

Beräkning av icke stationära flödesförlopp i reglerade vattendrag och dagvattensystem

**Calculation of Unsteady Flows
in Regulated Rivers
and Storm Sewer Systems**

Anders Sjöberg

Akademisk avhandling, som framlägges till offentlig granskning för avläggande av teknisk doktorsexamen i ämnet vattenbyggnad vid Chalmers tekniska högskola, sektionen för väg- och vattenbyggnad, fredagen den 8 oktober 1976 kl 13.15 i Palmstedtssalen, Chalmers tekniska högskola, Sven Hultins gata 2, Göteborg.

Fakultetsopponent: Prof Frank Engelund

Avhandlingsexaminator: Prof Klas Cederwall

Torbjörn Sjöberg

Beräkning av icke stationära flödesförlopp i reglerade vattendrag och dagvattensystem

**Calculation of Unsteady Flows
in Regulated Rivers
and Storm Sewer Systems**

Anders Sjöberg

FÖRORD

Föreliggande studie avseende beräkning av icke stationära flödesförlopp har bedrivits på uppdrag av dels Statens Råd för Byggnadsforskning inom ramen för projektet "Dagvatten-avledning - flödesmodeller", dels Statens Vattenfallsverk inom ramen för projektet "Lule älvs effektutbyggnad - korttids-reglering. Modellstudier". Projekten påbörjades augusti 1973 resp januari 1975.

Studien har genomförts vid institutionen för vattenbyggnad, Chalmers Tekniska Högskola, under ledning av framlidne professor Lennart Rahm. Jag är Lennart Rahm stor tack skyldig för det stora intresse han visade mitt arbete och det stöd han givit mig under hela min tid vid institutionen.

Till alla mina kolleger och medarbetare vid institutionen, som varit mig till stor hjälp vid arbetets genomförande, riktas ett varmt tack. Speciellt vill jag tacka Göta Bengtsson, som utan att förtrötta skrivit rent manuskript och infört otaliga rättelser, och Alicja Janiszewska som ritat alla figurer.

Göteborg i juni 1976

Anders Sjöberg

REFERAT

På uppdrag av Statens Vattenfallsverk respektive Statens Råd för Byggnadsforskning har framtagits matematiska modeller för beräkning av icke stationära flödesförlopp i reglerade vattendrag resp dagvattensystem.

I avhandlingen diskuteras och analyseras de för icke stationära flödesförlopp styrande sambanden och en redogörelse lämnas för flödesvågors karakteristiska förlopp. Olika typer av numeriska lösningsmetoder och deras egenskaper presenteras. För de aktuella tillämpningarna har framtagits numeriska metoder som bygger på en implicit differensformulering av de linjariserade rörelseekvationerna.

Den för reglerade vattendrag konstruerade matematiska modellen beräknar vattenstånds- och flödesvariationer i valda beräkningssektioner längs vattendraget för givna tappningsförhållanden vid uppströms och nedströms kraftstation. Modellen har visat sig väl kunna simulera uppmätta flödesförlopp, även för geometriskt sett komplicerade älvfåror. Mannings tal för de olika beräkningssträckorna bör bestämmas genom kalibrering mot uppmätta vattenståndsprofiler.

Den inom ramen för detta projekt utvecklade ledningsnätmodellen DAGVL-A beräknar för givna tillflöden vattenstånd och flöden i valda beräkningssektioner för ett konvergerande ledningssystem under beaktande av dämningseffekter. Flöde i helt fylld ledningssektion överföres till strömning med fri vattenyta genom införande av en mycket smal fiktiv spalt i ledningens hjässa. Modellens uppbyggnad kräver att varje ledning delas upp i minst tre beräkningssträckor.

Förekomsten av vattensprång kan medföra icke kontrollerbara beräkningsstörningar. I sådana situationer förutsättes flödet i aktuella ledningar vara oberoende av flödessituationen i nedströms knutpunkt.

II.

DAGVL-A bedömes ge så noggranna lösningar att den kan utnyttjas som referensmodell vid test av approximativa modellers egenskaper vad avser beräknat flödesförlopp. Detta sagt med reservation för de osäkerheter som vidlåder karakteriseringen av förlusterna i ledningssystemets knutpunkter.

