Institutionen för vattenbyggnad
Chalmers Tekniska Högskola

Department of Hydraulics
Chalmers University of Technology

# Implicit numerisk lösning av rörelseekvationerna för en förankringskabel

av

Jan Lindahl

Report
Series A:11
ISSN 0348-1050

Göteborg 1984

---

Address: Department of Hydraulics
Chalmers University of Technology
S-412 96 Göteborg, Sweden

Telephone: 031/81 01 00

VASASTADENS BOKBINDERI AB
GÖTEBORG 1984

# FÖRORD

Det forskningsarbete, som presenteras i denna rapport, har utförts vid Institutionen för Vattenbyggnad, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg.

Studien behandlar beräkningsmetoder för att studera dynamiska förlopp i förankringskablar. Denna studie är en fortsättning av ett arbete som presenterats i en tidigare rapport [1]. Arbetet är att betrakta som ett delprojekt till projektet "Konstruktioner i havet, vågkrafter - rörelser" som delvis finansierats av Styrelsen för teknisk utveckling, STU.

Till alla mina kolleger vid institutionen, som har varit mig till stor hjälp, riktas ett hjärtligt tack. Speciellt vill jag tacka mina handledare Professor Anders Sjöberg och Dr. Lars Bergdahl för deras uppmuntran och stöd.

Göteborg i november 1984

Jan Lindahl

SAMMANFATTNING

En finit element modell för beräkning av den dynamiska responsen hos förankringskablar presenteras. Modellen tar hänsyn till kabelns elasticitet, tröghetskrafter, släpkrafter och krafter som uppträder vid kontakt med havsbottnen.

En tidsintegration med implicit metod presenteras i föreliggande rapport. En explicit lösning har presenterats av författaren 1983 och denna lösning har här kompletterats med intern dämpning och longitudinell bottenfriktion. Jämförelsen görs mellan de två lösningarna.

I båda lösningarna transformeras rörelseekvationerna till ordinära differentialekvationer med hjälp av virtuella arbetets princip. Kabeln delas in i element som sammanbindes i noder. För varje nod formuleras de diskretiserade rörelseekvationerna med nodens förskjutning som beroende variabel. Vissa små ändringar har gjorts i rörelseekvationerna för att anpassa dessa till den implicita tidsintegrationen,som genomförs med Newmarks differensmetod.

Trots att de fysikaliska modellerna inte är identiska i de två lösningarna, ger dessa ungefär samma resultat för fall utan slack. Skillnaderna mellan modellerna rör kontaktkrafterna mellan kabeln och havsbottnen och formuleringen av de interna krafterna i kabeln.

Den största skillnaden mellan modellerna rör fall med slacka kablar. I den explicita lösningen sätts kabelkrafter till noll, om kabeln utsätts för tryckkrafter, men i den implicita lösningen tillåts kabeln ta upp tryckkrafter. Förloppet i de två beräkningarna blir således inte lika. Ett beräkningsfall visar dock att den maximala dragkraften blir grovt sett lika.

I den implicita lösningen kan mycket större tidssteg användas än i den explicita lösningen. Den implicita lösningen medför dock många fler beräkningar för varje tidssteg. Beräkningsexempel visar att lösningarna ger i stort sett samma beräkningstider i datorn.

SUMMARY

A finite element model for calculation of dynamic response of mooring cables is presented. The model takes into account the elasticity of the cable, inertia forces, drag forces and forces due to the contact with the sea bottom.

An implicit time integration solution is presented in this report. An explicit solution was presented in 1983 by the author and this is here completed with internal damping and longitudinal bottom friction forces. Comparisons are made between the two solutions.

In both solutions the equations of motion are transformed into ordinary differential equations by means of the principle of virtual work. The cable is decomposed into elements connected by nodes. For each node the discretized equations of motion are formulated with the displacement of the node as dependent variable. Certain small modifications have been made in the equations of motion in order to suit the implicit time integration, which is performed with Newmark´s difference method.

In spite of the fact that the mechanical models are not identical in the two solutions they give approximately the same results for cases without slack. The differences of the models concern the contact forces between the cable and the sea bottom and the formulation of the internal forces in the cable.

The greatest difference concerns cases with slack cables. In the explicit solution the cable force is set to nil, if the cable is compressed, but in the implicit solution the cable is allowed to carry compressive forces. Thus the courses of calculations are not the same. A sample calculation shows that the maximum forces are roughly equal in spite of this.

In the implicit solution much longer time increments can be used than in the explicit solution. The implicit solution involves, however, many more calculations for each time increment. Sample calculations show that the processing times of the computer are approximately equal for the two solutions.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

| | | sid. |
|---|---|---|
| | FÖRORD | I |
| | SAMMANFATTNING | II |
| | SUMMARY | III |
| | INNEHÅLLSFÖRTECKNING | V |
| | SYMBOLER | VI |
| 1. | INLEDNING | 1 |
| 2. | GRUNDLÄGGANDE EKVATIONER | 3 |
| 2.1 | Inledning | 3 |
| 2.2 | Repetition av grundläggande ekvationer | 3 |
| 2.3 | Definition av förskjutningsvariabler och referens-konfiguration (R) vid tidsberoende förlopp | 6 |
| 2.4 | Krafter vid kontakt mellan kabel och havsbotten | 7 |
| 2.5 | De fullständiga ekvationerna | 9 |
| 3. | NUMERISK LÖSNING | 10 |
| 3.1 | Inledning | 10 |
| 3.2 | Diskretisering i rummet | 10 |
| 3.3 | Linjärisering av ekvationerna | 14 |
| 3.4 | Inverkan av randvillkor | 17 |
| 3.5 | Diskretisering i tidsplanet | 18 |
| 3.6 | Lösning av de icke linjära algebraiska ekvationerna | 21 |
| 3.7 | Jämviktsekvationerna och deras numeriska lösning | 23 |
| 4. | BERÄKNINGSEXEMPEL | 26 |
| 4.1 | Inledning | 26 |
| 4.2 | Förskjutningsexciterad kabel i en ström | 26 |
| 4.3 | Förskjutningsexciterad förankringskabel | 34 |
| 4.4 | Förskjutningsexciterad förankringskabel, studier av konvergens | 41 |
| 4.5 | En hängande kabel påverkad av en ström | 44 |
| | REFERENSER | 46 |
| | APPENDIX 1: Kabelns inre dämpning vid explicit metod | 47 |
| | APPENDIX 2: Modell för friktion mellan kabel och havsbotten i den explicita metoden | 48 |

SYMBOLER

| Symbol | Definition |
| --- | --- |
| $\underline{\underline{A}}$ | Matris som innehåller interpolationsfunktioner |
| A | Amplitud |
| $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ | Matris som innehåller modifierade interpolationsfunktioner |
| (A) | Kabelns aktuella okända läge |
| $A_o$ | Kabelns tvärsnittsarea |
| $\underline{\underline{B}}$ | $= \dfrac{\partial \underline{\underline{A}}}{\partial \xi_j}$ |
| b | Kabelns nedsjunkning under havsbottnens nivå p.g.a. tyngdkrafter och hydrostatiska krafter |
| $C_{MN}$ | Koefficienten för den adderade, hydrodynamiska massan |
| $C_{DN}$ | Släpkraftskoefficienten för strömning i kabelns normalled |
| $C_{DT}$ | Släpkraftskoefficienten för strömning i kabelns tangentialled |
| $C_4$ | $= C_{MN} \dfrac{\pi d_o^2}{4} \rho_v$ |
| $C_3$ | $= \dfrac{1}{2} C_{DN} d_o \rho_v$ |
| $C_2$ | $= \dfrac{1}{2} C_{DT} d_o \rho_v$ |
| $\underline{\underline{C}}_b$ | Kabelns dämpningsmatris p.g.a. kontakt med havsbottnen |
| $\underline{\underline{C}}$ | Globala dämpningsmatrisen p.g.a. kontakt med havsbottnen |
| $\underline{\underline{C}}_{bj}$ | Elementets dämpningsmatris p.g.a. kontakt med havsbottnen |
| c | Kabelns dämpkonstant p.g.a. inre friktion, se ekv. (A.2). Alternativt $= 2\gamma_o \sqrt{s/\gamma_o}$ havsbottnens dämpning |
| $c_c$ | $= c/A_o$ där c är kabelns dämpkonstant |
| $c_v$ | Hastighetstolerans i friktionsmodellen se fig. A.1 |
| $\underline{\underline{C}}_j$ | Identifieringsmatris |
| $d_o$ | Kabelns karakteristiska diameter relaterad till en cirkulär cylinder |
| $\underline{\underline{D}}_1$ | $= \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}}$ |
| $\underline{\underline{D}}_2$ | $= \underline{\underline{\tilde{A}}}^T \underline{\underline{B}}$ |
| $\underline{\underline{E}}_1$ | $= \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}$ |
| $\underline{\underline{E}}_2$ | $= \underline{\underline{\tilde{A}}}^T \underline{\underline{\tilde{A}}}$ |

| Symbol | Definition |
|---|---|
| $\underline{F}$ | Globala kraftvektorn i (A) för yttre krafter verkande i noderna |
| $\underline{F}_j$ | Elementets kraftbidrag p.g.a. inre krafter i kabeln i (A) |
| $\underline{F}_{oj}$ | Elementets kraftbidrag p.g.a. inre krafter i kabeln i (R) |
| $\underline{F}_f$ | Friktionskraft |
| $\underline{f}$ | Resulterande yttre krafter på kabeln per längdenhet osträckt längd |
| $\underline{f}^{(1)}$ | Tyngdkrafter och hydrostatiska krafter per längdenhet osträckt längd |
| $\underline{f}^{(2)}$ | Släpkrafter i kabelns tangentiella riktning per längdenhet osträckt längd |
| $\underline{f}^{(3)}$ | Släpkrafter i kabelns normalriktning per längdenhet osträckt längd |
| $\underline{f}^{(4)}$ | Krafter på kabeln vid kontakt med havsbottnen per längdenhet kabel |
| $\underline{\underline{G}}$ | $= \underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{B}}$ |
| $g$ | Gravitationskonstanten |
| $\underline{\underline{J}}$ | Approximation till Jakobianen |
| $K$ | Kabelns styvhet |
| $\underline{\underline{K}}_b$ | Definieras i ekv. (2.12) |
| $\underline{\underline{K}}$ | Systemets styvhetsmatris |
| $\underline{\underline{K}}_{bj}$ | Elementets styvhetsmatris p.g.a. kontakt med havsbottnen |
| $\underline{\underline{K}}^*$ | Styvhetsmatris definierad genom ekv. (3.56)(3.58) |
| $L$ | Kabelns totala osträckta längd |
| $l_j$ | Det j-te elementets osträckta längd |
| $\underline{\underline{M}}$ | Globala massmatrisen i (A) |
| $\underline{\underline{M}}_o$ | Globala massmatrisen i (R) |
| $\underline{\underline{m}}_j$ | Elementets massmatris |
| $n_e$ | Antal element |
| $\underline{P}$ | Systemets globala kraftvektor |
| $\underline{p}$ | Globala nodförskjutningsvektorn från (R) till (A) |

| Symbol | Definition |
|---|---|
| $\underline{p}_j$ | Elementets förskjutningsvektor från (R) till (A) |
| $\underline{R}$ | Globala kraftvektorn i (A) p.g.a. yttre krafter |
| $\underline{R}_j^{(1)}$ | Elementets kraftbidrag p.g.a. tyngdkrafter och hydrostatiska krafter |
| $\underline{R}_j^{(2)}$ | Elementets kraftbidrag p.g.a. tangentiella släpkrafter i (A) |
| $\underline{R}_j^{(3)}$ | Elementets kraftbidrag p.g.a. släpkrafter i kabelns normalriktning i (A) |
| $\underline{R}_j^{(4)}$ | Elementets kraftbidrag p.g.a. krafter vid kontakt mellan kabel och havsbotten |
| $\underline{R}_{oj}^{(2)}$ | Elementets kraftbidrag p.g.a. tangentiella släpkrafter i (R) |
| $\underline{R}_{oj}^{(3)}$ | Elementets kraftbidrag p.g.a. släpkrafter i kabelns normalriktning i (R) |
| (R) | Ett känt läge som kabeln beskriver och som utnyttjas som referenskonfiguration |
| $\underline{r}$ | Globala lägesvektorn för kabeln i (A) |
| $\underline{r}_o$ | Globala lägesvektorn för kabeln i (R) |
| $\underline{r}_j$ | Elementets lägesvektor i (A) |
| $\underline{r}_{oj}$ | Elementets lägesvektor i (R) |
| s | Kabelns längd mätt utefter kabeln till någon punkt, jfr. $s_o$. Alternativt = $\gamma_r g/b$, havsbottnens styvhet |
| $s_o$ | Kabelns osträckta längd mätt utefter kabeln till någon punkt |
| T | Periodtid, kabelns dragkraft |
| $T_m$ | Maximal dragkraft i kabeln |
| t | Tid |
| $\Delta t$ | Tidssteg |
| $\underline{u}$ | Förskjutningsvektorn mätt ifrån (R) till (A) |
| $\underline{v}$ | Relativhastigheten mellan friström och kabel, $= \underline{v}_c - \underline{u}$ |
| $\underline{v}_c$ | Friströmmens hastighet |
| $\underline{v}_j$ | Relativhastigheten för elementet, $= \underline{v}_j = \underline{v}_{cj} - \dot{\underline{p}}_j$ |

| Symbol | Definition |
|---|---|
| $\underline{x}$ | Lägesvektorn för kabeln i (A) |
| $\underline{x}_o$ | Lägesvektorn för kabeln i (R) |
| $'$ | $\frac{\partial}{\partial s_o}$ |
| $\cdot$ | $\frac{\partial}{\partial t}$ |
| $-$ | Vektorsymbol |
| $=$ | Matrissymbol |
| $\alpha$ | Parameter i Newmarks differensmetod |
| $\gamma_o$ | Kabelns massa per längdenhet osträckt längd |
| $\gamma_r$ | $= \frac{\rho_k - \rho_v}{\rho_k} \gamma_o$ |
| $\delta$ | Parameter i Newmarks differensmetod |
| $\underline{\delta}_i$ | Vektor för en iterativ metod |
| $\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$ | Kabelns töjning i (A) |
| $\tilde{\varepsilon}_o$ | Kabelns töjning i (R) |
| $\Delta\varepsilon$ | Tillskottstöjningen mellan (A) och (R) |
| $\varepsilon_j, \tilde{\varepsilon}_j$ | Elementets töjning i (A) |
| $\varepsilon_{oj}$ | Elementets töjning i (R) |
| $\Delta\varepsilon_j$ | Elementets tillskottstöjning mellan (A) och (R) |
| $\eta_j$ | Lastparameter |
| $\eta^*$ | Parameter se ekv. (3.58) |
| $\mu$ | Friktionskoefficient för friktion mellan kabel och havsbotten |
| $\xi_j$ | Lokal variabel för element j, ett uttryck för $s_o$ |
| $\rho_k$ | Kabelns densitet |
| $\rho_v$ | Vattnets densitet |
| $\varphi$ | Faktor, se ekv (3.58) |

# 1. INLEDNING

Syftet med en förankring eller ett förankringssystem är att hålla en flytande konstruktion vid en given position. Ett fartyg kan ha en enpunktsförankring medan en oljeplattform normalt utnyttjar ett system av förankringskablar. Förankringssystemet till en stor flytande konstruktion utgöres som regel av kätting eller vajer. Denna studie som är en fortsättning av tidigare studier som redovisats i [1] är utförd mest med tanke på dessa typer av förankringskablar.

Vid beräkning av en stor flytande konstruktions oscillerande rörelser beskrives förankringsanordningarna ibland med förenklade modeller som ej tar hänsyn till linans dynamiska egenskaper. Ofta försummas kablarnas inverkan helt. Sådana antaganden kan normalt sägas vara acceptabla när konstruktionens rörelser studeras. Vill man däremot få en realistisk bild av krafterna i en förankringskabel är det nödvändigt att utföra en separat studie av kabelns dynamiska förlopp.

I denna studie förutsättes konstruktionens rörelser därför vara kända. De kan vara en realisering av den stokastiska process som konstruktionens rörelser utgör eller någon annan rörelse som man har intresse av att studera. Randvillkoren vid kabelns ändpunkter förutsättes alltså kända. Målsättningen är att kunna göra en detaljerad studie av de dynamiska krafter som kan uppkomma i en förankringskabel. En sådan beräkning är ett viktigt steg mot säkrare förankringar.

De styrande ekvationerna för en förankringskabel är formulerade i [1]. Dessa utgör ett system av icke linjära partiella differentialekvationer. Finita elementmetoden utnyttjas för att transformera dessa till ett system av ordinära tidsberoende differentialekvationer. Dessa löses i [1] med explicit numerisk integration. Den explicita metoden är enkel att implementera i dator och leder till kompakta program. Metoden är dock villkorligt stabil vilket innebär att den kräver små tidssteg för att ge stabila lösningar.

Med metoden är dock beräkningsarbetet per tidssteg mycket litet.

I denna rapport repeteras de styrande ekvationerna och anpassas för en implicit numerisk integration. De ordinära tidsberoende differentialekvationerna löses med en implicit form av Newmarks differensmetod. Med denna kan avsevärt större tidssteg utnyttjas i jämförelse med den explicita metoden. Beräkningsarbetet per tidssteg är dock mycket större.

Jämförelse mellan metoderna genomföres med hjälp av beräkningsexempel. Exemplen indikerar att metoderna i stort sett ger samma beräkningsarbete under det studerade tidsförloppet. De bakomliggande fysikaliska modellerna i de båda metoderna är ej helt lika. De skiljer sig med avseende på beskrivning av de krafter som uppkommer vid kontakt mellan kabel och havsbotten samt med avseende på den modell som beskriver kabelns inre krafter. I grova drag ger dock metoderna samma resultat.

En väsentlig skillnad mellan metoderna är dock det faktum att den implicita metoden ej har varit lyckosam vad avser att beräkna slaka kablar. I den explicita metoden antages att kabelns inre dragkraft blir noll om kabeln komprimeras. Med den implicita metoden erhålles för en sådan beskrivning divergerande lösningar. För att undvika detta antages här istället att kabeln kan ta upp tryckkrafter. Förloppen är alltså ej likvärdiga i sådana fall, men kabelns maximala dragkrafter blir i stort sett lika.

Ytterligare beräkningsexempel redovisas här med den explicita metoden. Dessa har som syfte att tjäna som vägledning samt att ge exempel på möjliga tillämpningar.

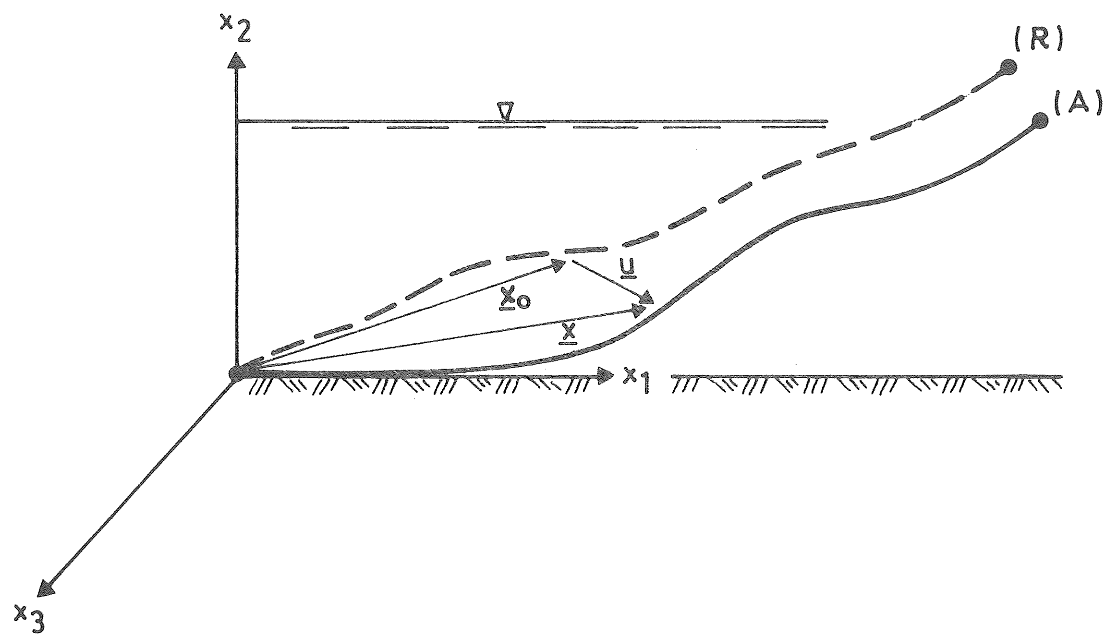
# 2. GRUNDLÄGGANDE EKVATIONER

## 2.1 Inledning

Rörelseekvationerna för en förankringskabel kan erhållas enligt [1] avsnitt 2. Dessa ekvationer är icke linjära partiella differentialekvationer. Ekvationerna gäller för en svängande kabel i en stationär ström. I avsnitt 2.2 erhålles en kort repetition av dessa ekvationer. I avsnitt 2.3 införes variabler som är mera lämpliga för en implicit numerisk lösning. Av samma skäl modifieras modellen för att beskriva de krafter som uppkommer vid kontakt mellan kabel och havsbotten (avsnitt 2.4).

