normen egentligen ger.

Nedan redovisas ett exempel, där sättningarna beräknas för en belastning i markytan och jordens kompressionsmodul, M , behandlas som en stokastisk variabel.

Det kan för en del som tidigare använt formuleringar av typen "sättningarna förväntas ej överstiga 5 cm" (när man i själva verket tror de blir 1 á 1,5 cm) eller "sätt-

ningarna torde bli ca 15 cm, varför pålgrundläggning rekommenderas" kännas otillfredsställande att ange intervall som är av den storleksordningen som erhålls i det givna exemplet med sättning för platta på mark.

En geotekniker får allt emellanåt höra att hans uttalanden är så vaga, konstruktörer anger minsann resultatet exakt. Det är förvisso sant, men om konstruktören tvingas att beakta och redovisa de olika lastfallen inkluderande olika stödförskjutningar skulle den myten snabbt avlivas. Konstruktörens beräkningsmetoder är förvisso sofistikerade, men resultatens överensstämmelse med verkligheten är säkerligen mager. Enda skillnaden är att ett skred, en sättning kan iakttagas av en lekman, och sedan jämföras med vad som förutspåtts, medan moment och tvärkrafter i en byggnad sällan eller aldrig kontrolleras. Dessutom är brottsannolikheten i en konstruktion vid en normenlig beräkning så oerhört liten jämfört med vad som är fallet för en geokonstruktion.

Exempel

Sättningar orsakad av en utbredd last på 60 kPa i markytan skall beräknas. Undergrunden består av silt och sand med moduler bestämda enligt fig. 7.1. Kunskapen om variationskoefficienten för kompressionsmodulen för friktionsjord är något begränsad. Här väljes $V_{ip}(M)=30\%$. Det intervall som modulen med 70% sannolikhet då kan antas ligga inom anges inom parentes i fig. 7.1. Beräkningarna och resultaten ges i tabell 7.1.

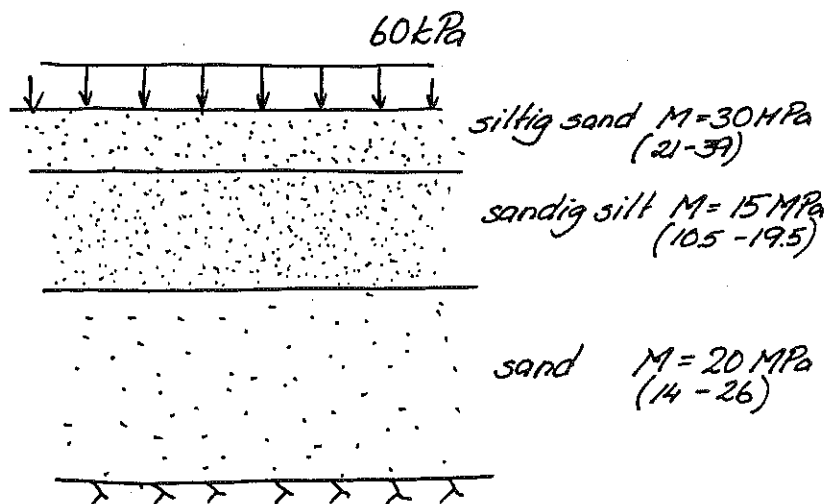


Fig. 7.1 Exempel på sättningsberäkning.

Tabell 7.1 Beräkning av sättning

$$s = \sum h \cdot \frac{q}{M}$$

	s	s ²
s ₋₋₋	29,2	855
s ₊₋₋	31,9	1016
s ₋₊₋	39,8	1583
s ₋₋₋₊	41,1	1689
s ₊₊₋	42,4	1799
s ₊₋₋₊	43,7	1712
s ₋₋₊₊	51,7	2668
s ₊₊₊	54,3	2946
$\Sigma/4$	41,8	1809

$$E[s] = 42 \text{ mm}$$

$$V[s] = 65$$

$$\sigma[s] = 8$$

$$\text{Vip}[s] = 19\%$$

Med 80% sannolikhet blir sättningarna mellan 31 och 53 mm. (*).

