



Institutionen för vattenbyggnad
Chalmers tekniska högskola

Department of Hydraulics
Chalmers University of Technology

HYBRIDELEMENTMETODEN

En metod för beräkning av ett
flytande föremåls rörelse

av

Göran Olsson

Report Series A:21
ISSN 0348—1050

Göteborg 1990

Adress: Institutionen för vattenbyggnad
 Chalmers tekniska högskola
 412 96 GÖTEBORG

Telefon: 031-72 10 00

SAMMANFATTNING

Den föreliggande rapporten behandlar diffractionsteorin för vattenvågors påverkan av föremål. Diffractionsteorin kan användas för beräkning av rörelser och krafter hos föremål, som är stora i förhållande till våglängden. I rapporten går igenom de grundläggande antagandena, och de styrande ekvationerna för ett stort föremåls rörelser i vågor härleds. Dessa ekvationer ligger till grund för en finit element formulering av problemet, som kallas hybridelementmetoden. Denna metod innebär att endast området närmast föremålet delas in i finita element, medan man i området längre bort ansätter en lösning i form av ortogonalserier.

Ett program har implementerats som löser de ekvationssystem som uppkommer, då hybridelementmetoden används.

Ett enkelt tillämpningsexempel har sedan beräknats, och jämförelser med existerande analytiska lösningar har gjorts. Vid jämförelserna framgår det att kopplingstermer, i added mass och damping, mellan de olika rörelsemoderna är svårast att beräkna med hybridelementmetoden, och att felen blir större ju högre frekvens vågorna har. Men då rörelseekvationerna lösats, och felen i rörelserna tagits fram, visar det sig att felen är under 10% för alla rörelser och frekvenser av betydelse.

SUMMARY

This report deals with the diffraction theory for interaction between water waves and structures. The diffraction theory can be applied, when the structure is large compared to the wave length. In the report the basic assumptions are reviewed and the governing equations for the motion of a large structure in waves are derived. These equations are the basis for a finite element formulation of the problem called the hybrid element method. In this method only the volume close to the structure is meshed with finite elements, while for the volume further away the solution is assumed to be in the form of orthogonal series.

A program has been implemented that solves the system of equations that is generated when the hybrid element method is used.

A simple example has been calculated, and comparisons with existing analytical solutions have been made. In these comparisons it is seen that coupling terms in added mass and damping have the largest relative errors, and that the error is larger when the frequency is high. However, when the equations of motion are solved the error is less than 10% for all motions and frequencies of significance.

FÖRORD

Vid institutionen för vattenbyggnad på Chalmers har forskning rörande vågor och dess samverkan med föremål pågått sedan mitten på 70-talet. Det började med ett projekt för utvärdering av möjligheten att utvinna energi ur havsvågorna runt Sverige. Inom detta projekt framkom ett behov av beräkningsmodeller för vågor och föremåls ömsesidiga påverkan. När sedan oljeutvinning i Nordsjön kom igång uppstod ett förnyat behov av beräkningsmodeller. Det var då naturligt att Vattenbyggnadsinstitutionen deltog i ett projekt, som finansierades av styrelsen för teknisk utveckning, STU, kallat "Offshorekonstruktioner - vågkrafter och rörelser".

Arbetet bakom den föreiggande rapporten påbörjades under 1980 inom projektet "Offshorekonstruktioner - vågkrafter och rörelser". Av olika anledningar har arbetet legat nere ett antal år men återupptogs 1988. Rapporten utgör en del i kraven för en teknisk licentiatexamen.

Jag vill uttrycka min varmaste tacksamhet till min handledare professor Lars Bergdahl som bistått mig med goda råd och hjälp inte minst när jobbet känts tungt, till institutionssekreterare Ann-Marie Holmdahl som tålmodigt renskrivit mitt långt ifrån lättlästa manuskript. Mina andra kollegor på Vattenbyggnadsinstitutionen skall naturligtvis inte glömmas bort. Av dem skall speciellt Henriette Melin nämnas som hjälpt till att lösa praktiska datorproblem under slutskedet av arbetet samt Mickey Johansson som hjälpt till med jämförelsematerial.

INNEHÅLL

SUMMARY		
FÖRORD		
INNEHÅLL		
1.	INLEDNING	1
1.1	Bakgrund	1
1.2	Mål och omfattning	2
2.	GRUNDLÄGGANDE TEORI	3
2.1	De hydrodynamiska ekvationerna	3
2.1.1	Kraftekvationerna	3
2.1.2	Transportteoremet	4
2.1.3	Kontinuitetsekvationen	6
2.1.4	Eulers ekvationer	7
2.1.5	Navier-Stokes ekvationer	8
2.2	Potentialflöde	9
2.2.1	Hastighetspotentialen	9
2.2.2	Bernoullis ekvation	10
2.2.3	Randvillkor	11
2.3	Ytvågor på vatten	12
2.3.1	Linearisering	12
2.3.2	Plana vågor	14
2.4	Interaktionen mellan vågor och ett föremål	15
2.4.1	Definition av rörelsemoder	16
2.4.2	Superpositionsprincipen för potentialen	17
2.4.3	Komplex notering	18
2.4.4	Krafter från det hydrodynamiska trycket	19
2.5	Rörelseekvationerna	21
2.5.1	Koordinatsystem	21
2.5.2	Hydrostatik	23
2.5.3	Dämpning och tilläggsmassa	25
2.5.4	Excitationskrafterna	27
2.5.5	Rörelseekvationerna sammansatta	28
2.5.6	Recept för beräkning av rörelsen hos ett flytande föremål i vågor och vågfältet kring detta	30

3.	VARIATIONSFORMULERING AV PROBLEMET	31
3.1	Funktionalen i allmänna fallet	31
3.1.1	Funktionalen för andra ordningens problem	35
3.1.2	Randvillkor	36
3.1.3	Den generella funktionalen för andra ordningens partiella differentialekvationer	38
3.2	Variationsformulering av fallet med gravitationsvågor på vatten	40
3.2.1	Identifikation av termerna	41
3.2.2	Sju olika fall att behandla	42
3.2.3	Indelning av volymen i två områden	43
4.	FINIT ELEMENTFORMULERING	46
4.1.1	Element	46
4.1.2	Isoparametrisk avbildning	48
4.2	FEM-formulering av problemet med gravitationsvågor på vatten	49
4.2.1	Volymintegralen	51
4.2.2	Integralen på vattenytan	56
4.2.3	Integralerna på den fiktiva ytan	57
4.2.4	Kvadratur	66
4.2.5	Den globala matrisen	67
5.	BERÄKNING AV RESPONS	71
5.1	Beräkning av excitationskrafterna	71
5.2	Beräkning av added mass och damping	72
5.3	Beräkning av rörelserna	73
6.	INDATA	75
6.1	Beskrivning av indata kort för kort	78
6.2	Exempel på indata	80
7.	UTDATA	83
7.1	Exempel på utskrift	83
8.	KÖRNINGSEXEMPLER OCH JÄMFÖRELSE MED ANALYTISK LÖSNING	90
9.	AVSLUTNING	95
10.	SYMBOLLISTA	96
11.	REFERENSLISTA	99

1. INLEDNING

1.1 Bakgrund

Under 70-talet uppkom ett ökat behov av numeriska modeller för lösning av problem med föremål i vågor. Ett intensivt sökande efter alternativ till kärnkraft och förbränning av fossila bränslen ledde till att energiupptagning från havsvågor undersöktes. Där behövdes sådana modeller. Den växande offshoremarknaden med flytande plattformar hade också ett behov av sådana modeller.

Problemet med föremål i vågor kan delas in i två olika kategorier:

1. Små föremål där vågen påverkas lite. Viskösa effekter är stora.
2. Stora föremål där vågen blir mycket påverkad. Viskösa effekter är små.

För att avgöra om ett föremål är stort eller litet använder man sig av ett relationstal, diffractionsparametern, som är förhållandet mellan en karakteristisk längd hos föremålet och våglängden. Om diffractionsparametern är större än 0,2 så betraktas föremålet som stort. Förutom de viskösa effekterna kan olinjära effekter spela roll. Dessa börjar spela in om vågornas lutning, förhållandet mellan våghöjd och våglängd, överstiger ca 0,07.

I denna rapport behandlas problem av kategori 2 utan olinjära effekter. Den teori som ligger till grund för de numeriska modellerna är linjär diffractionsteori. Den linjära diffractionsteorin finns beskriven i ett flertal referenser, se t.ex. Havelock (1955), Newman (1977), Mei (1978, 1983), Chakrabarti (1987).

1.2 Mål och omfattning

Målet med arbetet har varit att ge en sammanställning av de grundläggande teoretiska resonemangen bakom diffractionsteorin samt att utveckla och tillämpa ett hybridelementprogram på ett enkelt fall av föremål i vågor. Som tillämpningsexempel har valts en cylinder som flyter i vattenytan. Till grund för de teoretiska resonemangen har arbeten av Newman (1977) och Vehausen (1971) legat. Stommen till själva programmet finns beskriven av Yue m.fl. (1976). Programmet har utvecklats till att gälla även flytande rörliga föremål som inte behandlas i Yue m.fl. (1976). Dessutom har programmet utvecklats till att kunna behandla föremål av godtycklig form. Det skall dock sägas att indatagenereringen är mycket arbetsam och det finns metoder som bättre lämpar sig för att lösa komplicerade föremåls rörelser i vågor t.ex. någon källfördelningsmetod.

2. GRUNDLÄGGANDE TEORI

I detta kapitel resumeras den grundläggande hydrodynamiska teorien för ett flytande föremål. De grundläggande hydrodynamiska ekvationerna ställs upp och en idealisering till potentialströmning görs. Därefter behandlas de lineariserade ekvationerna för potentialströmning med fri vattenytan och interaktionen mellan vågor på vattenytan och ett föremål på ytan. Slutligen ställs rörelseekvationerna för ett flytande föremål upp och ekvationssystemet matrisformuleras.

2.1 De hydrodynamiska ekvationerna

De hydrodynamiska ekvationerna bestämmer hur en fluid rör sig under inverkan av ytterligare störningar.

2.1.1 Kraftekvationerna

Kraftekvationerna är lättast att förstå om man studerar vilka krafter som verkar på ett fluidelement, se fig. 2.1. I varje begränsningsyta verkar skjuvspänningar och normalspänningar. Dessa utgör spänningstensorn τ_{ij} .

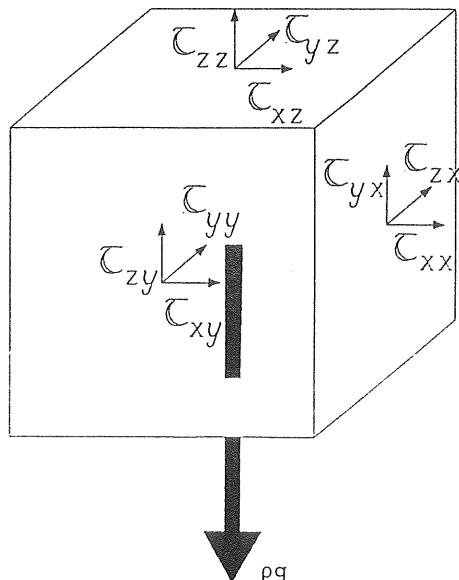


Fig. 2.1 Krafter och spänningar på ett fluidelement

τ_{ii} är normalspänningarna som är lika med trycket i varje riktning, men detta är isotrop, så att alla τ_{ii} är lika med $-p$. Förutom skjuvspänningar kan volymselementet vara utsatt för masskrafter dvs krafter som verkar på hela elementet t.ex. gravitationen.

Nu kan kraftlagen utnyttjas på elementet och man får

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u_i dv = \iint_S \tau_{ij} n_j ds + \iiint_V F_i dv \quad \dots (2.1)$$

där

u_i är fluidens hastigheter

$dv = dx_1 dx_2 dx_3$ är elementets volym

ds ytelement

n_j normalvektorn på ytelementet, positiv utåt

F_i masskrafterna

Den första termen är tidsderivatan av impulsen och de andra är bidragen från skjuvspänningarna respektive masskrafterna.

Här har tensorbeteckningar använts och indexen antas löpa från 1 till 3 om inget annat anges. Dessutom har summationskonventionen använts. Den säger att om ett index förekommer två gånger i samma term skall termen summeras över alla värden på detta index. Alltså $\tau_{ij} n_j = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j$.

Ekv. 2.1 kan skrivas med integraler över volymen enbart. Om divergensteoremet tillämpas på andra termen ger detta

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u_i dv = \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) dv \quad \dots (2.2)$$

2.1.2 Transportteoremet

Ett viktigt teorem inom hydrodynamiken är transportteoremet, som beskriver hur en integrerad kvantitet hos fluiden deriveras med avseende på tiden. Studera

$$I(t) = \iiint_V f(x, t) dV \quad \dots (2.3)$$

vid tiden t och $t+\Delta t$. Då fås

$$\Delta I = I(t+\Delta t) - I(t) = \iiint_{V(t+\Delta t)} f(x, t+\Delta t) dV - \iiint_{V(t)} f(x, t) dV \quad \dots (2.4)$$

Utvecklas nu $f(x, t+\Delta t)$ i en Taylorserie så fås

$$f(x, t+\Delta t) = f(x, t) + \Delta t \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \quad \dots (2.5)$$

som insatt i ovanstående ger

$$\Delta I = \Delta t \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iiint_{\Delta V} f dV \quad \dots (2.6)$$

Integralen över ΔV kan skrivas som en integral över begränsningsytan $S(t)$. ΔV är ju normalkomponenten av det avstånd som $S(t)$ har rört sig under tiden Δt multiplicerat med $dS(t)$. Detta avstånd är $U_n \Delta t$ där U_n är normalhastigheten på ytan S . Nu fås

$$\Delta I = \Delta t \left| \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f U_n dS \right| \quad \dots (2.7)$$

och då $\Delta t \rightarrow 0$ fås

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S f U_n dS \quad \dots (2.8)$$

Detta är transportteoremet.

Om ytan S alltid består av samma fluidpartiklar så är ytans normalhastighet lika med fluidens normalhastighet på ytan och transportteoremet får följande utseende

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V(t)} f dV &= \iiint_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{S(t)} f u_i n_i f dS = \\
 &= \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (f u_i) \right] dV \quad \dots (2.9)
 \end{aligned}$$

2.1.3 Kontinuitetsekvationen

En viktig tillämpning av transportteoremet fås om man sätter $f=\rho$ som är densiteten hos fluiden. Då erhålls

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) \right] dV = 0 \quad \dots (2.10)$$

eftersom volymen V alltid består av samma fluidpartiklar.

Den sista integralen skall gälla för alla volymer $V(t)$ och alltså måste integranden själv vara noll. Det ger kontinuitetsekvationen i differentialform som

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad \dots (2.11)$$

Vanligen antar man att vatten är inkompresibelt och homogent. Då fås kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots (2.12)$$

eller som den skrivs i vektor form

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad \dots (2.13)$$

2.1.4 Eulers ekvationer

Om transportteoremet tillämpas på kraftekvationen (ekv. 2.2) fås det som kallas Eulers ekvationer. Dessa blir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho u_i &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \right] dV = \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right] dV \quad \dots (2.14) \end{aligned}$$

Och eftersom ekvationen skall gälla för alla volymer V måste den gälla för integranderna, alltså

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i \quad \dots (2.15)$$

utvecklas derivatorna i vänsterledet och tillämpas kontinuitetsekvationen fås

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} F_i \quad \dots (2.16)$$

Vänsterledet beskriver en fluidpartikels acceleration som den upplevs av partikeln själv.

Det är vanligt att införa en substansiell tidsderivata

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

som uttrycker tidsförändringen i ett koordinatsystem som följer med partikeln.

2.1.5 Navier-Stokes ekvationer

Navier-Stokes ekvationer fås om man ger följande antaganden om spänningstensorn. Först antas att trycket är isotropt. Då fås alltså ett bidrag till spänningstensorn som är $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$

$$\text{där } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

För skjuvspänningarna antages att de är linjära i de nio gradienterna $\partial u_k / \partial x_1$ och dessutom att de endast förekommer i kombinationerna $\partial u_k / \partial x_1 + \partial u_1 / \partial x_k$.

Detta ger

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad \dots (2.17)$$

Sammantaget fås uttrycket för spänningstensorn som

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad \dots (2.18)$$

Konstanten μ kallas den dynamiska viskositeten. Genom insättning av detta uttryck i Eulers ekvationer erhålls Navier-Stokes ekvationer.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p\delta_{ij} + \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right] + \frac{1}{\rho} F_i \quad \dots (2.19)$$

Som slutligen ger

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\rho} F_i \dots (2.20)$$

där v är den kinematiska viskositeten.

I vektorform fås

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + v \nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{\rho} \bar{F} \dots (2.21)$$

2.2 Potentialflöde

Om de viskosa effekterna kan försummas, samt fluiden kan anses vara inkompressibel och irrotationell, kan Navier-Stokes ekvationer förenklas avsevärt. Resultatet blir en enda ekvation för den så kallade hastighetspotentialen. Denna potential kan sedan användas till att beräkna hastighetsfältet i fluiden.

2.2.1 Hastighetspotentialen

Hastighetsfältet hos fluiden antas vara irrotationellt. Då finns det enligt vektoranalysen en potential ϕ ur vilken hastighetsfältet kan bestämmas genom derivering så att

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \dots (2.22)$$

Att fluiden är irrotationell innebär att

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \dots (2.23)$$

$$\text{där } \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{om } ijk \text{ är en jämn permutation av } 1,2,3 \\ -1 & \text{om } ijk \text{ är en udda permutation av } 1,2,3 \\ 0 & \text{i övrigt} \end{cases}$$

En enkel räkning visar att

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad \dots (2.24)$$

Om dessutom fluiden antas vara inkompressibel fås

$$0 = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} \quad \dots (2.25)$$

som är Laplace' ekvation.

Alltså skall potentialen uppfylla Laplace' ekvation.

2.2.1 Bernoullis ekvation

För att bestämma trycket p i fluiden måste vi tillämpa Eulers ekvation (2.16). Denna lyder för en icke-viskös vätska.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} F_i \quad \dots (2.26)$$

Dessutom antas att F_i kan uttryckas som en gradient så att

$$F_i = - \frac{\partial}{\partial x_i} \Omega$$

Sätt in detta och att $u_i = \partial \phi / \partial x_i$.

Då fås

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} \quad \dots \quad (2.27)$$

Med

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)$$

fås efter integration

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} (p + \Omega) = C(t) \quad \dots \quad (2.28)$$

Funktionen $C(t)$ kan väljas till 0, eftersom ϕ är en potential och alltså endast är bestämd på en konstant när. Hastigheten fås ju som derivator av ϕ . Ekvation (2.28) är Bernoullis ekvation för en icke-viskös vätska.

2.2.3 Randvillkor

Skillnaden mellan olika flödestillstånd ges av randvillkoren. Kinematiska randvillkor är sådana som ges av geometriska villkor. Dynamiska randvillkor är sådana som ges av villkor på trycket.

Ett vanligt kinematiskt randvillkor är att fluiden inte kan strömma igenom en fast yta. Detta innebär att fluidens hastighet vinkelrätt en fast yta måste vara lika med ytans normalhastighet $U_{i,n}$ om U_i är ytans hastighetsvektor och n_i är ytans normalriktning.

Fluidens hastighet i normalens riktning är

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} n_i = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \dots \quad (2.29)$$

och alltså fås randvillkoret

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U_i n_i \quad \dots \quad (2.30)$$

Ett annat kinematiskt randvillkor är att på en fri yta måste alltid finnas samma partiklar. Detta kan formuleras som:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0 \quad \dots \quad (2.31)$$

om $\xi(x, y, z, t) = 0$ är ytans ekvation.

Det dynamiska randvillkoret för en fri yta är att Bernoullis ekvation skall vara uppfylld på ytan.

2.3 Ytvågor på vatten

För att ytvågor på vatten skall kunna behandlas måste man ta speciell hänsyn till randvillkoren på den fria vattenytan. I regel måste man linearisera villkoren för att överhuvudtaget få någon lösning. Dessutom brukar man bortse från inverkan av ytpänningen.

De ekvationer som skall uppfyllas av potentialen då man har ytvågor på vatten är

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad \text{i hela fluiden} \quad \dots \quad (2.32a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{på bottnen} \quad \dots \quad (2.32b)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = 0 \quad \text{på vattenytan} \quad \dots \quad (2.32c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} (p + \Omega) = 0 \quad \text{på vattenytan} \quad \dots \quad (2.32d)$$

Här är $\xi(x, y, z, t) = \eta(x, y, t) - z = 0$... (2.32e)

och $\Omega = \rho g z$... (2.32f)

2.3.1 Linearisering

Randvillkoren på vattenytan lyder utskrivna

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \dots \quad (2.33a)$$

$$g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} = 0 \quad \dots \quad (2.33b)$$

Om vågorna är tillräckligt flacka blir gradienttermerna $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ och $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ små jämfört med 1 och av samma storleksordning som $\frac{\partial \phi}{\partial t}$. På samma sätt gäller att om våghastigheten är liten i förhållande till vågrörelsen blir derivatorna av ϕ i ekvationerna ovan små första ordningens kvantiteter. Om nu endast första ordningens termer tas med i randvillkoren fås

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \dots (2.34a)$$

$$g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} p \quad \dots (2.34b)$$

Om den andra termen deriveras med avseende på t och sätts in i den första fås

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \dots (2.35)$$

Om trycket på vattenytan anses vara konstant fås i stället

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \dots (2.36)$$

Detta randvillkor skall egentligen tas på ytan $z = \eta$ men man kan visa att det är förenligt med lineariseringen att ta randvillkoret på ytan $z = 0$. Nu blir ekvationerna för problemet

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad \text{i hela fluiden} \quad \dots (2.37a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{på bottnen} \quad \dots (2.37b)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{på } z = 0 \quad \dots (2.37c)$$

Nu kan detta ekvationssystem lösas för plana vågor på vattenytan.