## 2.2 Repetition av grundläggande ekvationer

Låt vektorn $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ definiera en förankringskabels läge i ett rektangulärt cartesiskt koordinatsystem, se figur 2.1.




Figur 2.1 En förankringskabel i ett rektangulärt cartesiskt koordinatsystem.

Koordinataxeln $x_2$ är vertikalt orienterad samt positiv uppåt. Havsbotten antages plan och parallell med medelvattenytan och ligger på nivån $x_2 = 0$. Koordinataxlarna $x_1$ och $x_3$ ligger i havsbottnens eget plan. Kabelns läge $\underline{x}$ är ett rörligt aktuellt läge . Lägesvektorn kan då uttryckas som en funktion av kabelns osträckta läge $s_o$, mätt utefter kabelns kurva från någon ändpunkt $s_o = 0$, samt tiden t så att $\underline{x} = \underline{x}(s_o, t)$.

Inför vidare en fast referenskonfiguration (R) genom $\underline{x}_o = \underline{x}_o(s_o)$, vilket är ett känt läge som kabeln haft tidigare. Då kan läget $\underline{x}$ beskrivas med förskjutningen $\underline{u}$ mätt från (R), se figur (2.1). Beaktas varierande slag av krafter såsom tyngdkrafter, hydrostatiska krafter, masströghets-krafter för kabeln och vattnet, inre reaktionskrafter i kabeln samt släpkrafter i kabelns tangent och normalrikt-ning kan rörelseekvationen för kabeln i (A) skrivas enligt [1] som:

$$\gamma_o \ddot{\underline{u}} + C_4(1+\varepsilon)\ddot{\underline{u}} - \frac{C_4}{(1+\varepsilon)} (\ddot{\underline{u}} \cdot \underline{x}')\underline{x}' -$$

$$\frac{\partial}{\partial s_o} (K\varepsilon \underline{x}') - \underline{f} = 0 \qquad \ldots (2.1)$$

där $\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$

$' = \frac{\partial}{\partial s}$

$\gamma_o$ = kabelns massa per längdenhet osträckt längd

$C_4 = C_{MN} \frac{\pi d_o^2}{4} \rho_v$

$C_{MN}$ = koefficienten för den hydrodynamiska massan

$d_o$ = kabelns karakteristiska diameter relaterad till en cirkulär cylinder

$\rho_v$ = vattnets densitet

$K$ = kabelns styvhet

$\underline{u}$ = förskjutningsvektorn från (R) till (A)

$\underline{x}$ = kabelns lägesvektor i (A).

Termerna i ekv. (2.1) är krafter per längdenhet osträckt kabel. Den första termen i ekv. (2.1) representerar kabelns tröghetskrafter, den andra och tredje vattnets massträghetskrafter på kabeln och den fjärde kabelns inre reaktionskrafter. Den sista termen $\underline{f}$ i ekv. (2.1) är resultanten till tyngdkrafter, hydrostatiska krafter och släpkrafter.

$$\underline{f} = \underline{f}^{(1)} + \underline{f}^{(2)} + \underline{f}^{(3)} \quad \ldots \quad (2.2)$$

Tyngdkrafter och hydrostatiska krafter

$$\underline{f}^{(1)} = \left[0, -\gamma_r g, 0\right]^T$$

$$\gamma_r = \frac{\rho_k - \rho_v}{\rho_k} \gamma_o$$

$\rho_k$ = kabelns densitet

Släpkrafterna i kabelns tangentiella riktning

$$\underline{f}^{(2)} = C_2 \left| \underline{v} \cdot \underline{x}' \right| (\underline{v} \cdot \underline{x}') \, \underline{x}' \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \quad \ldots \quad (2.3)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} C_{DT} \, d_o \, \rho_v$$

$C_{DT}$ = Släpkraftskoefficienten för strömning i kabelns tangentled.

Släpkrafter i kabelns normalriktning

$$\underline{f}^{(3)} = C_3 \left( \underline{v} \cdot \underline{v} - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} (\underline{v} \cdot \underline{x}') \right)^{1/2}$$

$$\left(\underline{v} - (\underline{v} \cdot \underline{x}') \, \underline{x}' \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\right) (1+\varepsilon) \quad \ldots \quad (2.4)$$

där

$$C_3 = \frac{1}{2} C_{DN} \, d_o \, \rho_v$$

$C_{DN}$ = är släpkraftskoefficienten för strömning i kabelns normalriktning

I ekvation (2.1) - (2.4) gäller också att:

$$\underline{x}' = \underline{x}_o' + \underline{u}' \quad \ldots \quad (2.5)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_c - \dot{\underline{u}} \qquad \ldots \qquad (2.6)$$

där $\underline{v}_c$ är friströmmens hastighet och $\dot{\underline{u}}$ är kabelns hastighet.

Vidare gäller att $\tilde{\varepsilon}$ och $\varepsilon$ är kabelns longitudinella töjningar och

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_o + \Delta\tilde{\varepsilon} \qquad \ldots \qquad (2.7)$$

$\tilde{\varepsilon}_o$ = kabelns töjning i (R)

$\Delta\tilde{\varepsilon}$ = tilläggstöjningen från (R) till (A).

$$\tilde{\varepsilon}_o = \frac{1}{2}(\underline{x}_o' \cdot \underline{x}_o' - 1) \qquad \ldots \qquad (2.8)$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\,\underline{u}' \cdot \underline{u}' + \underline{x}_o' \cdot \underline{u}' \qquad \ldots \qquad (2.9)$$

Relationen mellan $\tilde{\varepsilon}$ och $\varepsilon$ ges av

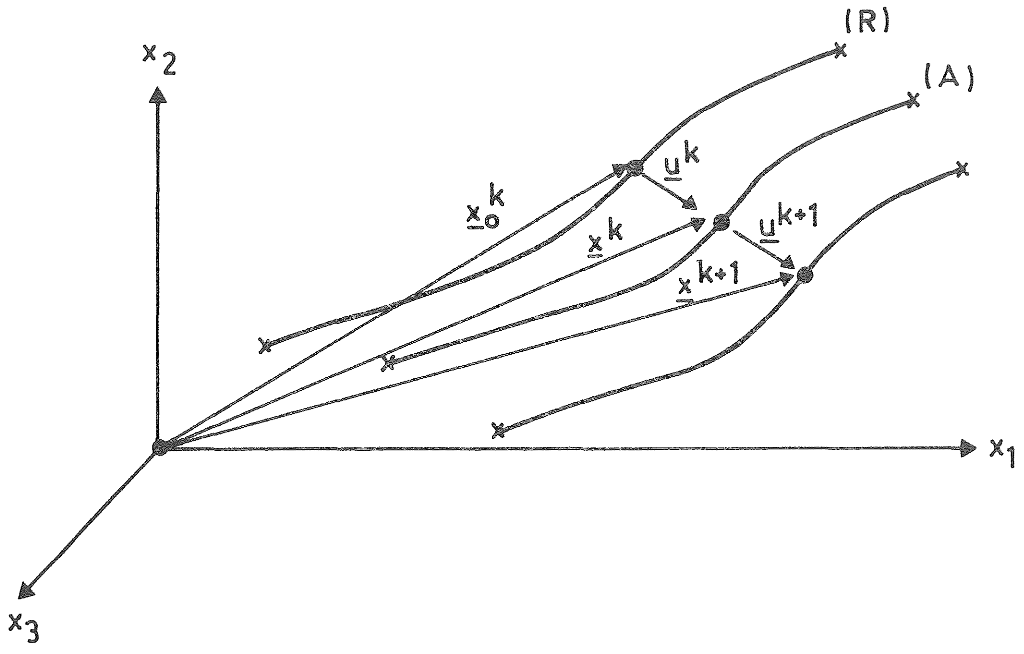
$$(1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2\tilde{\varepsilon} \qquad \ldots \qquad (2.10)$$

speciellt för implicit lösning

## 2.3 Definition av förskjutningsvariabler och referenskonfiguration (R) vid tidsberoende förlopp

Som nämnts i avsnitt (2.2) är (R) ett känt läge $\underline{x}_o = \underline{x}_o(s_o)$ som kabeln haft tidigare. Läget (R) är fast i rymden. Kabelns aktuella rörliga läge (A) kan då beskrivas med förskjutningen $\underline{u}$ mätt från (R). Vid den explicita metoden enligt [1] valdes (R) som kabelns statiska läge p.g.a. tyngdkrafter och hydrostatiska krafter. För att få förskjutningsvariabler som är lämpliga vid en implicit numerisk lösningsmetodik väljes nu (R) annorlunda.

Betrakta kabelns tillstånd vid tidsnivån k-1 och k som känt respektive okänt. Då kan kabelns läge vid tidsnivån k-1 utnyttjas som referenskonfiguration (R) genom $\underline{x}_o^k(s_o)$, se figur 2.2. Dess aktuella okända läge (A) vid tidsnivån k är $\underline{x}^k(s_o,t)$, där t är tidsavståndet från (R) till (A).




Figur 2.2 Referenskonfiguration (R) och aktuell konfiguration (A) för kabeln

Dess läge i (A) beskrives med förskjutningen $\underline{u}^k(s_o)$ mätt relativt (R). Referenskonfigurationen (R) är fast i rymden och rörelseekvationerna formuleras för kabeln i (A). Tidsavståndet t mellan kabeln i (R) och (A) väljes litet. När kabelns läge $\underline{x}^k$ är bestämt genom dess rörelseekvationer med tillhörande rand och begynnelsevillkor utnyttjas detta läge som referenskonfiguration så att $\underline{x}_o^{k+1} = \underline{x}^k$. Kabelns obekanta aktuella läge (A) blir då $\underline{x}^{k+1}(s_o, t)$ där nu t är tidsavståndet mellan konfigurationerna k och k+1 etc.....

Formuleringen av rörelseekvationerna enligt föregående avsnitt påverkas ej av ovanstående val av variabler. Indexering med k, som anger tidsnivån slopas därför i senare framställning, så att $\underline{u} \equiv \underline{u}^k$, $\underline{x}_o \equiv \underline{x}_o^k$ och $\underline{x} \equiv \underline{x}^k$.

## 2.4 Krafter vid kontakt mellan kabel och havsbotten

Vid explicit, numerisk lösning av de styrande ekvationerna enligt [1] antages att botten är stel och energiabsorberande. Denna modell utnyttjas inte här, eftersom den rent praktiskt skulle blir för komplicerad vid en implicit numerisk lösning. Modellen skulle medföra att antalet diskretiserade ekvationer varierar med tiden. Detta är enkelt att hantera vid explicit lösning men svårare vid implicit lösning, eftersom denna metod innebär att ekvationssystem löses vid varje tidsnivå.

För att erhålla en lämplig modell antages att havsbotten uppför sig som en visko-elastisk bädd. Bäddens styvhet väljes så att kabelns nedsjunkning ej blir för stor och dess dämpning avpassas så att kabelns vertikala oscillationer snabbt dämpas ut efter en stöt mot densamma. Friktionskrafter som verkar parallellt utmed havsbotten försummas.

Krafter på kabeln vid kontakt i (A) kan då skrivas som:

$$\underline{f}^{(4)} = - \underline{\underline{K}}_b \underline{x} - \underline{\underline{C}}_b \underline{\dot{u}} \qquad \ldots \quad (2.11)$$

$$\underline{\underline{K}}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots \quad (2.12)$$

där s är havsbottnens styvhet, vilken antages som:

$$s = \frac{\gamma_r g}{b} \qquad \ldots \quad (2.13)$$

vilket innebär att kabeln sjunker ned $b>0$ under havsbottnens nivå ($x_2 = 0$), om den ligger i vila på havsbottnen.

$$\underline{\underline{C}}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots \quad (2.14)$$

där c väljes så att kabelns vertikala oscillationer snabbt dämpas ut:

$$c = 2\,\gamma_o \sqrt{\frac{s}{\gamma_o}} \qquad \ldots \quad (2.15)$$

vilket är ett välbekant uttryck för den kritiska dämpningen för ett system med en frihetsgrad, där $\gamma_o$ motsvarar massan och s fjäderkonstanten.

Eftersom inga krafter $\underline{f}^{(4)}$ skall verka om kabeln rör sig ovanför havsbottnen ($x_2>0$) så borde s och c väljas som

$$s = \frac{\gamma_r g}{b} \qquad c = 2\gamma_o\sqrt{\frac{s}{\gamma_o}} \qquad \text{om } x_2 \leqslant 0$$

$$s = c = 0 \qquad \text{om } x_2 > 0$$

Där $x_2$ är vertikalkomponenten av kabelns lägesvektor $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ i (A). Erfarenhetsmässigt har det visat sig att dessa villkor medför numeriska problem vid implicit numerisk integration. För att få en betydligt effektivare lösning väljes i stället

$$\left.\begin{array}{lll} s = \dfrac{\gamma_r g}{b} & c = 2\gamma_o\sqrt{\dfrac{s}{\gamma_o}} & \text{om } x_{o2} \leqslant 0 \\ s = c = 0 & & \text{om } x_{o2} > 0 \end{array}\right. \qquad \ldots \quad (2.16)$$

där $x_{o2}$ är vertikalkomponenten av kabelns lägesvektor $\underline{x}_o = [x_{o1}, x_{o2}, x_{o3}]^T$ i (R). Eftersom kabelns läge i (R) och (A) förväntas ligga nära varandra så borde ekv. (2.16) uppfylla de fysikaliska krav som bör ställas. Dessa är helt enkelt att förhindra att kabeln passerar under havsbottnens nivå ($x_2 \approx 0$) samt att undvika vertikala oscillationer på densamma.

## 2.5 De fullständiga ekvationerna

Kraften $\underline{f}^{(4)}$ enligt ekv. (2.11) adderas till högerledet i ekv. (2.1) så att

$$\underline{f} = \underline{f}^{(1)} + \underline{f}^{(2)} + \underline{f}^{(3)} + \underline{f}^{(4)} \qquad \ldots \quad (2.17)$$

Då är rörelseekvationerna (2.1) kompletta. Dessa ekvationer är likvärdiga med de som erhållits i [1] , med undantag av kraften $\underline{f}^{(4)}$ som adderats och de definitioner som infördes i avsnitt 2.3.

# 3. NUMERISK LÖSNING

## 3.1 Inledning

Rörelseekvationerna för kabeln enligt avsnitt 2 kan transformeras till ett system av tidsberoende ickelinjära ordinära differentialekvationer analogt med avsnitt 3 i [1] . I avsnitt 3.2 sammanfattas resultatet. Dessa ekvationer linjäriseras (avsnitt 3.3) för att få en initialapproximation till det ickelinjära systemet. Inverkan av olika randvillkor diskuteras i avsnitt 3.4. De tidsberoende differentialekvationerna differensapproximeras med Newmarks metod (avsnitt 3.5) för att få ett system av algebraiska ekvationer. Dessa löses slutligen med en iterativ lösningsmetod (avsnitt 3.6). En kort redogörelse av kabelns jämviktsekvationer ges i avsnitt 3.7. En lösning av dessa kan utnyttjas som begynnelsevillkor till det dynamiska systemet.

## 3.2 Diskretisering i rummet

Indela kabeln i n stycken finita element med osträckta längden $l_j$. Antag vidare att kabeln ej påverkas av någon kraft eller förskjutningsexcitation vid dess ränder $s_o = 0, L$. Ur de styrande ekvationerna enligt föregående avsnitt kan följande system av ordinära differentialekvationer erhållas för kabelns rörelse i (A).

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{p}} = \underline{R} - \underline{F} \qquad \ldots \quad (3.1)$$

Där $\underline{\underline{M}}$ är systemets massmatris

$$\underline{\underline{M}} = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T \, \underline{\underline{m}}_j \, \underline{\underline{C}}_j \qquad \ldots \quad (3.2)$$

och $\underline{\underline{m}}_j$ är det j-te elementets massmatris

$$\underline{\underline{m}}_j = \int_0^1 \left\{ l_j (\gamma_o + C_4 (1+\varepsilon_j)) \underline{\underline{E}}_2 - \frac{C_4}{(1+\varepsilon_j) l_j} \underline{\underline{D}}_2 \underline{r}_j \underline{r}_j^T \underline{\underline{D}}_2^T \right\} d\xi_j \qquad \ldots \quad (3.3)$$

och där $\underline{\underline{C}}_j$ är en identifieringsmatris.

Den globala kraftvektorn $\underline{R}$ som härrör från $\underline{f}^{(1)}$, $\underline{f}^{(2)}$, $\underline{f}^{(3)}$ och $\underline{f}^{(4)}$ är:

$$\underline{R} = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T \, (\underline{R}_j^{(1)} + \underline{R}_j^{(2)} + \underline{R}_j^{(3)} + \underline{R}_j^{(4)}) \qquad (3.4)$$

där $\underline{R}_j^{(1)}$ är elementets kraftbidrag p.g.a tyngdkrafter och hydrostatiskt tryck

$$\underline{R}_j^{(1)} = \int_0^1 l_j \, \underline{\underline{A}}^T \, \underline{f}^{(1)} \, d\xi_j \qquad \ldots \qquad (3.5)$$

och där $\underline{R}_j^{(2)}$ är elementets kraftbidrag p.g.a den tangentiella släpkraften

$$\underline{R}_j^{(2)} = \int_0^1 \frac{1}{(1+\varepsilon_j)^2 l_j^2} \left| \underline{v}_j^T \underline{\underline{D}}_1 \underline{r}_j \right| (\underline{v}_j^T \underline{\underline{D}}_1 \underline{r}_j) \underline{\underline{D}}_1 \underline{r}_j \, d\xi_j \qquad \ldots \qquad (3.6)$$

och där $\underline{R}_j^{(3)}$ är elementets kraftbidrag p.g.a. släpkrafter i kabelns normalriktning

$$\underline{R}_j^{(3)} = C_3 \int_0^1 l_j (1+\varepsilon_j) \{ \underline{v}_j^T \underline{\underline{E}}_1 \underline{v}_j - \frac{1}{(1+\varepsilon_j)^2 l_j^2} (\underline{v}_j^T \underline{\underline{D}}_1 \underline{r}_j)^2 \}^{1/2} \qquad \ldots\ldots \qquad (3.7)$$

$$\{ \underline{\underline{E}}_1 \underline{v}_j - \frac{1}{(1+\varepsilon_j)^2 l_j^2} (\underline{v}_j^T \underline{\underline{D}}_1 \underline{r}_j) \underline{\underline{D}}_1 \underline{r}_j \} d\xi_j$$

och där $\underline{R}_j^{(4)}$ är elementets kraftbidrag p.g.a. de krafter $\underline{f}^{(4)}$ som kan erhållas vid kontakt med havsbottnen:

$$\underline{R}_j^{(4)} = - \underline{\underline{K}}_{bj} \underline{r}_j - \underline{\underline{C}}_{bj} \, \underline{\dot{p}}_j \qquad \ldots \qquad (3.8)$$

där

$$\underline{\underline{K}}_{bj} = \frac{l_j}{2} \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_b & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_b \end{bmatrix} \qquad j=1,\ n_e \qquad \ldots \qquad (3.9)$$

$$\underline{\underline{C}}_{bj} = \frac{l_j}{2} \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_b & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}}_b \end{bmatrix} \qquad j=1,\ n_e \qquad \ldots \qquad (3.10)$$

Den globala kraftvektorn $\underline{F}$ p.g.a. kabelns inre krafter är:

$$\underline{F} = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T \underline{F}_j \qquad \ldots \qquad (3.11)$$

där elementets kraftbidrag är

$$\underline{F}_j = \int_0^1 \frac{K\tilde{\varepsilon}_j}{l_j} \underline{\underline{G}}\, \underline{r}_j \, d\xi_j \qquad \ldots \qquad (3.12)$$

Det j:te elementets töjningar $\varepsilon_j$, $\tilde{\varepsilon}_j$ i (A) ges av:

$$\tilde{\varepsilon}_j = \tilde{\varepsilon}_{oj} + \Delta\tilde{\varepsilon}_j \qquad \ldots \qquad (3.13)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{oj} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_j^2} \underline{r}_{oj}^T \underline{\underline{G}}\, \underline{r}_{oj} - 1\right) \qquad \ldots \qquad (3.14)$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_j = \frac{1}{2l_j} \underline{p}_j^T \underline{\underline{G}}\, \underline{p}_j + \frac{1}{l_j} \underline{r}_{oj}^T \underline{\underline{G}}\, \underline{p}_j \qquad \ldots \qquad (3.15)$$

där $\tilde{\varepsilon}_{oj}$ är elementets töjningar i (R) och $\Delta\tilde{\varepsilon}_j$ är tillskottstöjningen från (R) till (A). Relationen mellan $\varepsilon_j$ och $\tilde{\varepsilon}_j$ ges av

$$(1 + \varepsilon_j)^2 = 1 + 2\tilde{\varepsilon}_j \qquad \ldots \qquad (3.16)$$

Elementets nodvariabler är

$\underline{p}_j$ = Förskjutningsvektorn från (R) till (A)

$\underline{r}_{oj}$ = Lägesvektorn i (R)

$\underline{r}_j$ = Lägesvektorn i (A)

$\underline{v}_j$ = Relativhastigheten mellan friström och kabel

$\underline{v}_{cj}$ = Friströmmens hastighetsvektor

där

$$\underline{v}_j = \underline{v}_{cj} - \dot{\underline{p}}_j \qquad \ldots \qquad (3.17)$$

$$\underline{r}_j = \underline{r}_{oj} + \underline{p}_j \qquad \ldots \qquad (3.18)$$

Elementets nodvektorer har dimensionen (6 x 1). Dessa kan relateras till motsvarande globala vektor, som kan beskriva hela systemets tillstånd, genom identifieringsmatrisen $\underline{\underline{C}}_j$. Som exempel gäller att

$$\left.\begin{aligned} \underline{p}_j &= \underline{\underline{C}}_j \underline{p} \\ \underline{r}_{oj} &= \underline{\underline{C}}_j \underline{r}_o \end{aligned}\right\} \quad j = 1, n_e \qquad \ldots \qquad (3.19)$$

där $\underline{p}$ = globala förskjutningsvektor

$\underline{r}$ = globala lägesvektorn

Matrisen $\underline{\underline{C}}_j$ har dimensionen (6 x n) och de globala vektorerna (n x 1) där n är systemets frihetsgrader.