- (*) En beta-fördelning anpassas till s där medelvärde och standardavvikelse beräknats enligt ovan. a och b väljs till $E[s] \pm 3\sigma[s]$, vilket ger $a = 18$ mm och $b = 66$ mm. Med hjälp av tidigare omnämnda datorprogram kan det intervall som sättningarna med t ex 80% sannolikhet kommer att falla inom bestämmas. Om s istället antas normalfördelat erhålls motsvarande intervall till 32 och 52 mm.

8. Tillämpning av avancerade statistiska metoder inom geotekniken

Den klassiska analytiska matematiska statistiken är svår att tillämpa inom geotekniken, främst beroende på att man inom geotekniken normalt gör vad som kan klassificeras som fåtalsprovning samtidigt som antalet ingående variabler är förhållandevis stort (Olsson, 1986). Variationer i rymden för de geotekniska storheterna är ävenledes relativt stor och i vissa avseenden oregelbunden. Omfattande analys med s_k autokorrelation visar ofta på korrelationsavstånd på endast någon meter. Det innebär att ett parametervärde bestämt i en punkt i jorden skulle bara kunna användas för att förutsäga samma parameter på ett avstånd från punkten på ungefär en meter. På större avstånd skulle man inte ha någon glädje av det bestämda värdet. Korrelationsavståndet vid sondering visar sig dessutom oftast vara mindre i horisontalled än i vertikalled. För en geotekniker som ofta gör sina provtagningar och bestämningar av materialegenskaperna på flera tiotalsmeters avstånd ifrån varandra, ter sig den typen av information märklig.

Ett sätt att fastställa förväntad variation av en parameter i horisontalled är att utföra s_k kriging. Det krävs då att mätvärden föreligger från ett antal olika nivåer i ett antal olika borrhål. Parametervärdena behandlas för en nivå i taget och en autokorrelationsfunktion ansätts. I själva verket testas ett antal standardfunktioner varvid den väljs som bäst förmår beskriva sambanden. Här skall resultat från en sådan undersökning redovisas där förkonsolideringstrycket bestämts på olika nivåer i tre borrhål, (Alte et al., 1989). Borrhålens inbördes avstånd var 40-80 m och på några nivåer hade flera försök utförts.

Resultatet av "krigingen" visas i fig. 8.1a och b. Figur 8.1a visar hur förkonsolideringstrycket kan förväntas variera i plan, medan tillhörande variation av variansen visas i fig. 8.1b.

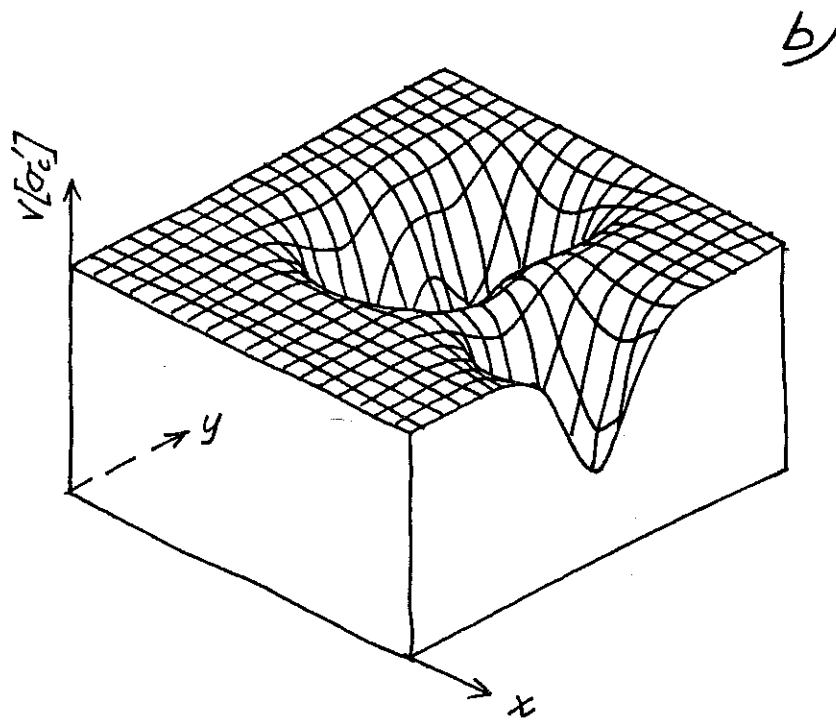
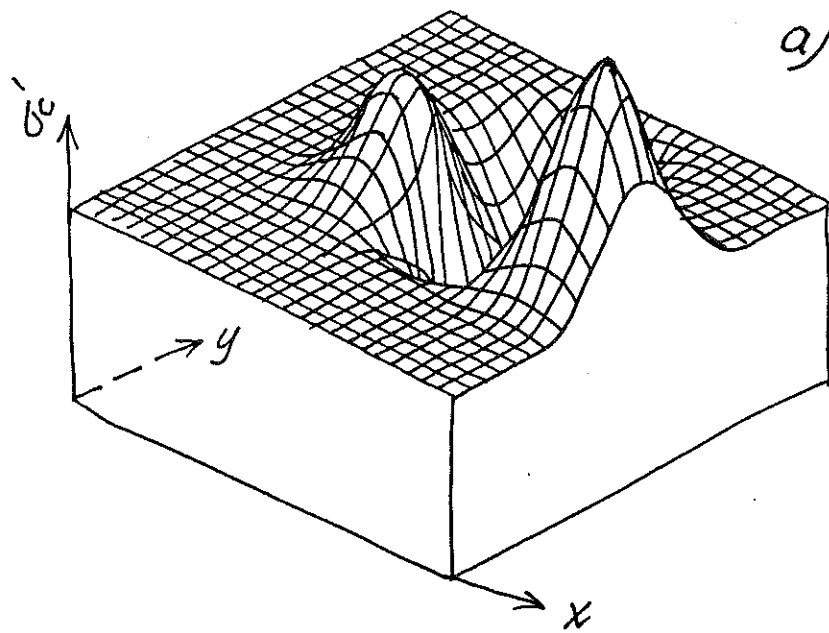