EPA-modellen SWMM, RRL-metoden och retardationsmetoden är alla approximativa modeller vilka ej beaktar dämningseffekter från nedströms liggande ledningar. Utflödeshydrografer för ett hypotetiskt ledningssystem beräknade med hjälp av dessa modeller har jämförts med DAGVL-A:s "exakta" lösning. Denna jämförelse visar att för praktiska tillämpningar erforderlig noggrannhet i de flesta fall kan uppnås med EPA-modellen eller RRL-metoden. Av dessa modeller är RRL-metoden billigast att använda.

I Sverige utnyttjas för närvarande endast retardationsmetoden. Denna metod, vilken innebär en ren translation längs ledningen av inflödeshydrografen, är den mest approximativa av de ovan nämnda. Den ger en starkt försenad utflödeshydrograf med felaktig form. Flödestoppens värde kan antingen överskattas eller underskattas beroende på ledningssystemets utformning.

SUMMARY

Mathematical models for calculation of unsteady flows in regulated rivers and in storm sewer systems have been developed under the sponsorship of the Swedish State Power Board and the Swedish Council for Building Research, respectively.

In this report the one-dimensional equations of motion are discussed, and characteristic features of flood waves are presented. A review is given of different numerical methods for solving the basic equations. The models developed within this project are based on numerical solutions by means of linear, implicit, finite difference schemes.

By the mathematical model developed for regulated rivers, water depths and flows can be calculated at selected sections along the river for given discharge conditions at power plants located upstream or downstream. A comparison between calculated and measured water depths shows the model to be a reliable and valuable tool for simulation of unsteady flows even for a relatively complicated river channel geometry. The variation of the Manning number along the river should be determined through calibration against measured water stage profiles.

The sewer network model DAGVL-A developed within this project, calculates water depths and flows in tree-type sewer networks under various flow conditions, including transient backwater effects. Pressurized flow is transformed into equivalent free surface flow by the introduction of a fictitious narrow slot at the upper part of the pipe section. The calculation procedure requires each sewer in the network to be divided into at least three length increments.

The existence of hydraulic jumps may lead to uncontrollable parasitic oscillations in the generated numerical solution. In such situations the sewers in question are assumed to discharge freely into the downstream junction.

IV.

The outflow hydrographs obtained by DAGVL-A are believed to be sufficiently accurate to serve as a basis for comparison between approximative models, however with reservations for the uncertainty regarding the description of flow conditions at junctions.

The EPA-model SWMM, the RRL routing procedure, the "kinematic wave", and the "displacement" method are all approximative models, which do not consider transient back water effects. Outflow hydrographs for a hypothetical sewer network obtained by these approximative models have been compared with the "exact" solution of DAGVL-A. The comparison made shows that for practical applications sufficient accuracy can be obtained in most cases by the EPA-model or the RRL-method.

The only method in use in Sweden is the displacement method, i. e. pure translation of the inflow hydrograph without changing its shape. This method is the most approximate one of the above mentioned methods. The outflow hydrograph is delayed, and it has an erroneous shape. The peak flow may be over- or underestimated depending on the characteristics of the sewer network.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	Sid.
1. PROBLEM OCH MÅLSÄTTNING	1
1.1 Inledning	1
1.2 Matematiska modeller för flödesförlopp i reglerade vattendrag	2
1.3 Matematiska modeller för flödesförlopp i dagvattensystem	3
2. GRUNDLÄGGANDE EKVATIONER FÖR GRADVIS VARIERANDE ICKE STATIONÄR STRÖMNING MED FRI VATTENYTA	5
2.1 Grundläggande principer	5
2.2 Kontinuitetsekvationen	6
2.3 Rörelsemängdekvationen	8
2.4 Koefficienterna α och β	13
2.5 Uppskattning av τ_M , I_f och I_e	15
2.6 Lateralt tillflöde	17
2.7 Sammanfattning	17
3. GRUNDLÄGGANDE EKVATIONER FÖR ICKE STATIONÄR RÖRSTRÖMNING	19
3.1 Vatten som kompressibel vätska. Tvärsektionens deformation	19
3.2 Kontinuitetsekvationen	21
3.3 Rörelsemängdekvationen	24
3.4 Sammanfattning	27
4. ANALYS AV RÖRELSEEKVATIONERNAS EGENSKAPER. KARAKTERISTIKMETODEN	28
4.1 Integrering av förenklade rörelseekvationer	28
4.2 Matrisformulerad härledning av karakteristiska riktningar och tillhörande Riemann-ekvationer	34
4.3 Karakteristikmetoden	36
4.4 Definition av subkritiskt och superkritiskt tillstånd med hjälp av karakteristiska riktningar	39
4.5 Begynnelse- och randvillkor	43
4.6 Sammanfattning	45

VI.