Matrisen $\underline{\underline{A}}$ består av interpolationsfunktioner, i detta arbete utnyttjas linjära funktioner

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1-\xi_j & 0 & 0 & \xi_j & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi_j & 0 & 0 & \xi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_j & 0 & 0 & \xi_j \end{bmatrix} \qquad \ldots \qquad (3.20)$$

Linjär variation av variablerna utnyttjas överallt utom vid beräkning av massmatrisen ekv. (3.3) samt vid beräkning av krafter vid kontakt med havsbottnen ekv. (3.8), (3.9) och (3.10). I dessa fall modifieras (3.20) till:

$$\underline{\underline{\tilde{A}}} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (3.21)$$

$\varphi_1 = 1$ och $\varphi_2 = 0$ för $\xi_j \in [0,\ 1/2]$

$\varphi_2 = 0$ och $\varphi_2 = 1$ för $\xi_j \in [1/2,\ 1]$

Matriserna i uttrycken (3.3), (3.6), (3.7), (3.12), (3.14) och (3.15) erhålles ur:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}} &= \frac{\partial \underline{\underline{A}}}{\partial \xi_j} \\ \underline{\underline{G}} &= \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{E}}_1 &= \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{D}}_1 &= \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{E}}_2 &= \underline{\underline{\tilde{A}}}^T \underline{\underline{\tilde{A}}} \\ \underline{\underline{D}}_2 &= \underline{\underline{\tilde{A}}}^T \underline{\underline{B}} \end{aligned} \quad \ldots \quad (3.22)$$

## 3.3 Linjärisering av ekvationerna

Kabelns rörelseekvationer (3.1) kan linjäriseras lokalt. Antag att förskjutningarna $\underline{p}$ är små samt att kabelns hastighet varierar lite då kabeln rör sig ifrån (R) till (A). Detta är rimligt, eftersom tidsavståndet mellan (R) och (A) också kan väljas litet.

Kabelns massmatris beror på kabelns aktuella läge eller elementets lägesvektorer, $\underline{r}_j$. För att erhålla en approximation till kabelns massmatris $\underline{\underline{M}}$ enligt ekv. (3.2) och (3.3) utnyttjas den massmatris $\underline{\underline{M}}_o$ som systemet hade i (R). Denna är känd och erhålles ur ekv. (3.2) och (3.3) om $\underline{r}_j$ och $\varepsilon_j$ bytes mot $\underline{r}_{oj}$ respektive $\varepsilon_{oj}$.

Den globala kraftvektorn $\underline{R}$ approximeras m.a.p. de krafter som härrör från kabelns släpkrafter i tangent- och normalled. Dessa krafters bidrag till ett element i (A) är $\underline{R}_j^{(2)}$ och $\underline{R}_j^{(3)}$ enligt ekv. (3.6) (3.7). Dessa uttryck är mycket komplicerade. För att erhålla en approximation till $\underline{R}_j^{(2)}$ och $\underline{R}_j^{(3)}$ utnyttjas motsvarande krafter $\underline{R}_{oj}^{(2)}$ och $\underline{R}_{oj}^{(3)}$ som kabeln hade i (R). Dessa är kända och erhålles genom ekv. (3.6) och (3.7) om $\underline{r}_j$ och $\varepsilon_j$ bytes mot $\underline{r}_{oj}$ respektive $\varepsilon_{oj}$ och om relativhastigheten $\underline{v}_j$ i (A) bytes mot dess värde i (R).

Den globala kraftvektorn $\underline{F}$ p.g.a. kabelns inre krafter kan approximeras genom serieutveckling. Med ekv. (3.13) och ekv. (3.18) formuleras ekv. (3.12) som

$$\underline{F}_j = \int_0^1 \frac{K(\tilde{\varepsilon}_{oj}+\Delta\tilde{\varepsilon}_j)}{l_j}\, \underline{\underline{G}}\, (\underline{r}_{oj}+\underline{p}_j)\, d\xi_j \qquad \ldots \quad (3.23)$$

Eftersom förskjutningarna $\underline{p}_j$ är små är det meningsfullt att serieutveckla $\underline{F}_j$ i en Maclaurinserie. Medtages två termer i serien erhålles att

$$\underline{F}_j = \underline{F}_j(\underline{0}) + \frac{\partial \underline{F}_j}{\partial \underline{p}_j}(\underline{0})\,\underline{p}_j \qquad \ldots \quad (3.24)$$

Med ekv. (3.15) och (3.23) beräknas ekv. (3.24) som:

$$\underline{F}_j = \int_0^1 \frac{K}{l_j}\tilde{\varepsilon}_{oj}\underline{\underline{G}}\,\underline{r}_{oj}\, d\xi_j + \int_0^1 \left(\frac{K\tilde{\varepsilon}_{oj}}{l_j}\underline{\underline{G}} + \frac{K}{l_j^3}\underline{r}_{oj}^T\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{r}_{oj}\right)\underline{p}_j\, d\xi_j$$

$$\ldots \quad (3.25)$$

Den första termen i ekv. (3.25) representerar elementets kraftbidrag i (R).

Med dessa antaganden och noteringar erhålles en approximation till ekv. (3.1) som

$$\underline{\underline{M}}_o \ddot{\underline{p}} = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T (\underline{R}_j^{(1)} + \underline{R}_{oj}^{(2)} + \underline{R}_{oj}^{(3)} + \underline{R}_j^{(4)}) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T \{ \int_0^1 \frac{K}{l_j} \tilde{\varepsilon}_{oj} \underline{\underline{G}}\, \underline{r}_{oj}\, d\xi_j + \qquad \ldots \quad (3.26)$$

$$+ \int_0^1 \left( \frac{K\tilde{\varepsilon}_{oj}}{l_j} \underline{\underline{G}} + \frac{K}{l_j^3} \underline{r}_{oj}^T \underline{\underline{G}}\, \underline{\underline{G}}\, \underline{r}_{oj} \right) \underline{p}_j\, d\xi_j \}$$

Denna erhålles ur ekv. (3.1) (3.4) (3.11) (3.25) med $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}_o$, $\underline{R}_j^{(2)} = \underline{R}_{oj}^{(2)}$, $\underline{R}_j^{(3)} = \underline{R}_{oj}^{(3)}$, där $\underline{\underline{M}}_o$ är systemets massmatris i (R) samt där $\underline{R}_{oj}^{(2)}$ och $\underline{R}_{oj}^{(3)}$ är elementens kraftbidrag av de släpkrafter kabeln hade i (R).

Efter substitution av ekv. (3.8) (3.18) (3.19) i ovanstående uttryck (3.26) erhålles slutligen följande ekvation:

$$\underline{\underline{M}}_o \ddot{\underline{p}} + \underline{\underline{C}}\, \dot{\underline{p}} + \underline{\underline{K}}\, \underline{p} = \underline{P} \qquad \ldots \quad (3.27)$$

där

$$\underline{\underline{C}} = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T\, \underline{\underline{C}}_{bj}\, \underline{\underline{C}}_j \qquad \ldots \quad (3.28)$$

är systemets dämpningsmatris p.g.a. de dämpande krafter som uppkommer vid kontakt med havsbottnen och där

$$\underline{\underline{K}} = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T \{ \underline{\underline{K}}_{bj} + \int_0^1 \left( \frac{K\tilde{\varepsilon}_{oj}}{l_j} \underline{\underline{G}} + \frac{K}{l_j^3} \underline{r}_{oj}^T \underline{\underline{G}}\, \underline{\underline{G}}\, \underline{r}_{oj} \right) d\xi_j \} \underline{\underline{C}}_j \qquad \ldots \quad (3.29)$$

är systemets styvhetsmatris p.g.a. kabelns inre krafter och de elastiska krafter som uppkommer vid kontakt med havsbottnen samt där

$$\underline{P} = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T \{\underline{R}_j^{(1)} + \underline{R}_{oj}^{(2)} + \underline{R}_{oj}^{(3)} - \underline{\underline{K}}_{bj}\, \underline{r}_{oj} - \int_0^1 \frac{K}{l_j} \tilde{\varepsilon}_{oj} \underline{\underline{G}}\, \underline{r}_{oj}\, d\xi_j\} \qquad \ldots \quad (3.30)$$

är systemets globala kraftvektor.

I ekv. (3.27) är $\underline{\underline{M}}_o$, $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{K}}$ och $\underline{P}$ uttryck med kända konstanter varför ekv. (3.27) är ett system av linjära och ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Ekvationen är en approximation till ekv. (3.1). I det följande kommer därför ekv. (3.27) användas för att erhålla en initialapproximation till en numerisk lösning av ekv. (3.1).

## 3.4 Inverkan av randvillkor

För en kabel som ej påverkas av någon kraft eller förskjutningsekvation vid ränderna $s_o = 0$, L gäller ekv. (3.1):

$$\underline{\underline{M}}\, \ddot{\underline{p}} = \underline{R} - \underline{F} \qquad \ldots \quad (3.31)$$

Som approximation till ekv. (3.31) erhölls ett linjärt system enligt ekv. (3.27) som:

$$\underline{\underline{M}}_o\, \ddot{\underline{p}} + \underline{\underline{C}}\, \dot{\underline{p}} + \underline{\underline{K}}\, \underline{p} = \underline{P} \qquad \ldots \quad (3.32)$$

Dessa ekvationer skall lösas numeriskt för lämpliga rand- och begynnelsevillkor. Randvillkoren kan vara av typen föreskrivna krafter eller föreskrivna förskjutningar vid kabelns ändpunkter $s_o = 0$, L.

Föreskrives förskjutningar vid kabelns ändpunkter är det klart enligt [1] att motsvarande komponenter i ekv. (3.31) och (3.32) kan uteslutas. I detta fall gäller då att sex stycken komponenter av $\underline{p}$ är givna och de resterande är okända. Om istället krafter föreskrives adderas dessa till motsvarande frihetsgrader i ekv. (3.31) och (3.32). En kombination av fallen kan naturligtvis också förekomma. Uppmärksamheten riktas mot det förra fallet eftersom ekvationerna i praktiken löses för detta fall. Då erhålles ett reducerat system av ekvationer.

Föreskrives förskjutningarna vid ränderna $s_o = 0$, L modifieras ekv. (3.31) till

$$\underline{\underline{\tilde{M}}}\,\underline{\ddot{\tilde{p}}} = \underline{\tilde{R}} - \underline{\tilde{F}} \qquad \ldots \; (3.33)$$

Där ~ anger att $\underline{\underline{M}}$, $\underline{R}$, $\underline{F}$ och $\underline{\ddot{p}}$ har reducerats. Komponenterna av $\underline{\tilde{p}}$ är de okända nodförskjutningarna och är lika många i antal som antalet ekvationer i ekv. (3.33). Matrisen $\underline{\underline{\tilde{M}}}$ är blockdiagonal. Dess submatriser i diagonalen har dimensionen (3 x 3). Skillnaden mellan matriserna $\underline{\underline{M}}$ och $\underline{\underline{\tilde{M}}}$ är att den senare har förlorat de två submatriserna som är associerade till de föreskrivna förskjutningarna.

På liknande sätt modifieras ekv. (3.32) till

$$\underline{\underline{\tilde{M}}}_o\,\underline{\ddot{\tilde{p}}} + \underline{\underline{\tilde{C}}}\,\underline{\dot{\tilde{p}}} + \underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{\tilde{p}} = \underline{P}_r \qquad \ldots \; (3.34)$$

$$\underline{P}_r = \underline{\tilde{P}} - \underline{\underline{K}}_r\,\underline{p}_r \qquad \ldots \; (3.35)$$

Högerledets sista term $\underline{\underline{K}}_r\,\underline{p}_r$ representerar krafter som uppkommer vid förskjutningsexcitation med de givna randförskjutningarna $\underline{p}_r$. Matrisen $\underline{\underline{K}}_r$ är en submatris till $\underline{K}$. Krafterna $\underline{\underline{K}}_r\,\underline{p}_r$ är interaktionskrafter mellan de frihetsgrader i systemet där förskjutningarna är kända respektive de som är okända. Liknande termer erhålles ej från tröghetskrafter eller dämpkrafter eftersom $\underline{\underline{M}}_o$ är blockdiagonal och $\underline{\underline{C}}$ är diagonal.

## 3.5 Diskretisering i tidsplanet

Ekvationerna (3.33) och (3.34) enligt avsnitt 3.4 är ett system av ordinära differentialekvationer. Dessa är

$$\underline{\underline{\tilde{M}}}\,\underline{\ddot{\tilde{p}}} = \underline{\tilde{R}} - \underline{\tilde{F}} \qquad \ldots \; (3.36)$$

$$\underline{\underline{\tilde{M}}}_o\,\underline{\ddot{\tilde{p}}} + \underline{\underline{\tilde{C}}}\,\underline{\dot{\tilde{p}}} + \underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{\tilde{p}} = \underline{P}_r \qquad \ldots \; (3.37)$$

Ekvation (3.36) är ickelinjär men dess approximation (3.37) är linjär.

Genom inspektion av resultatet enligt avsnitt 3.2 kan man finna att $\tilde{\underline{\underline{M}}}$ och $\tilde{\underline{F}}$ är beroende av de obekanta förskjutningarna samt att $\tilde{\underline{R}}$ är beroende av både förskjutningar och hastigheter. Eftersom ekv. (3.36) är komplicerad betraktas denna formellt som ett system på formen:

$$\underline{f}\ (\tilde{\underline{P}},\ \tilde{\underline{\dot{p}}},\ \tilde{\underline{\ddot{p}}},\ t) = \underline{0} \qquad \ldots\ (3.38)$$

där $\underline{f} = \tilde{\underline{\underline{M}}}\ \tilde{\underline{\ddot{p}}} - \tilde{\underline{R}} + \tilde{\underline{F}}$ är systemets residualkraft. Tiden t och förskjutningarna $\underline{p}$ är kabelns tids respektive rumsavstånd emellan (R) och (A). Där (R) är ett känt läge som kabeln hade vid tidsnivån k-1 och (A) är ett obekant läge vid tidsnivån k.

För att erhålla en differensapproximation till ekv. (3.38) kan Newmarks metod utnyttjas [2] . Tidsavståndet t mellan (R) och (A) väljes som t = $\Delta t$, där $\Delta t$ är ett litet tidssteg. Följande antages

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\dot{p}}} &= \tilde{\underline{\dot{p}}}^{o} + [(1-\delta)\tilde{\underline{\ddot{p}}}^{o} + \delta\tilde{\underline{\ddot{p}}}]\Delta t \\ \tilde{\underline{p}} &= \tilde{\underline{p}}^{o} + \tilde{\underline{\dot{p}}}^{o}\Delta t + [(\tfrac{1}{2} - \alpha)\tilde{\underline{\ddot{p}}}^{o} + \tilde{\underline{\ddot{p}}}]\Delta t^{2} \end{aligned} \qquad \ldots\ (3.39\ a,b)$$

där $\alpha$, $\delta$ är parametrar som kan ges olika värden och där index o markerar variablernas värden i (R). Eftersom förskjutningarna $\tilde{\underline{p}}$ definieras relativt (R) så gäller att $\tilde{\underline{p}}^{o}$ = $\underline{0}$. Kabelns tillstånd i läget (R) förutsättes bekant så att hastighetsvektorn $\tilde{\underline{\dot{p}}}^{o}$ och accelerationsvektorn $\tilde{\underline{\ddot{p}}}^{o}$ är kända.

Substitution av uttrycken för $\tilde{\underline{\dot{p}}}$ och $\tilde{\underline{p}}$ enligt ekv.(3.39a, b) i ekv.(3.38) kan ge ett icke linjärt ekvationssystem med accelerationer som obekanta. Här föredrages emellertid följande metod. Ekvation (3.39b) kan skrivas som:

$$\ddot{\tilde{\underline{p}}} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(\tilde{\underline{p}} - \tilde{\underline{p}}^o) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\tilde{\underline{p}}}^o - (\frac{1}{2\alpha} - 1)\ddot{\tilde{\underline{p}}}^o \quad .. \qquad (3.40)$$

Ekv.(3.39a) och (3.40) utnyttjas sedan för substitution i ekv. (3.39) och då erhålles ett system av ickelinjära algebraiska ekvationer med förskjutningarna $\tilde{\underline{p}}$ som obekanta.

$$\underline{f}\ (\tilde{\underline{p}}) = \underline{0} \quad \ldots \qquad (3.41)$$

En lösning av det ickelinjära ekvationssystemet (3.41) ger förskjutningarna $\tilde{\underline{p}}$. Med kända förskjutningar $\tilde{\underline{p}}$ kan nodernas accelerationer $\ddot{\tilde{\underline{p}}}$ och hastigheter $\dot{\tilde{\underline{p}}}$ bestämmas med ekv.(3.40) och (3.39a).

På liknande sätt kan Newmarks metod tillämpas för att erhålla en differensapproximation till det linjära systemet ekv. (3.37). Följande resultat erhålles [2]:

$$\underline{\underline{J}}_o\ \tilde{\underline{p}} = \hat{\underline{P}}_r \quad \ldots \qquad (3.42)$$

där

$$\underline{\underline{J}}_o = \tilde{\underline{\underline{K}}} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\tilde{\underline{\underline{M}}}_o + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\tilde{\underline{\underline{C}}} \quad \ldots \qquad (3.43)$$

och

$$\hat{\underline{P}}_r = \underline{P}_r + \underline{\underline{M}}_o\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\tilde{\underline{p}}^o + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\tilde{\underline{p}}}^o + (\frac{1}{2\alpha}-1)\ddot{\tilde{\underline{p}}}^o\right) +$$

$$+ \underline{\underline{C}}\left(\frac{\delta}{\alpha\Delta t}\tilde{\underline{p}}^o + (\frac{\delta}{\alpha}-1)\underline{p}^o + \frac{\Delta t}{2}(\frac{\delta}{\alpha}-2)\ddot{\tilde{\underline{p}}}^o\right) \quad \ldots \qquad (3.44)$$

där i detta fall $\tilde{\underline{p}}^o = \underline{0}$.

Ekv. (3.42) är ett linjärt ekvationssystem. En lösning $\tilde{\underline{p}}$ av denna ekvation utnyttjas som initialapproximation till det icke linjära systemet ekv. (3.41). Detta löses sedan med iteration. Vidare är matrisen $\underline{\underline{J}}_o$ enligt ekv. (3.43) en approximeration av Jakobianen $\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{p}}(\underline{0})$ till ekv. (3.41).

Newmarks metod är implicit för t.ex. $\delta = 0.5$ och $\alpha = 0.25$ vilket inses av differansformlerna ekv. (3.39) (3.40). Metoden är då också ovillkorligt stabil [2], om systemet är linjärt. Förhoppningsvis kvarstår dessa egenskaper vid tillämpning av metoden för de icke linjära system som erhålles genom ekv. (3.36). Senare beräkningsexempel kommer att visa att man kan erhålla både stabila och konvergerande lösningar för avsevärt större tidsteg än de som måste väljas vid explicit numerisk integration enligt [1].