Fig. 8.1 Resultat från "kriging" för förkonsoliderings-
trycket på nivån 20 m.

Det framgår av fig. 8.1a att på stort avstånd ifrån något av borrhålen är medelvärdet för samtliga bestämda förkonsolideringstryck det bästa valet. Ju närmare man kommer något av borrhålen, desto mer dominerar just det borrhållets värde. För variansen är tendensen likartad, fast variansen minskar alltid så fort man närmar sig något av borrhålen.

Denna typ av analys används på större konstruktioner, t ex offshoreplattformar.

Egentligen är antalet borrhål i ovanstående exempel för litet. Önskvärt hade varit att ha ca 10 borrhål på ett inbördes avstånd av mindre än 100 m, ett önskemål som ligger långt från den verklighet geoteknikern normalt lever i.

9. Slutsatser

I allt fler fall visar det sig att en renodlad deterministisk analys inte räcker till för en allsidig belysning av ett problem, utan måste kompletteras med någon form av statistisk analys. Nybyggnadsreglerna, BFS 1988:18, t ex bygger på partialkoefficientmetoden, som i sig bygger på ett statistiskt betraktelsesätt.

De statistiska metoder som redovisats i denna rapport är exempel på en typ av analys som är mycket lämplig för hantering av ingenjörstekniska problem, där antalet mätpunkter många gånger är begränsat, samtidigt som ett antal parametrar bör betraktas som stokastiska variabler. Metoderna kanske i förstone kan te sig lite abstrakta, men om man arbetar igenom några exempel blir de strax ganska förståeliga. Metoderna har den definitiva fördelen att de inte är särskilt arbetskrävande, och därför med en ringa tidsinsats kan utnyttjas.

Genom att utöka den traditionella analysen till att också omfatta en sådan här förenklad statistisk analys, kan värdefulla erfarenheter erhållas och på sikt förväntas utgöra ett mycket värdefullt komplement.

REFERENSER

1. Blom, G., 1984. Statistikteori med tillämpningar. Studentlitteratur, Lund.
2. Handboken Bygg, Band A, Allmänna Grunder, 1984. Liber Förlag, Stockholm.
3. Harr, M., 1987. Reliability based design in Civil Engineering. McGraw-Hill, New York.
4. Harr, M., 1989. Probabilistic estimates for multivariate analyses. Appl. Math. Modelling, Vol 13, May.
5. Janbu, N., 1973. Slope stability computations. The Embankment Dam Engineering. Casagrande Volume, J. Wiley and Sons, pp. 47-86.
6. Olsson, L., 1986. Användning av β -metoden i geotekniken - illustrerad med spontberäkning. Institutionen för jord- och bergmekanik, KTH, Stockholm.
7. Pearson, E. and Hartley, H., 1972. Biometrika Tables for Statisticians, Vol II. Cambridge University Press, London.
8. Rosenbluth, E., 1975. Point Estimates for Probability Moments. Proc. Nat. Academy of Science, USA, Vol 72, no 10.