5.	KANALVÅGORS ALLMÄNNA EGENSKAPER	47
5.1	Inledning	47
5.2	Dynamiska vågors tillväxt och dämpning	47
5.3	Förekomst av växande flödesvågor och brytande vågfronter i reglerade vattendrag och dagvattenledningar	54
5.4	Kinematisk vågteori	59
5.5	Branta flödesfronters hastighet. Monoklin våg.	63
5.6	Kinematiska vågor i delvis fylld cirkulär sektion	66
5.7	Sammanfattning	69
6.	NUMERISK LÖSNING AV RÖRELSEEKVATIONERNA	70
6.1	Inledning	70
6.2	Karakteristikmetoden	70
6.3	Beräkning med explicita differensschema	72
6.4	Numerisk stabilitet	75
6.5	Beräkning med implicita differensschema	77
6.6	Svaga lösningar vid diskontinuerligt flöde. Dissipativ operator.	80
6.7	Sammanfattning	85
7.	BESKRIVNING AV UTNYTTJADE IMPLICITA METODER. NUMERISKA EXPERIMENT	87
7.1	Val av metod	87
7.2	Överföring av rörelseekvationerna till differens-ekvationer enligt modifierat Abbot-schema	89
7.3	Kommentarer till differensekvationerna	93
7.4	Lösning av de implicita ekvationerna	95
7.5	Nod-segment schemat	97
7.6	Beräkning av snabbt varierande flödesförlopp med hjälp av dissipativ operator och viktningskoefficient θ	100
7.7	Beräkning av vattensprång	106
7.8	Sammanfattning	108
8.	BERÄKNING AV ICKE STATIONÄRA FLÖDEFÖRLOPP I REGLERADE VATTENDRAG	109
8.1	Inledning	109
8.2	Målsättning med den utvecklade matematiska modellen	112
8.3	Geometriska indata	113

	Sid.
8.4 Beräkning av friktionstermen I_f	114
8.5 Beräkning av initiella vattenstånd	116
8.6 Kalibrering och test av den matematiska modellen	116
8.7 Prognos av vattenståndsvariationer	125
8.8 Sammanfattning	128
9. BERÄKNING AV FLÖDESFÖRLOPP I DAGVATTENSYSTEM	129
9.1 Olika typer av modeller	129
9.2 Friktionslutningen I_f	132
9.3 Knutpunktssamband	135
9.4 Retardationsmetoden (typ B)	141
9.5 Kinematisk våg (typ B)	143
9.6 RRL-metoden (Road Research Laboratory model) (Typ B)	146
9.7 EPA-modellen SWMM (typ B)	151
9.8 Typ B-modellen DAGVL-B	153
9.9 Jämförande beräkningar mellan olika typ B-modeller	161
9.10 Beskrivning av typ A-modellerna HVM och WRE	168
9.11 Typ A-modellen DAGVL-A	175
9.12 Beräkning av ledningssystem: Jämförelse mellan utloppshydrografer beräknade med DAGVL-A och olika typ B-modeller	176
9.13 Sammanfattande synpunkter	186
REFERENSER	190
BETECKNINGAR	195
APPENDIX	

1. PROBLEM OCH MÅLSÄTTNING

1.1 Inledning

När vattenföringen genom en vattenkraftstation plötsligt ökas från säg $100 \text{ m}^3/\text{s}$ till $800 \text{ m}^3/\text{s}$ erhålles på stationens nedströmssida en brant flödesfront som fortplantas längs vattendraget. På stationens uppströmssida erhålles en negativ våg, en vattenståndssänkning, som fortplantas i uppströms riktning. Dessa förlopp är exempel på icke stationära flödesförhållanden vilka för en detaljerad beskrivning kräver fysikaliskt korrekta beräkningsmodeller.