## 3.6 Lösning av de icke linjära algebraiska ekvationerna.

Diskretisering av de styrande ekvationerna resulterade i ett system av ickelinjära ekvationer. Enligt föregående avsnitt ekv.(3.41) gällde att:

$$\underline{f}\ (\tilde{\underline{p}}) = \underline{0} \qquad \ldots (3.45)$$

Vektorerna $\underline{f}$ och $\tilde{\underline{p}}$ har samma dimension och komponenterna av $\tilde{\underline{p}}$ är de obekanta nodförskjutningarna. Iterativa metoder för lösning av icke linjära ekvationer av denna typ beskrives i en bok av Björk, Dahlqvist [3]. En av de mest kända är Newton Raphsons metod vilken kan formuleras som:

$$\tilde{\underline{p}}_{i+1} = \tilde{\underline{p}}_i - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \tilde{\underline{p}}} (\tilde{\underline{p}}_i)^{-1}\ \underline{f}(\tilde{\underline{p}}_i) \qquad \ldots (3.46)$$

$$i=0,1,2,3....$$

där $\dfrac{\partial \underline{f}}{\partial \tilde{\underline{p}}}$ är Jakobianen.

I detta fall är Jakobianen komplicerad och därför svår att etablera, vilket mestadels beror på släpkrafternas bidrag till $\underline{f}$. Eftersom Jakobianen enligt ekv.(3.43) måste etableras för varje iteration i kan detta också bli en kostsam operation. Detta kan i och för sig undvikas genom att hålla denna konstant under ett antal interationer, men då förväntas också långsammare konvergens.

En annan metod som beskrives i [3] är en metod av Broyden.

I varje iteration i erhålles en ny approximation $\underline{\underline{J}}_i$ till Jakobianen så att följande villkor uppfylles:

$$\underline{\underline{J}}_i(\underline{\tilde{p}}_i - \underline{\tilde{p}}_{i-1}) = \underline{f}(\underline{\tilde{p}}_i) - \underline{f}(\underline{\tilde{p}}_{i-1})$$

$$\underline{\underline{J}}_i\,\underline{z} = \underline{\underline{J}}_{i-1}\underline{z} \quad \text{då} \quad (\underline{\tilde{p}}_i - \underline{\tilde{p}}_{i-1})^T\underline{z} = 0$$

Sättes $\underline{\tilde{p}}_i - \underline{\tilde{p}}_i = \underline{\delta}_i$ och $\underline{Y}_i = \underline{f}(\underline{\tilde{p}}_i) - \underline{f}(\underline{\tilde{p}}_{i-1})$ kan villkoren ge följande formel:

$$\underline{\underline{J}}_i^{-1} = \underline{\underline{J}}_{i-1}^{-1} - \frac{(\underline{\underline{J}}_i^{-1}\underline{Y}_i - \underline{\delta}_i)\underline{\delta}_i^T\underline{\underline{J}}_{i-1}^{-1}}{\underline{\delta}_i^T\underline{\underline{J}}_{i-1}^{-1}\underline{Y}_i} \qquad \ldots \quad (3.47)$$

Då erhålles $\underline{\tilde{p}}_{i+1}$ som:

$$\underline{\tilde{p}}_{i+1} = \underline{\tilde{p}}_i - \underline{d}_i \qquad \ldots \quad (3.48)$$

där

$$\underline{d}_i = \underline{\underline{J}}_i^{-1}\,\underline{\tilde{f}}(\underline{\tilde{p}}_i) \qquad \ldots \quad (3.49)$$

Ekvationerna (3.47), (3.48) och (3.49) ser komplicerade ut men kan implementeras på ett mycket effektivt sätt [4]. Algoritmen enligt [4] har utnyttjats i detta arbete.

Antag att en initialapproximation $\underline{\tilde{p}}_o$, $\underline{\underline{J}}_o$ är känd. Då kan $\underline{\tilde{p}}_1$ beräknas ur ekv. (3.49) och (3.48). Efter beräkning av $\underline{\delta}_1$ och $\underline{Y}_1$ erhålles $\underline{\underline{J}}_1$ ur ekv. (3.47) och därmed $\underline{\tilde{p}}_2$ ur ekv. (3.48)....

Denna metod kräver alltså inte att en Jakobian etableras vid varje iteration, en approximation till denna erhålles utifrån en intialapproximation $\underline{\tilde{p}}_o$ och $\underline{\underline{J}}_o$.

Som nämnts är Jakobianen i detta fall komplicerad. Av detta skäl har metoden bedömts vara lämplig.

En initialapproximation kan inte väljas hur som helst för att metoden skall kunna konvergera. För att beräkna en bra initialapproximation krävs en viss fysikalisk förståelse av problemet. I detta fall kan en lösning av ekv. (3.42) utnyttjas som initialapproximation $\underline{\tilde{p}}_o$ och $\underline{\underline{J}}_o$ kan erhållas ur ekv. (3.43). Under sådana omständigheter bör iterationerna konvergera, om inte tidstegen väljes för stora.

## 3.7 Jämviktsekvationerna och deras numeriska lösning

Innan en dynamisk beräkning av en förankringskabel utföres är det lämpligt att bestämma en statisk kabelkonfiguration. Kabelns statiska tillstånd kan då utnyttjas som ett initialtillstånd i en beräkning av ett dynamiskt förlopp. Kabelns statiska läge associeras med att kabelns ändpunkter har vissa givna statiska positioner. De yttre krafter som inkluderas är hydrostatiska krafter, tyngdkrafter samt de krafter som kan uppkomma vid kontakt med havsbottnen.

De styrande ekvationerna kan i detta fall erhållas som ett specialfall av de rumsdiskretiserade rörelseekvationerna. Ur ekvationerna (3.1) och (3.4) kan följande resultat erhållas

$$\underline{R} - \underline{F} = \underline{0} \qquad \ldots (3.50)$$

$$\underline{R} = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T \left(\eta_j \underline{R}_j^{(1)} - \underline{\underline{K}}_{bj} \, \underline{r}_j\right) \qquad \ldots (3.51)$$

där elementets kraftbidrag från tyngdkrafter och hydrostatiska krafter $\underline{R}_j^{(1)}$ har multiplicerats med $\eta_j \in [0,1]$, samt där $\underline{F}$ erhålles genom ekv. (3.11) (3.12).

Kabelns läge relateras till en viss styrka på tyngd och hydrostatiska krafter genom olika värden på parametrarna $\eta_j$ (i stället för en viss tidsnivå som i en dynamisk beräkning). Tyngdkrafter och hydrostatiska krafter kan tillåtas att variera. Lösningar kan alltså erhållas för en ökande följd av värden på lastparametern $\eta_j \in [0,1]$. Då alla $\eta_j = 1$, $j = 1, n_e$ har kabeln nått sitt önskade statiska läge.

Tanken är att förskjutningarna $\underline{p}$ ifrån ett läge som är känt till ett läge som är okänt i första hand skall kunna uppskattas genom en linjär ekvation. Med antagande av att dessa förskjutningar är små erhålles följande linjärisering av ekv. (3.50)

$$\underline{\underline{K}}\ \underline{p} = \underline{P} \qquad \ldots (3.52)$$

där

$$\underline{P} = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T (\eta_j\ \underline{R}_j^{(1)} - \underline{\underline{K}}_{bj}\ \underline{r}_{oj} - \underline{F}_{oj}) \qquad \ldots (3.53)$$

och där

$$\underline{F}_{oj} = \int_0^1 \frac{K}{l_j} \tilde{\varepsilon}_{oj}\ \underline{\underline{G}}\ \underline{r}_{oj}\ d\xi_j$$

vilket erhölls ur ekv. (3.27) och (3.30). Styvhetsmatrisen $\underline{\underline{K}}$ bestämmes med ekv. (3.29).

Eftersom kabelns läge förutsättes kända vid ändpunkterna kan systemen ekv. (3.50) och ekv. (3.52) reduceras. Följande erhålles analogt med avsnitt 3.4.

$$\underline{\tilde{R}} - \underline{\tilde{F}} = \underline{0} \qquad \ldots (3.54)$$

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}\ \underline{\tilde{p}} = \underline{\tilde{P}} \qquad \ldots (3.55)$$

Ekv. (3.55) erhålles ur ekv. (3.34), där de föreskrivna randförskjutningarna valts som $\underline{p}_r = \underline{0}$.

Om lastparametern $\eta_j$ valts på lämpligt sätt så att förskjutningarna är små så borde en lösning av ekv. (3.55) utnyttjas som en initialapproximation till en lösning av ekv. (3.54). Ekvation (3.54) kan sedan lösas genom iteration.

Styvhetsmatrisen $\underline{\underline{\tilde{K}}}$ i ekv. (3.55) är som regel ej positivt definit då $\eta_j=0$. För att undvika detta adderas en matris $\underline{\underline{K}}^{*}$ enligt följande:

$$\underline{\tilde{R}} - \underline{\tilde{F}} - \underline{\underline{K}}^{*}\ \underline{\tilde{p}} = \underline{0} \qquad \ldots (3.56)$$

$$(\underline{\underline{\tilde{K}}} + \underline{\underline{K}}^{*})\ \underline{\tilde{p}} = \underline{\tilde{P}} \qquad \ldots (3.57)$$

Matrisen $\underline{\underline{K}}^{*}$ är diagonal med diagonalelement $k_{ii}^{*}$ som valts enligt

$$k^{*}_{ii} = \eta^{*} \varphi \frac{1}{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} K/l_j \qquad \ldots (3.58)$$

vilket är ekvivalent med att stödja kabeln med linjära fjädrar i dess noder. Termen $\frac{1}{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} K/l_j$ är kabelelementets medstyvhet och $\varphi$ är en faktor som väljes för att erhålla lämplig styvhet. Parametern $\eta^{*} \in [0,1]$ ges successivt olika värden med början från $\eta^{*} = 1$ samt reduceras därefter i lika steg för att slutligen bli noll då alla $\eta_j = 1$. Vilket innebär att fjädrarna försvinner då verkan av tyngdkrafter och hydrostatiska krafter har nått sin fulla styrka.

Till lastparametern $\eta_j$ tilldelas en ökande följd av värden med början ifrån $\eta_j = 0$. För varje laststeg löses först ekv. (3.56). Denna lösning utnyttjas sedan som initial-approximation för att iterativt lösa ekv. (3.57), i princip i enlighet med avsnitt 3.6. I fallet $\eta_j = 0$ förutsättes kabelns geometri sammanfalla med den geometri som kan erhållas genom analytiska lösningar. De kabelgeometrier som då utnyttjas är den oelastiska kedjelinjen (beräknad som om hela kabeln hade lika fördelad massa), en rät linje eller en kombination av dessa. Är avståndet mellan kabelns ändpunkter större än kabelns osträckta längd antages att kabeln är rak med konstant töjning. Om nämnda avstånd är mindre än kabelns osträckta längd antages en kombination av geometrierna, rak kabel utefter havsbotten och en kabel som följer den oelastiska kedjelinjen ovanför densamma.

I det fall då hela kabeln har konstant massa per längdenhet ökas $\eta_j$ med jämna steg. Består däremot kabeln av segment som har olika massa per längdenhet ökas $\eta_j$ med lika steg tills dess något segments yttre krafter har nått sin fulla styrka. Detta segment får därefter inte något bidrag utan enbart de andra segmenten ända tills någon av dessa segments yttre krafter har nått sin fulla styrka osv. Proceduren fortgår ända tills kabeln har nått sitt slutgiltiga jämviktsläge. Målsättning med proceduren är att förskjutningarna skall vara små så att iterationerna kan konvergera.

# 4. BERÄKNINGSEXEMPEL

## 4.1 Inledning

För att jämföra den explicita och implicita metoden redovisas först två beräkningsexempel (avsnitt 4.2, 4.3). Det första exemplet behandlar en fritt hängande kabel påverkad av en ström och med förskjutningsexcitationer i dess båda ändpunkter. Med "fritt hängande" menas då att havsbotten ej inverkar på förloppet. Denna kabel har två olika segment.

I det andra exemplet studeras en förankringskabel. Förskjutningarna är noll i ena ändpunkten (fast ankare), i den andra föreskrives vissa rörelser som kan tänkas motsvara en förenkling av de rörelser som en storm kan ge upphov till. I detta fall inverkar havsbotten.

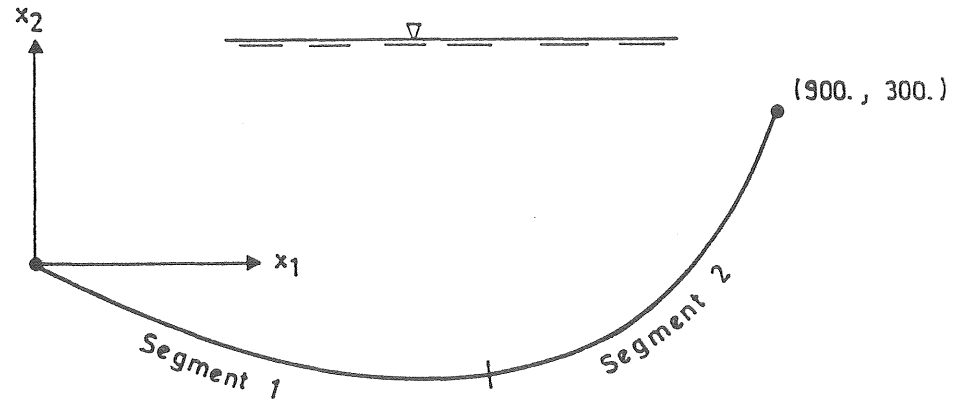
I manualen för programmen [5] är indataformuleringen till beäkningsexempel enligt avsnitt 4.2 och 4.3 redovisade i detalj.

Ytterligare beräkningsexempel redovisas. I avsnitt 4.4 redovisas resultat för att studera konvergens vid beräkning av krafter i en förankringskabel. Avsnitt 4.6 behandlar en hängande kabel som påverkas av en ström. explicita metod

Den explicita metoden enligt [1] har varit föremål för smärre modifikationer. Modell för inverkan av friktion mellan kabel och havsbotten beaktas nu enligt appendix [2]. Inre dämpning i kabeln har införts, se appendix [1].

## 4.2 Förskjutningsexciterad kabel i en ström

Antag att en kabel hänger i vila i vattnet enligt figur 4.1 vid tiden $t = 0$.




Figur 4.1 Kabelns jämviktsläge

Kabeln består av två segment (kätting) med data enligt följande:

Segment 1

| | |
|---|---|
| Kabelsegmentets osträckta längd | = 500 m |
| Kabelns diameter $d_o$ | = 0.076 m |
| Kabelns styvhet K | = $5 \cdot 10^8$ N |
| Kabelns dämpning c (utnyttjas ej vid implicit metod) | = $5 \cdot 10^6$ Ns |
| Massa per längdenhet osträckt längd $\gamma_o$ | = 135.35 kg/m |
| Densitet $\rho_k$ | = 7800 $kg/m^3$ |
| Släpkraftskoefficient i tangentialled $C_{DT}$ | = 0.5 |
| Släpkraftskoefficient i normalled $C_{DN}$ | = 2.5 |
| Koefficienten för den adderade massan $C_{MN}$ | = 3.8 |

Segment 2

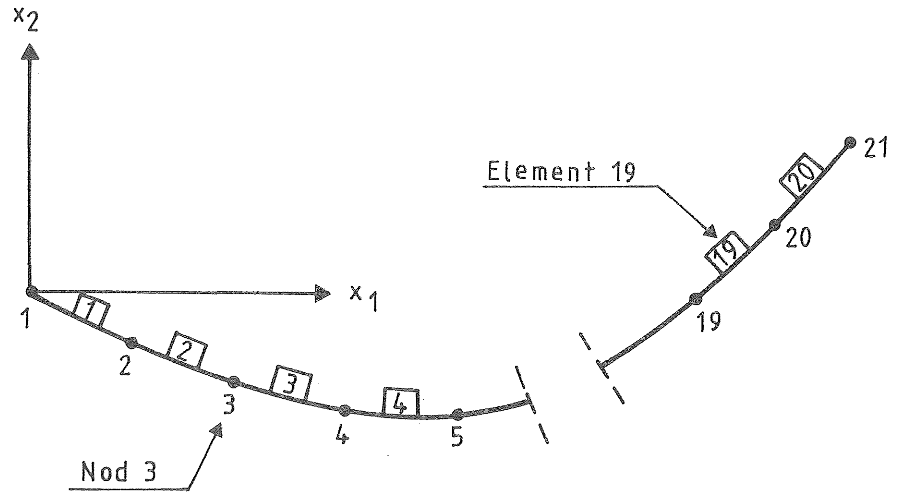
| | |
|---|---|
| Kabelsegmentets osträckta längd | = 600 m |
| Kabelns diameter $d_o$ | = 0.1 m |
| Kabelns styvhet K | = $9.1 \cdot 10^8$N |
| Kabelns dämpning c (utnyttjas ej vid implicit metod) | = $9.1 \cdot 10^5$NS |
| Massa per längdenhet osträckt längd $\gamma_o$ | = 233.6 kg/m |
| Densitet $\rho_k$ | = 7800 $kg/m^3$ |
| Släpkraftskoefficient i tangentialled $C_{DT}$ | = 0.5 |
| Släpkraftskoefficient i normalled $C_{DN}$ | = 2.5 |

Koefficienten för den adderade massan $C_{MN}$ = 3.8
Vattnets densitet är = 1000 kg/$m^3$

Vid tider $t > 0$ påverkas kabeln av en likformig ström parallell med $x_1$-axeln samt av förskjutningsexcitationer i dess båda ändpunkter. Strömmens hastighet antages växa från hastigheten noll vid tiden $t = 0$ till hastigheten 4 m/s vid tiden 2.5s och är konstant 4 m/s för $t > 2.5$s.

Förskjutningarna i kabelns båda ändpunkter är periodiska med perioden T = 10 s. Dessa antages "starta" vid tiden t = 10 s och deras amplitud ökar linjärt i början $10 < t < 12,5$ s, d.v.s. under en kvartsperiod 2,5 s.

Kabelsegmenten indelas i vardera 10 element, elementlängden blir då 50 respektive 60 m. Element och nodnumrering framgår av figur 4.2.



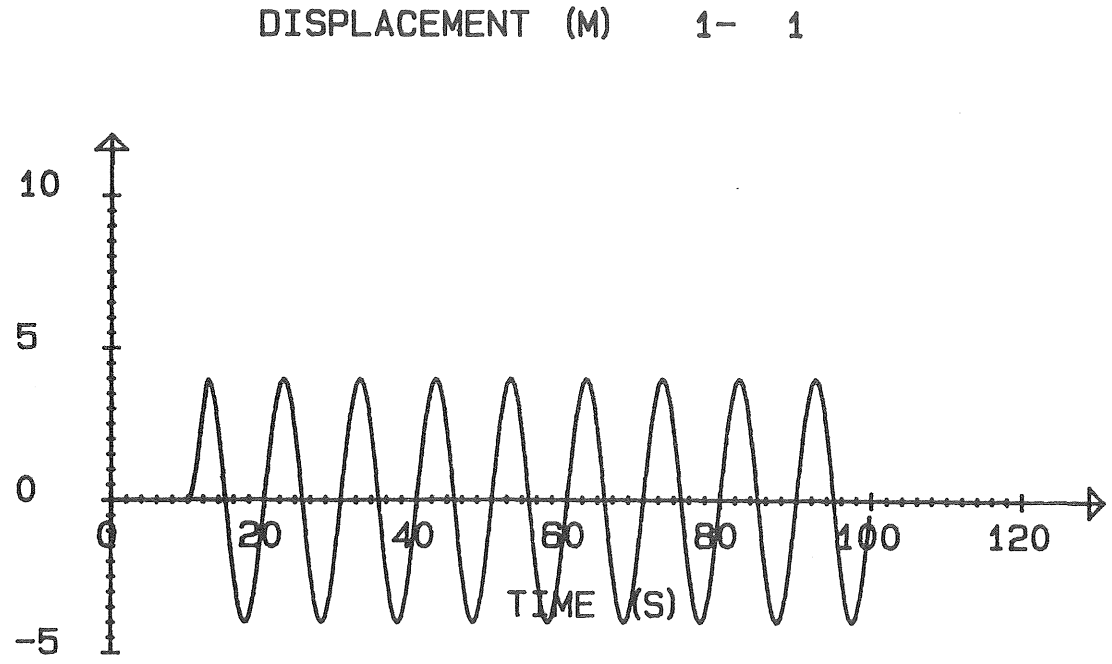

Figur 4.2 Numrering av noder och element

Eftersom inga krafter verkar ut ur kabelns jämviktsplan genomföres beräkningarna tvådimensionellt. Alla förskjutningar som redovisas relateras till kabelns jämviktsläge.