2.3.2 Plana vågor

De lineariserade ekvationerna har lösningar, som ger plana fortskridande vågor. För dessa vågor är vattenytans form av typen:

$$\eta(x, y, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad \dots (2.38)$$

det vill säga sinusformade vågor, som rör sig längs x-axeln i positiv riktning. ω är vinkelfrekvensen som, om frekvensen är f , ges av $\omega = 2\pi f$. k är vågtalet som ges av $k = 2\pi/\lambda$ om λ är våglängden. Med ytprofilen $\eta(x, y, t)$ enligt ovan fås potentialen

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{qA}{\omega} f(z) \sin(kx - \omega t) \quad \dots (2.39)$$

ur randvillkoret på planet $z = 0$.

Funktionen $f(z)$ ger potentialens beroende av djupet. Insättning i Laplace' ekvation ger

$$f(z) = \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh kh} \quad \dots (2.40)$$

Parametrarna k och ω är inte oberoende. Sambandet mellan dem kallas dispersionsrelationen och lyder

$$k \tanh kh = \omega^2/g \quad \dots (2.41)$$

Den hastighet med vilken vågformen rör sig är $\omega/k = v_p$ och kallas fashastigheten. Ur (2.41) fås

$$v_p = \omega/k = ((g/k) \tanh kh)^{1/2} \quad \dots (2.42)$$

Energin i vågorna rör sig emellertid med grupp hastigheten v_g

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \left(\frac{1}{2} + \frac{kh}{\sinh 2kh} \right) v_p \quad \dots (2.43)$$

Grupp hastigheten är alltså mindre än fashastigheten. Detta innebär att om vågrörelsen har en front kommer de geometriska vågorna att hinna ikapp fronten och dö ut i denna.

Om den plana vågen inte rör sig längs x-axeln utan med en vinkel θ mot denna får ytprofilen utseendet

$$\eta(x, y, t) = A \cos(k_x x + k_y y - \omega t) \quad \dots \quad (2.44)$$

$$k_x = k \cos \theta; \quad k_y = k \sin \theta; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Potentialen kommer att modifieras på motsvarande sätt

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{gA}{\omega} \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh kh} \sin(k_x x + k_y y - \omega t) \dots \quad (2.45)$$

eller

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{gA}{\omega} \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh kh} \sin(k(x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t). \quad (2.46)$$

2.4 Interaktionen mellan vågor och ett föremål

När det ligger ett föremål på vattenytan medför detta att nya randvillkor förs in i problemet. Det medför också att lösningarna inte längre blir plana vågor. De ekvationer som potentialen skall uppfylla är då

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad \text{i hela fluiden} \quad \dots \quad (2.46a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{på bottnen} \quad \dots \quad (2.46b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_n \quad \text{på föremålets yta} \quad \dots \quad (2.46c)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{på ytan } z = 0 \quad \dots \quad (2.46d)$$

där v_n är ytans normalhastighet. Förutom dessa villkor tillkommer ett, som föreskriver hur vågorna ser ut långt bort från kroppen. Detta villkor kallas radieringsvillkoret eller strålningsvillkoret och beskrivs senare.

2.4.1 Definition av rörelsemöder

Rörelsen hos en stel kropp kan alltid delas upp i sex olika möder: tre translationsmöder och tre vridningsmöder.

De definieras på följande sätt

η_1	rörelse längs	x-axeln	- Surge	... (2.47)
η_2		y-	- Sway	
η_3		z-	- Heave	
η_4	vridning kring	x-	- Roll	
η_5		y-	- Pitch	
η_6		z-	- Yaw	

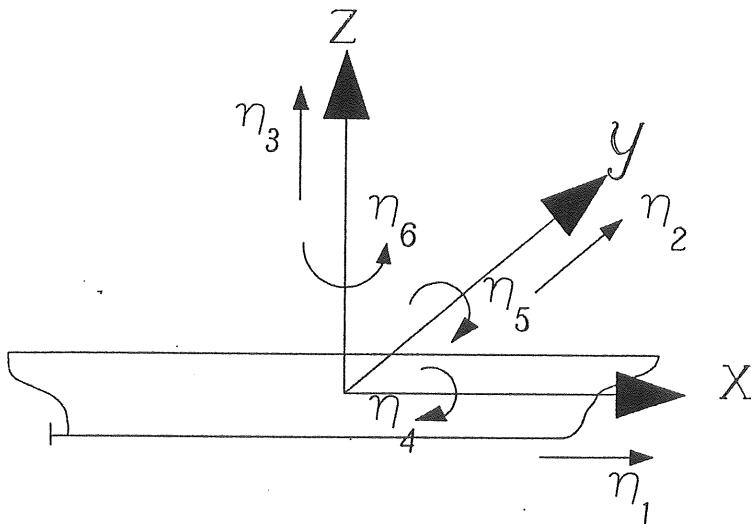


Fig. 2.2 Definitionsskiss av rörelsemöder.

I samband med detta skall också en generell normalvektor med sex komponenter definieras. Denna behövs senare när integraler skall tas över ytan på föremålet. Definitionerna är

n_1	x-komponenten av	normalvektorn	...	(2.48)
n_2	y-	"	- "	
n_3	z-	"	- "	

$$\begin{aligned} n_4 &= y n_3 - z n_2 && \text{Roll-komponenten} \\ n_5 &= z n_1 - x n_3 && \text{Pitch-komponenten} \\ n_6 &= x n_2 - y n_1 && \text{Yaw-komponenten} \end{aligned}$$

2.4.2 Superpositionsprincipen för potentialen

Vanligen delar man upp ϕ i tre olika delar så att $\phi = \phi_I + \phi_S + \phi_R$. Denna uppdelning kan fysikaliskt tolkas på följande sätt. ϕ_I är en infallande våg som skapats någonstans och betraktas som given för problemet. ϕ_S är den våg som uppstår genom att föremålet sprider den infallande vågen olika mycket åt olika håll.

ϕ_R är den våg som uppstår genom att ϕ_I och ϕ_S sätter föremålet i rörelse och därmed skapar nya vågor som radieras ut från föremålet. För en kropp som rör sig i lugnt vatten är $\phi_I = \phi_S = 0$. För en kropp som är fix i vattnet är $\phi_R = 0$.

De tre potentialerna skall på föremålet uppfylla randvillkoren

$$\frac{\partial \phi_S}{\partial n} = - \frac{\partial \phi_I}{\partial n} \quad \dots (2.49)$$

$$\frac{\partial \phi_R}{\partial n} = V_n \quad \dots (2.50)$$

ϕ_S och ϕ_R skall dessutom uppfylla strålningsvillkoret för utåtgående begränsade vågor då $R \rightarrow \infty$. Matematiskt formulerat blir strålningsvillkoret

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1/2} (\partial \phi / \partial R - ik\phi) = 0; \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \dots (2.51)$$

Ett sätt att approximera potentialen som kallas Froude-Krylov teori är att anta att $\phi = \phi_I$ och alltså bortse från de radierade och spridda vågorna. Denna approximation kan användas om kropparna är små i förhållande till våglängden och därför bara påverkar vågorna lite, men om kropparna är större än ca 0,2 gånger våglängden bör man ta hänsyn till de spridda och radierade vågorna.

Förutom den uppdelning av potentialen som behandlats ovan brukar den radierade vågens potential delas upp i sex olika delar, där var delpotential för sig är förknippad med respektive rörelsefrihetsgrad hos föremålet. Således skrivs den radierade potentialen

$$\phi_R = \sum_{k=1}^6 \phi_k \quad \dots (2.52)$$

Om t.ex. föremålet utför en heaverörelse i en för övrigt ostörd vätskevolym är alla potentialer utom ϕ_3 i den radierade potentialen lika med 0.

Den slutliga uppdelningen av potentialen blir alltså

$$\phi = \phi_I + \phi_S + \sum_{k=1}^6 \phi_k = \phi_O + \phi_7 + \sum_{k=1}^6 \phi_k \quad \dots (2.53)$$

Där ϕ_I och ϕ_S betecknats ϕ_O resp. ϕ_7 i det sista ledet.

2.4.3 Komplex notering

De infallande vågorna antas vara plana sinusformade vågor. Då blir på grund av lineariteten alla andra potentialer också sinusformade. Detta innebär att man kan utnyttja komplex notering, där $\phi(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(\phi^C(x, y, z)e^{-i\omega t})$. Tids- och rumssdel kan alltså separeras. $\phi^C(x, y, z)$ är en komplex funktion av x, y och z. Detta gäller även rörelsen så att

$$\eta_k = \operatorname{Re}(\eta_k e^{-i\omega t}) = \eta_k^{(1)} \cos \omega t + \eta_k^{(2)} \sin \omega t \quad \dots (2.54)$$

Om den infallande vågens potential skrivs $\phi_I = \phi_I e^{i\omega t}$ och ϕ_I är reell innebär det att vi fått en uppdelning av η_k i en del som är i fas med vågorna och en del som är fasförskjuten 90° relativt de infallande vågorna. Samma sak gäller ϕ_S och ϕ_R . De radierade vågpotentialerna kan skrivas

$$\begin{aligned}\phi_R &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^6 -i\omega \eta_k \phi_k^c e^{-i\omega t} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^6 (\dot{\eta}_k \phi_k^{(1)} + \omega \eta_k \phi_k^{(2)})\end{aligned} \quad \dots (2.55)$$

som innebär att den radierade potentialen skrivits som en faktor $\phi_k^{(1)}$ i fas med hastigheten och en $\phi_k^{(2)}$ i fas med rörelsen.

Den komplexa potentialen $\phi^c = \phi_k^{(1)} + i\phi_k^{(2)}$ skall uppfylla Laplace' ekvation, randvillkoret på vattenytan och följande villkor på föremålets yta

$$\frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial n} = \eta_k \quad \dots (2.56a)$$

$$\frac{\partial \phi_k^{(2)}}{\partial n} = 0 \quad \dots (2.56b)$$

2.4.4 Kraftar från det hydrodynamiska trycket

Bernoullis ekvation ger sambandet mellan trycket och potentialen. Det totala trycket ges av

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + g z \right) \quad \dots (2.57)$$

där bara första ordningens termer tagits med. Sätts utvecklingen av potentialen in i detta fås

$$p = -\rho \frac{\partial}{\partial t} (\phi_I + \phi_S + \sum_{k=1}^6 \phi_k) - \rho g z \quad \dots (2.58)$$

Om detta integreras över föremålets yta fås krafter och moment.

Kraften ges av

$$F_i = \iint_{S_o} p n_i dS \quad \dots (2.59)$$

och momentet av

$$M_k = \iint_{S_o} p (\epsilon_{ijk} n_i n_j) dS = \iint_{S_o} p n_{k+3} dS \quad \dots (2.60)$$

Detta innebär att kraft- och momentvektorerna kan slås samman till en generaliserad sexdimensionell kraftvektor K_i , där de tre första komponenterna är krafterna och de tre sista är momenten

$$K_i = \iint_{S_o} p n_i dS \quad i = 1, \dots, 6 \quad \dots (2.61)$$

Sätts nu trycket in i denna ekvation fås

$$K_i = - \rho g \iint_{S_o} z n_i dS \quad \dots (2.62)$$

$$\begin{aligned} & -\rho \iint_{S_o} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_o + \phi_7) n_i dS \\ & -\rho \iint_{S_o} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^6 \phi_k n_i dS \end{aligned}$$

om första termen är de hydrostatiska krafterna och momenten. Den andra termen är exitationskrafterna och momenten. Den sista termen ger upphov till det som kallas tilläggsmassa och dämpning för föremålet.

2.5 Rörelseekvationerna

Hittills har endast vattnets egenskaper behandlats. Då har man förutsatt att föremålets rörelse är känd. Antingen har kroppen fixerats eller har den påtvingats en rörelse i några av moderna.

Det problem man oftast vill lösa är emellertid hur föremålet rör sig under påverkan av vågorna. Då måste man även ta hänsyn till föremålets dynamiska egenskaper. Dessa kopplas till vattnet genom randvillkoret på föremålets yta. Även om enbart vattnets uppförande söks måste föremålets dynamik tas med i beräkningarna. I detta kapitel skall rörelseekvationerna för föremålet tas fram och kopplingen mellan föremålets dynamik och vågornas utseende göras.

2.5.1 Koordinatsystem

En av svårigheterna när problemet skall formuleras är att för beskrivning av kroppen är det lämpligast med ett kroppsfast koordinatsystem medan rörelsen hos fluiden bäst beskrivs med ett i fluiden fixt koordinatsystem.

Här skall båda koordinatsystemen användas och en del av problemet består i att finna relationerna mellan dessa båda koordinatsystem. Låt oss först definiera koordinatsystemen och sedan söka relationerna mellan dem.

Oxyz är ett högersystem fixt i fluiden med Oz vertikalt uppåt och Oxy i den ostörda vattenytan. Se fig. 2.3.

$\bar{O}xyz$ är ett högersystem fixt i kroppen och parallellt med Oxyz med O liggande på Oz då kroppen är stillastående och i jämvikt. \bar{O} är beläget i kroppens tyngdpunkt. Således har lyftkraftens angreppspunkt B i jämvikt koordinaterna $(0, 0, z_B)$ i $\bar{O}xyz$ systemet. z_B kan vara både negativt och positivt. Metacentret M måste naturligtvis ligga över O för att jämviktsläget skall vara stabilt.

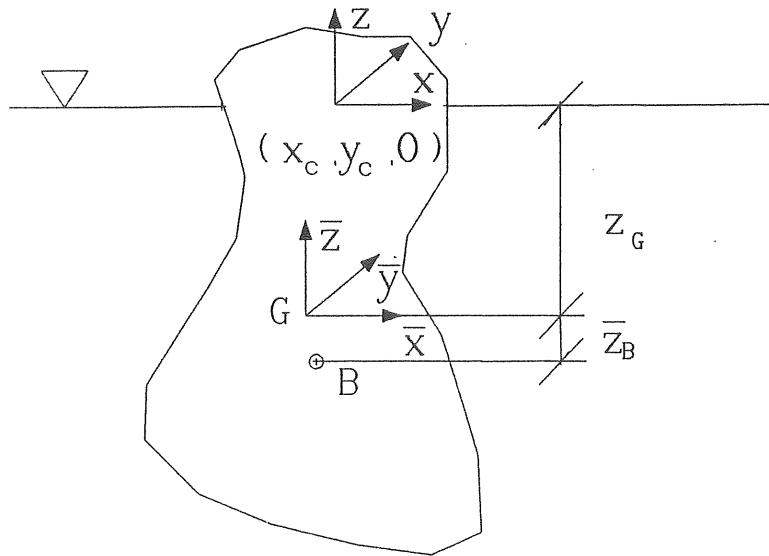


Fig. 2.3 Definition av koordinatsystem

I vila har $\bar{\mathbf{O}}$ koordinaterna $(0, 0, z_G)$ i Oxyz-systemet. Men i rörelse får $\bar{\mathbf{O}}$ koordinaterna $(x_1, y_1, z_1 + z_G)$ som innebär en translation av koordinatsystemet $\bar{\mathbf{O}}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ relativt Oxyz. Förutom denna translation kan kroppen och därmed $\bar{\mathbf{O}}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -systemet vrida sig. Låt koordinatsystemet $\bar{\mathbf{O}}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ vrida sig vinklarna α , β och γ kring respektive Ox, Oy och Oz-axlarna. Vridningarna ger följande relation mellan koordinatsystemen $\bar{\mathbf{O}}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ och Oxyz.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \cos\gamma\sin\beta\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha & -\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha+\cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma & \sin\gamma\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

... (2.63)

där V är vridningstensorn.

Nu antas att vridningarna är små. Då är

$$\begin{array}{lll} \sin\alpha=\alpha & \sin\beta=\beta & \sin\gamma=\gamma \\ \cos\alpha=1 & \cos\beta=1 & \cos\gamma=1 \end{array} \quad \dots (2.64a)$$

Produkten mellan två små vinklar är 0,

$$\alpha\beta=0 \quad \alpha\beta=0 \text{ och } \alpha\beta=0 \quad \dots (2.64b)$$

Sätts detta in i vridningstensorn V får man

$$\left[\begin{array}{cccc} x & 1 & -\gamma & \beta \\ y & = & \gamma & 1 & -\alpha \\ z & & -\beta & \alpha & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{array} \right] \quad \dots (2.65)$$

Tillsammans med translationsrörelserna fås då det slutgiltiga sambandet mellan koordinatsystemen

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \bar{x} - \gamma \bar{y} + \beta \bar{z} \\ y &= y_1 + \gamma \bar{x} + \bar{y} - \alpha z \\ z &= z_G + z_1 - \beta \bar{x} + \alpha \bar{y} - \bar{z} \end{aligned} \quad \dots (2.66)$$

Här är x_1 , y_1 , z_1 , α , β och γ funktioner av tiden t och skall bestämmas som en del av lösningen.

Som beskrivits i avsnitt 2.4.1 kan rörelsen hos en stel kropp behandlas som en sexdimensionell vektor med komponenterna

$$n_1=x_1; \quad n_2=y_1; \quad n_3=z_1; \quad n_4=\alpha; \quad n_5=\beta \text{ och } n_6=\gamma \quad \dots (2.67)$$

2.5.2 Hydrostatik

Innan rörelseekvationerna kan ställas upp måste de hydrostatiska krafterna och momenten på grund av kroppens förflyttningar ur jämviktsläget bestämmas. För detta ändamål görs följande definitioner:

W är vattenlinjearean i jämvikt.

V är deplacementsvolymen i jämvikt.

$$x_c = \frac{1}{W} \int_W x \, dW \text{ Vattenlinjeareans tyngdpunkts } x\text{-koordinat.}$$

$$y_c = \frac{1}{W} \int_W y \, dW \text{ Vattenlinjeareans tyngdpunkts } y\text{-koordinat.}$$

$$I_1 = \int_W y^2 \, dW \text{ Vattenlinjeareans yttröghetsmoment m.a.p. } x\text{-axeln.}$$

$$I_2 = \int_W x^2 \, dW \text{ Vattenlinjeareans yttröghetsmoment m.a.p. } y\text{-axeln.}$$

$$I_{12} = \int_W xy \, dW \text{ Vattenlinjeareans deviationströghetsmoment.}$$

$$\bar{z}_B = \frac{1}{V} \int_V (z - z_G) \, dV \quad \text{Lyftkraftens angreppspunkts } \bar{z}\text{-koordinat}$$

$$\bar{x}_B = \bar{y}_B = 0 \quad \text{Lyftkraftens angreppspunkts } \bar{x}\text{- och } \bar{y}\text{-koordinater.}$$

Momentjämvikt kring tyngdpunkten ger kring \bar{y} -axeln

$$I_1 + V \bar{z}_B = V H_1 + W x_c^2 \quad \dots (2.68a)$$

och kring \bar{x} -axeln

$$I_2 + V \bar{z}_B = V H_2 + W y_c^2 \quad \dots (2.68b)$$

där H_1 och H_2 är de två metacenterhöjderna för krängning kring respektive \bar{Oy} och \bar{Ox} -axlarna. H_1 och H_2 skall vara positiva för hydrostatisk stabilitet.

Generellt för en vridning kring en godtycklig axel i Oxy-planet gäller för hydrostatisk stabilitet

$$\int_W ((x-x_c) \sin \theta + (y-y_c) \cos \theta)^2 dW + v \bar{z}_B > 0 \quad \dots \quad (2.69)$$

Med dessa definitioner och lineariseringen av vridningstensorn fås följande hydrostatiska reaktionskrafter och -moment.

$-\rho g W z_1$ kraft i z-led vid förflyttning i z-led

$-\rho g W y_C^\alpha$ kraft i z-led vid vridning i respektive
 $\rho g W x_C^\beta$ α - och β -led

$-\rho W y_C z_1$ moment kring x- resp. y-axlarna vid
 $\rho W x_C z_1$ förflyttning i z-led

$\rho (VH_2 + Wy_C^2) \alpha$ moment kring resp. x- och y-axlarna
 $\rho (VH_1 + Wx_C^2) \beta$ vid vridning i resp. α - och β -led

ρI_{12}^α moment kring y- och x-axlarna vid vridning i
 ρI_{12}^β resp. α - och β -led.

2.5.3 Dämpning och tilläggsmassa

Då ett föremål rör sig på en vattenytta kommer vattnet att ha en dämpande inverkan på rörelsen. Dämpningen sker genom att vågor strålar ut från föremålet och för bort energi från detta. Denna energi måste tas från rörelsen och alltså dämpas rörelsen.

Vattnet har ytterligare en inverkan på rörelsen, nämligen den att det ger en tilläggsmassa. Det vill säga den massa som skall accelereras blir större än föremålets massa på grund av att när kroppen då accelererar genom vattnet måste den också accelerera vattenpartiklarna närmast sig.

Dessa båda fenomen kan beräknas ur den tredje integralen i krafterna från det hydrodynamiska trycket i avsnitt 2.4.4, ekvation 2.62. Denna integral lyder

$$-\rho \iint_{S_o} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^6 \phi_k n_i dS \quad \dots (2.70)$$

Utnyttjar man uppdelningen från avsnitt 2.4.3, ekvation (2.55)

$$\phi_k = \operatorname{Re} (-i\omega n_k^c \phi_k^c e^{-i\omega t}) \quad \dots (2.71)$$

fås följande integral

$$\begin{aligned} & -\rho \iint_{S_o} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^6 -\omega^2 n_k^c \phi_k^c e^{-i\omega t} \right) n_i dS = \\ & = -\omega^2 \operatorname{Re} (n_k^c e^{-i\omega t}) \iint_{S_o} \rho \phi_k^{(1)} n_i dS - \\ & \quad - \omega^2 \operatorname{Im} (n_k^c e^{-i\omega t}) \iint_{S_o} \rho \phi_k^{(2)} n_i dS \quad \dots (2.72) \end{aligned}$$

Men nu är $-\omega^2 \operatorname{Re} (n_k^c e^{-i\omega t})$ lika med föremålets acceleration och $\omega \operatorname{Im} (n_k^c e^{-i\omega t})$ är lika med föremålets hastighet. Detta innebär att integralen består av en term i fas med föremålets acceleration och en term i fas med föremålets hastighet.

Dessa båda delar kallas tilläggsmassa (added mass) respektive dämpning (radiation damping) och definieras enligt följande:

$$\text{tilläggsmassa: } a_{ik} = \operatorname{Re} (\rho \iint_{S_o} \phi_k n_i dS) \quad \dots (2.73)$$

$$\text{dämpning: } b_{ik} = \operatorname{Im} (\rho \omega \iint_{S_o} \phi_k n_i dS) \quad \dots (2.74)$$

Tilläggsmassan och dämpningen är båda symmetriska 6×6 matriker.