Meddelande:

- nr 1 Urbaniseringsprocessens inverkan på ytvattenavrinning och grundvattenbildning. Lägesrapporter (1972-07-01 - 1973-03-01). 1973. 100 sidor. (Utgången)
- nr 2 Leif Carlsson: Grundvattenavsänkning Del 1. Evaluering av akviferers geohydrologiska data med hjälp av provpumpningsdata. 1973. 67 sidor.
- nr 3 Leif Carlsson: Grundvattenavsänkning Del 2. Evaluering av lågpermeabla lagers hydrauliska diffusivitet med hjälp av provpumpningsdata. 1973. 17 sidor.
- nr 4 Viktor Arnell: Nederbördsräknare. En sammanställning av några olika mätartyper. 1973. 39 sidor. (Utgången)
- nr 5 Viktor Arnell: Intensitets-varaktighetskurvor för häftiga regn i Göteborg under 45-årsperioden 1926-1971. 1974. 68 sidor.
- nr 6 Urbaniseringsprocessens inverkan på ytvattenavrinning och grundvattenbildning. Lägesrapporter (1973-03-01 - 1974-02-01). 1974. 167 sidor.
- nr 7 Olov Holmstrand, Per O Wedel: Ingenjörsgelogiska kartor - litteraturstudier. 1974. 55 sidor. (Utgången)
- nr 8 Anders Sjöberg: Interim Report. Mathematical Models for Gradually Varied Unsteady Free Flow. Development and Discussion of Basic Equations. Preliminary Studies of Methods for Flood Routing in Storm Drains. 1974. 74 sidor. (Utgången)
- nr 9 Olov Holmstrand (red.): Seminarium om ingenjörsgelogiska kartor. 1974. 38 sidor. (Utgången)
- nr 10 Viktor Arnell, Börje Sjölander: Mätning av nederbördsintensiteter i Göteborgsregionen. Stationsbeskrivning. 1974. 53 sidor. (Utgången)
- nr 11 Per-Arne Malmquist, Gilbert Svensson: Dagvattnets beskaffenhet och egenskaper. Sammanställning av utförda dagvattenundersökningar i Stockholm och Göteborg 1969-1972. Engelsk sammanfattning. 1974. 46 sidor. (Utgången)
- nr 12 Viktor Arnell, Sven Lyngfelt: Interimrapport. Beräkningsmodell för simulering av dagvattenflöde inom bebyggda områden. Geohydrologiska forskningsgruppen i samarbete med VA-verket i Göteborg. 1975. 50 sidor.
- nr 13 Viktor Arnell, Sven Lyngfelt: Nederbörds-avrinningsmätningar i Bergsjön, Göteborg 1973-1974. 1975. 92 sidor.
- nr 14 Per-Arne Malmquist, Gilbert Svensson: Delrapport. Dagvattnets sammansättning i Göteborg. Engelsk sammanfattning. 1975. 73 sidor.
- nr 15 Dagvatten. Uppsatser presenterade vid konferens om urban hydrologi i Sarpsborg 1975. 1976. 33 sidor. Följande uppsatser ingår:
Arnell V. Beräkningsmetod för analys av dagvattenflödet inom ett urbant område.
Lyngfelt S. Nederbörds-avrinningsstudier i Bergsjön, Göteborg.
Sjöberg A. CTH-ledningsnätmodell DAGVL-A.
Svensson G. Dagvattnets sammansättning, inverkan av urbanisering. (Utgången)
- nr 16 Grundvatten. Uppsatser presenterade vid konferens om urban hydrologi i Sarpsborg 1975. 1976. 43 sidor. Följande uppsatser ingår:
Andréasson L, Cederwall K. Rubbningar av grundvattenbalansen i urbana områden.
Carlsson L. Djupinfiltration i slutna akviferer.
Torstensson B-A. Följder av grundvattensänkning inom lerområden.
Wedel P. Exempel på dränering av jordlager på grund av tunnelbyggande. (Utgången)
- nr 17 Olov Holmstrand, Per Wedel: Markvattenundersökningar i ett urbant område. 1976. 127 sidor.
- nr 18 Göran Ejdeling: Beräkningsmodeller för prognos av grundvattenförhållanden. 1978. 130 sidor.
- nr 19 Viktor Arnell, Jan Falk, Per-Arne Malmquist: Urban Storm Water Research in Sweden. 1977. 30 sidor.
- nr 20 Viktor Arnell: Studier av amerikansk dagvattenteknik. Resa i december 1976. 1977. 64 sidor.
- nr 21 Leif Carlsson: Reserapport från studieresa i USA samt deltagande i 2nd International Symposium on Land Subsidence in Anaheim, USA. 29 nov-17 dec 1976. 1977. 61 sidor.