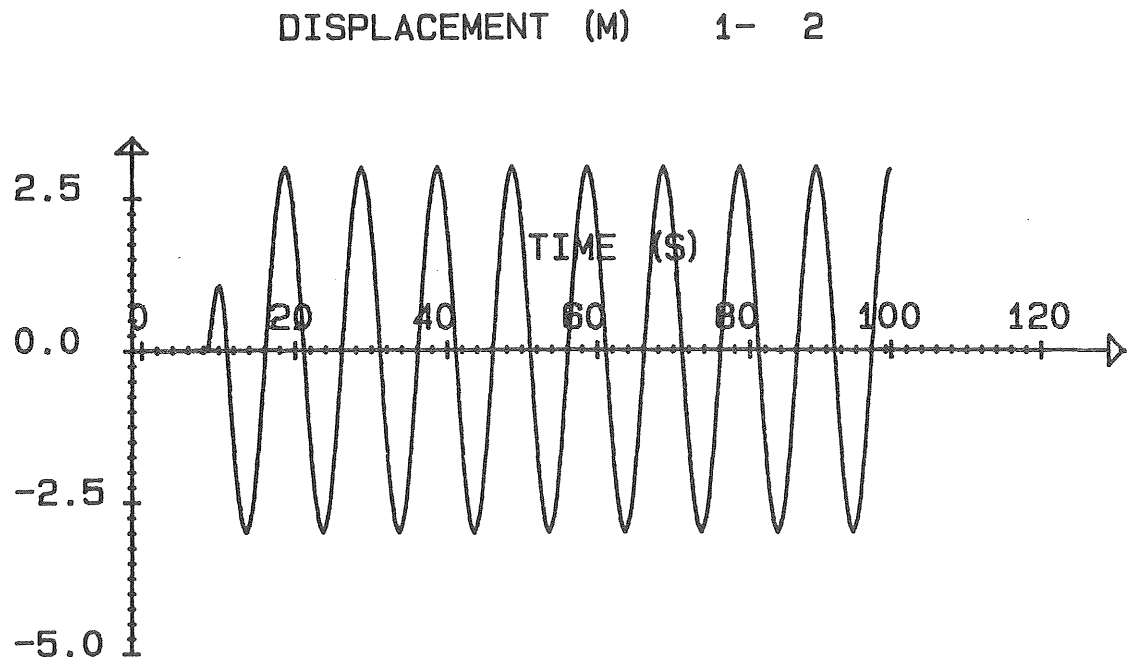
I detta fall skall vi studera förskjutningarna i nod 10 riktning $x_1$ samt kabelns inre krafter i element 10 och 20. Dessa plottas ut. De föreskrivna förskjutningarna plottas också ut.

Beräkningarna genomföres med explicit och implicit numerisk integration under en tid av 100 s. Tidsteget är 0.01 respektive 0.2 s.

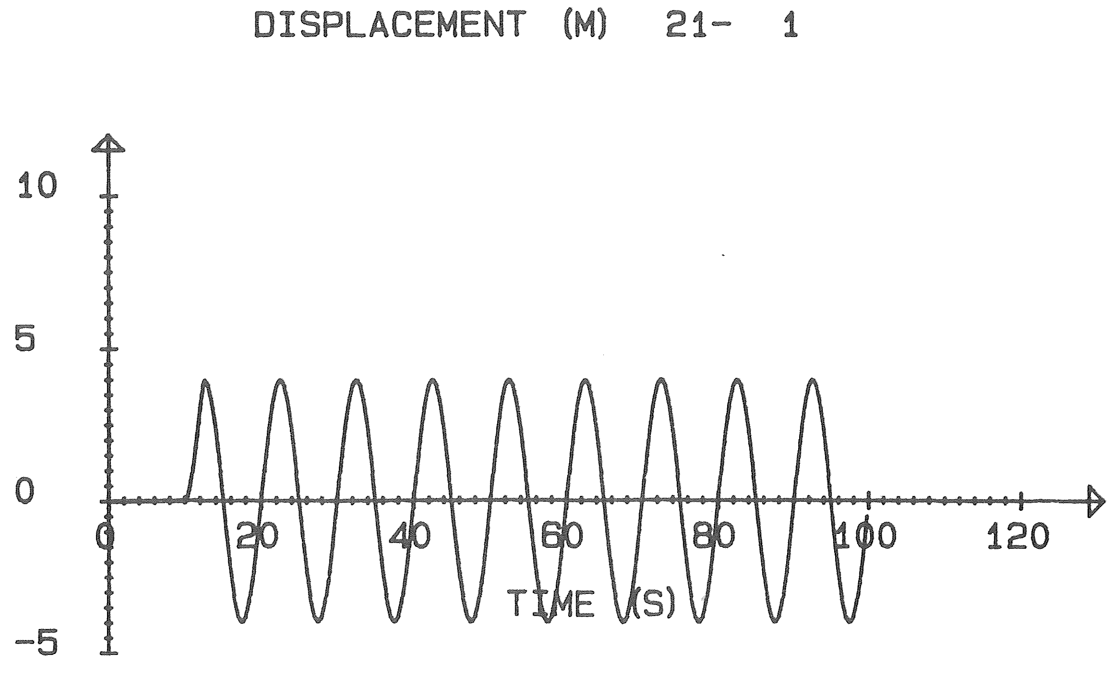
De föreskrivna förskjutningarna vid kabelns ändpunkter framgår av fig. 4.3 - 4.6.



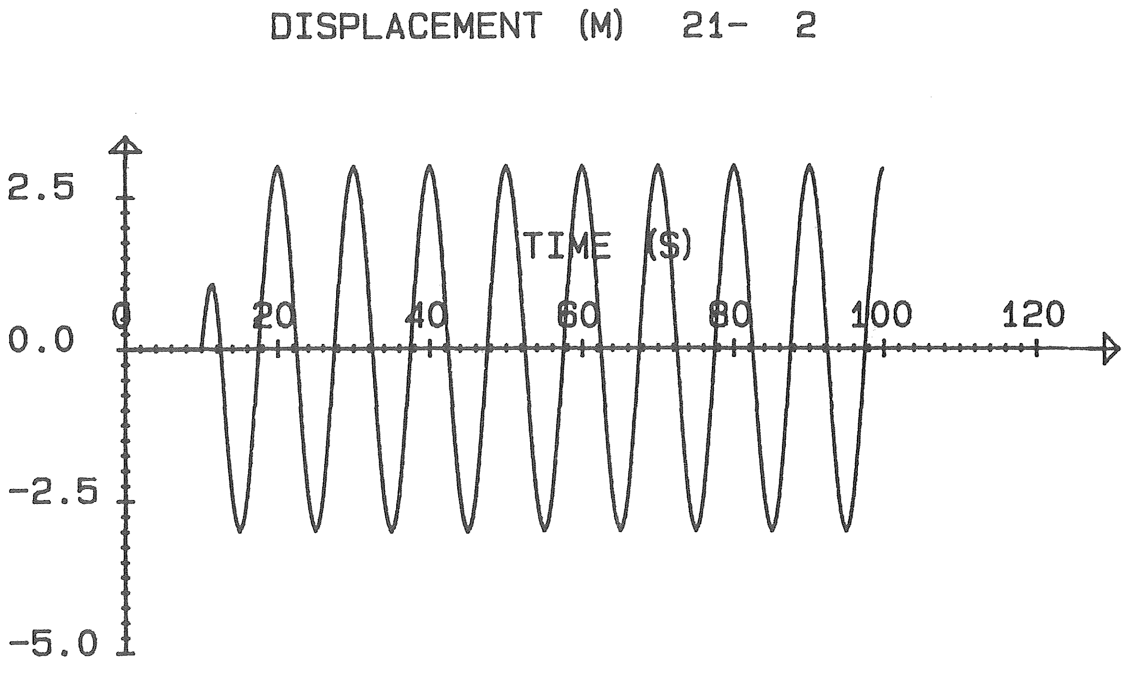

Figur 4.3 Föreskriven förskjutning i nod 1 riktning $x_1$.




Figur 4.4 Föreskriven förskjutning i nod 1 riktning $x_2$.

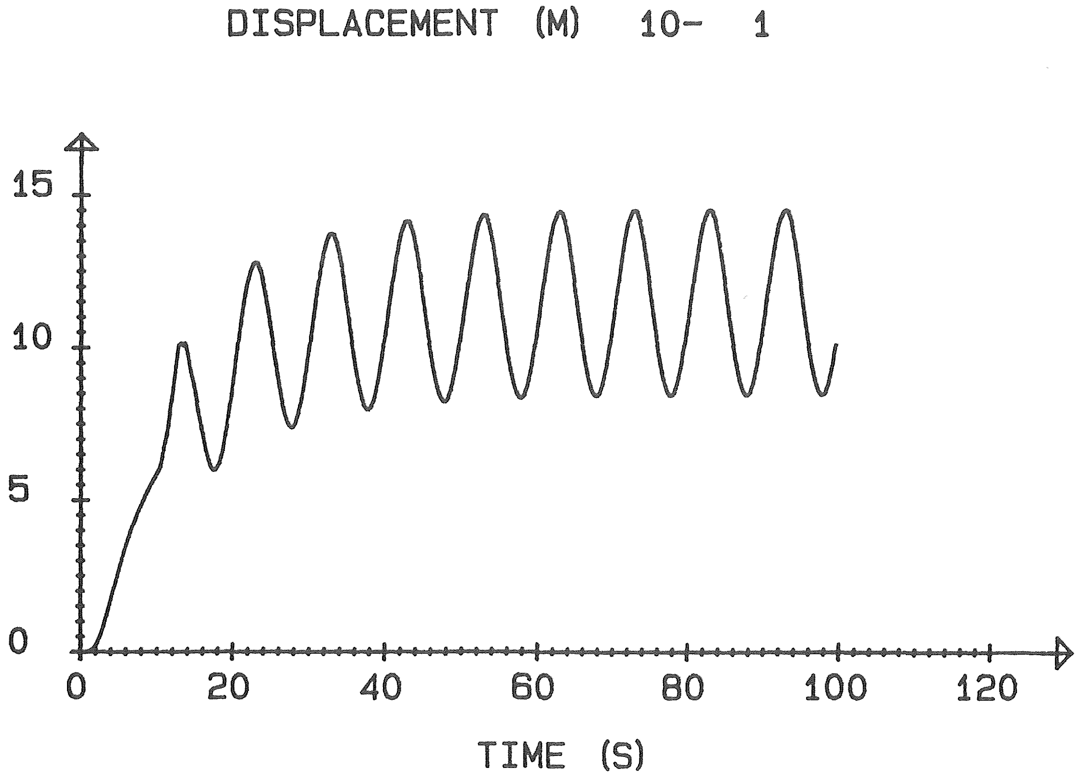



Figur 4.5 Föreskriven förskjutning i nod 21 riktning $x_1$.

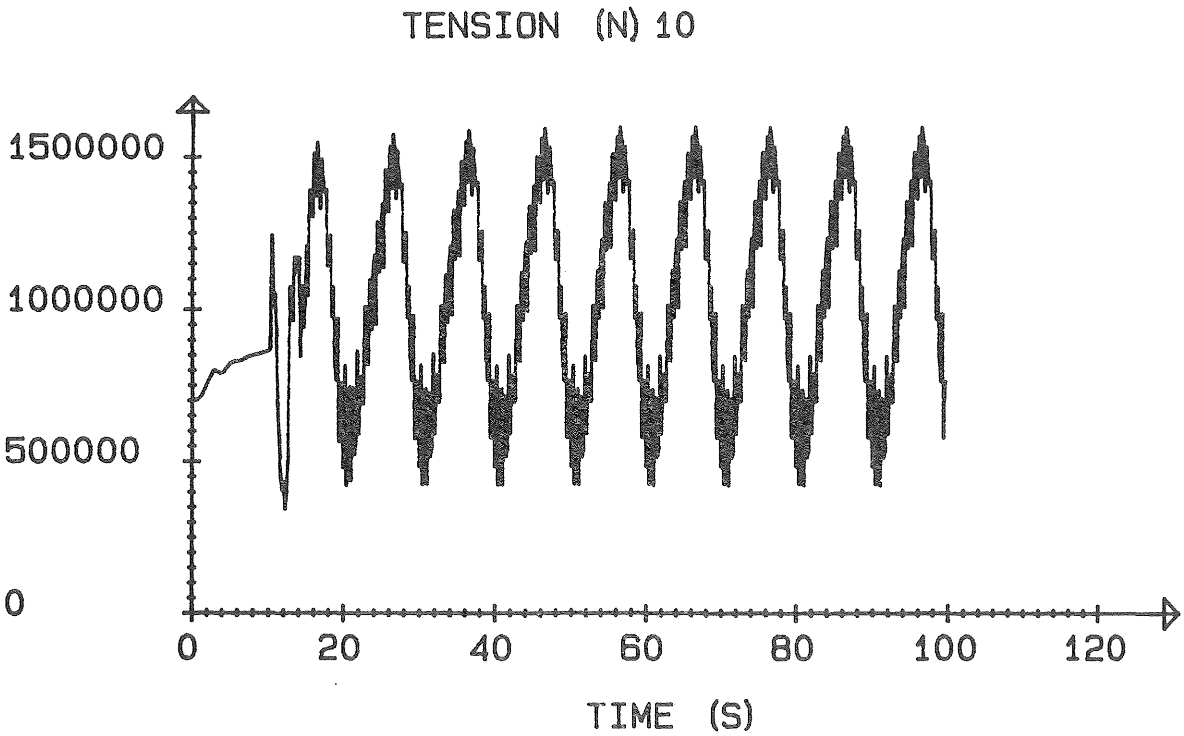



Figur 4.6 Föreskriven förskjutning i nod 21 riktning $x_2$.

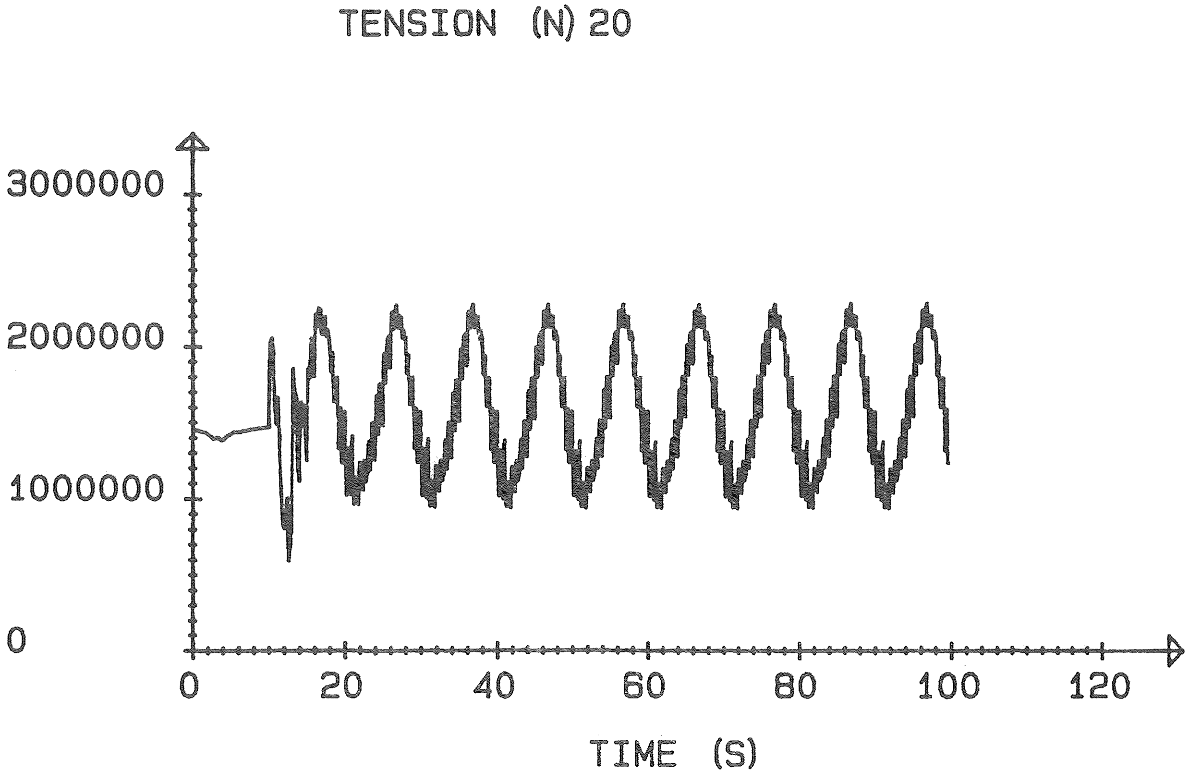
Förskjutningen i nod 10 riktning $x_1$ och krafterna i element 10 och 20 visas för den explicita metoden i figur 4.7 - 4.9 och för den implicita i figur 4.10 - 4.12.



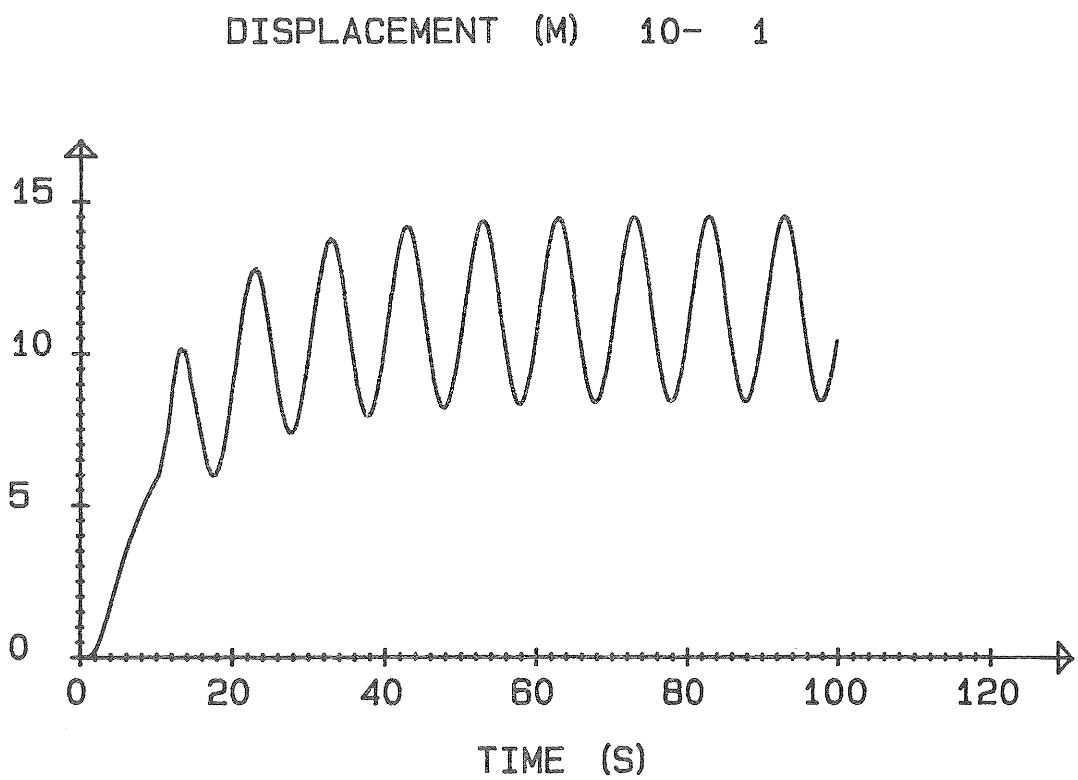

Figur 4.7 Förskjutningen i nod 10 riktning $x_1$, explicit metod.



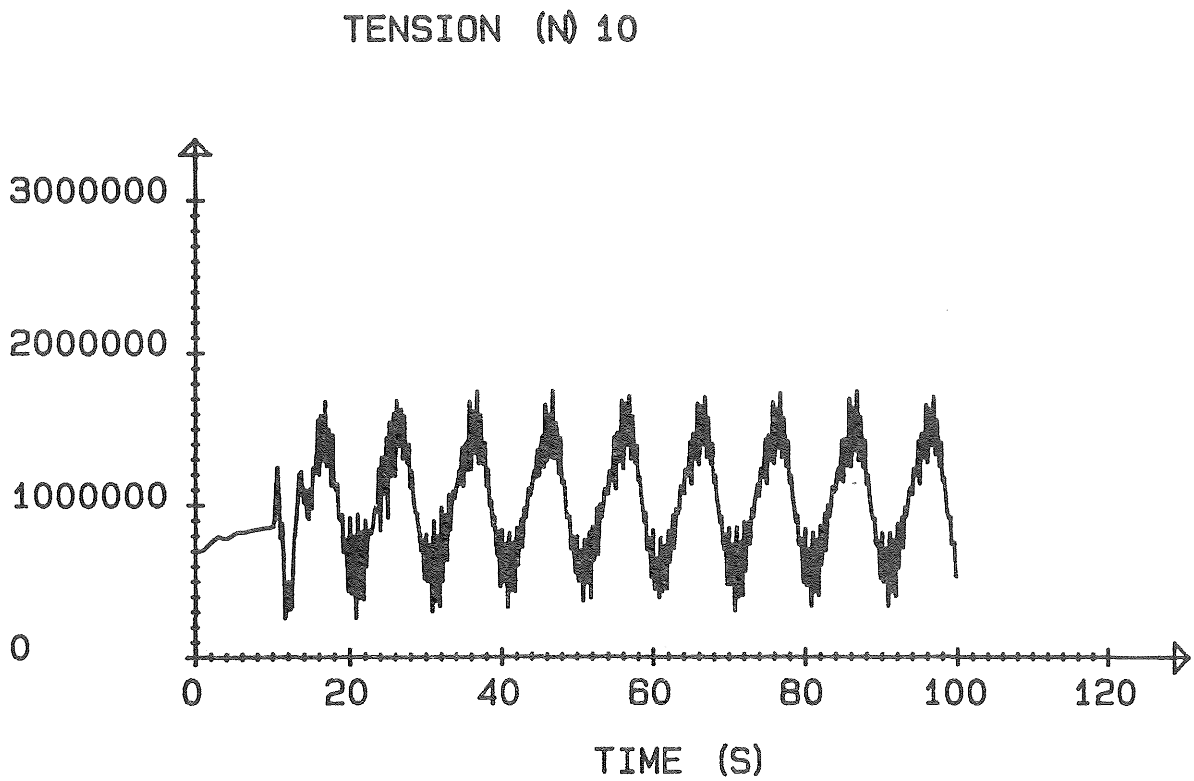

Figur 4.8 Kraften i element 10, explicit metod.