2.5.4 Excitationskrafterna

Den sista termen som skall behandlas, innan rörelseekvationerna kan ställas upp, är excitationskrafterna. Dessa beror på den infallande och den spridda vågen. Enligt avsnitt 2.4.4 ges excitationskraften av

$$x_i = -\rho \iint_{S_o} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_o + \phi_7) n_i dS \quad \dots (2.75)$$

Med utnyttjande av komplex notering fås

$$x_i = -\rho \iint_{S_o} -i\omega (\phi_o^c + \phi_7^c) n_i dS \quad \dots (2.76)$$

Dessa ekvationer kan användas direkt för beräkning av excitationskrafterna så snart ϕ_7^c är känd. Det finns emellertid en genväg som gör att man slipper beräkna ϕ_7^c . Genvägen heter Haskind-relationerna. Dessa fås om man utnyttjar att $n_i = \partial \phi_i^c / \partial n$, alltså

$$x_i = i\omega \rho \iint_{S_o} (\phi_o^c + \phi_7^c) \partial \phi_i^c / \partial n dS \quad \dots (2.77)$$

Men enligt Greens teorem gäller

$$\iint_{S_o} (\phi_i^c \partial \phi_7^c / \partial n - \phi_7^c \partial \phi_i^c / \partial n) dS = 0 \quad \dots (2.78)$$

Då blir

$$x_i = i\omega \rho \iint_{S_o} (\phi_8 \partial \phi_i^c / \partial n + \phi_i^c \partial \phi_7^c / \partial n) dS \quad \dots (2.79)$$

Men enligt randvillkoren är

$$\partial \phi_7^c / \partial n = - \partial \phi_o^c / \partial n \quad \dots (2.80)$$

och Haskindrelationerna följer

$$x_i = i \omega_0 \iint_{S_o} (\phi_o^c \partial \phi_i^c / \partial n - \phi_i^c \partial \phi_o^c / \partial n) dS \quad \dots (2.81)$$

Denna integral kan dessutom flyttas ut till en kontrolllyta i oändligheten genom Greens teorem. Således behöver inte ens ϕ_i^c vara kända utan endast deras asymptotiska utseende.

2.5.5 Rörelseekvationerna sammansatta

Rörelseekvationerna för en stel kropp som utför både transla-tionsrörelser och rotationsrörelser skrivs

$$\begin{aligned} m_{ij} \ddot{\eta}_j &= F_i & ij &= 1, 2, 3 \\ I_{ij} \ddot{\eta}_{j+3} &= M_i & & \end{aligned} \quad \dots (2.82)$$

där I_{ij} är tröghetsstensorn för föremålet och m föremålets massa. Dessa kan slås samman till en enda ekvation enligt avsnitt 2.4.4

$$m_{ij} \ddot{\eta}_j = K_i \quad \dots (2.83)$$

K_i antas beräknad i det kroppsfasta systemet, dvs moment och krafter är reducerade till kroppens tyngdpunkt.

Matrisen m_{ij} blir nu för translationer och rotationer kring kroppens tyngdpunkt

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ 0 & 0 & 0 & I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ 0 & 0 & 0 & I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad \dots (2.84a)$$

Relateras rörelserna till någon annan punkt än tyngpunkten får matrisen m_{ij} detta utseende.

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_6 & -my_6 \\ 0 & m & 0 & -mz_6 & 0 & mx_6 \\ 0 & 0 & m & my_6 & mx_6 & 0 \\ 0 & -mz_6 & my_6 & I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ mz_6 & 0 & -mx_6 & U_{21} & I_{22} & I_{23} \\ -my_6 & mx_6 & 0 & 31 & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad \dots (2.84b)$$

Vektorn K_i innehåller enligt avsnitt 2.4.4 de hydrostatiska krafterna, excitationskrafterna tilläggsmassa och dämpning. De hydrostatiska krafterna från avsnitt 2.5.2 kan skrivas som en matris gånger rörelsevektorn $c_{ij}\eta_j$ där c_{ij} har komponenterna

$$c_{33} = \rho g W \quad \dots (2.85a)$$

$$c_{34} = c_{43} = -\rho g W y_C \quad \dots (2.85b)$$

$$c_{53} = c_{35} = -\rho g W x_C \quad \dots (2.85c)$$

$$c_{44} = \rho g (V H_2 + W Y_C^2) \quad \dots (2.85d)$$

$$c_{55} = \rho g (V H_1 + W X_C^2) \quad \dots (2.85e)$$

$$c_{45} = c_{54} = \rho g I_{12} \quad \dots (2.85f)$$

$$\text{alla övriga } c_{ij} = 0 \quad \dots (2.85g)$$

Då blir

$$K_i = -c_{ij} \ddot{\eta}_j - a_{ij} \ddot{\eta}_j - b_{ij} \dot{\eta}_j + x_i \quad \dots (2.86)$$

Med denna insatt fås rörelseekvationen

$$(m_{ij} + a_{ij}) \ddot{\eta}_j + b_{ij} \dot{\eta}_j + c_{ij} \eta_j = x_i \quad \dots (2.87)$$

Om det är vågornas utseende som söks måste man multiplicera alla de potentialer som beror på rörelsen, dvs $\phi_1 - \phi_6$ med η_j när rörelseekvationerna lösats. Sedan kan ytprofilen eller hastighetsfältet bestämmas.

2.5.6 Recept för beräkning av rörelsen hos ett flytande föremål och vågfältet kring detta

- ☒ Ange den infallande vågens höjd, frekvens och infallsriktning dvs definiera ϕ_o
- ☒ Lös differentialekvationerna då föremålet är fixerat i sitt jämviktsläge. Detta ger ϕ_7
- ☒ Rör föremålet med en enhetsamplitud och med den infallande vågens frekvens i alla rörelsemotorna och lös differentialekvationerna för dessa fall. Detta ger $\phi_1 - \phi_6$.
- ☒ Bestäm excitationskrafterna ur ϕ_7 och ϕ_o .
- ☒ Bestäm tilläggsmassa och dämpning ur $\phi_1 - \phi_6$.
- ☒ Specificera föremålet dynamiskt, dvs bestäm massa, tröghetsmoment, hydrostatik osv.
- ☒ Ställ upp rörelseekvationerna.
- ☒ Lös dem.
- ☒ Multiplisera alla $\phi_1 - \phi_6$ med hastigheterna i resp. rörelsemotrar. Då erhålls $\phi_1 - \phi_6$.
- ☒ Summera till $\phi = \phi_I + \phi_S + \phi_R$.
- ☒ Vågprofilen ges av $\zeta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$.
- ☒ Hastighetsfältet ges av $\partial \phi / \partial x_i$.

3. VARIATIONSFORMULERING AV PROBLEMET

Eftersom målet är att göra en finitelementformulering av det problem, som är beskrivet i kapitel 2, är det nödvändigt att först variationsformulera detta. Sedan görs själva finita elementansatsen, som sätts in i variationsformuleringen, och man erhåller då ett linjärt ekvationssystem att lösa.

Här skall kort gås igenom några av de grundläggande principerna för variationsformulering av andra ordningens linjära partiella differentialekvationer.

Variationsformuleringen, i sin renaste form, kan härledas ur bestämda minimeringsprinciper, som garanterar stabil konvergens för motsvarande numeriska processer. Denna garanti ger utdelning i form av god beräkningsekonomi för en stor mängd tekniska problem, där den är direkt applicerbar. Men metoden kan också tillämpas på problem där minimeringsprincipen måste bytas mot en svagare stationaritetsprincip. Här har minimeringsprincipen kunnat användas.

3.1 Funktionalen i det allmänna fallet

I variationsformuleringen bildas först en funktional vilken sedan skall minimeras. En funktional är ett uttryck, t.ex. en integral eller en summa, vilken ger ett värde ut när man substituerar in en funktion i den på samma sätt som en funktion ger ett värde ut då ett tal substitueras in i den.

Betrakta differentialekvationen

$$L\phi = f \quad \dots \quad (3.1)$$

där L är en linjär differentialoperator av ganska allmänt slag t.ex.:

$$L = \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

Den funktional som används för att lösa det beskrivna problemet är

$$F(\emptyset) = \langle L\emptyset, \emptyset \rangle - 2 \langle \emptyset, f \rangle \quad \dots (3.2)$$

där \emptyset och f antas vara reella funktioner. Klammerna $\langle \rangle$ beteckar skalärprodukten

$$\langle \emptyset, f \rangle = \int_D f\emptyset \, dD \quad \dots (3.2)$$

där D är ett definitionsområde.

Under förutsättning att L är självadjungerad är lösningen till $L\emptyset=f$ en stationär punkt till $F(\emptyset)$. Är dessutom L positivt definit är den stationära punkten ett minimum till $F(\emptyset)$.

Definition:

$$\text{Positivt definit innebär att} \quad \dots (3.3)$$

$$\langle \emptyset, L\emptyset \rangle \geq 0 \text{ för alla } \emptyset$$

Definition:

$$\begin{aligned} \text{Självadjungerad innebär att} \quad \dots (3.4) \\ \langle u, Lv \rangle &= \langle Lu, v \rangle \\ u, v \in D_L &= L:s \text{ definitionsmängd.} \end{aligned}$$

Låt \emptyset_0 vara den exakta lösningen till problemet

$$L\emptyset = f,$$

då kan funktionalen (3.2) skrivas

$$F(\emptyset) = \langle L\emptyset, \emptyset \rangle - 2\langle \emptyset, L\emptyset_0 \rangle \quad \dots (3.5)$$

Addera och subtrahera $\langle L\emptyset_0, \emptyset_0 \rangle$ i högerledet

$$\begin{aligned} F(\emptyset) &= \langle L\emptyset, \emptyset \rangle - 2\langle \emptyset, L\emptyset_0 \rangle + \langle L\emptyset_0, \emptyset_0 \rangle - \langle L\emptyset_0, \emptyset_0 \rangle = \\ &= \langle L\emptyset, \emptyset \rangle - 2\langle L\emptyset_0, \emptyset \rangle + \langle L\emptyset_0, \emptyset_0 \rangle - \langle L\emptyset_0, \emptyset_0 \rangle = \\ &= \langle L(\emptyset - \emptyset_0), \emptyset \rangle + \langle L\emptyset_0, \emptyset_0 - \emptyset \rangle - \langle L\emptyset_0, \emptyset_0 \rangle \quad \dots (3.6) \end{aligned}$$

Eftersom funktionerna är reella och operatorn självadjungerad erhåller man

$$\begin{aligned} F(\emptyset) &= \langle L\emptyset, \emptyset - \emptyset_0 \rangle - \langle L\emptyset_0, \emptyset - \emptyset_0 \rangle - \langle \emptyset_0, \emptyset_0 \rangle = \\ &= \langle L(\emptyset - \emptyset_0), \emptyset - \emptyset_0 \rangle - \langle L\emptyset_0, \emptyset_0 \rangle \quad \dots (3.7) \end{aligned}$$

Antages nu att L är positivt definit är båda termerna positiva och speciellt är den första noll om $\emptyset = \emptyset_0$. Alltså är $F(\emptyset)$ minimum om och endast om $\emptyset = \emptyset_0$ med minimivärdet $- \langle L\emptyset_0, \emptyset_0 \rangle$.

För att detta minimifunktionalteorem skall gälla, måste operatorn vara positivt definit och självadjungerad under de givna randvillkoren. Dessutom måste testfunktionerna \emptyset komma från L :s definitionsmängd. Annars kan en funktion, som inte är en lösning, ge ett mindre värde på $F(\emptyset)$ och förleda oss att tro att den är en bättre approximation till lösningen än den exakta lösningen.

Det återstår nu att visa, att när man väl hittat en stationär punkt till $F(\emptyset)$, så är det en lösning till $L\emptyset = f$.

Antag att \emptyset_0 är en funktion som gör $F(\emptyset_0)$ stationär. Visa sedan att \emptyset_0 är lösningen till $L\emptyset = f$.

Låt η vara en godtycklig funktion $\eta \in D_L$. Alltså är $\emptyset = \emptyset_0 + \alpha\eta$ en tillåten testfunktion. α är ett reellt tal och funktionalen är stationär för $\alpha = 0$. Sätt nu in $\emptyset = \emptyset_0 + \alpha\eta$ i $F(\emptyset)$. Detta ger

$$F(\emptyset) = F(\emptyset_0 + \alpha\eta) = \dots (3.8)$$

$$\langle L\emptyset_0, \emptyset_0 \rangle + \langle L\emptyset_0, \eta \rangle + \alpha \langle L\eta, \emptyset_0 \rangle + \alpha^2 \langle L\eta, \eta \rangle - 2 \langle \emptyset_0, f \rangle - 2\alpha \langle \eta, f \rangle$$

Derivera med avseende på α för att få den stationära punkten.

$$\frac{dF}{d\alpha} = \langle L\emptyset_0, \eta \rangle + \langle L\eta, \emptyset_0 \rangle + 2\alpha \langle L\eta, \eta \rangle - 2 \langle \eta, f \rangle \dots (3.9)$$

Genom förutsättningarna får vi

$$\frac{dF}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \langle L\phi_0, \eta \rangle + \langle L\eta, \phi_0 \rangle - 2\langle \eta, f \rangle = 0 \quad \dots (3.10)$$

Utnyttja att L är självadjungerad

$$\langle L\phi_0, \eta \rangle - \langle f, \eta \rangle = 0 \quad \dots (3.11)$$

$$\langle L\phi_0 - f, \eta \rangle = 0 \quad \dots (3.12)$$

Detta gäller alla η . Alltså måste ϕ_0 uppfylla

$$L\phi_0 = f.$$

Om man således funnit en stationär punkt till $F(\phi)$ där ϕ (och η) $\in D_L$ men i övrigt är godtyckliga, så är den funktion (ϕ_0) som gör $F(\phi)$ stationär lösningen till $L\phi=f$.

I det ovanstående har aldrig utnyttjats att L skall vara positivt definit. Studerar vi nu andraderivatan av (3.9) med avseende på α fås

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2} = 2\langle L\eta, \eta \rangle, \quad \dots (3.13)$$

som är positiv, om L är positivt definit, och alltså är den stationära punkten en minimipunkt. Observera att om L ej är positivt definit kan den stationära punkten vara en maximipunkt eller en inflexionspunkt men ϕ för den stationära punkten är ändå en lösning till $L\phi=f$. Om L ej är positivt definit, kan man ha flera lösningar till problemet.

Resonemanget ovan kan formaliseras genom att införa begreppet variationen av en funktional. Detta innebär, att alla i funktionalen ingående funktioner varieras lite, och resultatet noteras. Variationen kan ses som en generalisering av begreppet differential, där de oberoende variablerna nu är funktioner. Man inför beteckningen δ för variationen. Dessutom antar man att alla linjära differential- eller integraloperatorer kommuterar med δ . Formellt kan man skriva

$$\delta F(\phi, \psi, \eta) = \frac{dF}{d\phi} \delta\phi + \frac{dF}{d\psi} \delta\psi + \frac{dF}{d\eta} \delta\eta \quad \dots (3.14)$$

I fallet ovan ger detta

$$\begin{aligned}
 \delta F(\emptyset) &= \delta \langle L\emptyset, \emptyset \rangle - 2\delta \langle f, \emptyset \rangle = \\
 &= \langle L\delta\emptyset, \emptyset \rangle + \langle L\emptyset, \delta\emptyset \rangle - 2\langle f, \delta\emptyset \rangle = \\
 &= 2\langle L\emptyset, \delta\emptyset \rangle - 2\langle f, \delta\emptyset \rangle = 2 \langle L\emptyset - f, \delta\emptyset \rangle \quad \dots (3.15)
 \end{aligned}$$

eftersom L är självadjungerad.

Vidare antas också att $\delta\emptyset \in D_L$. $\delta\emptyset$ är godtycklig och, om $F(\emptyset)$ skall vara stationär, innebär det att $\delta F(\emptyset) = 0$. Alltså måste $L\emptyset = f$ gälla vid stationaritet. På liknande sätt som ovan kan andravariationen av $F(\emptyset)$ tas. Detta ger

$$\delta^2 F(\emptyset) = 2\langle L\delta\emptyset, \delta\emptyset \rangle + 2\langle L\emptyset - f, \delta^2\emptyset \rangle \quad \dots (3.16)$$

men $\delta^2\emptyset$ är av högre ordning än $\delta\emptyset$ och kan sättas till noll. Detta ger, att om L är positivt definit, är den stationära punkten en minimipunkt.

3.1.1 Funktionalen för andra ordningens problem

I föregående avsnitt visades hur problemet $L\emptyset = f$ kunde lösas genom att minimera en funktional med utseendet

$$\langle \emptyset, L\emptyset \rangle - 2\langle \emptyset, f \rangle = 0 \quad \dots (3.17)$$

Låter vi nu L vara en andra ordningens differentialoperator så fås funktionalen för andra ordningens problem. Den mest generella andra ordningens linjära differentialoperator är

$$L(\emptyset) = \nabla \cdot (\underline{\kappa} \nabla \emptyset) + d\emptyset = f \quad \dots (3.18)$$

om tidsberoende termer utesluts. Parametrarna $\underline{\kappa}$ och d tillåts vara funktioner i rummet. $\underline{\kappa}$ är här en matris. Sätter vi nu in denna operator i (3.17) och skriver ut alla integraler fullständigt fås

$$\int \int \int_V (\phi \nabla \cdot (\underline{\kappa} \nabla \phi) + d\phi^2 - 2f\phi) dV \quad \dots (3.19)$$

där V är det område inom vilket differentialekvationen gäller. Om detta område är begränsat av ränder måste funktionalen (3.19) modifieras så att hänsyn tas även till dessa. Hur detta sker redovisas i avsnitt 3.1.2.

3.1.2 Randvillkor

När området där differentialekvationen gäller är begränsat måste man även ange villkor på områdets ränder för att problemet skall kunna lösas.

Vanligtvis förekommer tre olika typer av randvillkor nämligen

- 1) Dirichletvillkor som säger

$$\phi(S) = b(S) \quad \dots (3.20)$$

där S är randen till området V.

- 2) Neumannvillkor som säger

$$\nabla \phi \cdot \bar{n}|_S = h(S) \quad \dots (3.21)$$

där \bar{n} är den utåtriktade normalvektorn till randen.

- 3) Blandade randvillkor

$$(\underline{\kappa} \nabla \phi) \cdot \bar{n}|_S + \sigma(S) \phi(S) = h(S) \quad \dots (3.22)$$

Neumannvillkoret är ett specialfall av detta villkor, nämligen då $\sigma(S) = 0$ och $\underline{\kappa}$ är enhetsmatrisen.

Allmänt kan randvillkoren formuleras

$$B\phi|_S = b(S) \quad \dots (3.23)$$

där B är en linjär differentialoperator. Genom att anta att det finns en funktion w , som uppfyller randvillkoret men ej nödvändigtvis differentialekvationen, kan man ta fram hur funktionalen (3.19) skall modifieras p.g.a. randvillkoren.

Definiera först en ny funktion

$$v = \emptyset - w \quad \dots (3.24)$$

Låt B operera på denna

$$Bv = B\emptyset - Bw = 0 \quad \dots (3.25)$$

eftersom både \emptyset och w satisfierar randvillkoret. Vi har alltså åstadkommit homogena randvillkor för funktionen v . I stället för att studera \emptyset , studerar man nu v .

$$Lv = L(\emptyset - w) \quad \dots (3.26)$$

Betrakta en lösning \emptyset_0 till $L\emptyset = f$, då är $v_0 = \emptyset_0 - w$ och

$$Lv_0 = L\emptyset_0 - Lw = f - Lw = f_1 \quad \dots (3.27)$$

eftersom w ej satisfierar $Lw = f$. f_1 definierar en ny källfunktion, som är bekant, då ju f och w är givna funktioner. Alltså har vi nu problemet

$$Lv = f_1 \quad \dots (3.28)$$

att lösa i stället för det ursprungliga. Här gäller då att funktionalen

$$F = \langle v, Lv \rangle - 2\langle v, f_1 \rangle \quad \dots (3.29)$$

skall minimeras.

Substituera nu in v i detta uttryck

$$\begin{aligned}
 F &= \langle \phi - w, L(\phi - w) \rangle - 2\langle \phi - w, f - Lw \rangle = \\
 &= \langle \phi, L\phi \rangle - 2\langle \phi, f \rangle - \langle w, L\phi \rangle + \langle \phi, Lw \rangle - \\
 &\quad - \langle w, Lw \rangle + 2\langle w, f \rangle \quad \dots (3.30)
 \end{aligned}$$

Nu är ju f och w fixa funktioner och $\phi \in D_L$. Alltså är de båda sista termerna oberoende av variationen av ϕ och har ingen betydelse, då det gäller att bestämma ϕ_0 så att minimum erhålls, men de påverkar värdet av F_{\min} . Vi har alltså följande funktional att minimera för att erhålla lösningen ϕ_0

$$F = \langle \phi, L\phi \rangle - 2\langle \phi, f \rangle + \langle \phi, Lw \rangle - \langle w, L\phi \rangle \quad \dots (3.31)$$

Här beror de två sista termerna på randvillkoren.