- nr 22 Per O. Wedel: Grundvattenbildning, samspelet jordlager och berggrund. Exemplifierat från ett försöksområde i Angered. 1978. 130 sidor.
- nr 23 Viktor Arnell: Nederbördsdata vid dimensionering av dagvattensystem med hjälp av detaljerade beräkningsmodeller. En inledande studie. 1977. 29 sidor.
- nr 24 Leif Carlsson, Klas Cederwall: Urbaniseringsprocessens inverkan på ytvattenavrinning och grundvattenbildning. Geohydrologisk forskning vid CTH, Sektion V, under perioden 1972-75. 1977. 17 sidor.
- nr 25 Lars O Ericsson (red.): Lokalt omhändertagande av dagvatten. Delrapport från första verksamhetsåret 1976-02-01 - 1977-01-31. 1977. 120 sidor.
- nr 26 Ann-Carin Andersson, Jan Berntsson: Kontrollerad grundvattenbalans genom djupinfiltration. En inventering av djupinfiltrationsprojekt. 1978. 273 sidor.
- nr 27 Anders Eriksson, Per Lindvall: Lokalt omhändertagande av dagvatten. Resultatredovisning av enkät rörande drift och konstruktion av perkolationsanläggningar. 1978. 126 sidor.
- nr 28 Olov Holmstrand (red.): Lokalt omhändertagande av dagvatten. Delrapport nr 2 från perioden 1977-02-01 - 1977-11-30. 1978. 69 sidor.
- nr 29 Leif Carlsson: Djupinfiltrationsstudier i Angered. 1978. 70 sidor.
- nr 30 Lars O Ericsson: Infiltrationsprocessen i en dagvattenmodell. Teori, Undersökning, Mätning och Utvärdering. 1978. 45 sidor.
- nr 31 Lars O Ericsson, Permeabilitetsbestämning i fält vid perkolationsmagasin. Dimensionering. 1978. 15 sidor.
- nr 32 Lars O Ericsson, Stig Hård: Infiltrationsundersökningar i stadsdelen Ryd, Linköping. 1978. 145 sidor.
- nr 33 Jan Hällgren, Per-Arne Malmquist: Urban Hydrology Research in Sweden 1978. Swedish Coordinating Committee for Urban Hydrology Research. 1978. 14 sidor.
- nr 34 Bo Lind, Göte Nordin: Geohydrologi och vegetation i Dalen 5, Karlskoga. 1978. 63 sidor.
- nr 35 Eivor Bucht, Bo Lind: Metodfrågor vid naturanpassad stadsplanering - erfarenheter från studie i Karlskoga. 1978. 65 sidor.
- nr 36 Anders Sjöberg, Jan Lundgren, Thomas Asp, Henriette Melin: Manual för ILLUDAS (version S2). Ett datorprogram för dimensionering och analys av dagvattensystem. 1979. 67 sidor.
- nr 37 Per-Arne Malmquist m fl: Papers on Urban Hydrologi 1977-78. 99 sidor.
- nr 38 Viktor Arnell, Per-Arne Malmquist, Bo-Göran Lindquist, Gilbert Svensson: Uppsatser om Dagvattenteknik. 1978. 30 sidor.
- nr 39 Bo Lind: Dagvatteninfiltration - förutsättningar inom ett bergsområde, Östra Gårdsten i Göteborg. 1979. 32 sidor.
- nr 40 Per-Arne Malmquist (red.): Geohydrologiska forskningsgruppen 1972-78. Sammanställning av uppnådda resultat. 1979. 96 sidor. Kostnadsfri.
- nr 41 Gilbert Svensson, Kjell Øren: Planeringsmodeller för avloppssystem. NIVA-modellen tillämpad på Torslanda avrinningsområde. 1979. 71 sidor.
- nr 42 Per-Arne Malmquist (red.): Infiltrera dagvatten. Diskussioner och figurer från CTH-seminarium 1979-04-20. 1979. 86 sidor.
- nr 43 Bo Lind: Dagvatteninfiltration - perkolationsanläggning i Halmstad. 1979. 58 sidor.
- nr 44 Viktor Arnell, Thomas Asp: Beräkning av bräddvattenmängder. Nederbördens varaktighet och mängd vid Lundby i Göteborg 1921-1939. 1979. 80 sidor.
- nr 45 Stig Hård, Thomas Holm, Sven Jonasson: Dagvatteninfiltration på grönytor - Litteraturstudie, kunskaps-sammanställning och hypotes. 1979. 278 sidor.
- nr 46 Per-Arne Malmquist, Per Lindvall: Dräneringsrörs igensättning - en jämförande laboratoriestudie. 1979. 44 sidor.
- nr 47 Per-Arne Malmquist, Gunnar Lannér, Erland Högberg, Per Lindvall: SÖDRA NÅSET - ett exempel på förenklad utformning av gator och dagvattensystem i ett upprustningsområde. 1980.
- nr 48 Viktor Arnell, Håkan Strandner, Gilbert Svensson: Dagvattnets mängd och beskaffenhet i stadsdelen Ryd i Linköping, 1976-77. 1980.
- nr 49 Lars O Ericsson, Stig Hård: Termisk registrering, en metod att kartera markvattenhalt - Termovisionsförsök i klimatkammare. 1980. 65 sidor.