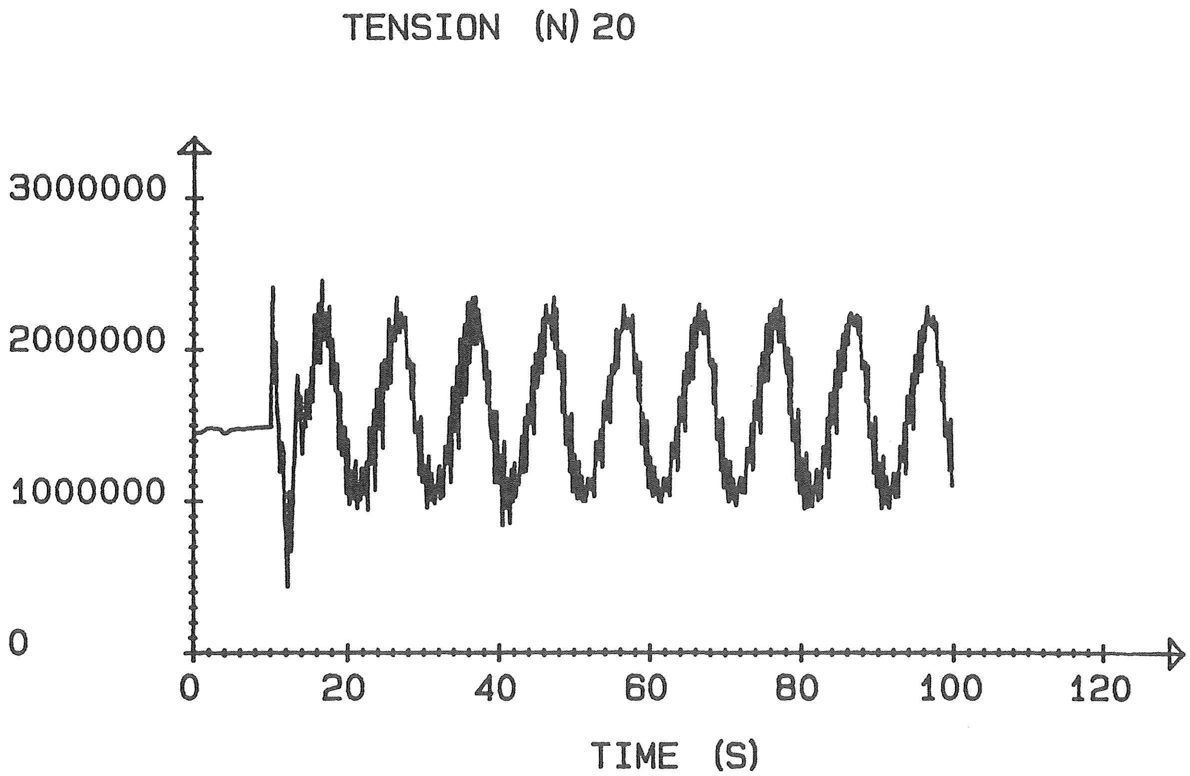

Figur 4.9 Kraften i element 20, explicit metod.




Figur 4.10 Förskjutningen i nod 10 riktning $x_1$, implicit metod.




Figur 4.11 Kraften i element 10, implicit metod.

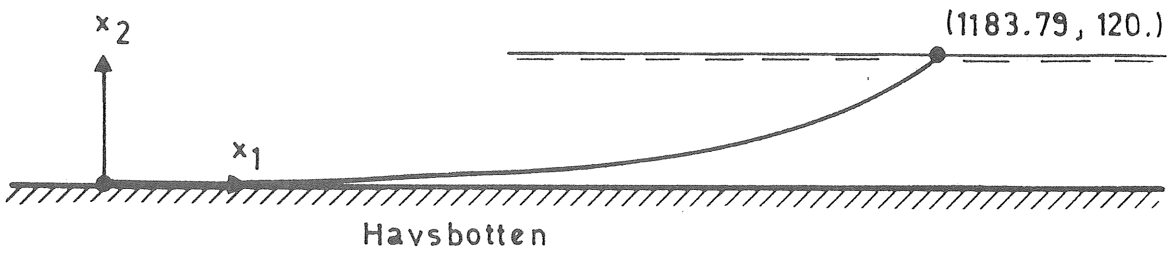



Figur 4.12 Kraften i element 20, implicit metod.

Datorns CPU-tid för den explicita metoden (tidsteget 0.01s) blev 79s och för den implicita metoden (tidssteget 0.2s) 72s. I detta fall blev beräkningsarbetet ungefär lika trots att den implicita metoden hade 20 ggr så långt tidssteg som den explicita. Jämföres förloppen med varandra är de i stort sett likartade. De bakomliggande fysikaliska modellerna skiljer sig lite i detta fall. För den explicita metoden har en inre dämning i kabeln införts (se appendix 1), denna har haft liten inverkan,

## 4.3 Förskjutningsexciterad förankringskabel

Kabeln hänger i vila vid tiden t = 0 enligt figur 4.13.




Figur 4.13 Kabelns jämviktsläge.

Kabeln (kätting) har följande data:

| | |
|---|---|
| Kabelns osträckta längd | = 1200 m |
| Kabelns diameter $d_o$ | = 0.076 m |
| Kabelns styvhet K | = $5 \cdot 10^8$ N |
| Kabelns dämpning c | = 0.0 |
| Massa per längdenhet osträckt längd $\gamma_o$ | = 135.35 kg/m |
| Densitet $\rho_k$ | = 7800 kg/m$^3$ |
| Släpkraftskoefficient i tangentialled $C_{DT}$ | = 0.5 |
| Släpkraftskoefficient i normalled $C_{DN}$ | = 2.5 |
| Koefficienten för den adderade massan $C_{MN}$ | = 3.8 |
| Friktionskoefficienten mellan kabel och havsbotten (utnyttjas ej vid implicit metod) | = 1.0 |
| Tolerans i friktionsmodellen $c_v$ (utnyttjas ej vid implicit metod) | = 0.3 m/s |
| Vattnets densitet är | = 1000 kg/m$^3$ |

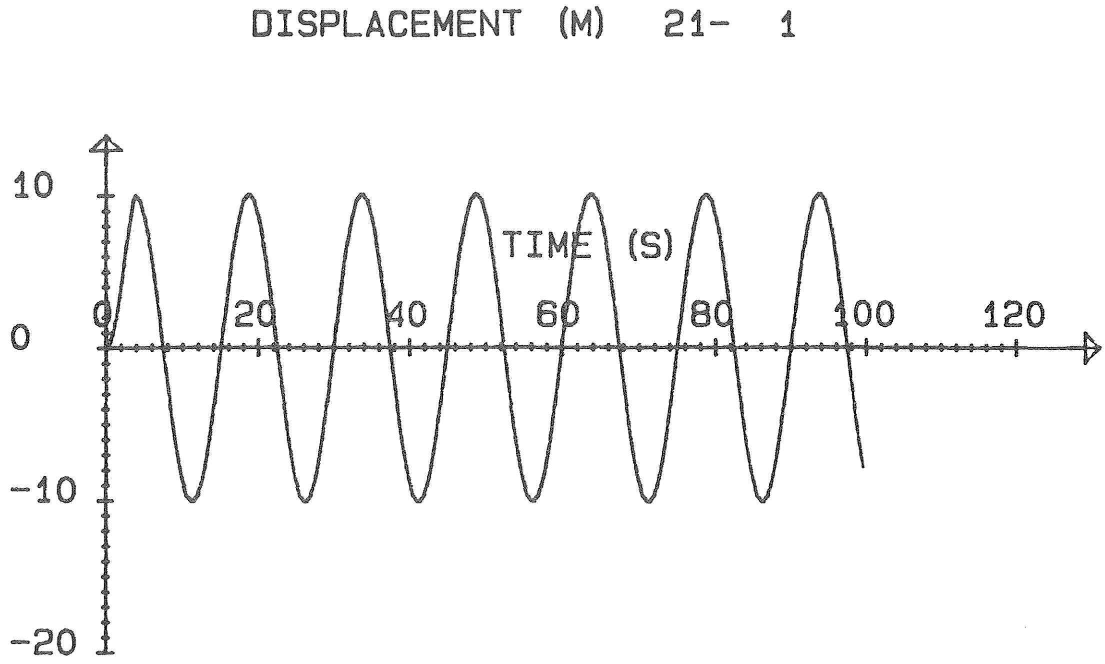
Kabelns nedsjunkning i jämvikt b enligt ekv.(2.13) väljes till b=0.1 m, vilket utnyttjas vid den implicita metoden.

Vid tider t>0 föreskrives en periodiskt varierande förskjutning (T = 15s) i den övre ändpunkten. En kvartsperiod 0 < t < 3.75 s reduceras dessa. Tidssteget i den explicita och implicita metoden är 0.015 respektive 0.3 s.

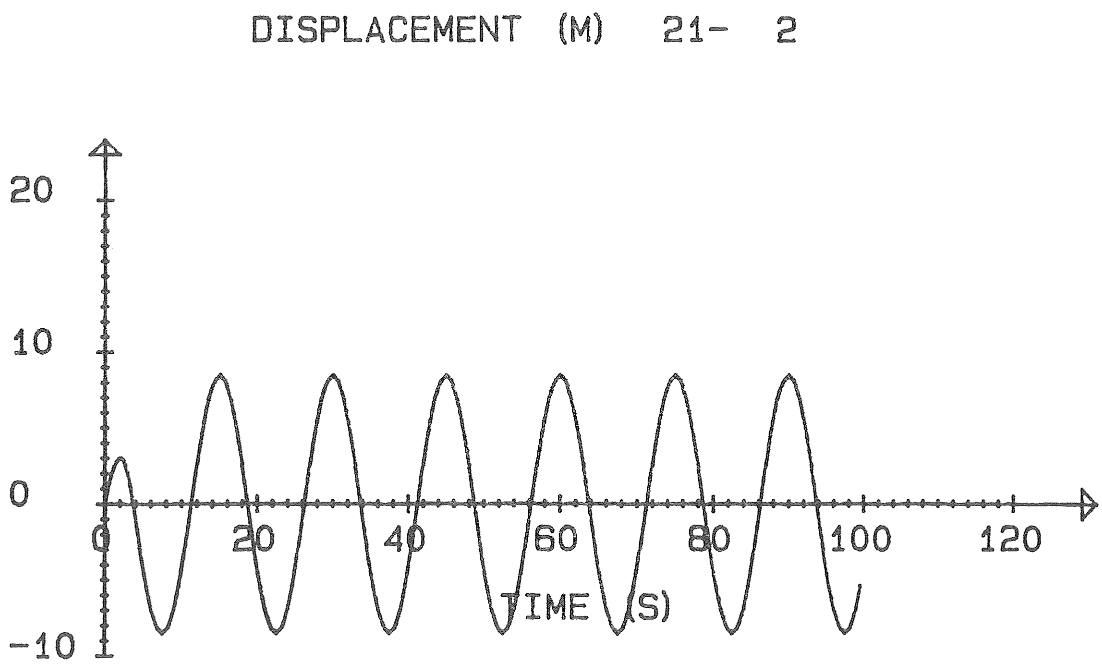
Kabeln indelas i totalt 20 st element. Beräkningarna är tvådimensionella. Element och nodnumrering är utförd i princip enligt figur 4.2. Alla förskjutningar som redovisas mätes relativt kabelns jämviktsläge.

I detta fall plottas kabelns inre krafter i element 1 och 20, samt förskjutningens vertikalkomponent i nod 1 och 20. De föreskrivna förskjutningarna i kabelns övre ändpunkt plottas också. Dessutom studeras kabelns konfigurationer i vertikalplanet vid tiderna 46, 49, 52, 55 och 58 sekunder.

De föreskrivna förskjutningarna vid kabelns ändpunkt framgår av figur 4.14 - 4.15.

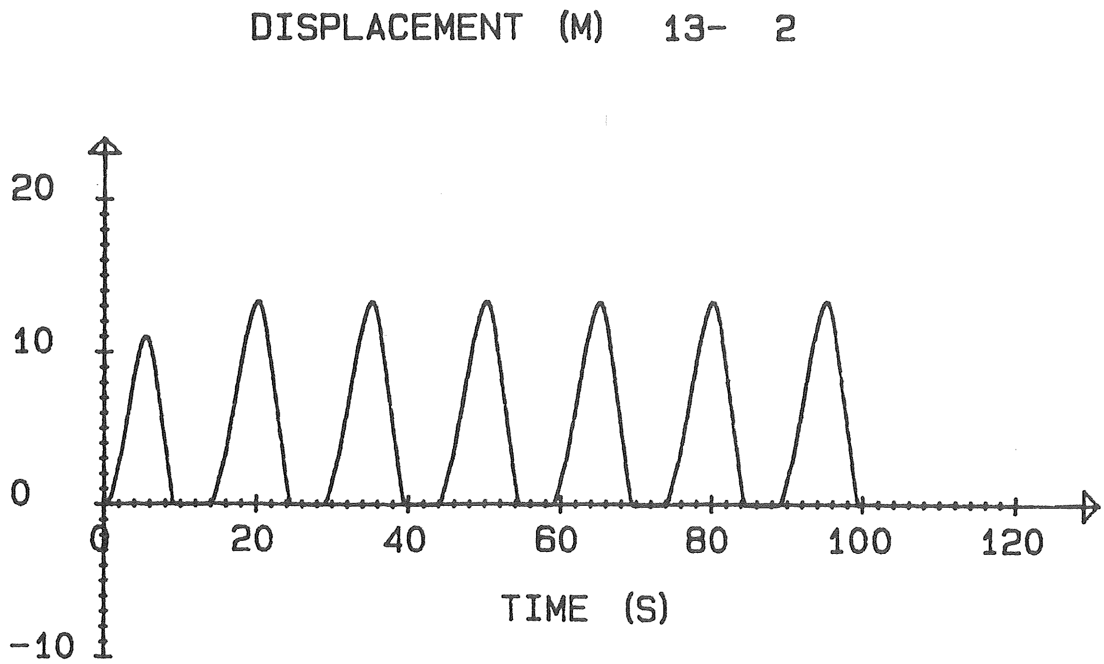



Figur 4.14 Föreskriven förskjutning i nod 21 riktning $x_1$.

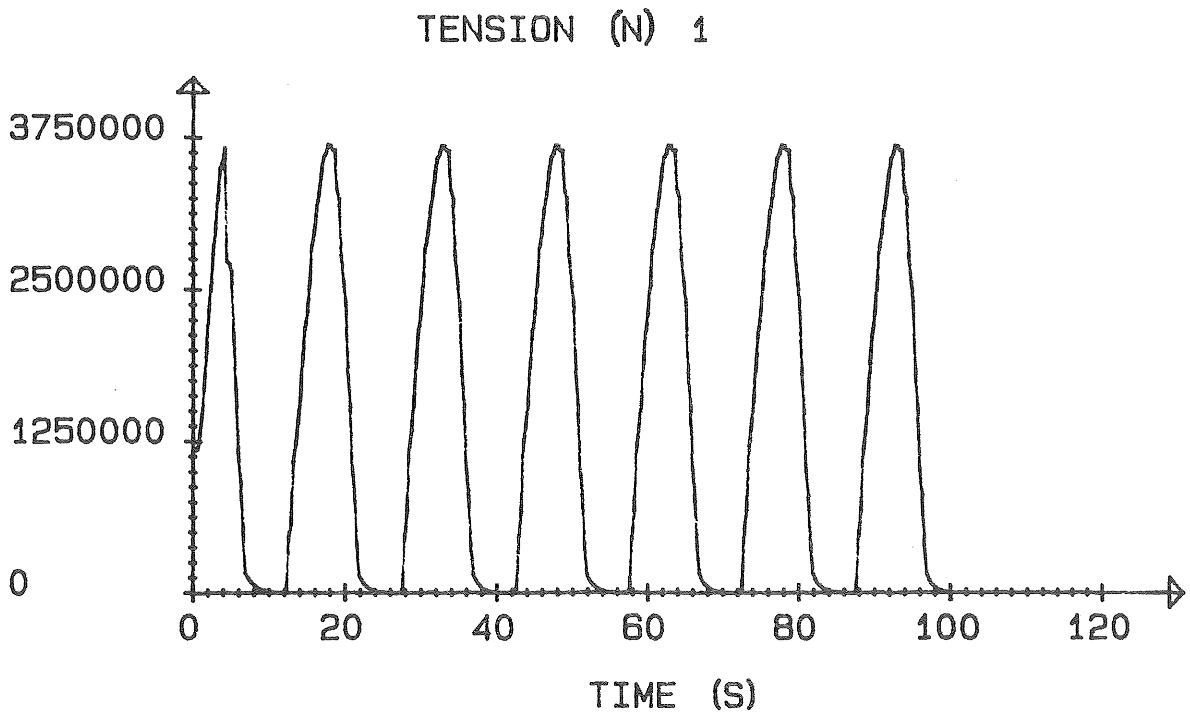



Figur 4.15 Föreskriven förskjutning i nod 21 riktning $x_2$.

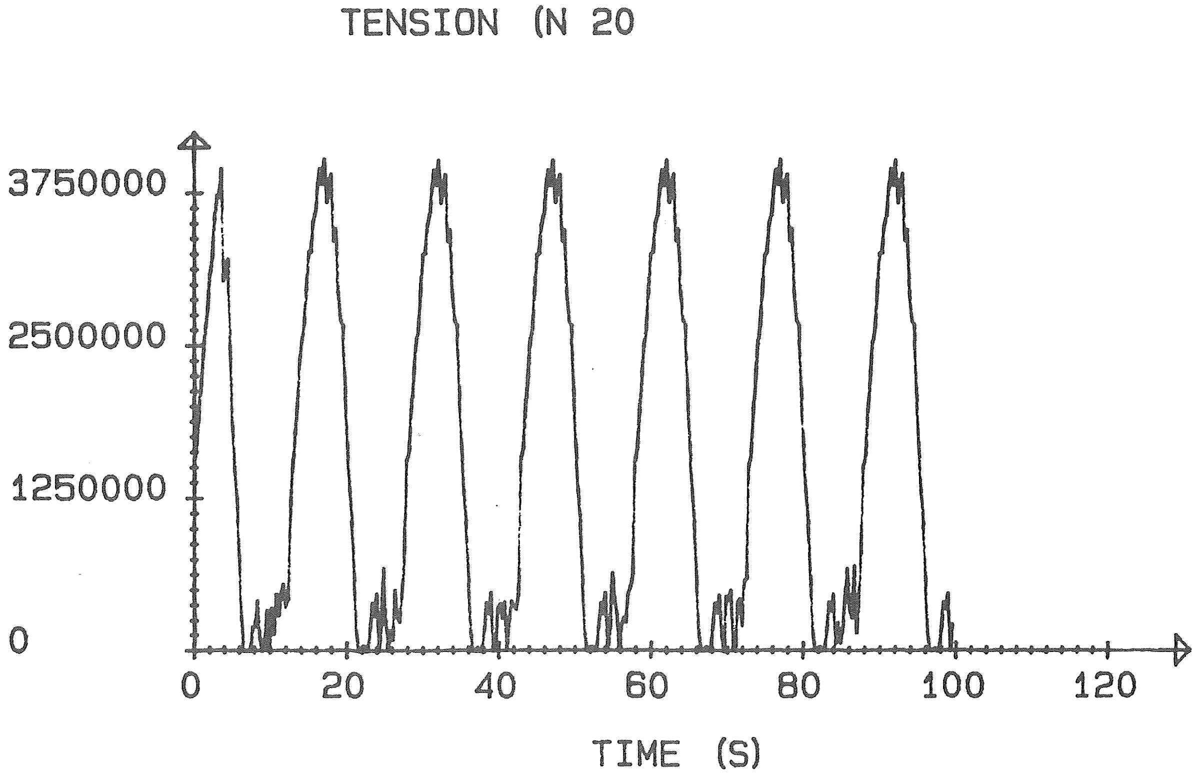
Förskjutningens vertikalkomponent i nod 13 samt krafterna i element 1 och 20 visas för den explicita metoden i figur 4.16 - 4.18 och för den implicita metoden i figur 4.19 - 4.21.