De för ett icke stationärt flödesförlopp i ett vattendrag eller i en ledning styrande sambanden utgöres av ett kontinuitetssamband och ett dynamiskt samband. Dessa två samband - rörelseekvationerna - har formen av partiella differentialekvationer vilka i sin allmänna formulering saknar analytisk lösning. Numerisk lösning måste därför tillgripas.

Oavsett om den numeriska lösningen baseras på de allmänna rörelseekvationerna eller på förenklade versioner av dessa ekvationer kan beräkningstekniska svårigheter uppstå i form av oväntade svängningar i de beräknade storheterna. Dessa svängningar kan i vissa fall snabbt växa i styrka och leda till helt orimliga vattenstånds- och flödesvariationer. Det är i sådana fall nödvändigt att kunna avgöra om dessa "parasitiska svängningar" sammanhänger med differentialekvationernas egenskaper eller om de beror av det simulerade flödesförloppets karaktär eller om de är att hänföra till brister i den numeriska lösningstekniken. En stor del av avhandlingen ägnas därför åt rörelseekvationerna och deras egenskaper samt åt flödesvågors karakteristiska förlopp. Vidare presenteras olika numeriska lösningsmetoder och deras egenskaper, speciellt då de för de aktuella tillämpningarna framtagna metoderna.

De mera praktiska tillämpningarna av de konstruerade beräkningsmodellerna redovisas i de två avslutande kapitlen.

1.2 Matematiska modeller för flödesförlopp i reglerade vattendrag

I flera svenska älvar planeras en effektutbyggnad vid redan existerande vattenkraftverk vilken, om den genomföres, kommer att innebära större och snabbare vattenstånds- och vattenföringsvariationer än de som erhålles vid nuvarande tappningsförhållanden. Större krav än tidigare måste därför ställas på utnyttjade beräkningsmodeller. Målsättningen har därför varit att utveckla en matematisk modell som för givna tappningsförhållanden vid uppströms och nedströms kraftstation medger en detaljerad prognos av vattenstånds- och flödesutvecklingen längs vattendraget mellan de två stationerna.

En enkel och i Sverige ofta utnyttjad metod för beräkning av vattenståndsutvecklingen i ett vattendrag vid givet tillflöde är den metod, som bygger på en uppdelning av vattendraget i en serie delmagasin för vilka upprättas dels en magasinsskurva, dels en avbördningskurva för delmagasinets utlopp. Om dämningseffekter finns bör en avbördningskurva konstrueras för varje dämningssnivå. Med utgångspunkt från de konstruerade sambanden genomförs en stegvis beräkning i tid och rum av flödesförloppet, se t ex Rundgren (1969).

I de fall då flödesvariationerna längs vattendraget är små kan den skisserade metoden ge godtagbara resultat. Vid snabbare flödesvariationer kommer emellertid flödesvågens dämpning att bli starkt beroende av delmagasinens storlek och det valda tidsstegets längd.

Ett stort antal beräkningsmetoder baserade på förenklade rörelse-ekvationer finns redovisade i litteraturen, se t ex Miller och Cunge (1975). Gemensamt för de flesta av dessa metoder är emellertid att de ej kan behandla uppströms gående vågor. De kan således ej beskriva den uppströms gående våg som erhålles vid en plötslig tappningsändring vid nedströmskraftverket. Den planerade effektutbyggnaden kan i Sveriges större kraftproducerande älvar komma att innebära tappningsändringar av storleksordningen $\pm 1000 \text{ m}^3/\text{s}$

på några få minuter. En godtagbar beskrivning av de stora och snabba vattenståndsvariationer som därvid erhålles kan ej uppnås med förenklade beräkningsmetoder. En beräkningsmodell baserad på de fullständiga rörelseekvationerna bör därför användas.

Matematiska modeller baserade på de fullständiga rörelseekvationerna ger allmänt sett säkrare resultat än de förenklade metoderna. Framförallt är de mera generella och lättare att anpassa till olika typer av problemställningar. Tendensen synes vara den att utvecklingen går mot ett allt större utnyttjande av modeller baserade på numerisk lösning av de fullständiga rörelseekvationerna allt eftersom dokumentationen rörande lösningsmetoder och beräkningsresultat växer, se Mahmood och Yevjevich (1975). En sådan modell har därför i föreliggande avhandling utvecklats för tillämpning på subkritiska flödesförhållanden.