- nr 50 Viktor Arnell: Dimensionering och analys av dagvattensystem. Val av beräkningsmetod. 1980. 56 sidor, 22 figurer.
- nr 51 Lars O Ericsson: Markvattenförhållanden i urbana områden. Slutrapport. Göteborg 1980. 115 sidor.
- nr 52 Olov Holmstrand (red.): Ingenjörsgelogisk kartering. Seminarium 1980-04-17. 110 sidor.
- nr 53 Olov Holmstrand: Lokalt omhändertagande av dagvatten. Sammanfattning av forskning om dagvatteninfiltration vid CTH 1976-79. 90 sidor.
- nr 54 Olov Holmstrand, Bo Lind, Per Lindvall, Lars-Ove Sörman: Perkulationsmagasin i ett lerområde. Lokalt omhändertagande av dagvatten i Bratthammar, Göteborg. 172 sidor.
- nr 55 Erland Högberg, Gunnar Lannér: Gatuplanering i bostadsområden i utlandet. Nya principer och lösningar i Danmark, Holland och England. 1981. 110 sidor.
- nr 56 Sven Lyngfelt: Dimensionering av dagvattensystem. Rationella metoden. 1981. 82 sidor.
- nr 57 Erland Högberg: Samband mellan gatustandard och trafiksäkerhet i bostadsområden. En förstudie. 1981.
- nr 58 Jan A Berntsson: Portryckförändringar och markrörelser orsakade av trädvegetation. 1980. 121 sidor.
- nr 59 Per-Arne Malmquist, Stig Hård: Grundvattenpåverkan av dagvatteninfiltration. 1981.
- nr 60 Annika Lindblad: Infiltrationsmätningar utförda vid Geologiska institutionen, CTH/GU, 1972-80. Sammanställning och statistisk bearbetning. 1981. 78 sidor.
- nr 61 Lars O Ericsson, Stig Hård: Termisk registrering - en metod att kartera markvattenhalt. Slutrapport. 1981. 18 sidor.
- nr 62 Jan Pettersson, Elisabeth Sjöberg: SÖDRA NÅSET - En intervjuundersökning rörande två alternativa upprustningsförslag av gator och dagvattentransport. 1981. 36 sidor.
- nr 63 Olov Holmstrand: Praktisk tillämpning av ingenjörsgelogisk kartering. 1981. 114 sidor.
- nr 64 Anders Sjöberg, Nils Mårtensson: REGNENVELOPEMETODEN. En analys av metodens tillämplighet för dimensionering av ett 2-års perkulationsmagasin. 1982. 29 sidor.
- nr 65 Gösta Lindvall: ENERGIFÖRLUSTER I LEDNINGSBRUNNAR - Litteraturstudie. 1982. 35 sidor.
- nr 66 Per-Arne Malmquist: Lathund för beräkning av Dagvattnets föroreningar. 1982. 32 sidor.
- nr 67 Sven Nyström: Kommuns skadeståndsansvar mot VA-abonnent för översvämningskador. 1982. 71 sidor.
- nr 68 Sven Lyngfelt, Gilbert Svensson: Dagvattenavrinning från stora urbana områden. Simuleringsmetodik exemplifierat på Göteborgsregionen. 1983. 118 sidor.
- nr 69 Hans Bäckman, Gilbert Svensson: Flödesmätning i avloppsnät med portabla utrustningar. Mät noggrannhet under kontrollerade förhållanden i en 225 mm:s betongledning. 1983. 51 sidor.
- nr 70 Olov Holmstrand (red): Naturanpassad stadsplanering i Dalen 5, Karlskoga. Erfarenheter av planeringsprocess och teknik under och efter byggandet. 1983. 114 sidor.
- nr 71 Olov Holmstrand (red): Reservvattentäkter. Redovisning av diskussionsdag 1983-05-18. 1983. 115 sidor.
- nr 72 Gilbert Svensson, Håkan Strandner (övers. och bearb.): NIVANETT manual. Ett datorprogram för simulering av flöden i avloppsnät. 1983. 101 sidor.
- nr 73 Gilbert Svensson (red): Byggande, drift och förnyelse av kommunala va-ledningar. -Är driftstörningarna omfattande? -Projekterar vi på bästa sätt? - Var ligger kostnaderna? 1984. 98 sidor.
- nr 74 Hans Bäckman: Avloppsledningar i svenska tätorter i ett historiskt perspektiv. -Ett sammandrag av tekniska förutsättningar, idéer och diskussioner under 1900-talets ledningsbyggande. 1984. 123 sidor.
- nr 75 Ann-Carin Andersson, Olov Holmstrand, Erik Almling, Rolf Rosen, Kjell Söderström: Infiltration och alternativa åtgärder vid grundvattensänkning. Jämförande beskrivningar och val av metoder. 1984. 115 sidor.
- nr 76 Viktor Arnell, Henriette Melin: Rainfall data for the design of sewer detention basins. 1984. 79 sidor.
- nr 77 Hans Bäckman: Överläckning från dag- till spillvattenledningar. Metoder för att påvisa och kvantifiera överläckning samt redovisning av mätresultat från kommunala avloppsnät. 1985. 102 sidor.