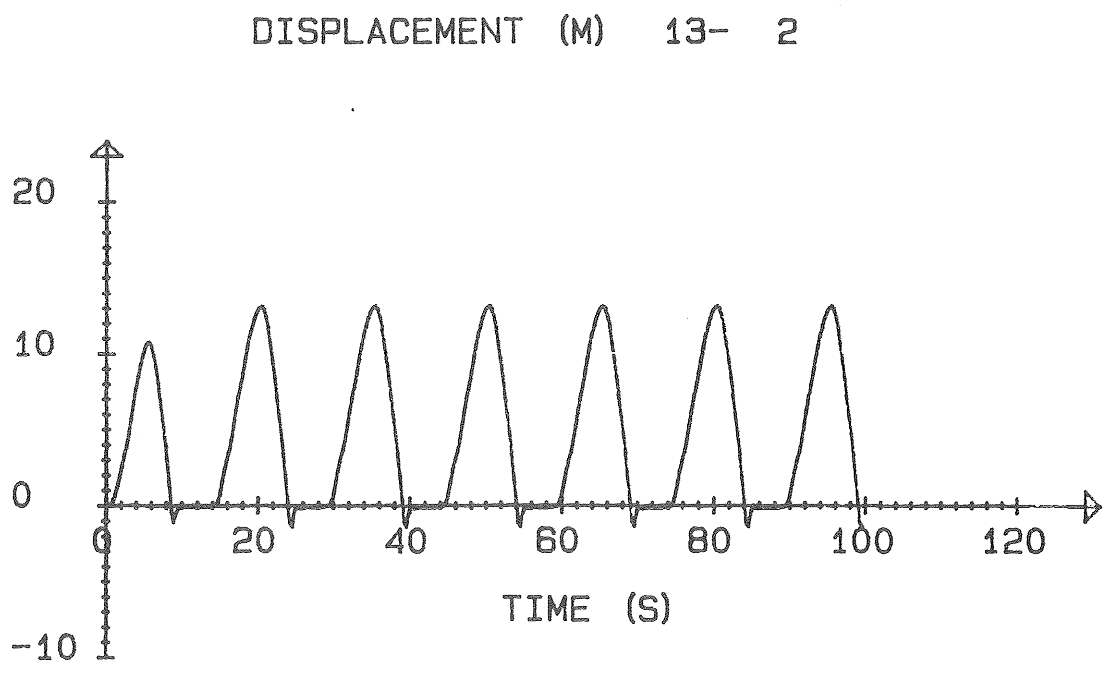

Figur 4.16 Vertikala förskjutningen i nod 13, explicit metod.



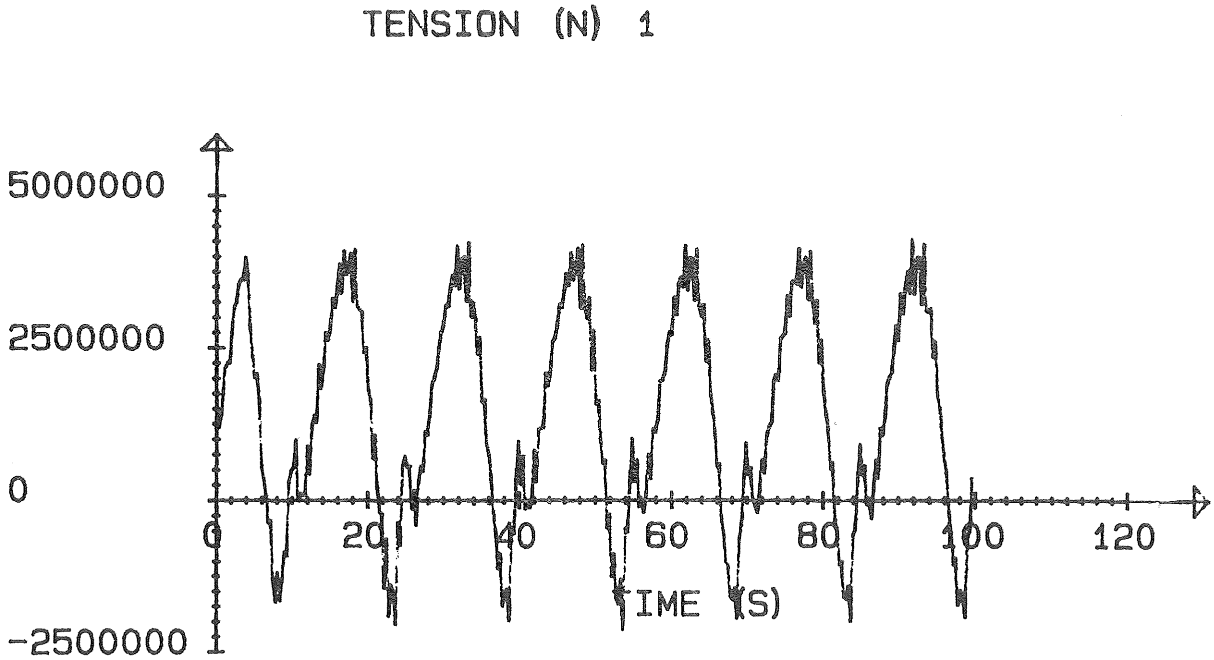

Figur 4.17 Kabelns inre kraft i element 1, explicit metod.



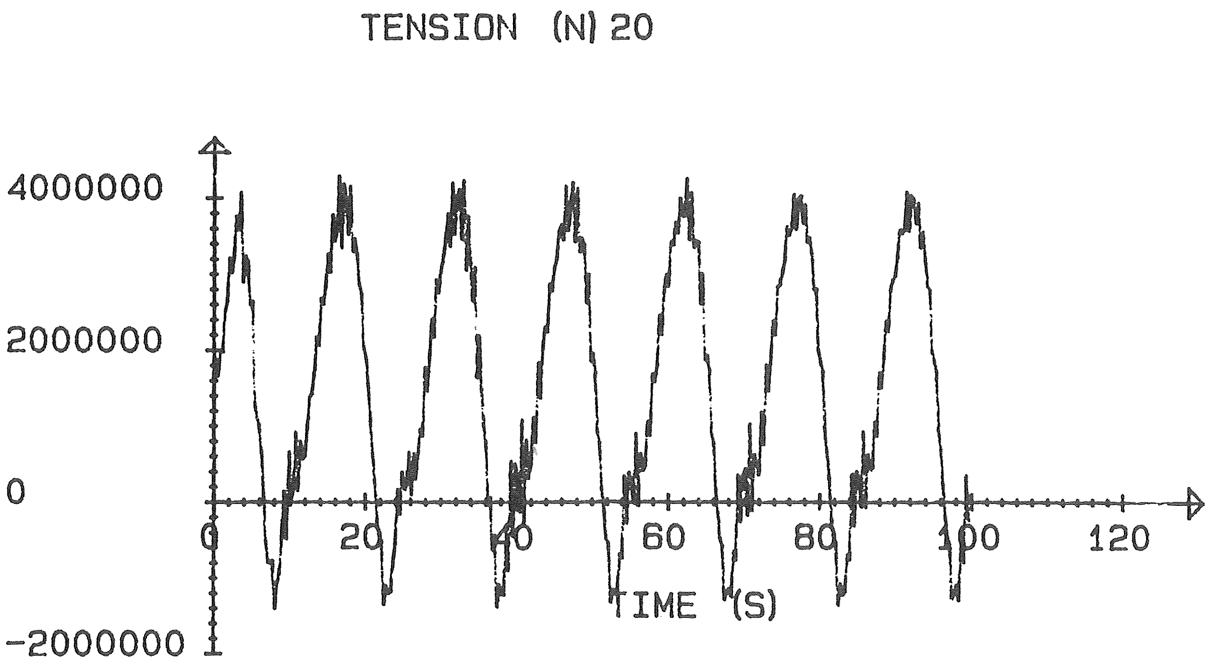

Figur 4.18 Kabelns inre kraft i element 20, explicit metod.




Figur 4.19 Vertikal förskjutning i nod 13, implicit metod.



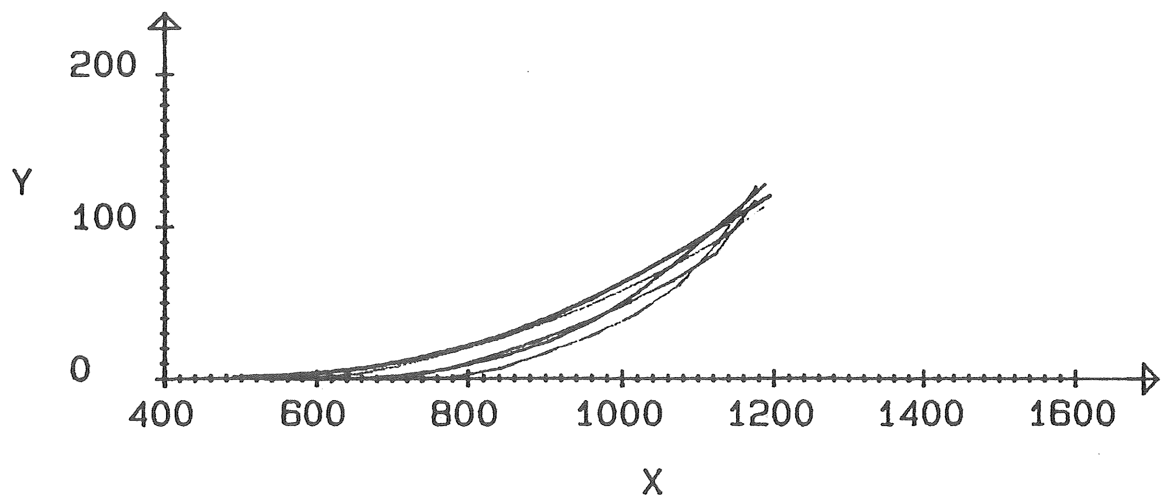

Figur 4.20 Kabelns inre kraft i element 1, implicit metod.



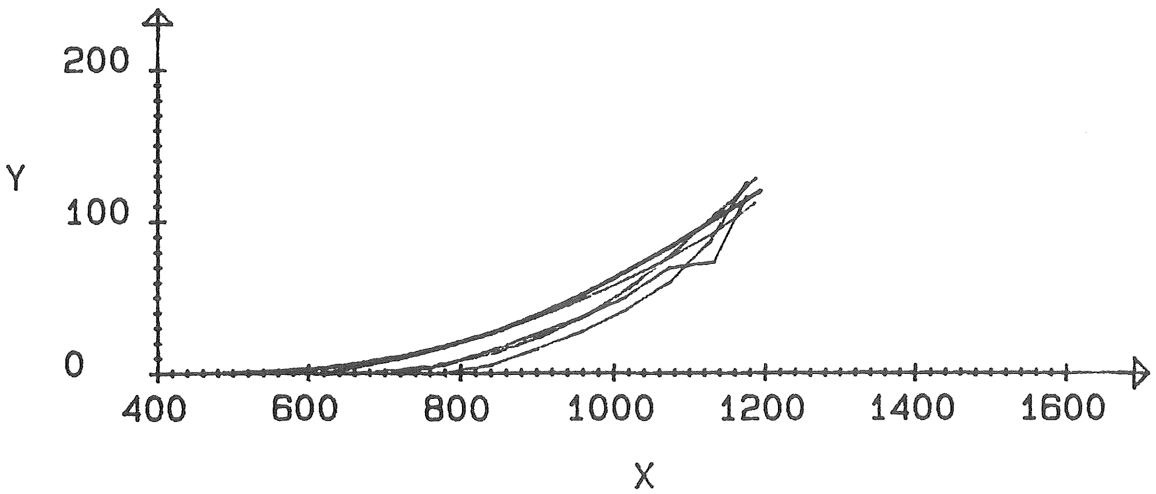

Figur 4.21 Kabelns inre kraft i element 20, implicit metod

Observera att kabeln komprimeras (negativa töjningar) och att detta förlopp beräknas annorlunda i de olika modellerna. Vid implicit lösning antages kabeln kunna ta upp tryckkrafter men vid den explicita metoden har vi här antagit att kraften är noll i kabeln om töjningarna är negativa. Den implicita metoden prövades även med denna modell. Detta resulterade i att lösningen blev divergent för små krafter i kabeln.

I figur 4.22 - 4.23 visas kabelns konfigurationer i vertikalplanet för den explicita respektive den implicita metoden. I figur 4.23 syns tydligt att kabeln knäcker p.g.a. tryckkrafter i kabeln, dynamiskt instabila förhållanden erhålles.




Figur 4.22 Kabelns konfigurationer i vertikalplanet, explicit metod.




Figur 4.23 Kabelns konfigurationer i vertikalplanet, implicit metod.

Trots de olika sätten att beräkna kraften vid negativa töjningar kan noteras att maximala dragkraften i kabeln är ungefär lika för de två metoderna. Datorns Cpu-tid blev för den explicita metoden (tidssteget 0.015 s) 55 s och för den implicita (tidssteget 0.3 s) 70 s.

## 4.4 Förskjutningsexciterad förankringskabel, studier av konvergens

För att få en viss uppfattning angående erforderligt antal element redovisas en serie av beräkningar för kabeln i föregående avsnitt (4.3). Alla beräkningar utföres med den explicita metoden.

Antag att kabeln enligt avsnitt (4.3) hänger i vila vid tiden $t = 0$ (se figur 4.13). Vid tider $t > 0$ föreskrives en periodiskt varierande förskjutning i övre punkten $s_o = L$ enligt följande:

$$u_1(L,t) = \eta A_1 \frac{4t}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t$$

$$u_2(L,t) = \eta A_2 \frac{4t}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

för $t < T/4$,

$$u_1(L,t) = \eta A_1 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

$$u_2(L,t) = \eta A_2 \cos \frac{2\pi}{T} t$$

för $t > T/4$,

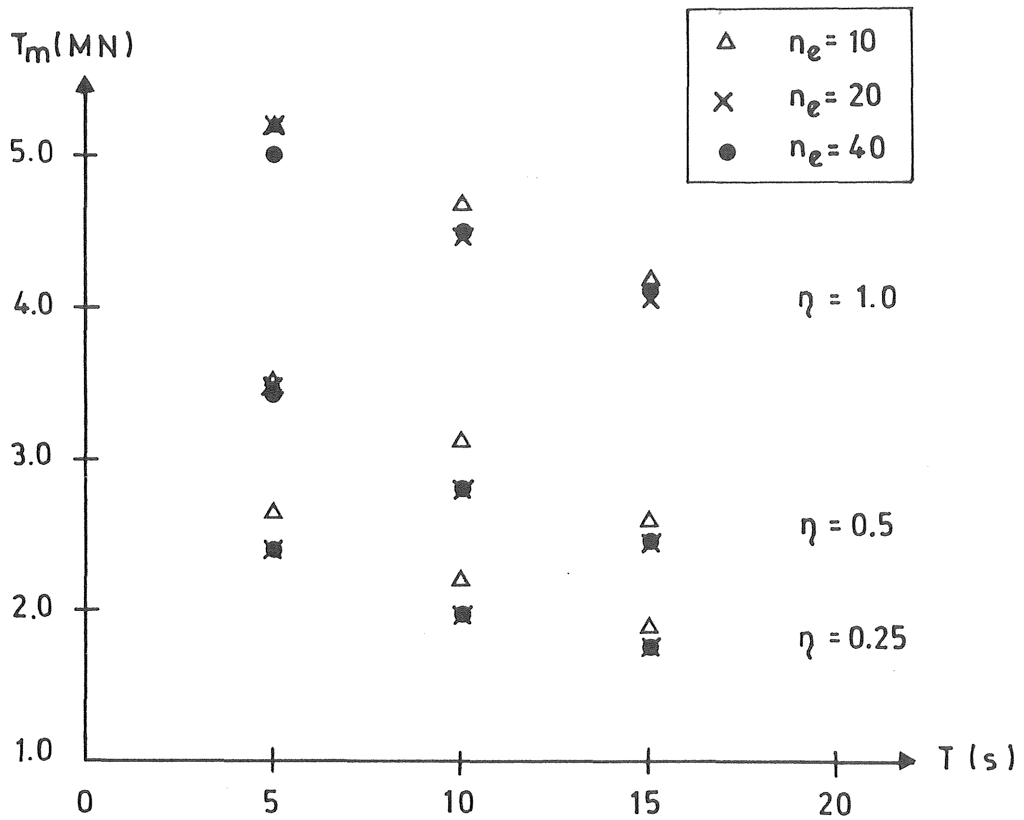
där $A_1 = 10.16$ m
$A_2 = 8.5$ m
$\eta$ = amplitudparameter

I beräkningarna varieras periodtiden T, amplitudparametern $\eta$ samt antal element $n_e$ enligt följande:

$T = 5, 10, 15$ (s)
$\eta = 0.25, 0.5, 1.0$
$n_e = 10, 20, 40$ st

Således genomföres totalt 27 st. simuleringar. I dessa fall observeras enbart kabelns maximala dragkraft $T_m$ under en tid av 100 s. Denna kraft anses här vara något mått på den numeriska lösningens konvergens. Studeras kraften $T_m$ som funktion av perioden T för olika värden på amplitudparametern $\eta$ och antal element $n_e$ erhålles resultat enligt figuren nedan.

Figuren visar att antalet element $n_e = 10, 20, 40$ inverkar lite på beräkningsresultatet. Skillnaden är störst för $\eta = 1$, $T = 5$s. Vidare så syns att kraftens storlek minskar med ökande T samt växer med ökande $\eta$. I ett sådant här fall krävs alltså inte särskilt många element för att få en god uppfattning om de krafter som verkar i kabeln.



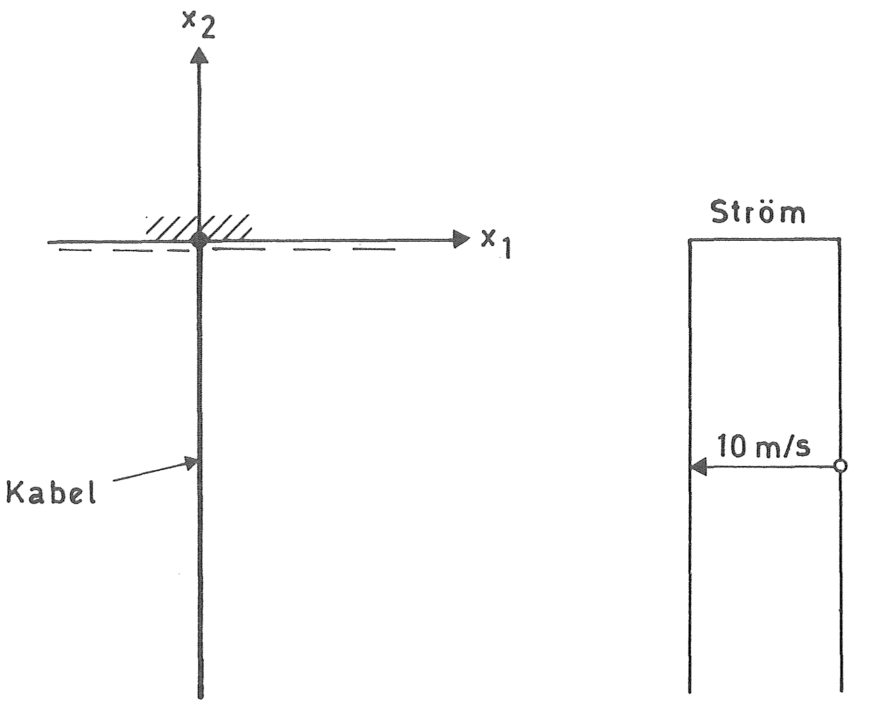

Figur 4.24 Kabelns maximala kraft $T_m$ som funktion av periodtiden T för olika antal element $n_e$ och olika värden på amplitudparametern η

Situationen uppfattas enligt följande: De dämpande släpkrafterna som verkar i kabelns normalriktning har stor inverkan på det dynamiska förloppet. Dessa krafter strävar att reducera kabelns krökning (dvs hålla kabeln så rak som möjligt). Studeras kabelfigurationerna i föregående exempel, figur 4.22 ($T$ = 15 s, $\eta$ = 1) så syns också att elementindelningen ($n_e$ = 20) är tillräckligt tät.

Erforderligt antal element måste naturligtvis bedömas ifrån fall till fall. För förankringskablar som är relativt sträckta i sin medelposition (statiska läget) så borde det inte erfordras så särskilt många element för att få en uppfattning om de krafter som verkar i kabeln.