1.3 Matematiska modeller för flödesförlopp i dagvattensystem.

Under senare år har dagvattenproblematiken alltmer aktualiserats av ökande miljövårdskrav bland annat mot bakgrund av bräddningsproblem i kombinerade ledningssystem och höga investeringskostnader i samband med utbyggnad och renovering av dagvattenledningar. Ett meningsfullt studium av funktionen hos och effekterna av olika alternativa tekniska lösningar kräver emellertid tillgång till fysikaliskt mera korrekta beräkningsmodeller än den beräkningsmetod - retardationsmetoden - som nu utnyttjas i Sverige för prognos av flödesförloppet i dagvattenledningar. Målsättningen har därför varit att konstruera en matematisk modell som med större noggrannhet kan beräkna flödesförloppet i ett ledningssystem vid givna tillflöden.

Den snabba utvecklingen på datorteknikens område har underlättat utvecklingen av matematiska modeller för beräkning av avrinningsförloppet från urbana områden vid häftig nederbörd. Exempel på sådana avrinningsmodeller är NIVA-modellen, EPA-modellen SWMM, UCUR-modellen, RRL-metoden samt WRE- och HVM-modellerna. Dessa modeller innefattar en mer eller

mindre approximativ simulering av alla i det totala avrinningsförloppet ingående delprocesser. I denna avhandling behandlas dock enbart de i modellerna ingående ledningsnätrutinerna, dvs de beräkningsrutiner som beskriver flödesförloppet i ledningssystemet.

Existerande flödesmodeller för ledningsnät kan indelas i två grupper:

A-modeller, i vilka flödesförloppet beräknas under beaktande av eventuella dämningseffekter från nedströms liggande ledningar (WRE, HVM).

B-modeller, i vilka dämningseffekter ej beaktas (NIVA, EPA, RRL, UCUR, retardationsmetoden).

I typ B-modellerna beräknas alltså flödesförloppet för varje ledning under antagande av fritt utlopp i ledningens nedströmssektion, vilket torde vara en godtagbar approximation vid inte alltför flacka ledningssystem. En förutsättning är givetvis att inga dämmande konstruktioner byggts in i systemet.¹⁾ De uppräknade B-modellerna bygger emellertid på så starkt förenklade antaganden att deras förmåga att med godtagbar noggrannhet beskriva ett givet flödesförlopp inte utan vidare kan accepteras.

Typ A-modellerna syftar till en fullständig analys av flödesförloppet i ett ledningsnät under varierande flödesförhållanden och randvillkor och är beräkningstekniskt mera komplicerade än B-modellerna.

Av författaren har utvecklats en typ A-modell och en typ B-modell benämnda DAGVL-A resp DAGVL-B. Dessa modeller bygger på de fullständiga rörelseekvationerna och har utnyttjats som referensmodeller vid test av olika typ B-modellers egenskaper. Litteraturreferenserna avseende typ A-modellerna HVM och WRE är alltför knapphändiga för att tillåta en upprogrammering av resp ledningsnätrutiner. Datorprogrammen har tyvärr ej varit tillgängliga.

1) eller att ledningarna ej går fyllda.

2. GRUNDLÄGGANDE EKVATIONER FÖR GRADVIS VARIERANDE ICKE STATIONÄR STRÖMNING MED FRI VATTENYTA.

2.1 Grundläggande principer

Detta kapitel behandlar härledningen av de två grundläggande ekvationerna för gradvis varierande icke stationär, endimensionell strömning med fri vattenyta, s k kanalströmning:

- kontinuitetsekvationen baserad på lagen om massans oförstörbarhet
- rörelsemängdekvationen erhållen ur Newtons andra lag

Ett kanalflöde säges vara gradvis varierande om strömlinjernas krökning är liten, vilket förutsätter att kanalbottnens och vattenytans krökningsradie är stor i förhållande till vattendjupet. En konsekvens av detta är att vattenföringen eller vattenståndet ej får variera för snabbt med tiden. Det våta tvärsnittets form behöver ej vara konstant men förutsättes variera så långsamt längs kanalen att några avlösningssfenomen ej uppstår. Om ovan nämnda villkor är uppfyllda kan flödesförloppet studeras med hjälp av en endimensionell analys, vilket innebär att man försummar hastighetskomponenter vinkelrätt huvudflödesriktningen. Tryckfördelningen kan då förutsättas vara hydrostatisk och vattenytan kan antagas vara horisontell i tvärsnitt vinkelrätt huvudflödesriktningen.