3.1.3 Den generella funktionalen för andra ordningens partiella differentialekvationer

Som tidigare nämnts är den generella andra ordningens partiella differentialoperator

$$L\phi = \nabla \cdot (\underline{\kappa} \nabla \phi) + d\phi \quad \dots (3.32)$$

Funktionalen för

$$L\phi = f \quad \dots (3.33)$$

skall bestämmas under följande villkor

$$(\underline{\kappa} \nabla \phi) \cdot \bar{n} + \sigma(s) \phi(s) = h(s) \quad \dots (3.34)$$

på en del S_1 av randen, och

$$\phi(s) = g(s) \quad \dots (3.35)$$

på resterande del S_2 av randen S . Studera $\langle \phi, Lw \rangle - \langle w, L\phi \rangle$ från föregående avsnitt

$$\begin{aligned}
 & \langle \emptyset, Lw \rangle - \langle w, L\emptyset \rangle = \\
 &= \langle \emptyset, \nabla \cdot (\underline{\kappa} \nabla w) + dw \rangle - \langle w, \nabla \cdot (\underline{\kappa} \nabla \emptyset) + d\emptyset \rangle = \dots (3.36) \\
 &= \iiint_V (\emptyset \nabla \cdot (\underline{\kappa} \nabla w) - w \nabla \cdot (\underline{\kappa} \nabla \emptyset)) dV
 \end{aligned}$$

enligt Greens teorem är

$$\iint u (\underline{\kappa} \nabla v) \leq \cdot \bar{n} dS = \iiint \nabla u \cdot (\underline{\kappa} \nabla v) dV + \iiint u \nabla \cdot (\underline{\kappa} \nabla v) dV \dots (3.37)$$

Om $\underline{\kappa}$ nu antages vara symmetrisk så är

$$\iiint \nabla u \cdot (\underline{\kappa} \nabla v) dV = \iiint \nabla v \cdot (\underline{\kappa} \nabla u) dV \dots (3.38)$$

Tillämpas detta på ekvation (3.36) så fås eftersom både \emptyset och w skall uppfylla randvillkoren

$$\begin{aligned}
 & \langle \emptyset, Lw \rangle - \langle w, L\emptyset \rangle = \\
 &= \iint_S |\emptyset (\underline{\kappa} \nabla w) \cdot \bar{n} - w (\underline{\kappa} \nabla \emptyset) \cdot \bar{n}| dS = \dots (3.39) \\
 &= \iint_{S_1} (\emptyset h - wh) dS + \iint_{S_2} (g (\underline{\kappa} w) \cdot \bar{n} - g (\underline{\kappa} \nabla \emptyset) \cdot \bar{n}) dS
 \end{aligned}$$

Här har randen delats upp i två delar var och en motsvarande den del där respektive randvillkor gäller. Det framgår att den andra och tredje termen inte beror av \emptyset och således kan de strykas från funktionalen.

Den resterande funktionalen blir då enligt föregående avsnitt

$$\begin{aligned}
 F &= \langle \emptyset, L\emptyset \rangle - 2 \langle \emptyset, f \rangle + \langle \emptyset, Lw \rangle - \langle w, L\emptyset \rangle = \\
 &= \langle \emptyset, L\emptyset \rangle - 2 \langle \emptyset, f \rangle + \iint_{S_1} \emptyset h dS - \iint_{S_2} g (\underline{\kappa} \nabla \emptyset) \cdot \bar{n} dS \dots (3.40)
 \end{aligned}$$

Tillämpas Greens teorem på detta uttryck fås

$$\begin{aligned}
 F = & \iiint (-\nabla \phi \cdot (\underline{\kappa} \nabla \phi) + d\phi^2 - 2\phi f) dV + \\
 & + \iint_{S_1} \phi (h - \sigma \phi) dS + \iint_{S_2} g (\underline{\kappa} \nabla \phi) \cdot \bar{n} dS + \\
 & + \iint_{S_1} \phi h dS - \iint_{S_2} g (\underline{\kappa} \nabla \phi) \cdot \bar{n} dS \quad \dots (3.41)
 \end{aligned}$$

där också randvillkoren på respektive delar har utnyttjats.

Slutligen fås

$$\begin{aligned}
 F = & \iiint (-\nabla \phi \cdot (\underline{\kappa} \nabla \phi) + d\phi^2 - 2\phi f) dV + \\
 & + \iint_{S_1} (2 \phi h - \sigma \phi^2) dS \quad \dots (3.42)
 \end{aligned}$$

Detta är den allmänna funktionalen för andra ordningens system. Alla parametrarna i problemet (κ , d , f , σ , h och g) tillåts vara funktioner i rummet.

Aven om g ej uppträder explicit i funktionalen är det underförstått att testfunktionerna ϕ alla uppfyller Dirchlets randvillkor. En liten avvikelse från generaliteten är att $\underline{\kappa}$ har antagits vara symmetrisk. Detta är emellertid ingen allvarlig avvikelse eftersom $\underline{\kappa}$ är symmetrisk för de allra flesta fysikaliska situationer.

3.2 Variationsformulering av fallet med gravitationsvågor på vatten

Problemet med gravitationsvågor på vatten har beskrivits i kap. 2.3. I detta fall har man ett obegränsat område i radialled där funktionalen skall minimeras. Då området skall delas in i finita-element (se kap. 4) innebär detta att antalet element också skulle bli obegränsat. Därför är det bekvämt att dela in området i två olika delar; en inre del som delas in i element

och en yttre där en generell testfunktion används, vilken uppfyller Laplace' ekvation och vissa randvillkor.

3.2.1 Identifikation av termerna

Det problem som skall lösas är

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{i hela volymen} \quad \dots (3.43a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{på } z = 0 \quad \dots (3.43b)$$

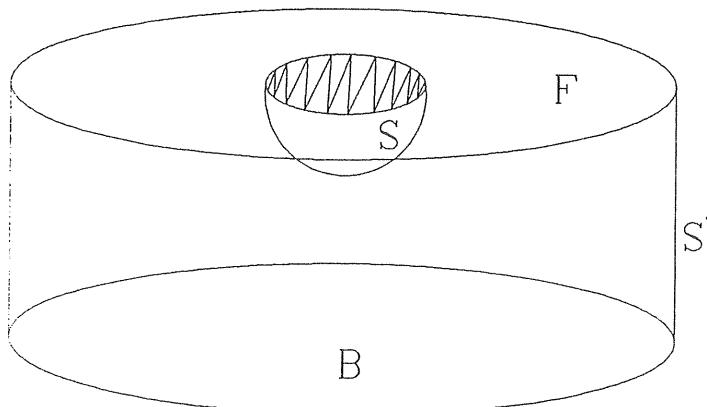
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_n \quad \text{på begränsningsytor} \quad \dots (3.43c)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} - ik\phi \right) = 0 \quad \dots (3.43d)$$

Identifikation av termerna i funktionalen för den allmänna andra ordningens differentialekvation ger

$$\begin{aligned} F = & - \iiint_V (\nabla \phi)^2 dV + \iint_F (\omega^2/g) \phi^2 dF + \\ & + \iint_S 2 v_n \phi dS + \iint_{S'} i n \phi^2 dS' \end{aligned} \quad \dots (3.44)$$

där de ingående beteckningarna för randytor och områden fås ur följande definitionsfigur.



Figur 3.1 Definition av randytor och områden

3.2.2 Sju olika fall att behandla

Enligt kap. 2.4 kan potentialen ϕ delas upp i tre olika delar

$$\phi = \phi_I + \phi_S + \phi_R \quad \dots (3.45)$$

Dessutom kan ϕ_R delas in i sex olika komponenter (ekv. 2.52) en för varje rörelsenod hos föremålet

$$\phi_R = \sum_{i=1}^6 n_i \dot{\phi}_i$$

Randvillkoret på föremålets yta (3.43c)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_n$$

kan nu delas upp i två delar

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial n} + \frac{\partial \phi_S}{\partial n} = 0 \quad \dots (3.46a)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = n_i \quad \dots (3.46b)$$

Sätts detta in i funktionalen i föregående avsnitt, får man sju olika funktionaler, som skall minimeras. Problemet har alltså delats upp i sju delproblem: Ett där spridningen av vågen mot föremålet beräknas, sex där den utstrålade vågen från varje rörelsemot beräknas. Funktionalerna blir:

$$F_i = \iiint_F (\nabla \phi_i)^2 dv - \iint_S (\omega^2/g) \phi_i^2 dF - \\ - \iint_S 2\phi_i n_i dS - \iint_{S'} ik \phi_i^2 dS' \quad i=1,..6 \quad \dots (3.47)$$

$$F_7 = \iiint_F (\nabla(\phi_I + \phi_S))^2 dv - \iint_F (\omega^2/g) (\phi_I + \phi_S)^2 dF - \\ - \iint_{S'} ik (\phi_I + \phi_S)^2 dS' \quad \dots (3.48)$$

3.2.3 Indelning av volymen i två områden

I uttrycket för funktionalerna finns två integraler som skall tas då $R \rightarrow \infty$. Den ena är integralen över vattenytan F och den andra är integralen över den fiktiva ytan S' .

Då området V skall delas in i finita element måste volymen begränsas så att ett ändligt antal element fås. Ett sätt att göra detta är att helt enkelt flytta den fiktiva ytan S' till ett ändligt R -värde och låta ϕ uppfylla strålningsvillkoret där. Ett annat är att ha oändliga element utanför ett viss R -värde där interpolationsfunktionerna uppfyller strålningsvillkoret och som har noder i oändligheten. (Se Zienkiewicz 197).

Här har en tredje metod använts. Den innebär att S flyttas till ett ändligt R -värde, och att man utanför detta R -värde antar en testfunktion, som har ett i princip oändligt antal parametrar, som skall bestämmas. Denna testfunktion uppfyller alla randvillkor utanför S' , och parametrarna bestäms genom att potentialen och dess normalderivata skall vara kontinuerliga över ytan S' , dvs:

$$\phi = \phi' \quad \text{på } S' \quad \dots (3.49a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi'}{\partial n} \quad \text{på } S' \quad \dots (3.49b)$$

där ' åsyftar potentialen utanför S' . Detta introducerar nya villkor på ϕ , som måste tas med i funktionalen. Funktionalen ändras på så sätt, att en extra integral över den fiktiva ytan S' införs.

Matchningsvillkoren på ytan S' gör, att det nya villkoret på funktionalen kommer att bero på både ϕ och ϕ' , eftersom dessa kan variera oberoende av varandra. Det innebär, att man nu har en funktional med två argument i stället för ett. Den nya integralen över S' får följande utseende.

$$\iint_{S'} \left(\frac{\phi'_i}{2} - \phi_i \right) \left(\frac{\partial \phi'_i}{\partial r} \right) dS' \quad \dots (3.50)$$

för den utstrålade vågen och

$$\iint_{S'} ((\phi_S'/2 - \phi_S) \frac{\partial \phi'}{\partial r} - (\phi_S'/2) \frac{\partial \phi_I}{\partial r}) dS' \quad \dots (3.51)$$

för den spridda vågen.

De sammanslagna funktionalerna blir nu

$$F_i(\phi, \phi') = \iiint_V (\nabla \phi_i)^2 dV - \iint_F \omega^2/g \phi_i^2 dF - \dots (3.52)$$

$$- \iint_{S'} 2 \phi_i n_i dS + \iint_{S'} (\phi_i' - 2\phi_i) \frac{\partial \phi_i}{\partial r} dS'$$

$$F_7(\phi, \phi') = \iiint_V (\nabla (\phi_S + \phi_I))^2 dV - \iint_F \omega^2/g (\phi_I + \phi_S)^2 + \dots (3.53)$$

$$+ \iint_{S'} ((\phi_S' - 2\phi_S) \frac{\partial (\phi_I + \phi_S)}{\partial r} - \phi_S' \frac{\partial \phi_I}{\partial r}) dS'$$

För att visa att dessa funktionalers stationära punkter ϕ_S löser problemet tas första variationen av $F\phi(\phi, \phi')$ med $\phi = \phi_S + \phi_I$.

$$F_7(\phi, \phi') = \iiint_V 2\nabla\phi \delta\phi dV - \iint_F 2(\omega^2/g) \phi \delta\phi dF + \dots (3.54)$$

$$+ \iint_{S'} ((S \phi_S' - 2\delta\phi_S) \frac{\partial \phi'}{\partial r} + (\phi_S' - 2\phi_S) \frac{\partial \delta\phi'}{\partial r} - \delta\phi_S' \frac{\partial \phi_I}{\partial r}) dS'$$

$\delta\phi_I = 0$ då ϕ_I är en given funktion.

Tillämpa Greens teorem på första termen

$$\iiint \nabla \phi \delta \phi dV = - \iiint \nabla^2 \phi \delta \phi dV + \iint_F \frac{\partial \phi}{\partial z} \partial \phi dF + \iint_{S'} \frac{\partial \phi}{\partial r} \delta \phi dS' + \dots (3.55)$$

$$+ \iint_B \frac{\partial \phi}{\partial n} \partial \phi dB + \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta \phi dS$$

$$\delta F_7(\phi, \phi') = - \iint \nabla^2 \phi \delta \phi dV + \iint_F \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - (\omega^2/g) \phi \right) \delta \phi dF +$$

$$+ \iint_{S'} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \phi'}{\partial r} \right) \delta \phi - (\phi - \phi') \frac{\partial \delta \phi}{\partial r} \right) dS'$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_{S'} (\phi' \left(\frac{\partial \phi'}{\partial r} - \partial \phi_I / \partial r \right) - (\phi' - \phi_I) \frac{\partial \delta \phi'}{\partial r}) dS' \dots (3.56)$$

Den sista integralen blir noll genom Greens teorem.

$$\iint_{S'} \frac{1}{2} (\delta \phi'_S \partial \phi'_S / \partial r - \phi'_S \partial \delta \phi'_S / \partial r) dS' =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_V (\phi'_S \nabla^2 \delta \phi'_S - \delta \phi'_S \nabla^2 \phi'_S) dV -$$

$$- \iint \frac{1}{2} (\delta \phi'_S \partial \phi'_S / \partial n - \phi'_S \partial \delta \phi'_S / \partial n) dS = 0 \dots (3.57)$$

$$S_\infty \text{UF}' \text{UB}'$$

Eftersom ϕ' uppfyller alla villkor utom det på randytan S' .

På samma sätt kan visas att funktionalerna $F_1 - F_6$ löser strålningsproblemen.

I det följande kapitlet skall nu visas, hur man kan använda dessa funktionaler för att lösa problemet med gravitationsvågor på vatten.

4. FINIT ELEMENTFORMULERING

Då problemet har variationsformulerats skall minimipunkten sökas. Det finns flera olika metoder att tillgripa. Här har metoden med finita element använts.

Finita elementmetoden har flera fördelar framför ett direkt variationsangrepp, där man ur en uppsättning funktioner väljer en kombination, som minimerar funktionalen. Dessa funktioner skall förutom minimivillkoret uppfylla Dirichlets randvillkor, och detta är svårt, om ränderna ej har enkel geometri. Dessutom innebär den direkta metoden, att det är svårt att ta hänsyn till inhomogeniteter på ett korrekt sätt.

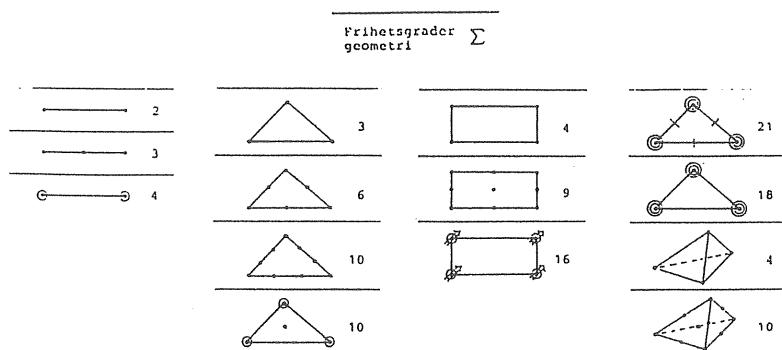
En annan nackdel är, att de matriser som fås blir fulla och tätta vilket innebär att man inte kan använda de kraftfulla metoder som finns för att lösa ekvationssystem med glesa matriser.

Genom att använda finita elementmetoden (FEM) kan man undvika flera av dessa svårigheter.

Dirichlets randvillkor är lätt uppfyllda om man använder isoparametrisk avbildning. (Se avsnitt 4.12). Eftersom testfunktionerna är definierade bara på delintervall så kan inhomogeniteter utan svårigheter behandlas. Man kan dessutom variera elementstorlek och täthet så att områden av särskilt intresse kan studeras i större detalj. De matriser som uppkommer är glesa och bandade vilket innebär att effektiva lösningsmetoder kan användas.

4.1 Element

Indelningen i finita element kan göras på flera olika sätt. Figuren 4.1 nedan visar ett flertal olika element i en, två och tre dimensioner.



Frihetsgraderna anges på följande sätt.

- betyder funktionsvärde
- betyder värdena av förstaderivatorna,
- betyder värdena av andraderivatorna,
- / betyder värdet av normalderivatan,
- $\not\exists$ betyder värdet av blandade derivatan $\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}$.

Fig. 4.1

Ett finit element är karakteriseringat av tre storheter nämligen en geometrisk form, ett antal funktioner definierade på den geometriska formen och ett antal frihetsgrader. Den geometriska formen bestämmar utseendet på elementet t.ex. en triangel eller en kub. Ekvationerna kan t.ex. vara linjära funktioner inom elementet. Frihetsgraderna bestäms av antalet noder, dvs det antal punkter i elementet där funktionsvärdena söks. Frihetsgraderna bestäms också av villkoren på sammanknytningen av elementet med andra element t.ex. om derivatan skall vara kontinuerlig över elementgränsen.

Varje element har alltså ett antal noder. Till varje nod är associerat en interpolationsfunktion som har följande egenskaper. För det första skall interpolationsfunktionens värde i den nod den associeras till vara ett. För det andra skall den vara noll i alla andra noder. Men den är inte noll mellan nöderna. Den sökta funktionen approximeras inom elementet med en summa av interpolationsfunktioner, som var och en multipliceras med den sökta funktionens värde i respektive nodpunkt.

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{i=1}^{M_n} N_i(x) f(x_i) \quad \dots (4.1)$$

där

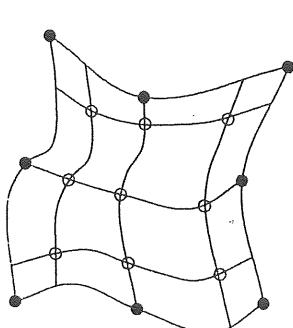
$$\begin{aligned}x_i &= \text{nodpunkterna} \\M_n &= \text{antal noder i elementet} \\N_i(x) &= \text{interpolationsfunktionerna} \\f(x) &= \text{den sökta funktionen}\end{aligned}$$

Funktionsvärdena $f(x_i)$ är obekanta och problemet är att söka dessa värden. Sedan är funktionen $f(x)$ approximativt känd överallt genom formeln ovan.

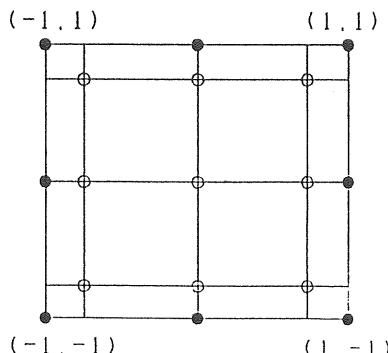
4.1.2 Isoparametrisk avbildning

Om elementgränserna inte har enkel geometri t.ex. räta linjer kan geometrin också approximeras med hjälp av interpolationsfunktionerna ovan. Nodpunkternas geometriska lägen är bekanta genom att geometrin för det område inom vilket elementuppdeleningen skall göras är känd.

Geometrin mellan dessa kända nodpunkter kan approximeras genom att man avbildar ett baselement med hjälp av interpolationsfunktionerna så att noderna i baselementet avbildas på noderna i det aktuella elementet, se fig. 4.2.



Finit element
globala koordinater



Baselement
lokala koordinater

Fig. 4.2 Isoparametrisk avbildning

4.2 FEM-formulering av problemet med gravitationsvågor på vatten

Här skall problemet beskrivet i kap. 3.2 FEM-formuleras. Nu är det lämpligt att dela upp funktionalen (3.52 och 3.53) i sju olika delar och kalla dessa $I_1 - I_7$.

Där

$$I_1 = \iiint_V (\nabla \phi)^2 dV \quad \dots (4.2a)$$

$$I_2 = - \iint_F \omega^2/g \phi^2 dF \quad \dots (4.2b)$$

$$I_3 = \iint_{S'} \phi_i^! \partial \phi_i^! / \partial r dS' \quad \dots (4.2c)$$

$$I_4 = - \iint_{S'} 2\phi \partial \phi_i^- / \partial r dS' \quad \dots (4.2d)$$

$$I_5 = \iint_{S'} 2\phi_I \partial \phi / \partial r dS' \quad \dots (4.2e)$$

$$I_6 = - \iint_{S'} 2\phi \partial \phi_I / \partial r dS' \quad \dots (4.2f)$$

$$I_7 = - \iint_S \phi_i n_i dS \quad \dots (4.2g)$$

Beroende på om det är strålnings- eller spridningsproblem som lösas får de ingående storheterna olika betydelse enligt tabellen

<u>betydelse</u>	<u>strålning</u>	<u>spridning</u>
<u>variabel</u>		
ϕ	ϕ_i	$\phi_I + \phi_S$
ϕ_i	ϕ_i	ϕ_S

Prim betyder att det gäller storheter utanför den fiktiva ytan S' . I fallet med strålningsproblemet skall integralerna I_5 och I_6 ej tas med eftersom $\phi_I=0$. Då spridningsproblemet betraktas försvinner å andra sidan I_7 då hastigheten hos föremålet är noll i detta fall.

Den infallande vågen, som behövs då spridningsproblemet behandlas, antas vara en plan framåtskridande våg, vars vågvektor bilden vinkeln θ_I med x-axeln. Då ges ϕ_I av

$$\begin{aligned}\phi_I &= \frac{iga_O}{\omega} \exp(ik_O r \cos(\theta - \theta_I)) \frac{\cosh k_O(z+h)}{\cosh k_O h} = \\ &= - \frac{iga_O}{\omega} \frac{\cosh k_O(h+z)}{\cosh k_O h} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(k_O r) \cos n(\theta - \theta_I)\end{aligned} \quad \dots (4.3)$$

där

- a_O är amplituden på den infallande vågen
- ω vinkelfrekvensen
- g jordaccelerationen
- J_n Besselfunktionen av n:te ordningen
- k_O vågvektorns belopp $k_O=L/2\pi$
- h vattendjupet
- r horisontella avståndet från origo
- $\epsilon_n = \begin{cases} 1; & n=0 \\ 2; & n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Utanför S antages den spridda och den utstrålade vågen vara

$$\begin{aligned}\phi_i' &= \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{on} \cos n\theta + \beta_{on} \sin n\theta| \cosh k_O(z+h) H_n^{(1)}(k_O r) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn} \cos n\theta + \beta_{mn} \sin n\theta| \cos \kappa_m(z+h) K_n(\kappa_m r)\end{aligned} \quad \dots (4.4)$$

Här är

- K_n den modifierande besselfunktionen av andra slaget och ordningen n

- $H_n^{(1)}$ Hankelfunktionen av första slaget och ordningen n

k_o och κ_m ges av

$$k_o \tanh k_o h - \omega^2/g = 0 \quad \dots (4.5a)$$

$$\kappa_m \tan \kappa_m h + \omega^2/g = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad \dots (4.5b)$$

Definierar man k_m som

$$k_m = ik_m \quad \dots (4.6)$$

fås en ekvation för k_o och k_m

$$k_m \tanh k_m h - \omega^2/g = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \dots (4.7)$$

Dessutom gäller

$$\cosh k_m(z+h) = \cos \kappa_m(z+h) \quad \dots (4.8)$$

$$H_n^{(1)}(k_m r) = K_n(m r) \frac{2}{\pi} e^{-\pi/2 i(n+1)} \quad \dots (4.9)$$

$$H_n^{(1)\prime}(k_m r) = -i K_n'(m r) \frac{2}{\pi} e^{-\pi/2 i(n+1)} \quad \dots (4.10)$$

Med dessa definitioner och samband fås

$$\phi_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{mn} \cos n\theta + \beta_{mn} \sin n\theta) \cosh k_m(z+h) H_n^{(1)}(k_m r) \quad \dots (4.11)$$

Observera att α_{mn} och β_{mn} är omdefinierade att innehålla alla konstanter.