- nr 78 Chester Svensson, Göran Sällfors: Beräkning av dimensionerande grundvattentryck. 1. Göteborgsregionen. 1985. 43 sidor.
- nr 79 Jan-Arne Nilsdal: Källaröversvämning i samband med regn. Reflexioner kring ett skadedrabbat bostadsområde i Göteborg. Några förslag på hur förbättrad säkerhet hos kommunala avloppsledningar kan erhållas. 1985. 68 sidor.
- nr 80 Bo Lind, Mats Nyborg: Moränstruktur och hydraulisk konduktivitet. 1986. 55 sidor.
- nr 81 Gösta Lindvall: Energiförluster i ledningsbrunnar. Laboratoriemätningar. 1986. 49 sidor.
- nr 82 Per Warnolf: Jorderosion i rörgravar för VA-ledningar. Laboratorieförsök och litteraturstudie. 1988. 105 sidor.
- nr 83 Bo Lind, Mats Nyborg: Sediment structures and the hydraulic conductivity in till. 1988. 73 sidor.
- nr 84 Chester Svensson: Analys av påverkade grundvattennivåer. 1988. 44 sidor.
- nr 85 Lars Rosén: Sårbarhetsklassificering av grundvatten. Rapport från en studieresa i USA. 1988. 112 sidor.
- nr 86 Chester Svensson, Göran Sällfors: Beräkning av dimensionerande grundvattentryck. 2. Stockholmsregionen. 1988. 61 sidor.
- nr 87 Chester Svensson, Göran Sällfors: Beräkning av dimensionerande grundvattentryck. 3. Övriga södra Sverige. 1988. 78 sidor.
- nr 88 Teresia Reuterswärd Wengström: Kartläggning av skador på segjärnsledningar i Göteborg 1977-1987. 1989. 39 sidor.