## 4.5 En hängande kabel påverkad av en ström

Antag att en kabel hänger i vila enligt figur 4.25 vid tiden t=0.

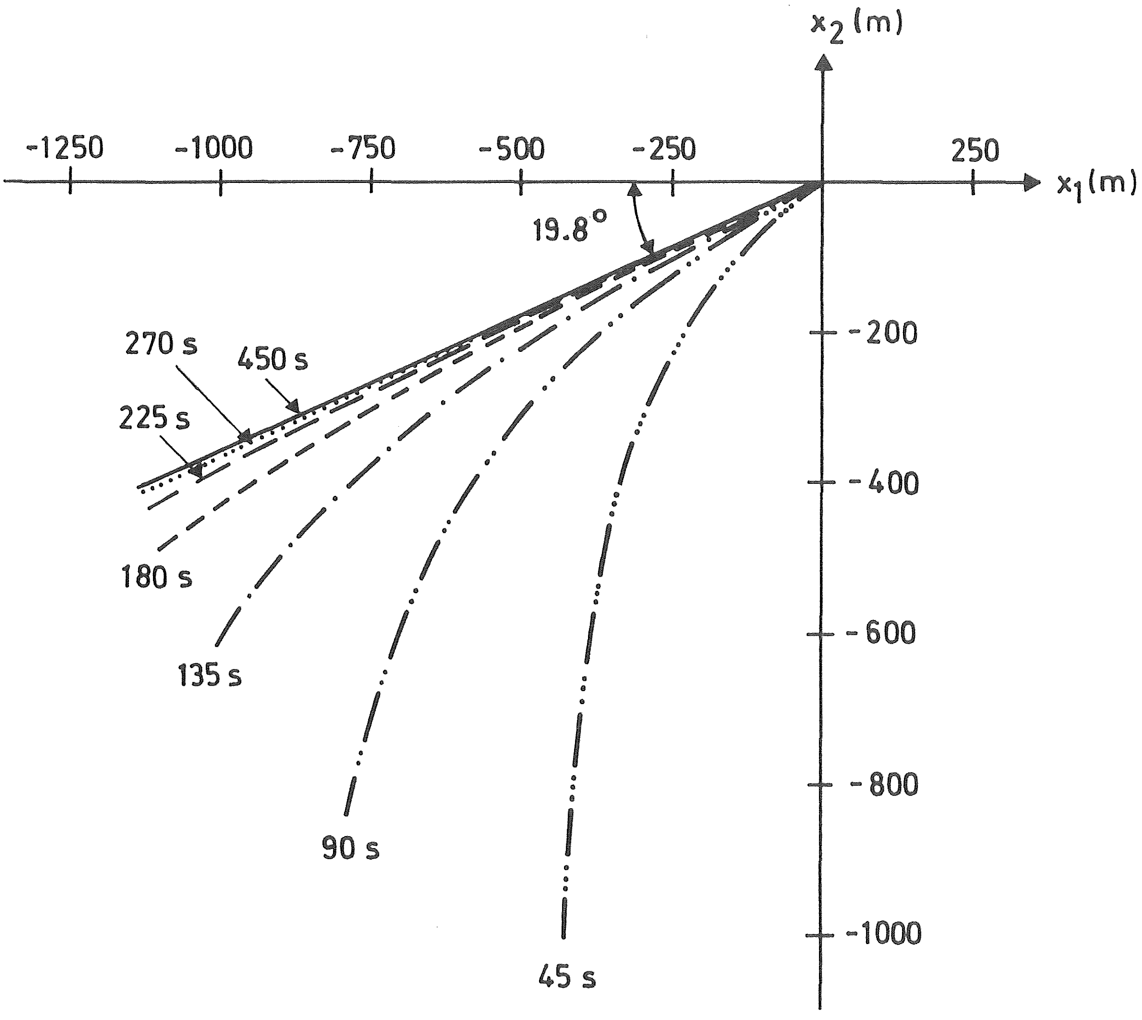



Figur 4.25 Kabelns initialläge

Kabeln har följande data:

| | |
|---|---|
| Kabelns osträckta längd | = 1200 m |
| Kabelns diameter $d_o$ | = 0.076 m |
| Kabelns styvhet K | = $5 \cdot 10^8$ N |
| Massa per längdenhet osträckt längd $\gamma_o$ | = 135.35 kg/m |
| Densitet $\rho_k$ | = 7800 kg/m$^3$ |
| Släpkraftskoefficient i tantentialled $C_{DT}$ | = 0.3 |
| Släpkraftskoefficient i normalled $C_{DN}$ | = 2.5 |
| Koefficienten för den adderade massan $C_{MN}$ | = 3.8 |

Vattnets densitet är 1000 kg/m$^3$. Vid tider t>0 påverkas kabeln av en likformig ström med hastigheten 10 m/s enligt figur 4.25. Kabeln indelas i 20 element och beräkningarna genomföres med explicit tidsintegration. Tidsteget är 0.015 s. Figur 4.26 visar resultatet. Kabelns geometri i planet visas vid olika tidpunkter. Efter en tid så erhåller kabeln ett nytt jämviktsläge. Detta läge är en rät linje som bildar vinkeln 19.8$^{o}$ med $x_1$-axeln. Analytiska beräkningar visar att detta är korrekt.




Figur 4.26 Kabelns geometri vid olika tidpunkter

REFERENSER

[1] Lindahl, J. och Sjöberg, A.: Dynamic Analysis of Mooring Cables. Institutionen för Vattenbyggnad, Rapport Series A:9, 1983.

[2] Bathe, K.J. and Wilson, E.L.: Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. 1976.

[3] Dahlquist, G. and Björk, Å.: Numerical Methods. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. 1974.

[4] Engelman, M.S., Strang, G. and Bathe, K.J.: The Application of Quasi-Newton Methods in Fluid Mechanics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.17, 707-718. 1981.

[5] Lindahl, J.: Manual för MODEX-MODIM. Ett datorprogram för simulering av dynamiska förlopp i förankringskablar. Inst.f.Vattenbyggnad, Rapport Serie B:43, 1983.

## APPENDIX 1 Kabelns inre dämpning vid explicit metod

Kabelns reaktionskraft T i kabelns tangentiella riktning definierades i [1] som:

$$T = K\,\tilde{\varepsilon}\,(1+\varepsilon) \approx K\,\varepsilon \qquad (\varepsilon << 1)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial s_o}^{2} - 1\right) \qquad (A.1)$$

$\frac{\partial s^{2}}{\delta s_0}$

$$\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial s_o} - 1$$

där $\varepsilon$ och $\tilde{\varepsilon}$ är uttryck för kabelns töjningar i kabelns longitudinella riktning och där K är en konstant som beror av kabelns elasticitet. Vid töjning lagras energi i kabeln. Denna kan naturligtvis förloras genom inverkan av exempelvis dämpande släpkrafter men inte genom inre energidissipation i själva kabeln och detta är att betrakta som en brist i modellen ekv. (A.1). En rent elastisk modell kan i vissa fall ge upphov till överlagrande longitudinella vågor (jmfr. spänningsvågor i en rak stålstav) av onaturlig storlek. Speciellt märkbart kan detta bli efter ett s.k. slack (kabeln har komprimerats och haft negativa töjningar). För att erhålla en mera realistisk modell för kabelns reaktionskrafter införes en dämpningskraft $T_c$ enligt följande:

$$T_c = c\,\dot{\varepsilon} \qquad (A.2)$$

Där $T_c$ är parallell med T och c [Ns] är en konstant som beror av kabelns inre dämpning samt där $\dot{\varepsilon}$ är kabelns töjningshastighet ($\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, där t = tid).Adderas (A.1) och (A.2) erhålles kabelns totala reaktionskraft $T_t$ som:

$$T_t = K\,\tilde{\varepsilon}\,(1 + \varepsilon) + c\,\dot{\varepsilon} \qquad (A.3)$$

Med Ekv. (A.3) som modell istället för ekv. (A.1) kan man visa att kabelns inre krafter (enligt finita elementmetoden) ger följande bidrag till kraft i noderna:

$$\underline{F} = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{C}}_j^T \int_0^1 \left(\frac{K\tilde{\varepsilon}_j}{l_j} + \frac{c\,\dot{\tilde{\varepsilon}}_j}{(1+2\tilde{\varepsilon}_j)\,l_j}\right) \underline{\underline{G}}\, \underline{r}_j\, d\xi_j \tag{A.4}$$

Ekvationen (A.4) skall jämföras med ekvation (3.20) i [1]. Elementets töjningshastighet blir:

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_j = \underline{r}_j^T \underline{\underline{G}}\, \dot{\underline{p}}_j \tag{A.5}$$

Symbolerna i ekv (A.1) - (A.5) följer rapporten [1]med undantag av c, i [1] redovisades $c_c$ [$Ns/m^2$], relationen mellan c och $c_c$ är för en wire:

$$c = A_o\, c_c \tag{A.6}$$

där $A_o$ = wirens tvärsnittsarea [$m^2$].

I [1] redovisades att $c_c \approx 1.5 \cdot 10^7$ $Ns/m^2$ för en wire. I beräkningsexempel avsnitt 4.2 antages att $c = 5 \cdot 10^6$ Ns för en kätting med länkdiametern $d_o$ = 0.076 m. I detta fall erhålles att $c_c = 2c/\pi d_o^2 = 5.5 \cdot 10^8$ $Ns/m^2$.

## APPENDIX 2 Modell för friktion mellan kabel och havsbotten i den explicita metoden.

Av liknande skäl som angivits i Appendix 1 modifieras modellen enligt [1] för friktion mellan kabel och havsbotten. Efter ett s.k. slack (kabeln har komprimerats och haft negativa töjningar) erhålles en stöt med longitudinella vågor som kan bli onaturligt stora om inte dämpning införes i kabelns longitudinella riktning. Modellen för friktion mellan kabel och havsbotten enligt [1] förhindrar enbart kabeln att svänga ut ur planet. Denna modell är säkert tillfredsställande i de flesta beräkningsfall men följande modell är bättre.

Antag att en nod k rör sig på havsbotten $r_2^{(k)} \approx 0$ med hastigheten $\dot{p}_1^{(k)}$ i $x_1$-led och $\dot{p}_3^{(k)}$ i $x_3$-led (nodens hastighet

 (C3)

$\dot{p}_2^{(k)}$ i vertikalled är noll). Inför en friktionskraft $\underline{F}_f = [F_{f1}, F_{f3}]^T$ som är parallell med hastighetsvektorn men motsatt riktad, $F_{f1}$ = friktionskraftens komponent i $x_1$-led och $F_{f3}$ = friktionskraftens komponent i $x_3$-led.

Friktionskraften $\underline{F}_f$ antages linjärt viskös för hastigheter $\dot{p}_a < c_v$ men konstant $\mu|\underline{R}_{(k)}^{(1)}|$ för $\dot{p}_a > c_v$. ? korrekt

$$\dot{p}_a = \sqrt{\left(\dot{p}_1^{(k)}\right)^2 + \left(\dot{p}_3^{(k)}\right)^2} \qquad (A.7)$$

2

$\underline{R}_{(k)}^{(1)}$ = resultanten av tyngd och lyftkrafter i nod k.

$\mu$ = friktionskoefficienten vid kontakt mellan kabel och havsbotten.

Modellen blir enligt följande:

$$F_{f1} = -\frac{\dot{p}_1^{(k)}}{\dot{p}_a}\mu|\underline{R}_{(k)}^{(1)}| \qquad \cancel{(A.8)}\ (C2)$$

$$F_{f3} = -\frac{\dot{p}_3^{(k)}}{\dot{p}_a}\mu|\underline{R}_{(k)}^{(1)}| \qquad \cancel{(A.9)}\ (C3)$$

if ~~om~~

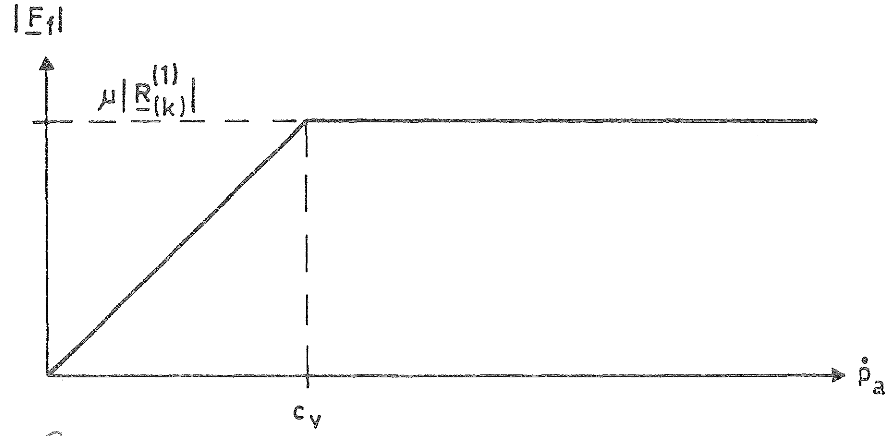
$\dot{p}_a > c_v$

$$F_{f1} = -\frac{\dot{p}_1^{(k)}}{c_v}\mu|\underline{R}_{(k)}^{(1)}| \qquad \cancel{(A.10)}\ (C4)$$

$$F_{f3} = -\frac{\dot{p}_3^{(k)}}{c_v}\mu|\underline{R}_{(k)}^{(1)}| \qquad \cancel{(A.11)}\ (C5)$$

if ~~om~~

$\dot{p}_a < c_v$ ~~(A.12)~~ (C6)




C

Figur ~~A~~.1 Friktionskraftens variation med hastigheten

Friktionskraften $\underline{F}_f$ adderas till krafterna $P_1^{(k)}$ och $P_3^{(k)}$ som är de resulterande krafter som erhålles vid kontakt med villkoret $r_2^{(k)} \approx 0$ och $\dot{p}_2^{(k)} = 0$. Vi erhåller totalt att

$$P_1^{*(k)} = P_1^{(k)} + F_{f1} \qquad (A.13)$$

$$P_3^{*(k)} = P_3^{(k)} + F_{f3} \qquad (A.14)$$

Då blir ekv. (3.26) i [1] i stället enligt följande:

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_1^{(k)} \\ 0 \\ \ddot{p}_{23}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{23} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^{*(k)} \\ P_2^{*(k)} \\ P_3^{*(k)} \end{bmatrix}$$

$\ddot{p}_3^{(k)}$ ✓

där $P_2^{*(k)}$ bestämmes ur ekvationen:

$$P_2^{*(k)} = -\frac{1}{c_{22}} \left( c_{12}\, P_1^{*(k)} + c_{23}\, P_3^{*(k)} \right) \qquad (A.15)$$

Effekten av friktionskrafter märks om man jämför figur 4.17 och 4.18 i beräkningsexempel avsnitt 4.3. Den första figuren visar kraften vid ankaret och den andra kraften i kabelns övre punkt. Den första innehåller nästan inga högfrekventa oscillationer.

Department of Hydraulics
Chalmers University of Technology

Report Series A

A:1 Bergdahl, L.: Physics of ice and snow as affects thermal pressure. 1977.

A:2 Bergdahl, L.: Thermal ice pressure in lake ice covers. 1978.

A:3 Häggström, S.: Surface Discharge of Cooling Water. Effects of Distortion in Model Investigations. 1978

A:4 Sellgren, A.: Slurry Transportation of Ores and Industrial Minerals in a Vertical Pipe by Centrifugal Pumps. 1978.

A:5 Arnell, V.: Description and Validation of the CTH-Urban Runoff Model. 1980.

A:6 Sjöberg, A.: Calculation of Unsteady Flows in Regulated Rivers and Storm Sewer Systems. (in Swedish). 1976.

A:7 Svensson, T.: Water Exchange and Mixing in Fjords. Mathematical Models and Field Studies in the By-fjord. 1980.

A:8 Arnell, V.: Rainfall Data for the Design of Sewer Pipe Systems. 1982.

A:9 Lindahl, J. och Sjöberg, A.: Dynamic Analysis of Mooring Cables. 1983.

A:10 Nilsdal, J-A.: Optimeringsmodellen ILSD. Beräkning av topografins inverkan på ett dagvattensystems kapacitet och anläggningskostnad. 1983.

A:11 Lindahl, J.: Implicit numerisk lösning av rörelse-ekvationerna för en förankringskabel. 1984.

Report Series B

B:1 Bergdahl, L.: Beräkning av vågkrafter. 1977. (Ersatts med 1979:07).

B:2 Arnell, V.: Studier av amerikansk dagvattenteknik. 1977.

B:3 Sellgren, A.: Hydraulic Hoisting of Crushed Ores. A feasibility study and pilot-plant investigation on coarse iron ore transportation by centrifugal pumps. 1977.

B:4 Ringesten, B.: Energi ur havsströmmar. 1977.

B:5 Sjöberg, A. och Asp, T.: Brukar-anvisning för ROUTE-S. En matematisk modell för beräkning av icke-stationära flöden i floder och kanaler vid strömmande tillstånd. 1977.

B:6 Annual Report 1976/77.

B:7 Bergdahl, L. and Wernersson, L.: Calculated and Expected Thermal Ice Pressures in Five Swedish Lakes. 1977.

B:8 Göransson, C-G and Svensson, T.: Drogue Tracking - Measuring Principles and Data Handling.

B:9 Göransson, C-G.: Mathematical Model of Sewage Discharge into confined, stratified Basins - Especially Fjords.

B:10 Arnell, V. och Lyngfelt, S.: Beräkning av dagvattenavrinning från urbana områden. 1978.

B:11 Arnell, V.: Analysis of Rainfall Data for Use in Design of Storm Sewer Systems. 1978.

B:12 Sjöberg, A.: On Models to be used in Sweden for Detailed Design and Analysis of Storm Drainage Systems. 1978.

B:13 Lyngfelt, S.: An Analysis of Parameters in a Kinematic Wave Model of Overland Flow in Urban Areas. 1978.

B:14 Sjöberg, A. and Lundgren, J.: Manual for ILLUDAS (Version S2). Ett datorprogram för dimensionering och analys av dagvattensystem.

B:15 Annual Report 1978/79.

B:16 Nilsdal, J-A. och Sjöberg, A.: Dimensionerande regn vid höga vattenstånd i Göta älv.

B:17 Stöllman, L-E.: Närkes Svartå. Hydrologisk inventering. 1979.

B:18 Svensson, T.: Tracer Measurements of Mixing in the Deep Water of a Small, Stratified Sill Fjord.

B:19 Svensson, T., Degerman, E., Jansson, B. och Westerlund, S.: Energiutvinning ur sjö- och havssediment. En förstudie. R76:1980.

Report Series B

B:20 Annual Report 1979

B:21 Stöllman, L-E.: Närkes Svartå. Inventering av vattentillgång och vattenanvändning. 1980.

B:22 Häggström, S. och Sjöberg, A.: Effects of Distortion in Physical Models of Cooling Water Discharge. 1979.

B:23 Sellgren, A.: A Model for Calculating the Pumping Cost of Industrial Slurries. 1981.

B:24 Lindahl, J.: Rörelseekvationen för en kabel. 1981.

B:25 Bergdahl, L. och Olsson, G.: Konstruktioner i havet. Vågkrafter-rörelser. En inventering av datorprogram.

B:26 Annual Report 1980.

B:27 Nilsdal, J-A.: Teknisk-ekonomisk dimensionering av avloppsledningar. En litteraturstudie om datormodeller. 1981.

B:28 Sjöberg, A.: The Sewer Network Models DAGVL-A and DAGVL-DIFF. 1981.

B:29 Moberg, G.: Anläggningar för oljeutvinning till havs. Konstruktionstyper, dimensioneringskriterier och positioneringssystem. 1981.

B:30 Sjöberg, A. och Bergdahl, L.: Förankringar och förankringskrafter. 1981.

B:31 Häggström, S. och Melin, H.: Användning av simuleringsmodellen MITSIM vid vattenresursplanering för Svartån.

B:32 Bydén, S. och Nielsen, B.: Närkes Svartå. Vattenöversikt för Laxå kommun. 1982.

B:33 Sjöberg, A.: On the stability of gradually varied flow in sewers. 1982.

B:34 Bydén, S. och Nyberg, E.: Närkes Svartå. Undersökning av grundvattenkvalitet i Laxå kommun.

B:35 Sjöberg, A. och Mårtensson, N.: Regnenveloppmetoden. En analys av metodens tillämplighet för dimensionering av ett 2-års perkolationsmagasin.

B:36 Svensson, T. och Sörman, L-O.: Värmeupptagning med bottenförlagda kylslangar i stillastående vatten. Laboratorieförsök

B:37 Mattsson, A,: Koltransporter och kolhantering. Lagring i terminaler och hos storförbrukare. (Delrapport).

B:38 Strandner, H.: ILL-DIFF. Ett datorprogram för sammankoppling av ILLUDAS och DAGVL-DIFF, 1983.