4.2.1 Volymintegralen

Det inre området V uppdelas i M_V finita element och N_V noder. Varje element har 20 noder och elementformen är hexaedrisk (se figur 4.3).

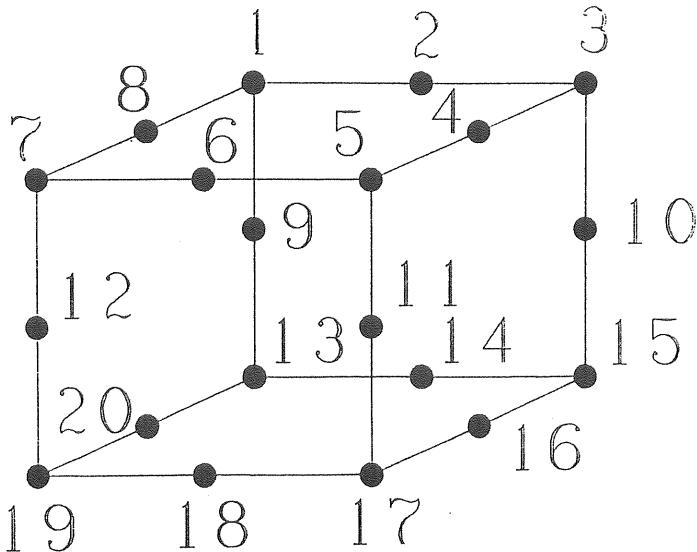


Fig. 4.3 Ett 20-nodigt hexaedriskt element

För dessa element är interpolationsfunktionerna

$$N_i = \frac{1}{8} (1+\xi\zeta_i) (1+\eta\zeta_i) (i+\zeta\zeta_i) (\xi\zeta_i + \eta\zeta_i - 2) \quad \dots (4.12a)$$

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1 \text{ hörnnoder}$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1-\xi^2) (1+\eta\zeta_i) (1+\zeta\zeta_i) \quad \dots (4.12b)$$

$$\xi_i = 0; \eta_i, \zeta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1+\xi\zeta_i) (1-\eta^2) (1+\zeta\zeta_i) \quad \dots (4.12c)$$

$$\eta_i = 0; \xi_i, \zeta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1+\xi\zeta_i) (1+\eta\zeta_i) (1-\zeta^2) \quad \dots (4.12d)$$

$$\zeta_i = 0, \xi_i, \eta_i = \pm 1$$

där ξ, η, ζ är lokala koordinater och ξ_i, η_i, ζ_i är de lokala nodpunkterna. Dessa N_i används nu till att avbilda de lokala punkterna ξ, η, ζ på de globala x, y, z -koordinaterna.

Man får

$$\begin{bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{bmatrix} = \{N^e\} \quad \dots (4.13)$$

där

$$\{x^e\} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{20} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{20} \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{20} \end{bmatrix} \quad \dots (4.14)$$

är en 3×20 matris innehållande koordinater för noderna i det globala systemet

$$\{N^e\}^T = \{N_1(\xi, \eta, \zeta), \dots, N_{20}(\xi, \eta, \zeta)\}$$

Dessa hexaedriskala element kan alltså vara godtyckligt formade och orienterade i området V . Sidorna behöver inte vara lika stora och mittnoderna behöver inte ligga mitt på sammanbindningslinjer mellan hörnnoderna.

Det finns många anledningar till att just 20 noder hexaedriskala element valts. Kubformen gör att elementindelning och nodnumrering blir enkla. Interpolationsfunktionerna är kvadratiska så att färre element behövs för samma noggrannhet som för motsvarande linjära element. Dessutom ger den isoparametriska avbildningen att randytorna approximeras bättre.

Inom varje element approximeras " genom

$$\phi^e \approx \sum_{i=1}^{20} N_i^e \phi_i^e \quad \dots (4.15)$$

e anger att kvantiteten är associerad med ett element.

Om man låter alla N_i^e och ϕ_i^e ingå i två vektorer

$$\{N^e\}^T = \{N_1^e, N_2^e, \dots, N_{20}^e\} \quad \dots (4.16)$$

och

$$\{\phi^e\}^T = \{\emptyset_1^e, \emptyset_2^e, \dots, \emptyset_n^e\} \quad \dots (4.17)$$

så fås

$$\{\phi^e\} \approx \{N^e\}^T \{\phi^e\} \quad \dots (4.18)$$

Detta kan nu sättas in i integralen (4.2a)

$$I_1 = \iiint_V (\nabla \phi^e)^2 dV$$

$$= \sum_{e=1}^{M_V} \iiint_{V^e} (\nabla \phi^e)^2 dV^e =$$

$$= \sum_{e=1}^{M_V} \iiint_{V_e} (\nabla \{N^e\}^T \{\phi^e\})^2 dV^e =$$

$$= \sum_{e=1}^{M_V} \{\phi^e\}^T \iiint_{V_e} \nabla \{N^e\} \nabla \{N^e\}^T dV^e \{\phi^e\} =$$

$$= \sum_{e=1}^{M_V} \{\phi^e\}^T |K_V^e| \{\phi^e\} =$$

$$= \{\phi\}^T |K_V| \{\phi\} \quad \dots (4.19)$$

där

$$|K_V^e| = \iiint_{V^e} \nabla \{N^e\} \nabla \{N^e\}^T dV^e \quad \dots (4.20)$$

och

$$K_{Vij}^e = \iiint \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right) dx dy dz \quad \dots (4.21)$$

i, j = 1 ... 20

$$\{\phi^T\} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{NV}\} \quad \dots (4.22)$$

som är unionen av alla $\{\phi^e\}$.

Själva integrerandet av K_{vij}^e sker i de lokala koordinaterna ξ, η, ζ . Det gäller

$$\int \int \int_v^e dx^e dy^e dz^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J| d\xi d\eta d\zeta \quad \dots (4.23)$$

och

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = |J|^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad \dots (4.24)$$

där $|J|$ är den så kallade jacobianen, $|J|$ dess determinant och $|J|^{-1}$ dess invers.

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \cdot |x^e, y^e, z^e| \quad \dots (4.25)$$

Sätter man in x^e, y^e, z^e uttryckt i lokala koordinater fås

$$|J| = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \cdot |x^e|^T \cdot |N^e|^T \quad \dots (4.26)$$

som kan evalueras i ξ, η, ζ och x^e eftersom N_i är givna i ξ, η, ζ . Man får således

$$\begin{aligned}
 K_{vij}^e &= \int_{-1-1-1}^{1 1 1} \left(\frac{\partial N_i^C}{\partial \xi} \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial N_i^C}{\partial \xi} \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} \right) |J| d\xi d\eta d\zeta \quad \dots (4.27)
 \end{aligned}$$

Integralerna är sedan evaluerade med kvadratur. Mer om detta i kap. 4.3.

Matrisen $[K_v^e]$ är symmetrisk och reell eftersom N_i^e är reella och den globala matrisen $[K_v]$ blir symmetrisk och reell. Genom att göra en listig nodnumrering kan $[K_v]$ göras bandad.

4.2.2 Integralen på vattenytan

På samma sätt som för volymsintegralen sätts finita element approximationen in i ytintegralen över vattenytan (4.2b)

$$\begin{aligned}
 I_2 &= - \int_F \omega^2/g \phi^2 dF = \\
 &= \sum_{e \in F} (-\omega^2/g) \int_{F^e} (N^e \phi^e)^2 dF^e = \\
 &= \sum_{e \in F} |\bar{\phi}^e|^T (-\omega^2/g) \int_{F^e} \{N^e\}^T \{N^e\}^T dF^e \{phi^e\} \\
 &= \sum_{e \in F} \{phi^e\}^T |K_F^e| \{phi^e\} = \\
 &= \{\phi\}^T |K_F| \{\phi\} \quad \dots (4.28)
 \end{aligned}$$

där $\{\phi^e\}$ och $\{N^e\}$ är de delvektorer av $\{N^e\}$, $\{\phi^e\}$ som innehåller de noder som finns på fria vattenytan, dvs $\phi_i^e \in F^e$. $\{\phi\}$ är

återigen unionen av alla $\{\phi^e\}$. Eftersom varje yta av elementet har 8 noder är $\{\bar{N}^e\}$ och $\{\bar{\phi}^e\}$ av storleken 8×1 så att

$$|K_F^e| = (-\omega^2/g) \int_{F^e} \{\bar{N}^e\} \{\bar{N}^e\}^T dF^e \quad \dots (4.29)$$

är 8×8 och

$$K_F^e_{ij} = (-\omega^2/g) \int_{F^e} N_i^e N_j^e dF^e \quad i, j = 1, \dots, 8 \quad \dots (4.30)$$

Precis som för volymsintegralen blir $|K_F^e|$ och $|K_F|$ symmetriska och reella och eftersom $\{\bar{\phi}^e\} \in \{\phi^e\}$ är $|K_F|$:s bandbredd alltid mindre än eller lika med $|K_V|$:s. Själva lösandet av integralerna sker genom integration över de lokala koordinaterna

$$K_F^e_{ij} = (-\omega^2/g) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N_i^e N_j^e |J_F|)_{\xi=1} d\xi dn$$

$\xi=1$ dårför att integrationen endast sker över den yta där $\xi=1$ i lokala koordinater. Determinanten av jakobianen ges av

$$|J_F|^2 = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right| \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right| - \dots (4.31)$$

$$- \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|^2$$

som evalueras i de lokala koordinaterna ξ , η , ζ med kvadratur.

4.2.3 Integralerna på den fiktiva ytan

I dessa integraler behövs serieansatsen och uttrycket för den infallande vågen. Då ju båda dessa uttryck består av oändliga summor, måste dessa summor trunkeras säg vid N_o , N_m och M så att följande uttryck fås

$$\phi_I \approx \frac{i g_a o}{\omega} \frac{\cosh k_o (z+h)}{\cosh kh} \sum_{n=0}^{N_o} \epsilon_n i^n J_n(k_o r) \cos n(\theta - \theta_I) \quad \dots (4.32)$$

$$\phi_i^- \approx \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N_m} (\alpha_{mn} \cos n\theta + \beta_{mn} \sin n\theta) \cosh k_m(z+h) H_n^{(1)}(k_m r) \quad \dots (4.33)$$

där N_m , $m=0, 1, \dots, M$ och M bestämts av vågperiod och geometri.

Koefficienterna N_m är svåra att bestämma eftersom de beror på flödets komplexitet men M kan fås ur

$$e^{-(2k_M - 1) \frac{\pi}{2} r/h} \leq \epsilon \quad \dots (4.34)$$

där r är radien hos den fiktiva ytan och ϵ är noggrannheten.

Integralen I_3 (4.2c):

$$I_3 = \int_{S'} \phi_i^- \frac{\partial}{\partial r} \phi_i^- dS'$$

Sätter man in uttrycket för ϕ_i^- så får man

$$I_3 \approx \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \sum_m^M \sum_{n=0}^{N_m} (\alpha_{mn} \cos n\theta + \beta_{mn} \sin n\theta) \cosh k_m(z+h) H_n^{(1)}(k_m r_s) \quad \dots$$

$$(\sum_m^M \sum_{n=0}^{N_m} (\alpha_{mn} \cos n\theta + \beta_{mn} \sin n\theta) \cosh k_m(z+h) H_n^{(1)}(k_m r_s) k_m)$$

$$r_s d\theta dz =$$

$$= r_s \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N_m} (2\pi k_m / \epsilon_n) (\alpha_{mn}^2 + \beta_{mn}^2) H_n^{(1)}(k_m r_s) H_n^{(1)}(k_m r_s)$$

$$((\sinh 2k_m h / 4k_m) + \frac{h}{2}) \quad \dots (4.35)$$

Om man nu definierar en koefficientvektor $\{\mu\}$ innehållande alla koefficienterna α_{mn} och β_{mn} kan denna slås samman med nodvärdesvektorn $\{\phi\}$ senare och båda lösas samtidigt. Mera om detta finns i kap. 4.4.

$\{\mu\}$ definieras genom

$$\{\mu\}^T = \{\alpha_{00}, \alpha_{01}, \beta_{01}, \alpha_{02}, \beta_{02}, \dots, \alpha_{0N_0}, \beta_{0N_0},$$

$$\alpha_{10}, \alpha_{11}, \beta_{11}, \alpha_{12}, \beta_{12}, \dots, \alpha_{1N_1}, \beta_{1N_1},$$

...

...

...

...

$$\alpha_{M09}, \alpha_{M1}, \beta_{M1}, \alpha_{M2}, \beta_{M2}, \dots, \alpha_{MN}, \beta_{MN}\}^T$$

... (4.36)

som innehåller N_T komponenter

$$N_T = \sum_{m=0}^M 2N_m + 1 \quad \dots (4.37)$$

Alla β_{io} $i=0, \dots, M$ är noll och har uteslutits.

Nu kan integralen I_3 skrivas

$$I_3 \approx \{\mu\}^T |K_D| \{\mu\} \quad \dots (4.38)$$

där $|K_D|$ är en diagonal $N_T \times N_T$ matris och K_{Dn} ges av

$$K_{Dn} = ((\pi r_s) / \epsilon_n) H_n^{(1)}(k_m r_s) H_n^{(1)}(k_m r_s) (\sinh 2k_m h + 2k_m h)$$

... (4.39)

Det inre elementet i $\{\mu\}$ är antingen α_{mn} eller β_{mn} .

K_{D1} är komplext om $l \geq 2N_0 + 1$.

Integral I_4 (4.2d):

Denna integral kopplar finita elementansatsen med serieansatsen.

$$\begin{aligned}
 I_4 &= - \int_{S'} \phi \frac{\partial}{\partial r} \phi_i^e dS = \\
 &= - \sum_{e \in S'} \int_{S^e} \hat{\{N^e\}}^T \{\phi^e\} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N_m} (\alpha_{mn} \cos n\theta + \beta_{mn} \sin n\theta) \\
 &\quad \cdot \cosh k_m(z+h) H_n^{(1)}' (k_m r_s) k_m dS^e \quad \dots (4.40)
 \end{aligned}$$

där $\hat{\{N^e\}}$ och $\{\phi^e\}$ är subvektorer till $\{N^e\}$ och $\{\phi^e\}$ som innehåller värdena på ytan S' .

För enkelhets skull krävs att elementen på ytan S' har exakt en elementyta på S' . Då blir $\hat{\{N^e\}}$ och $\{\phi^e\}$ 8×1 matriser.

Om man använder definitonen av $\{\mu\}$ kan I_4 skrivas

$$I_4 \approx \sum_{e \in S'} \{\mu\}^T \{K_C^e\} \{\phi^e\} \quad \dots (4.41)$$

där $\{K_C^e\}$ är en $8 \times N_T$ matris med

$$K_C^e_{ij} = - \int_{S^e} \hat{N}_i^e \cosh k_m(z+h) H_n^{(1)}' (k_m r_s) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} dS^e \quad \dots (4.42)$$

j bestäms av m och n , där det j :te elementet i $\{\mu\}$ är α_{mn} och $\cos n\theta$ eller $\sin n\theta$ skall väljas så att $\cos n\theta$ står tillsammans med α_{mn} och $\sin n\theta$ tillsammans med β_{mn} . För att kunna utföra integreringen i lokala koordinater skrivs

$$K_{c,i,j}^e = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\hat{N}_i^e \cosh k_m(z+h) H_n^{(1)}(k_m r_s)) k_m \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos n(\arccos x/r_s) \\ \sin n(\arcsin x/r_s) \end{array} \right\} |J_s| d\xi d\zeta \quad \dots (4.43)$$

$n=1$ har valts för att den ytan alltid skall ligga på S' .

$$|J_s|^2 = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right| \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \right| - \\ - \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 \quad \dots (4.44)$$

Nu kan integralen evalueras numeriskt.

Elementmatrisen sätts sedan samman så att

$$I_4 \approx \{\mu\}^T |K_c|^T \{\phi\} = \\ = \frac{1}{2} \{\mu\}^T |K_c|^T \{\phi\} + \frac{1}{2} \{\phi\}^T |K_c| \{\mu\} \quad \dots (4.45)$$

där endast de ϕ_i som ligger på S' är berörda. Den sista manipulationen görs för att den globala matrisen skall bli symmetrisk. Den globala $|K_c|$ matrisen blir med N_s noder på S' av storleken $N_s \times N_T$. Den är dessutom både full och komplex.

Integral I_5 (4.2e) :

Här sker kopplingen mellan den infallande vågen och serielösningen. Denna integral finns inte då strålningsproblemen löses

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int_S 2 \phi_I \frac{\partial}{\partial r} \phi_i' dS \\
 &\int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} 2r_s \left(-\frac{iga_o}{\phi} \right) \frac{\cosh k_o(z+h)}{\cosh k_o h} \sum_{n=0}^N \epsilon_n i^n J_n(k_o r_s) \cos n(\theta - \theta_I) \\
 &\cdot \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (\alpha_{mn} \cos n\theta + \beta_{mn} \sin n\theta) \cosh k_m(z+h) H_n^{(1)}(k_m r_s) k_m \right) d\theta dz \\
 &= 2 \left(-\frac{iga_o}{\phi} \right) r_s \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N \epsilon_n i^n J_n(k_o r_s) (\cos n\theta \cos n\theta_I + \sin n\theta \sin n\theta_I) \\
 &\quad \left(\sum_{n=0}^N (\alpha_{on} \cos n\theta + \beta_{on} \sin n\theta) \right) \\
 &\quad \left(\frac{\sinh 2k_o h + 2k_o h}{4 \cosh k_o h} \right) H_n^{(1)}(k_o r_s) \dots (4.46)
 \end{aligned}$$

Här har man integrerat i z-led och använt

$$\int_{-h}^0 \cosh k_n(z+h) \cosh k_m(z+h) k_m dz = \begin{cases} 0 & k_m \neq k_n \\ \frac{\sinh 2k_m h + 2k_m h}{4} & k_m = k_n \end{cases} \dots (4.47)$$

Dessutom har man använt

$$\cos n(\theta - \theta_I) = \cos n\theta \cos n\theta_I + \sin n\theta \sin n\theta_I \dots (4.48)$$

Integratorar man $n\theta$ i θ -led också fås

$$\begin{aligned}
 I_5 &\approx \left(-\frac{iga_o}{\omega} \right) r_s^2 \sum_{n=0}^N (\alpha_{on} \cos n\theta_I + \beta_{on} \sin n\theta_I) i^n J_n(k_o r_s) \\
 &H_n^{(1)}(k_o r_s) \pi \frac{\sinh 2k_o h + 2k_o h}{2 \cosh k_o h} \dots (4.49)
 \end{aligned}$$

Där ortogonaliteten hos $\sin n\theta$ och $\cos n\theta$ tagits i beaktande

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin m\theta = 0 \quad \forall m, n$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi/\varepsilon_n & n = m \quad n, m = 0, 1, \dots \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \quad n, m = 1, \dots \end{cases}$$

Nu kan I_5 skrivas

$$I_5 \approx -\{Q_C\}^T \{\mu\} \quad \dots (4.50)$$

där $\{Q_C\}$ definieras som $2N_O - 1$ vektorn med

$$Q_{Cn} = \left(-\frac{iga_o}{\omega} (-\pi r_s) (i^n J_n(k_o r_s)) H_n^{(1)}(k_o r_s) \cdot \frac{\sinh 2k_o h + 2k_o h}{2 \cosh k_o h} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \cos n \theta_I \\ \sin n \theta_I \end{Bmatrix} \quad \dots (4.51)$$

och det n:te elementet av $\{\mu\}$ är

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{on} \\ \beta_{on} \end{Bmatrix}$$

Integral I_6 (4.2f) :

Denna integral kopplar den infallande vågen till finita elementansatsen. Även denna integral saknas då strålningsproblemen löses.

$$\begin{aligned}
 I_6 &= - \int_{S'} 2\phi \frac{\partial}{\partial r} \phi_I dS = \\
 &= - \sum_{e \in S'} \int_{S^e} \{\hat{N}_e^e\}^T \hat{\phi}^e \left(- (ig a_o)/\omega \right) ik_o \cos(\theta - \theta_I) \cdot \\
 &\quad e^{ik_o r \cos(\theta - \theta_I)} \frac{(\cosh k_o(z+h)) / (\cosh k_o h)}{ds^e} \dots (4.52)
 \end{aligned}$$

Här har den infallande vågen skrivits

$$\phi_I = \left(- (ig a_o)/\phi \right) e^{ik_o r \cos(\theta - \theta_I)} \frac{(\cosh k_o(z+h)) / (\cosh k_o h)}{ds^e} \dots (4.53)$$

I_6 kan precis som integralerna förut skrivas

$$I_6 \approx - \int_{S'} \{Q_p^e\} \{\hat{\phi}^e\} \dots (4.54)$$

ϕ_e och $\{\hat{N}_e^e\}$ är fortfarande de delmängder av vektorerna $\{\phi^e\}$ och $\{N_e^e\}$ som associeras med noderna på ytan S' . $\{Q_p^e\}$ är en 8×1 vektor vars element definieras

$$\begin{aligned}
 Q_p^e &= \int_{S^e} \hat{N}_i^e \left(- \frac{iga_o}{\phi} \right) i k_o \cos(\theta - \theta_i) e^{ik_o r \cos(\theta - \theta_I)} \\
 &\quad \frac{\cosh k_o(z+h)}{\cosh k_o h} ds^e \\
 &= \frac{\frac{iga_o}{\phi} i k_o}{\cosh k_o h} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\hat{N}_i^e \left(\frac{x}{r_s} \cos \theta_I + \frac{y}{r_s} \sin \theta_I \right) \right)_I \\
 &\quad \cdot e^{ik_o(x \cos \theta_I + y \sin \theta_I)} \cosh k_o(z+h) \cdot |J_s| \Big|_{n=1} d\xi d\xi \dots (4.55)
 \end{aligned}$$

och integralerna kan lösas numeriskt sedan x, y och z uttryckts i de lokala koordinaterna. Sammansättning av $\{Q_p^e\}$ för alla elementen på S' ger oss

$$I_6 \approx - \{Q_p\}^T \{\phi\} \dots (4.56)$$

där $\{Q_p\}$ är en vektor med $\{N_s\}$ komponenter som är komplexa.

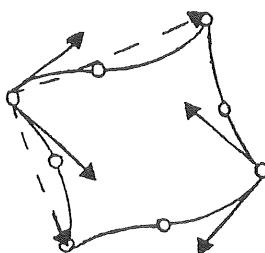
Integral I_7 : (4.2g)

Denna integral åstadkommer rörelsen i fallet med radierade vågor. Integralen uteslutes om spridningsproblemets skall lösas.

$$\begin{aligned} I_7 &= - \int_S 2 \phi_i n_i dS = \\ &= - \sum_{e \in S} \int_{S^e} 2 \{\tilde{N}^e\}^T \{\phi_i^e\} n_i dS^e \quad \dots (4.57) \end{aligned}$$

där $\{\tilde{N}^e\}$ och $\{\phi_i^e\}$ är de delvektorer av $\{N^e\}$ och $\{\phi_i^e\}$ som innehåller de noder som finns på föremålets yta.

Här tillkommer ett problem som inte fanns vid de andra integralerna nämligen att normalvektorns komponent i strålningsmodens riktning måste vara känd. Denna komponent beräknas genom att man tar kryssprodukten av vektorerna i en hörnpunkt längs växande lokala koordinater i de två riktningar som ligger i ytan. För att få den rätta utåtriktade normalen jämförs denna kryssprodukt med motsvarande kryssprodukt för vektorerna mellan en hörnkoordinat och två andra hörnkoordinater på ytan S . Om skalärprodukten mellan dessa vektorer är negativ byts tecknet på normalvektorn.



Figur 4.4 Kryssprodukter mellan de heldragna vektorerna och de streckade vektorerna jämförs för att få den utåtriktade normalvektorn.

Här skall också nämnas att normalvektorn är 6-dimensionell med en komponent i vardera svängningsnoden för föremålet, se avsnitt 2.4.1.

$$I_7 = - \sum_{e \in S} |R_L^e| \{ \phi^e \} \quad \dots (4.58)$$

$$\text{där } R_{Li}^e = \int_{S^e} 2 \tilde{N}_i^e n_i dS^e$$

Integralen evalueras med kvadratur.

Slutligen fås

$$I_7 = - |R_L| \{ \phi \} \quad \dots (4.59)$$

4.2.4 Kvadratur

Då integralerna i kap.4.3 skall lösas numeriskt kan man använda numerisk kvadratur. Tre olika Gauss-Legendre kvadraturformer används för beräkning av I_1 , I_2 , I_4 och I_6 .

För volymsintegralen I_1 används en 21-punkts formel för den lokala kubiska volymen

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{81^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \frac{1}{360} [-496f_m + 128\Sigma f_r + 8\Sigma f_f + 5\Sigma f_v] + O(1^6) \quad \dots (4.60) \end{aligned}$$

där

$$f_m = f(0, 0, 0)$$

Σf_r = summan av värdena av f i de 6 punkterna halvvägs mellan centrum och ytorna.

Σf_f = summan av värdena av f i de 6 ytcentra.

$\sum f_v$ = summan av värdena på f i de 8 hörnen.

För integralerna I_2 och I_6 approximeras integralerna med en 9-punkts formel

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad \dots (4.61)$$

där ξ_i , η_i och w_i ges ur tabellen

i	ξ_i	η_i	w_i
2	0		.8888889
1,3	$\pm .7745967$.5555556

För integralen I_4 gör de snabbt varierande funktionerna sin nö och $\cos n\theta$ i integranden att en noggrannare 16 punkts integrationsformel har använts

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad \dots (4.62)$$

där ξ_i , η_i och w_i ges ur tabellen

i	ξ_i	η_i	w_i
1,4	$\pm .3478548$.7745967
2,3	$\pm .6521452$.3399810

Integralerna I_3 , I_5 och I_7 har redan utvärderats i 4.2.3.

4.2.5 Den globala matrisen

Funktionalen $J(\phi, \phi')$ kan nu skrivas i finita elementformuleringen, där de oberoende variablerna nu i stället för funktionerna ϕ och ϕ' blir vektorerna $\{\phi\}$ och $\{\mu\}$, där $\{\phi\}$ är vektorn med nodvärdena för ϕ och $\{\mu\}$ är vektorn med koefficienterna α och β i serieutvecklingen, allt i enlighet med de föregående avsnitten.

Nu har man

$$\begin{aligned}
 J(\{\phi\}, \{\mu\}) = & \{\phi\}^T |K_V| \{\phi\} + \\
 & + \{\phi\}^T |K_D| \{\phi\} + \\
 & + \{\mu\}^T |K_C| \{\mu\} + \\
 & + \{\mu\}^T |K_C|^T \{\phi\} + \\
 & + \{\phi\}^T |K_C| \{\mu\} - \\
 & - \{Q_C\}^T \{\mu\} - \\
 & - \{Q_P\}^T \{\phi\}
 \end{aligned} \quad \dots (4.63)$$

Där $\{Q_p\}$ byts mot $\{R_L\}$ och $\{Q_C\}$ mot 0 om strålningsproblemen behandlas.

Stationaritetsvillkoret blir nu att

$$\frac{\partial J}{\partial \phi_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N_V \quad \dots (4.64a)$$

och

$$\frac{\partial J}{\partial \phi_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N_T \quad \dots (4.64b)$$

Utförs deriveringarna får man

$$2|K_V| \{\phi\} + 2|K_F| \{\phi\} + |K_C| \{\mu\} = \{Q_P\} \quad \dots (4.65a)$$

och

$$2|K_D| \{\mu\} + |K_C|^T \{\phi\} = \{Q_C\} \quad \dots (4.65b)$$

eller om strålningsproblemen behandlas; byt $\{Q_p\}$ mot $\{R_L\}$ i första ekvationen.

$\{\varphi\}$ och $\{\mu\}$ kan slås samman till en vektor $\{\psi\}$ där de första N_V elementen utgör $\{\varphi\}$ och de följande N_T elementen utgör $\{\mu\}$

$$\{\psi\}^T = [\{\varphi\}^T, \{\mu\}^T] \quad \dots (4.66)$$

Dessutom omfördelar elementen i $\{\varphi\}$ så att de sista elementen i $\{\varphi\}$ av de φ_i som gäller för noder på den fiktiva ytan S' .

Alltså är

$$\{\psi\}^T = [\{\varphi_i | \varphi_i \in S\}^T, \{\varphi_i | \varphi_i \in S'\}^T, \{\mu\}^T] \quad \dots (4.67)$$

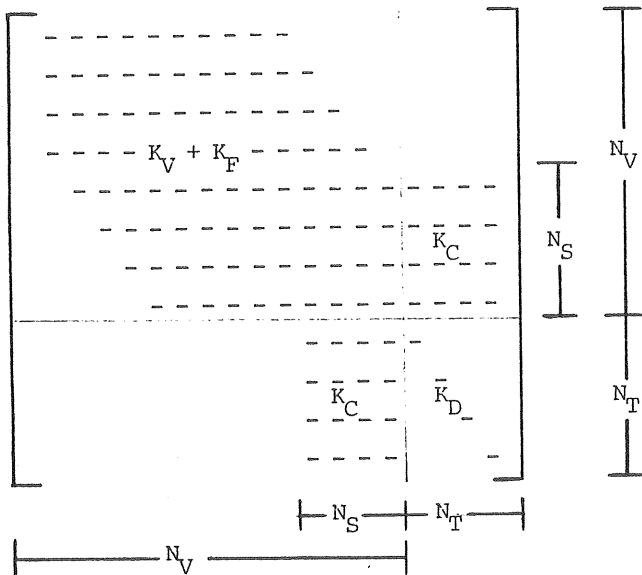
Stationaritetsvillkoret kan nu formuleras som en enda ekvation för att bestämma $\{\psi\}$

$$[K]\{\psi\} = [Q] \quad \dots (4.68)$$

där

$$\{Q\}^T = [\{Q_p\}^T, \{Q_c\}]^T \quad \dots (4.69)$$

Den totala globala matrisen $[K]$ har följande struktur



Matrisen $|K|$ är komplex och symmetrisk. Nu kan $\{\psi\}$ fås genom att man inverterar $|K|$ så att

$$\{\psi\} = |K|^{-1} \{Q\} \quad \dots (4.70)$$

och nodpotentialerna såväl som koefficienterna i serieansatsen kan lösas ut.

För att få en effektivare lösning av $\{\psi\}$ kan den totala globala matrisen kondenseras så att de obekanta $\{\mu\}$ elimineras. De kan sedan naturligtvis fås genom substitution när $\{\phi\}$ är löst. Den andra ekvationen i stationaritetsvillkoret

$$|K_D|\{\mu\} + |K_C|\{\phi\} = \{Q_C\} \Rightarrow$$

$$\{\mu\} = |K_D|^{-1} |\{Q_C\} - |K_C|^T \{\phi\} \quad \dots (4.71)$$

som tillsammans med den första ekvationen i stationaritetsvillkoret ger

$$\begin{aligned} ||K_V| + |K_F| - |K_C|^T |K_D|^{-1} |K_C| \phi &= \\ = \{Q_p\} - [K_C] [K_D] \{Q_C\} \end{aligned} \quad \dots (4.72)$$

eller

$$|K'|\{\phi\} = \{Q'\} = \{Q'\} \quad \dots (4.73)$$

där

$$|K'| = |K_V| + |K_F| - |K_C|^T |K_D|^{-1} |K_C| \quad \dots (4.74)$$

och

$$\{Q'\} = \{Q_p\} - |K_C| |K_p|^{-1} \{Q_C\} \quad \dots (4.75)$$

$|K'|$ är fortfarande symmetrisk och bandad och vid själva lösningsetappen av ekvationssystemet lagras endast den ena bandhalvan av $|K'|$. Lösningen sker med en direkt gausselimination.

5 BERÄKNING AV RESPONSS

Enligt avsnitt 2.5 kan rörelsen hos ett flytande föremål beräknas ur ekvationssystemet

$$m_{ij} \ddot{\eta}_j + c_{ij} \dot{\eta}_j = -\rho \int_{S_0} \phi_I n_i ds \quad \dots (5.1)$$

En ytterligare uppdelning av problemet ger rörelseekvationens utseende

$$(m_{ij} + a_{ij}) \ddot{\eta}_j + b_{ij} \dot{\eta}_j + c_{ij} \eta_j = -\rho \int_{S_0} \partial(\phi_I + \phi_S)/\partial t n_i ds \quad \dots (5.2)$$

där a_{ij} är "added mass" och b_{ij} är dämpningskoefficienterna. I ekvationen kan även tänkas ingå termer från en yttre dämpning, som beror på något annat än hydrodynamiken t.ex. ett förankringssystem eller ett energiuttag, om föremålet används som våg-energiomvandlare.

Samma sak gäller termer innehållande återförande krafter från t.ex. ett ankarsystem. Dessa kommer att läggas till termer innehållande η_j .

5.1 Beräkning av excitationskrafterna.

Högerledet i rörelseekvationen från det förra avsnittet är excitationskraften. Det är denna som sätter föremålet i rörelse. Denna är endast beroende på den infallande och den spridda vågen ϕ_I och ϕ_S .

Nu är alla potentialerna kända från beräkningarna enligt kap. 4 och excitationskraften fås genom en direkt integral av $(\phi_I + \phi_S)_t$ över föremålets yta. Själva integrationen sker över den yta som är nedsänkt under stillvattennivån då kroppen är i jämviktsläge. Detta innebär en linearisering, men man har antagit att vågorna är små så att linjär teori kan utnyttjas, varför detta även kan antas gälla för rörelserna.

Vidare har man antagit att vågorna är harmoniska med tidsberoendet $e^{-i\omega t}$, och derivation över tiden innebär en multiplikation med $-i\omega$.

Alltså får man

$$\begin{aligned} F_{\text{exi}} &= -\rho \iint_{S_0} (\phi_I + \phi_S) n_i \, dS \\ &= i\omega\rho \iint_{S_0} (\phi_I + \phi_S) n_i \, dS \quad \dots (5.3) \end{aligned}$$

Sätter man nu in finita elementansatsen får följande uttryck för excitationskraften

$$F_{\text{exi}} = i\phi\rho \sum_{e \in S} \iint_{S^e} \{\tilde{N}^e\}^T \{(\tilde{\phi}_I^e + \tilde{\phi}_D^e) n_i\} \, dS^e \quad \dots (5.4)$$

Tidet det innebär att bara noder på föremålets yta skall tas med i integrationen.

Observera också att det är kvantiteten $(\phi_I + \phi_D)n_i$ som skall interpoleras över ytan. Integralen evalueras med numerisk kvadratur enligt kap. 4.4. Gauss-Legendre formeln med 9 punkter på ytan används.

5.2 Beräkning av added mass och damping

I vänsterledet på rörelseekvationen finns det två termer a_{ij} och b_{ij} som beror på hydrodynamiken. Dessa kallas added mass och damping. Enligt avsnitt 2.5.3 är dessa båda definierade

$$\text{added mass} \quad a_{jk} = \operatorname{Re} \left\{ \rho \int_{S_0} \phi_j n_k \, dS \right\}$$

$$\text{damping} \quad b_{jk} = \operatorname{Im} \left\{ \rho\omega \int_{S_0} \phi_j n_k \, dS \right\}$$

Om dessa slås ihop kan båda beräknas genom samma integral

$$A_{jk} = (a_{jk} + \frac{i}{\omega} b_{jk}) = \rho \iint_{S_0} \phi_j n_k dS \quad \dots (5.4)$$

Nu kan finita element approximationen sättas in för ϕ_j som ger

$$A_{ij} = \rho \sum_{e \in S} \iint \{N^e\}^T \{\phi_i^e n_j\} dS \quad \dots (5.5)$$

och integralerna (21 st pga symmetrin) lösas på samma sätt som integralerna vid beräkningen av excitationskrafterna.

5.3 Beräkning av rörelserna

Då excitationskraften och added mass och damping matriserna är bekanta kan rörelseekvationerna lösas genom en direkt matrisinvertering. De i rörelseekvationen ingående matriserna m_{ij} och c_{ij} är givna som indata och innehåller de dynamiska och statiska storheter, som behövs för att lösa problemet. Utseendet på m_{ij} och c_{ij} finns beskrivet i avsnitt 2.5.5.

Eftersom problemet är lineariserat och vågorna antas vara harmoniska, gäller detta även för rörelsen. Då kan man anta att

$$\eta_j(t) = \eta_{0j} e^{-i\omega t} \quad \dots (5.6)$$

då ju

$$F_{exj} = F_{0j} e^{-i\omega t} \quad \dots (5.6)$$

Sätter man in detta i rörelseekvationen fås

$$-\omega^2 m_{ij} \eta_{0j} - \omega^2 a_{ij} \eta_{0j} - i\omega b_{ij} \eta_{0j} + c_{ij} \eta_{0j} = F_{0i} \quad \dots (5.7)$$

Med

$$A_{ij} = (a_{ij} + \frac{i}{\omega} b_{ij})$$

erhålls

$$[-\omega^2 (m_{ij} + A_{ij}) + c_{ij}] \eta_{oj} = F_{oi} \quad \dots (5.8)$$

och rörelserna fås ur

$$\eta_{oj} = [-\omega^2 (m_{ij} + A_{ij}) + c_{ij}]^{-1} F_{oi} \quad \dots (5.9)$$

För att få responsen, som beräknas som kvoten mellan rörelsens amplitud och den infallande vågens amplitud, måste absolutbelopp och fas tas fram för η_{oj} .

Absolutbeloppet är

$$Y = [\operatorname{Re}\{\eta_{oj}\}^2 + \operatorname{Im}\{\eta_{oj}\}^2]^{1/2} \quad \dots (5.10)$$

och fasen är

$$\psi = \arctan [\operatorname{Im}\{\eta_{oj}\} / \operatorname{Re}\{\eta_{oj}\}] \quad \dots (5.11)$$

Responsen är nu Y eftersom ϕ_I är definierad så att våghöjden på den infallande vågen är 1 m oberoende om det är fysikaliskt möjligt eller ej.

Y är en funktion av ω och bestäms genom upprepade lösningar för olika frekvenser. Vill man ha responsen för ett särskilt spektrum hos de infallande vågorna, fås denna genom att multiplicera det erhållna responsspektret med spektret för de infallande vågorna.

Som beskrivits i avsnitt 4.2 använder programmet sig av hexaedrisk element med 20 noder. Nodnumreringen ges av följande figur.

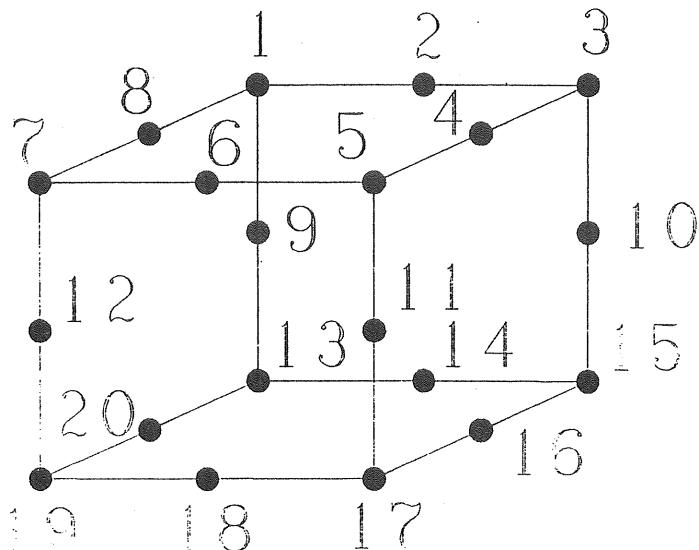


Fig. 6.1 Nodnumrering lokalt

Då många integraler skall beräknas över endast ytor i programmet, måste man ange vilken elementyta, som ligger på de olika geometriska eller fysikaliska ytorna. Detta innebär att de 6 ytorna på elementet har numrerats enligt följande bild.

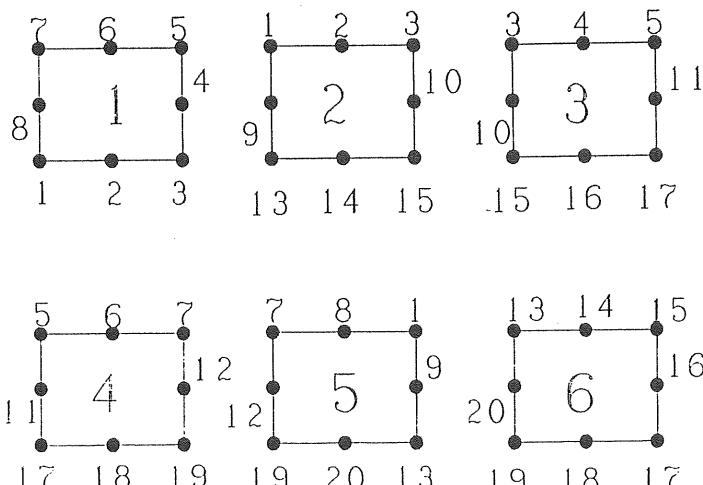


Fig 6.2 Elementytornas numrering, sedda från elementets inre.

Förutom att ange vilka elementytor, som ligger på respektive geometriska eller fysikaliska yta, måste man ange vilka element dessa elementytor tillhör.

Alla elementen måste alltså numreras. För att minska indata-mängden något skall den yta som ligger på vattenytan alltid vara nr 1, skall den yta som ligger på den fiktiva cylindern (S') alltid vara nr 5 och måste den yta som ligger på bottnen vara nr 6. Detta medför att endast ytor som ligger på föremålet måste anges.

Då elementen på respektive yta har specificerats och alla elementytoras nummer angivits skall nodkoordinaterna läsas in. För att kunna göra den isoparametriska avbildningen, matar man in en nodsammanbindningsmatris, som relaterar varje lokal nod (1-20) i elementet med de globala noderna (se fig. 6.3). Detta innebär att de globala noderna också måste numreras. Om detta sker listigt kan bandbredden på matrisen i ekvationssystemet minimeras. Detta kan ske genom att största minus minsta globala nodnumret inom varje element minimeras. Programmet beräknar bandbredden och skriver ut den.

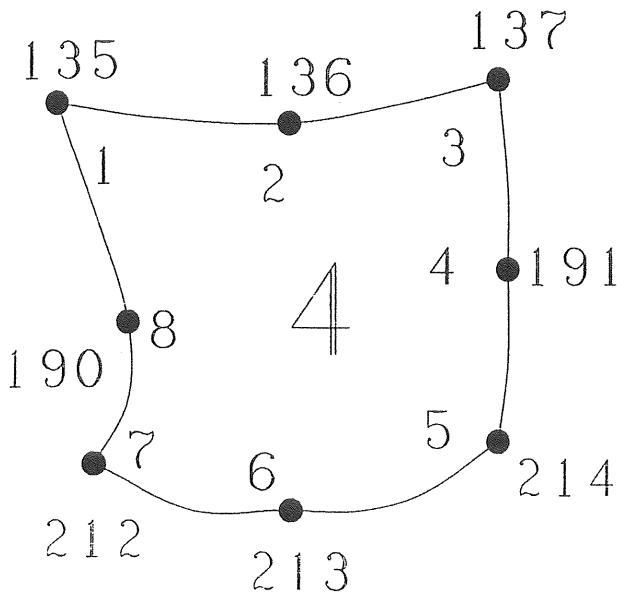


Fig. 6.3 Exempel på nodsammanbindningar i 2 dim. De inre siffrorna anger lokala nummer och de yttersta globala nummer. Den stora siffran anger elementnummer.

Förutom dessa geometriska indata som är förknippade med elementindelningen skall styrvariabler, fysikaliska och dynamiska data matas in.

Styrvariablerna är

- variabel som anger om potentialen i varje nodpunkt skall skrivas ut.
- variabel som anger om koefficienterna i serielösningen skall skrivas ut.

De fysikaliska indata är

- antal vinkelfrekvenser
- vinkelfrekvens hos vågorna
- infallsvinkel för vågorna
- vattendjup

De dynamiska indata är

- massan
- tröghetsmomenten
- vattenlinjearean
- metacentrumhöjderna
- yttröghetsmomenten för vattenlinjearean
- koordinaterna för vattenlinjeareans ytcentrum.
- koordinaterna för föremålets tyngdpunkt

De geometriska indata är

- karakteristisk längd hos föremålet
- superelementradie
- största sjunkdjup hos föremålet
- antal element
- antal noder
- antal element på begränsningsytorna
- identifikation av elementen på begränsningsytorna
- identifikation av elementytorna på begränsningsytorna
- nodkoordinater
- nodsammanbindningar

6.1 Beskrivning av indata kort för kort

Korttyp 1	STYRVARIABLER oformatterade, logiska WRFLG1, WRFLG2 WRFLG1 - anger om lösningarna i nodpunkterna skall skrivas ut, T om de skall skrivas, F om inte WRFLG2 - anger om koefficienterna i serieansatsen skall skrivas ut T om de skall skrivas, F om inte.
Korttyp 2	Antal fall NCASE
Korttyp 3	Dynamiska indata oformatterade reella BMASS, AIMOM, WPLANE, HMETX, HMETY, AJMOM, XC, YC BMASS - massan hos föremålet AIMOM - Tröghetsmomenten I_{11} I_{12} I_{13} I_{21} I_{22} I_{23} I_{31} I_{32} I_{33} i den ordningen WPLANE - vattenlinjearean HMETX - metacenterhöjden vid vriddning HMETY - kring resp. x- och y-axlarna AJMOM - Yttröghetsmomenten J_x , J_y och J_{xy} XC - koordinaterna för vattenlinjeareans YC ytcentrum
Korttyp 4	Geometriska indata oformatterade reella RR, H RR - Superelementets radie H - vattendjup utanför superelementet
Korttyp 5-14	Elementdata oformatterade
Korttyp 5	Antal noder, antal noder på superelement- ytan, Antal element NNOD, NODR, NELE
Korttyp 6	Antal element på superelementytan NB

Korttyp 7	Identifikation av elementen på superelementytan NELEB - vektor NB lång med elementnummer
Korttyp 8	Antal element på vattenytan NS
Korttyp 9	Identifikation av elementen på vattenytan NELES - vektor NS lång med elementnummer
Korttyp 10	Antal element på föremålets yta NFX
Korttyp 11	Identifikation av elementen på föremålets yta. NELEFX - vektor NFX lång med elementnummer
Korttyp 12	Identifikation av elementytor på föremålet FACE vektor NFX lång med ytnummer
Korttyp 13	Nodkoordinator XYZ - X, Y och Z koordinater för resp. noder XYZ är dimensionerad XYZ(3, NNOD)
Korttyp 14	Nodsammanbindningar NCON - globala nodnummer NCON är dimensionerad NCON (20, NELE) första index är lokalt nodnummer och andra index är elementnummer
Korttyp 15	Fysikaliska indata NWK, WAVEF, THETAI NWK - antal egenvärden för varje fall WAVEF - vågfrekvensen för varje fall THETAI - Infallsvinkeln för varje fall
Korttyp 16	Antal koefficienter för varje egenvärde NCOF - Vektor med antalet koefficienter NWK lång

Korttypen 15 och 16 upprepas parvis så många gånger som NCASE
på korttyp 2 anger.

6.2 Exempel på indata

På följande sidor finns ett exempel på indata som används vid körningsexemplet. Indata motsvarar en stående cylinder som här ett sjunkdjup på 0,5 m med en radie av 1 m. Cylindern flyter i vattenytan och vattendjupet är 0,75 m. Antalet element är 84 och antalet noder är 651.

```

//SYSIN DD *
F   F
1
1613.21 1613.210 0. 0. 0. 1613.210 0. 0. 0. 0. 806.605 3.14159 .785398
.785398 .785398 .785398 0. 0. 0. 0. 0. -.60
1.3     .75

651 192 84
48
37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56
57 59 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76
77 78 79 80 81 82 83 84
24
37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59 61 63 65 67 69 71 73 75
77 79 81 83
60
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 39 41 43
45 47 49 51 53 55 57 59 61 63 65 67 69 71 73 75 77 79 81 83
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
0.0 0.0 -0.5000000
0.0 0.0 -0.6000000
0.0 0.0 -0.7500000
0.2500000 0.0 -0.5000000
0.2500000 0.0 -0.7500000
0.2165063 0.1249999 -0.5000000
0.2165063 0.1249999 -0.7500000
0.1250000 0.2165063 -0.5000000
0.1250000 0.2165063 -0.7500000
0.0000000 0.2500000 -0.5000000
0.0000000 0.2500000 -0.7500000
-0.1249999 0.2165063 -0.5000000
-0.1249999 0.2165063 -0.7500000
-0.2165063 0.1250000 -0.5000000
-0.2165063 0.1250000 -0.7500000
-0.2500000 0.0000000 -0.5000000
-0.2500000 0.0000000 -0.7500000
-0.2165063 -0.1249999 -0.5000000
-0.2165063 -0.1249999 -0.7500000
-0.1250000 -0.2165063 -0.5000000
-0.1250000 -0.2165063 -0.7500000
-0.0000000 -0.2500000 -0.5000000
-0.0000000 -0.2500000 -0.7500000
-0.1249999 -0.2165063 -0.5000000
-0.1249999 -0.2165063 -0.7500000
0.2165063 -0.1250000 -0.5000000
0.2165063 -0.1250000 -0.7500000
0.5000000 0.0 -0.5000000
0.5000000 0.0 -0.6000000
0.5000000 0.0 -0.7500000
0.4957224 0.0652631 -0.5000000
0.4957224 0.0652631 -0.7500000
0.4829629 0.1294095 -0.5000000
0.4829629 0.1294095 -0.6000000
0.4829629 0.1294095 -0.7500000
0.4619398 0.1913417 -0.5000000
0.4619398 0.1913417 -0.7500000
0.4330127 0.2499999 -0.5000000
0.4330127 0.2499999 -0.6000000
0.4330127 0.2499999 -0.7500000
0.3966767 0.3043807 -0.5000000
0.3966767 0.3043807 -0.7500000
0.3535534 0.3535534 -0.5000000
0.3535534 0.3535534 -0.6000000
0.3535534 0.3535534 -0.7500000
0.9192389 -0.9192389 -0.7500000
1.0313587 -0.7913899 0.0
1.0313587 -0.7913899 -0.5000000
1.0313587 -0.7913899 -0.7500000
33 36 38 6 1 4 28 31 34 39 2 29 35 37 40 7 3 5 30 32
43 46 48 8 1 6 38 41 44 49 2 39 45 47 50 9 3 7 40 42
53 56 58 10 1 8 48 51 54 59 2 49 55 57 60 11 3 9 50 52
63 66 68 12 1 10 58 61 64 69 2 59 65 67 70 13 3 11 60 62
73 76 78 14 1 12 68 71 74 79 2 69 75 77 80 15 3 13 70 72
83 86 88 16 1 14 78 81 84 89 2 79 85 87 90 17 3 15 80 82
93 96 98 18 1 16 88 91 94 99 2 89 95 97 100 19 3 17 90 92
103 106 108 20 1 18 98 101 104 109 2 99 105 107 110 21 3 19 100 102

```


7. UTDATA

Resultatet från beräkningarna presenteras i form av två matri-
ser och två vektorer. Matriserna är added mass och damping och
vektorerna är generaliserade krafter och responser. Alla ut-
data presenteras i reella enheter dvs ingen normalisering har
gjorts. Momentpunkten har valts till origo dvs centrum på den
cirkel som bildas av den fiktiva cylinderns skärning med lugn-
vattenytan. De komplexa vektorerna presenteras med både real-
och imaginärdel och med belopp och fas. Fasen är tagen rela-
tivt den infallande vågens fas. Responserna är definierade för
translationsmoderna, som amplituden för rörelsen delat med den
infallande vågens amplitud och för vridningsmoderna som vrid-
ningsamplituden delat med våglutningen. Våglutningen är i sin
tur definierad som vågamplituden delat med våglängden.

Förutom dessa huvudresultat kan man få utskrivet potentialens
värden i varje nodpunkt och koefficienterna i serieansatsen
för att t.ex. kunna beräkna våghöjder eller hastighetsvekto-
rer i olika punkter. Dessutom kvitteras alltid indata och de
beräknade värdena på Hankel- och Besselfunktionerna skrivs ut.

7.1 Exempel på utskrift

Utskriften på följande sidor är från en av frekvenserna (0,1
Hz) i körningsexemplet.

00566 *****
 00567 *** CASE 1 ***
 00568 *****
 00569

00570
 00571 WAVE PERIOD, T = 9.9999971

00572	00573	00574	00575	00576 EIGENVALUE NO.	00577 NO. OF COEFFS.	K	K#H	K#R	
00578 -	-	-	00579	1	12	0*232812E+00	0*174609E+00	0*302656E+00	
00580	00581	00582	00583	2	10	0*417594E+01	0*313196E+01	0*542872E+01	
				3	10	0*837117E+01	0*627838E+01	0*108625E+02	
				4	10	0*125621E+01	0*942157E+01	0*163307E+02	
				5	10	0*167520E+02	0*125640E+02	0*217775E+02	
00585									
00586	00587	00588	00589	00590	00591	00592	00593	00594	00595
ARG.	ORDER	M	N	J(KR)	FNORM	H(KR)	REAL PT.	IMAG. PT.	REAL PT.
00596	00597	00598	00599	00600	00601	00602	00603	00604	00605
00606	00607	00608	00609	00610	00611	00612	00613	00614	00615
00616	00617	00618	00619	00620	00621	00622	00623	00624	00625

$\begin{aligned} & 0.268041E-04 \\ & 0.46801E-04 \\ & 0.89225E-04 \\ & 0.172830E-03 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.124559E+01 \\ & 0.124600E+01 \\ & 0.124632E+01 \\ & 0.124952E+01 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & -0.146633E+01 \\ & -0.152312E+01 \\ & -0.15870E+01 \\ & -0.165612E+01 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \end{aligned}$
$\begin{aligned} & 0.200058E-07 \\ & 0.200083E-07 \\ & 0.225515E-07 \\ & 0.261153E-07 \\ & 0.321021E-07 \\ & 0.418137E-07 \\ & 0.576655E-07 \\ & 0.641243E-07 \\ & 0.129685E-06 \\ & 0.211026E-06 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.124403E+01 \\ & 0.124410E+01 \\ & 0.124419E+01 \\ & 0.124443E+01 \\ & 0.124519E+01 \\ & 0.124562E+01 \\ & 0.124621E+01 \\ & 0.124684E+01 \\ & 0.124751E+01 \\ & 0.124817E+01 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & -0.128157E+01 \\ & -0.128354E+01 \\ & -0.129024E+01 \\ & -0.130187E+01 \\ & -0.131748E+01 \\ & -0.133726E+01 \\ & -0.13607E+01 \\ & -0.13899E+01 \\ & -0.141912E+01 \\ & -0.145453E+01 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \end{aligned}$
$\begin{aligned} & 0.142334 \\ & 0.142335 \\ & 0.142336 \\ & 0.142337 \\ & 0.142338 \\ & 0.142339 \\ & 0.142340 \\ & 0.142341 \\ & 0.142342 \\ & 0.142343 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.124629E+01 \\ & 0.124631E+01 \\ & 0.124630E+01 \\ & 0.124656E+01 \\ & 0.124676E+01 \\ & 0.124701E+01 \\ & 0.124736E+01 \\ & 0.124761E+01 \\ & 0.124795E+01 \\ & 0.124831E+01 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & -0.127459E+01 \\ & -0.127587E+01 \\ & -0.127935E+01 \\ & -0.128644E+01 \\ & -0.129505E+01 \\ & -0.130633E+01 \\ & -0.132018E+01 \\ & -0.133623E+01 \\ & -0.135461E+01 \\ & -0.137511E+01 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \end{aligned}$
$\begin{aligned} & 0.142344 \\ & 0.142344 \\ & 0.142344 \\ & 0.142344 \\ & 0.142344 \\ & 0.142344 \\ & 0.142344 \\ & 0.142344 \\ & 0.142344 \\ & 0.142344 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.124629E+01 \\ & 0.124631E+01 \\ & 0.124630E+01 \\ & 0.124656E+01 \\ & 0.124676E+01 \\ & 0.124701E+01 \\ & 0.124736E+01 \\ & 0.124761E+01 \\ & 0.124795E+01 \\ & 0.124831E+01 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & -0.127459E+01 \\ & -0.127587E+01 \\ & -0.127935E+01 \\ & -0.128644E+01 \\ & -0.129505E+01 \\ & -0.130633E+01 \\ & -0.132018E+01 \\ & -0.133623E+01 \\ & -0.135461E+01 \\ & -0.137511E+01 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.000000E+00 \\ & 0.000000E+00 \end{aligned}$

6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 2 2 2 2 0 3 3 3 3 3 3 3 3 3 0 4 4 4 4 4 4 4 4 4

$\begin{aligned} & 0.0626 \\ & 0.0627 \\ & 0.0628 \\ & 0.0629 \\ & 0.0630 \\ & 0.0631 \\ & 0.0632 \\ & 0.0633 \\ & 0.0634 \\ & 0.0635 \\ & 0.0636 \\ & 0.0637 \\ & 0.0638 \\ & 0.0639 \\ & 0.0640 \\ & 0.0641 \\ & 0.0642 \\ & 0.0643 \\ & 0.0644 \\ & 0.0645 \\ & 0.0646 \\ & 0.0647 \\ & 0.0648 \\ & 0.0649 \\ & 0.0650 \\ & 0.0651 \\ & 0.0652 \\ & 0.0653 \\ & 0.0654 \\ & 0.0655 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.746671E-10 \\ & 0.763814E-10 \\ & 0.816128E-10 \\ & 0.913359E-10 \\ & 0.106813E-09 \\ & 0.130543E-09 \\ & 0.166599E-09 \\ & 0.222310E-09 \\ & 0.309486E-09 \\ & 0.449501E-09 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0.124629E+01 \\ & 0.124631E+01 \\ & 0.124630E+01 \\ & 0.124656E+01 \\ & 0.124676E+01 \\ & 0.124701E+01 \\ & 0.124736E+01 \\ & 0.124761E+01 \\ & 0.124795E+01 \\ & 0.124831E+01 \end{aligned}$
--	--	--

```

00656 * * * * * ADDED MASS MATRIX * * *
00657 * * * * * ADDED MASS MATRIX * * *
00658 * * * * * ADDED MASS MATRIX * * *
00659 * * * * * ADDED MASS MATRIX * * *
00660
00661
00662 0.10313E+04 -0.36884E-01 -0.44667E+00 -0.31752E-02 0.10816E+03 -0.98581E-07
00663
00664
00665 -0.17261E-01 0.10312E+04 -0.10839E+01 -0.10806E+03 0.12844E-01 -0.24894E-06
00666
00667
00668 -0.45524E+00 -0.10902E+01 0.56199E+04 0.15712E+01 -0.77602E+00 0.16986E-02
00669
00670
00671 -0.18437E-01 -0.10799E+03 0.15532E+01 0.29840E+03 -0.20301E-01 0.42597E-06
00672
00673
00674 0.10809E+03 0.45408E-02 -0.78311E+00 -0.96393E-02 0.29855E+03 -0.20364E-06
00675
00676
00677 -0.41961E-06 -0.26097E-06 0.16983E-02 0.43212E-06 -0.21779E-06 0.94879E-09
00678
00679
00680
00681
00682

```

```

***** ADDED DAMPING MATRIX ****
*****
00683
00684
00685
00686
00687
00688
00689
00690
00691
00692
00693
00694
00695
00696
00697
00698
00699
00700
00701
00702
00703
00704
00705
00706
00707
00708
00709

```

0 . 37444E+02	-0 . 21979E-02	-0 . 11299E+00	0 . 41375E-03	0 . 71483E+01	-0 . 44037E-07
0 . 61498E-03	0 . 37441E+02	-0 . 35078E+00	-0 . 71425E+01	0 . 14500E-02	-0 . 13129E-06
-0 . 11490E+00	-0 . 37565E+00	0 . 18091E+04	0 . 48739E+00	-0 . 22275E+00	0 . 81084E-03
0 . 11077E-02	-0 . 71406E+01	0 . 47981E+00	0 . 13619E+01	-0 . 46225E-03	0 . 20730E-06
0 . 71457E+01	0 . 13386E-03	-0 . 22156E+00	-0 . 41710E-04	0 . 13638E+01	-0 . 97477E-07
-0 . 58152E-07	-0 . 15680E-06	0 . 81069E-03	0 . 21656E-06	-0 . 99659E-07	0 . 36328E-09

```

00710 **** EXCITING FORCES
00711 ****
00712 ****
00713 ****
00714 ****
00715 ****
00716 ****
00717 ****
00718 X-COMPONENT : REAL PART IMAG. PART ABS. VALUE PHASE VALUE
00721 1 0.127515E+03 -0.588323E+04 0.588461E+04
00723
00724 Y-COMPONENT : REAL PART IMAG. PART ABS. VALUE PHASE VALUE
00725 2 -0.474425E+01 -0.102342E+00 0.474535E+01
00726
00727
00728
00729
00730 Z-COMPONENT : REAL PART IMAG. PART ABS. VALUE PHASE VALUE
00731 3 0.288741E+05 -0.162907E+04 0.289200E+05
00732
00733
00734
00735 ROLL MOMENT : REAL PART IMAG. PART ABS. VALUE PHASE VALUE
00736
00737 4 0.755057E+01 -0.204329E+00 0.755333E+01
00738
00739
00740 PITCH MOMENT : REAL PART IMAG. PART ABS. VALUE PHASE VALUE
00741
00742 5 0.211352E+02 -0.112230E+04 0.112250E+04
00743
00744
00745
00746 YAW MOMENT : REAL PART IMAG. PART ABS. VALUE PHASE VALUE
00747
00748 6 0.129396E-01 -0.727811E-03 0.129601E-01
00749
00750
00751
00752
00753
00754

```

			REAL PART	IMAG. PART	ABS. VALUE	PHASE VALUE
00755	***** MOTIONS ***					
00756	*** MOTIONS ***					
00757	*** MOTIONS ***					
00758	*** MOTIONS ***					
00759						
00760						
00761						
00762						
00763	SURGE :		REAL PART	IMAG. PART	ABS. VALUE	PHASE VALUE
00766						
00766		1				
00767						
00768						
00769						
00770	SWAY :		REAL PART	IMAG. PART	ABS. VALUE	PHASE VALUE
00772						
00773		2				
00774						
00775						
00776	HEAVE :		REAL PART	IMAG. PART	ABS. VALUE	PHASE VALUE
00778						
00779		3				
00780						
00781						
00782	ROLL :		REAL PART	IMAG. PART	ABS. VALUE	PHASE VALUE
00784						
00785		4				
00786						
00787						
00788	PITCH :		REAL PART	IMAG. PART	ABS. VALUE	PHASE VALUE
00790						
00791		5				
00792						
00793						
00795	YAW :		REAL PART	IMAG. PART	ABS. VALUE	PHASE VALUE
00796						
00797		6				

8. KÖRNINGSEXEMPEL OCH JÄMFÖRELSE MED ANALYTISK LÖSNING

Som körningsexempel har valts en enkel geometri som det finns analytiska lösningar till. Geometrin är en stående cylinder som flyter i vattenytan. Cylinderns diameter är 1 m och dess sjunkdjup 0.5 m. Vattendjupet har varit 0.75 m. Den analytiska lösningsmetoden finns beskriven i Yeung (1981), Garret (1971) och Johansson (1986, 1989). I tabell 1 finns added mass, dämpning och exciterande kraft som de beräknas av programmet och motsvarande analytiska resultat listade. I tabellen finns också de absoluta och de relativia felen listade. Körningar har gjorts för sex olika vågperioder nämligen 10., 3.33, 2., 1.43, 1.11 och 0.91 sekunder. Det framgår av tabellen att de termer som är svårast att beräkna med hybridelementmetoden är koppelingstermer mellan heave och pitch samt i vissa fall pitchtermerna. Man kan emellertid se att de termer som har stora relativia fel är relativt sett mycket mindre än de övriga termerna i respektive added mass och dämningssmatriserna. De stora felet i små värden beror på metoden att räkna fram dem.

Metoden innebär en summering av alla bidrag från elementytorna på föremålet (se kap. 5.2). Detta medför att många termer adderas till varandra. I de fall då värdet är litet adderas positiva och negativa termer så att de nästan tar ut varandra vilket medför ett större relativt fel. Om man då istället relativar felet i varje element till det absolut sett största värdet i respektive matris och exciterande kraftvektorn blir alla felet mindre än 10%. Ett annat sätt att få reda på hur stor betydelse felet har är att helt enkelt lösa rörelseekvationerna för cylindern med värdena från programmet som indata och jämföra med motsvarande beräkning då värdena från den analytiska lösningen används som indata. I tabell 2 finns denna jämförelse listad. Ur denna tabell framgår att alla relativia fel i rörelserna är mindre än 10% utom för heave-rörelsen vid perioden 0,91 sekunder. Vid denna period är emellertid rörelsen försumbar (0,004).

Tabell 1 Jämförelse mellan HEMWAVE-resultat och analytisk lösning

T = 0.909 s

	HEMWAVE	Analytiskt	Abs.fel	Rel.fel %
A ₁₁	91.27	89.29	1.98	2.22
A ₃₃	3221.	3341	-120	-3.59
A ₅₅	283.0	306.5	-23	-7.66
A ₅₁	6.32	-2.32	8.64	-
B ₁₁	1673.	1562.	110.	7.1
B ₃₃	171.5	108.1	63.	58.6
B ₅₅	3.51	9.28	-5.77	62.2
B ₅₁	-76.6	-120.2	-43.6	-36.3
F ₁	4422.	4302	120.	2.79
F ₃	998.	800.	197	24.7
F ₅	207. *	331.	-124	-37.5

T = 1.11 s

	HEMWAVE	Analytiskt	Abs.fel	Rel.fel %
A ₁₁	107.2	101.4	5.8	5.7
A ₃₃	3053	3165.	-112	-3.53
A ₅₅	282.0	305.8	-23.8	-7.8
A ₅₁	-16.98	-27.29	-10.31	-37.8
B ₁₁	2219	2196.	22	1.03
B ₂₃	683.9	625.3	58.6	9.37
B ₅₅	0.1	1.12	1.02	91
B ₅₁	-14.50	-48.72	34.22	70.2
F ₁	7024	7005.	19	0.3
F ₃	2758	2643.	115	4.35
F ₅	47.25	155.41	-108.15	69.6

T = 1.43 s

	HEMWAVE	Analytiskt	Abs.fel	Rel.fel %
A_{11}	242.9	241.7	1.2	0.5
A_{33}	2877.	2981.	-104.	-3.48
A_{55}	278.2	301.7	-23.5	-7.79
A_{51}	-32.07	-43.88	11.81	26.9
B_{11}	2615.	2631.	16.	0.61
B_{33}	1951.	1933.	17.	0.92
B_{55}	10.93	8.30	2.63	31.7
B_{51}	168.9	147.7	21.2	14.3
F_1	11299	11346.	-47	-0.41
F_3	6899	6876.	23	0.33
F_5	729.5	637.1	92.4	14.5

T = 2.0 s

	HEMWAVE	Analytiskt	Abs.fel	Rel.fel %
A_{11}	589.4	592.4	-3.04	-0.01
A_{33}	2929.	3026.	-97.6	-3.23
A_{55}	279.7	302.5	-22.8	-7.5
A_{51}	5.896	-7.223	13.12	-
B_{11}	2267.	2213.	-26.	-1.16
B_{33}	3257.	3276.	-19.	0.60
B_{55}	38.27	35.12	3.14	8.96
B_{51}	294.3	284.0	10.33	3.64
F_1	15936.	16032.	-96.	-0.60
F_3	13502.	13548.	-46	-0.34
F_5	2069.	1985.	84.	4.26

T = 3.333 s

	HEMWAVE	Analytiskt	Abs.fel	Rel.fel %
A ₁₁	1024.	1037.	-13.	-1.25
A ₃₃	3487.	3580.	-93.	-2.59
A ₅₅	293.9	316.2	-22.	-7.01
A ₅₁	92.33	79.21	13.	16.56
B ₁₁	907.2	924.4	-17.3	-1.86
B ₃₃	3514.	3571	-57.2	-1.60
B ₅₅	26.67	25.57	1.09	4.3
B ₅₁	155.5	153.8	1.7	1.09
F ₁	15404.	15560.	-156.	-1.00
F ₃	21434	21624	-190.	-0.88
F ₅	2642.	2589	53.	2.06

T = 10. s

	HEMWAVE	Analytiskt	Abs.fel	Rel.fel %
A ₁₁	1031.	1048.	-17	-1.62
A ₃₃	5620.	5749.	-129	-2.24
A ₅₅	298.5	320.7	-22.2	-6.92
A ₅₁	108.2	96.1	12.1	12.6
B ₁₁	37.44	38.19	-0.75	-1.97
B ₃₃	1809.	1884.	-75.	-4.01
B ₅₅	1.36	1.32	0.04	3.03
B ₅₁	7.15	7.11	0.04	0.56
F ₁	5885.	5946.	-61.	-1.03
F ₃	28920.	29530.	-610.	-2.07
F ₅	1122.	1106.	16.	1.45

Symbolförläring:

A_{11} added mass i sway
 A_{33} added mass i heave
 A_{55} added mass i pitch
 A_{51} kopplad added mass mellan pitch och heave

B som A men dämpning i stället för added mass

F_1 exiterande kraft i sway
 F_3 exiterande kraft i heave
 F_5 exiterande moment i pitch

Tabell 2 Jämförelse mellan lösning av rörelseekvationerna med data från HEMWAVE och analytiska data

Per.	HEMWAVE			Analytiskt		
	x1	x3	x5	x1	x3	x5
10.0	5.62	1.004	0.152	5.64	1.026	0.153
3.33	1.534	1.423	0.761	1.537	1.460	0.776
2.00	0.815	0.809	0.813	0.818	0.775	0.791
1.43	0.329	0.123	0.143	0.331	0.119	0.140
1.11	0.133	0.021	0.038	0.134	0.022	0.041
0.91	0.058	0.005	0.017	0.057	0.004	0.018

Relativt fel (%)

Per.	x1	x3	x5
10.0	-0.4	-2.1	-0.7
3.33	-0.2	-2.3	-1.9
2.00	-0.4	4.4	2.8
1.43	-0.6	3.4	2.1
1.11	-0.7	-4.1	-6.6
0.91	1.6	25.0	-7.8

9. AVSLUTNING

Den här beskrivna metoden är användbar för beräkning av rörelsen hos ett flytande föremål. I en enklare variant kan den också användas för beräkning av vattenvågors diffraction runt fixa föremål såsom små örar eller fundament till konstruktioner som står på botten. Metoden kan användas då bottenvariationer förekommer i kombination med ett flytande föremål. Så som metoden implementeras här är indatagenereringen väldigt arbetsam men det kan förmögligen avhjälpas med en av de många pre-processorer till vanliga FEM-program. Om det rör sig om att beräkna rörelsen för ett flytande föremål, då bottnen är slät och horisontell, finns det ett flertal andra användbara metoder där indatagenereringen är enklare. Det skall emellertid sägas att det inte på förhand är givet att någon av dessa metoder är noggrannare eller snabbare än den här beskrivna metoden. Undantaget är analytiska lösningar, men sådana finns bara i ett fåtal fall. En fördel med hybridelementmetoden är att inga "spök"-frekvenser uppträder som kan vara fallet med panel eller källfördelningsmetoder. En möjlig fördel med metoden är att för en elementmetod som den här beskrivna ökar antalet obekanta i ekvationssystemet med volymen, medan det för panelmetoder gäller att antalet obekanta ökar med antalet föremål och föremålets våta ytas komplexitet. Det kan innebära att vid många föremål och föremål med komplex geometri är hybridelementmetoden snabbare och mindre minneskrävande än en panelmetod. Ytterligare en sak som kan vara till hybridelementmetodens fördel är att matriserna i de ekvationssystem som skall lösas är bandade, medan de för panelmetoder är fulla. Genom att optimera nodnumreringen kan bandbredden hållas förhållandevis liten hos matrisen. Det är troligt att om arbete läggs ned på pre- och postprocessorer till hybridelementmetoden kan den konkurrera eller komplettera panelmetoderna, åtminstone i vissa fall.

10. SYMBOLLISTA

A	Infallande vågens amplitud
A_{ij}	Komplex tilläggsmassa och dämpningsmatris
a_{ik}	Tilläggsmassmatris
a_o	Amplituden på infallande vågen
B	Bottenytan inom området för finit elementindelning
b_{ik}	Dämpningsmatris
$b(S), h(S)$	Randvillkor
C_{ij}	Hydrostatisk styvhetsmatris
e	Superfix e anger att kvantiteten gäller i ett element
F_i	Exciterande krafter
F	Vattenytan inom området för finit elementindelning
F_i, \bar{F}	Masskrafter på fluidelement
f	Funktion
g	Gravitationsaccelerationen
$g(S), \sigma(S)$	Randvillkor
H_1	Metacenterhöjd vid krängning kring \bar{y} -axeln
H_2	Metacenterhöjd vid krängning kring \bar{x} -axeln
h	Vattendjup
I_1	Vattenlinjeareans yttröghetsmoment m.a.p. x-axeln
I_2	Vattenlinjeareans yttröghetsmoment m.a.p. y-axeln
I_{12}	Vattenlinjeareans deviationströghetsmoment
J	Jakobianen
K_i	Matris med hydrostatiska krafter, excitationskrafter, tilläggsmassa och dämpning
K_v, K_D, K_C	Matriser i finita elementformuleringen
k	Vågtalet, Vågvektorn
k_o	Vågvektorns belopp
M_n	Antal noder i element
M_v	Antalet element i volymen
M_i	Exciterande moment
M_{ij}	Matris med massa och tröghetstensorn
N_i	Interpolationsfunktioner
n_i	Normalvektor till yta

p	Trycket i fluiden
Q_c, Q_p	Vektorer i finita elementformuleringen
r	Horisontella avståndet från origo
S'	Cylindrisk yta som begränsar området för finit elementindelning
S_o	Föremålets yta
S	Integrationsyta
U_n	Normalkomponenten av hastighet
u_i, \bar{u}	Fluidens hastighetsvektor
V	Integrationsvolym
V	Föremåls displacementsvolym
v_p	Fashastigheten hos vågen
v_h	Ytas hastighet i normalriktningen
v_g	Grupphastigheten hos vågen
W	Föremåls vattenlinjearea
x_i	Exciterande krafter och moment
\bar{x}_b	Lyftkraftens angreppspunkts \bar{x} -koordinat
x	Rymdfast x -koordinat
\bar{x}	Kroppsfast x -koordinat
x_c	Vattenlinjeareans tyngdpunkts x -koordinat
y	Rymdfast y -koordinat
\bar{y}	Kroppsfast y -koordinat
y_c	Vattenlinjeareans tyngdpunkts y -koordinat
\bar{z}_b	Lyftkraftens angreppspunkts \bar{z} -koordinat
z	Rymdfast z -koordinat
\bar{z}	Kroppsfast z -koordinat
α	Vridning runt x -axeln
β	Vridning runt y -axeln
γ	Vridning runt z -axeln
ϵ_{ijk}	Permutationssymbol
η_i	Föremåls rörelse i mod i
η	Funktion som beskriver vattenytan $\eta(x,y,t)$
η^c	Komplex tidsberoende rörelse
η_{oj}	Tidsberoende komplex rörelse i mod j

\emptyset	Hastighetspotentialen
\emptyset_I, \emptyset_O	Infallande vågens potential
\emptyset_S, \emptyset_7	Spridda vågens potential
\emptyset_R	Utstrålade vågens potential
\emptyset_k	Utstrålade vågens potential i resp. rörelsemot
ϕ	Tidsberoende potential
ϕ^c	Komplex tidsberoende potential
ϕ	Obekanta nodpotentialer i finitelementformuleringen
λ	Våglängden
μ	Obekanta koefficienter i serieutvecklingen
ν	Viskositeten
ρ	Densiteten
τ_{ij}	Spänningstensorn
ω	Vinkelfrekvensen
Ω	Masskrafternas potential
ξ	Funktion som beskriver vattenytan $\xi(x, y, z, t)$
ξ, η, ζ	Lokala koordinater i element
ψ	Sammanslagning av obekanta i finita elementformu- leringen
Δ, ∇, L	Differentialoperatorer
$\langle f, g \rangle$	Skalärprodukt mellan funktioner
'	Anger att kvantiteten gäller utanför området för finita elementindelningen
\iiint	Volymintegral
\iint	Ytintegral

11. REFERENSLISTA

- Chakrabarti, S.K. (1987): Hydrodynamics of offshore structures. Computational Mechanics Publications, Southampton.
- Garret, C.J.R. (1971): Wave forces on a circular dock. J. Fluid Mech., Vol. 46.
- Havelock, T. (1955): Waves due to a floating sphere making periodic heaving oscillations, Proc. R. Soc., Vol. 231.
- Johansson, M. (1986): Transient Motions of Large Floating Structures. Dept. of Hydraulics, Chalmers University of Technology, Report Series A:14.
- Johansson, M. (1989): Barrier-Type Breakwaters, transmission, reflection and forces. Dept. of Hydraulics, Chalmers University of Technology, Report Series A:19.
- Mei, C.C. (1978): Numerical methods in water wave diffraction and radiation. Ann. Rev. Fluid. Mech. 10.
- Mei, C.C. (1983): The applied dynamics of ocean surface waves. Wiley-Interscience Publication.
- Newman, J.N. (1977): Marine hydrodynamics. MIT Press.
- Wehausen, J.V. (1971): The motion of floating bodies. Annual Rev. Fluid. Mech., Vol. 3.
- Yeung, R.V. (1971): Added mass and damping of a vertical cylinder of finite depth water. Applied Ocean Research, Vol. 3, No 3.
- Yue, D.K.P. m.fl. (1976): A hybrid element method for calculating three-dimensional water wave scattering. Ralph M. Parsons laboratory for water resources and hydrodynamics. Report No. 215.

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för vattenbyggnad

Report Series A

- A:1 Bergdahl, L.: Physics of ice and snow as affects thermal pressure. 1977.
- A:2 Bergdahl, L.: Thermal ice pressure in lake ice covers. 1978.
- A:3 Häggström, S.: Surface Discharge of Cooling Water. Effects of Distortion in Model Investigations. 1978.
- A:4 Sellgren, A.: Slurry Transportation of Ores and Industrial Minerals in a Vertical Pipe by Centrifugal Pumps. 1978.
- A:5 Arnell, V.: Description and Validation of the CTH–Urban Runoff Model. 1980.
- A:6 Sjöberg, A.: Calculation of Unsteady Flows in Regulated Rivers and Storm Sewer Systems. 1976.
- A:7 Svensson, T.: Water Exchange and Mixing in Fjords. Mathematical Models and Field Studies in the Byfjord. 1980.
- A:8 Arnell, V.: Rainfall Data for the Design of Sewer Pipe Systems. 1982.
- A:9 Lindahl, J., Sjöberg, A.: Dynamic Analysis of Mooring Cables. 1983.
- A:10 Nilsdal, J–A.: Optimeringsmodellen ILSD. Beräkning av topografins inverkan på ett dagvattensystems kapacitet och anläggningskostnad. 1983.
- A:11 Lindahl, J.: Implicit numerisk lösning av rörelseekvationerna för en förankringskabel. 1984.
- A:12 Lindahl, J.: Modellförsök med en förankringskabel. 1985.
- A:13 Lyngfelt, S.: On Urban Runoff Modelling. The Application of Numerical Models Based on the Kinematic Wave Theory. 1985.
- A:14 Johansson, M.: Transient Motions of Large Floating Structures. 1986.
- A:15 Mårtensson, N., Bergdahl, L.: On the Wave Climate of the Southern Baltic. 1987.
- A:16 Moberg, G.: Wave Forces on a Vertical Slender Cylinder. 1988.
- A:17 Perrusquía González, G.S.: Part–Full Flow in Pipes with a Sediment Bed. Part one: Bedform dimensions. Part two: Flow resistance. 1988.
- A:18 Nilsdal, J–A.: Bedömning av översvämningsrisken i dagvattensystem. Kontrollberäkning med typregn. 1988.
- A:19 Johansson, M.: Barrier–Type Breakwaters. Transmission, Reflection and Forces. 1989.
- A:20 Rankka, W.: Estimating the Time to Fatigue Failure of Mooring Cables. 1989.
- A:21 Olsson, G.: Hybridelementmetoden, en metod för beräkning av ett flytande föremåls rörelse. 1990.

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för vattenbyggnad

Report Series B

- B:1 Bergdahl, L.: Beräkning av vågkrafter. (Ersatts med 1979:07) 1977.
- B:2 Arnell, V.: Studier av amerikansk dagvattenteknik. 1977.
- B:3 Sellgren, A.: Hydraulic Hoisting of Crushed Ores. A feasibility study and pilot—plant investigation on coarse iron ore transportation by centrifugal pumps. 1977.
- B:4 Ringesten, B.: Energi ur havsströmmar. 1977.
- B:5 Sjöberg, A., Asp, T.: Brukar—anvisning för ROUTE-S. En matematisk modell för beräkning av icke-stationära flöden i floder och kanaler vid strömmande tillstånd. 1977.
- B:6 Annual Report 1976/77. 1977.
- B:7 Bergdahl, L., Wernersson, L.: Calculated and Expected Thermal Ice Pressures in Five Swedish Lakes. 1977.
- B:8 Göransson, C-G., Svensson, T.: Drogue Tracking – Measuring Principles and Data Handling. 1977.
- B:9 Göransson, C-G.: Mathematical Model of Sewage Discharge into confined, stratified Basins – Especially Fjords. 1977.
- B:10 Arnell, V., Lyngfelt, S.: Beräkning av dagvattenavrinning från urbana områden. 1978.
- B:11 Arnell, V.: Analysis of Rainfall Data for Use in Design of Storm Sewer Systems. 1978.
- B:12 Sjöberg, A.: On Models to be used in Sweden for Detailed Design and Analysis of Storm Drainage Systems. 1978.
- B:13 Lyngfelt, S.: An Analysis of Parameters in a Kinematic Wave Model of Overland Flow in Urban Areas. 1978.
- B:14 Sjöberg, A., Lundgren, J., Asp, T., Melin, H.: Manual för ILLUDAS (Version S2). Ett datorprogram för dimensionering och analys av dagvattensystem. 1979.
- B:15 Annual Report 1978/79. 1979.
- B:16 Nilsdal, J-A., Sjöberg, A.: Dimensionerande regn vid höga vattenstånd i Göta älv. 1979.
- B:17 Stöllman, L-E.: Närkes Svartå. Hydrologisk inventering. 1979.
- B:18 Svensson, T.: Tracer Measurements of Mixing in the Deep Water of a Small, Stratified Sill Fjord. 1979.
- B:19 Svensson, T., Degerman, E., Jansson, B., Westerlund, S.: Energiutvinning ur sjö- och havssediment. En förstudie. R76:1980. 1979.
- B:20 Annual Report 1979. 1980.
- B:21 Stöllman, L-E.: Närkes Svartå. Inventering av vattentillgång och vattenanvändning. 1980.

Report Series B

- B:22 Häggström, S., Sjöberg, A.: Effects of Distortion in Physical Models of Cooling Water Discharge. 1979.
- B:23 Sellgren, A.: A Model for Calculating the Pumping Cost of Industrial Slurries. 1981.
- B:24 Lindahl, J.: Rörelseekvationen för en kabel. 1981.
- B:25 Bergdahl, L., Olsson, G.: Konstruktioner i havet. Vågkrafter–rörelser. En inventering av datorprogram. 1981.
- B:26 Annual Report 1980. 1981.
- B:27 Nilsdal, J.-A.: Teknisk–ekonomisk dimensionering av avloppsledningar. En litteraturstudie om datormodeller. 1981.
- B:28 Sjöberg, A.: The Sewer Network Models DAGVL–A and DAGVL–DIFF. 1981.
- B:29 Moberg, G.: Anläggningar för oljeutvinning till havs. Konstruktionstyper, dimensioneringskriterier och positioneringssystem. 1981.
- B:30 Sjöberg, A., Bergdahl, L.: Förankringar och förankringskrafter. 1981.
- B:31 Häggström, S., Melin, H.: Användning av simuleringsmodellen MITSIM vid vattenresursplanering för Svartån. 1982.
- B:32 Bydén, S., Nielsen, B.: Närkes Svartå. Vattenöversikt för Laxå kommun. 1982.
- B:33 Sjöberg, A.: On the stability of gradually varied flow in sewers. 1982.
- B:34 Bydén, S., Nyberg, E.: Närkes Svartå. Undersökning av grundvattenkvalitet i Laxå kommun. 1982.
- B:35 Sjöberg, A., Mårtensson, N.: Regnenveloppmetoden. En analys av metodens tillämplighet för dimensionering av ett 2–års perkolationsmagasin. 1982.
- B:36 Svensson, T., Sörman, L.-O.: Värmeupptagning med bottenförlagda kylslangar i stillastående vatten. Laboratorieförsök. 1982.
- B:37 Mattsson, A.: Koltransporter och kolhantering. Lagring i terminaler och hos storförbrukare. (Delrapport). 1983.
- B:38 Strandner, H.: Ett datorprogram för sammankoppling av ILLUDAS och DAGVL–DIFF. 1983.
- B:39 Svensson, T., Sörman, L.-O.: Värmeupptagning med bottenförlagda slangar i rinnande vatten. Laboratorieförsök. 1983.
- B:40 Mattsson, A.: Koltransporter och kolhantering. Lagring i terminaler och hos storförbrukare. Kostnader. Delrapport 2. 1983.
- B:41 Häggström, S., Melin, H.: Närkes Svartå. Simuleringsmodellen MITSIM för kvantitativ analys i vattenresursplanering. 1983.
- B:42 Hård, S.: Seminarium om miljöeffekter vid naturvärmesystem. Dokumentation sammanställd av S. Hård, VIAK AB. BFR–R60:1984. 1983.
- B:43 Lindahl, J.: Manual för MODEX–MODIM. Ett datorprogram för simulering av dynamiska förlopp i förankringskablar. 1983.

Report Series B

- B:44 Activity Report. 1984.
- B:45 Sjöberg, A.: DAGVL–DIFF. Beräkning av icke–stationära flödesförlopp i helt eller delvis fyllda avloppssystem, tunnlar och kanaler. 1984.
- B:46 Bergdahl, L., Melin, H.: WAVE FIELD. Manual till ett program för beräkning av ytvattenvågor. 1985.
- B:47 Lyngfelt, S.: Manual för dagvattenmodellen CURE. 1985.
- B:48 Perrusquía, G., Lyngfelt, S., Sjöberg, A.: Flödeskapacitet hos avloppsledningar delvis fyllda med sediment. En inledande experimentell och teoretisk studie. 1986.
- B:49 Lindahl, J., Bergdahl, L.: MODEX–MODIM. User's Manual. 1987.
- B:50 Mårtensson, N.: Dynamic Analysis of a Moored Wave Energy Buoy. 1988.
- B:51 Lyngfelt, S.: Styrning av flöden i avloppssystem. Begrepp – Funktion – FoU–Behov. 1989.