De för den endimensionella analysen uppställda villkoren kan synas vara så restriktiva att denna analys endast kan utnyttjas för mycket idealiserade flödesförhållanden. Det visar sig emellertid möjligt att med tillfredsställande noggrannhet använda de erhållna sambanden för beräkning av t ex relativt snabbt varierande flöden i naturliga vattendrag. Några generella kriterier för vad som kan anses vara gradvis varierande strömning är svåra att uppställa. Termen "gradvis varierande" kan därför tolkas olika av olika författare beroende på vilken approximationsgrad man bedömer sig kunna acceptera.

De endimensionella ekvationer, ofta kallade Saint-Venants ekvationer, som härledes med utgångspunkt från ovan angivna grundläggande antaganden förutsätter dessutom att bottenlutningen är liten men ej nödvändigtvis konstant och att vattnet är en densitetshomogen och inkompressibel vätska.

Vid analysen kommer vi att utnyttja den i fig. 2-1 skisserade differentiella kontrollvolymen. Kanalflödet definieras där av vattendjupet $Y = Y(x, t)$ vinkelrätt botten, tvärsektionen $A = A(x, Y)$ i yz -planet och avbördningen $Q = Q(x, t)$. Den differentiella kontrollvolymen utgöres av en strimla med

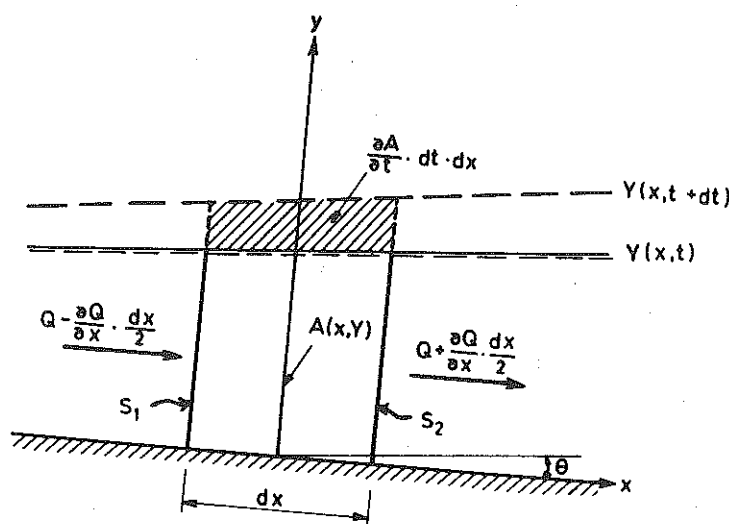


Fig. 2-1. Differentiell kontrollvolym för strömning med fri vattenyta.

längden dx , medelarean A och volymen W . Kontrollvolymen, vars "tak" utgöres av vattenytan, är således variabel. Huvudflödesriktningen är i x -led och t är tidskoordinaten.

2.2 Kontinuitetsekvationen

Kontinuitetsekvationen baserar sig på lagen om massans oförstörbarhet. Det följer av denna lag att nettoinflödet av massa till den variabla kontrollvolymen W i fig. 2-1 måste vara lika med massans ökning per tidsenhet inuti kontrollvolymen.

För en inkompressibel och densitetshomogen vätska erhålles således

$$\left(Q - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) = \frac{\partial A}{\partial t} dx ; \quad (2.1)$$

eller

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 ; \quad (2.2)$$

Detta samband gäller även om vätskan icke är densitetshomogen förutsatt att dess kompressibilitet är försumbar. Vi förutsätter dock i det följande att densiteten $\rho = \rho_0 = \text{konstant}$.

Om vi med $b(x, y)$ betecknar sektionens bredd på nivån y , se fig. 2-2, erhålles tvärsektionens area som funktion av vattendjupet $Y = Y(x, t)$ enligt

$$A = \int_0^Y b(x, y) dy ; \quad (2.3)$$

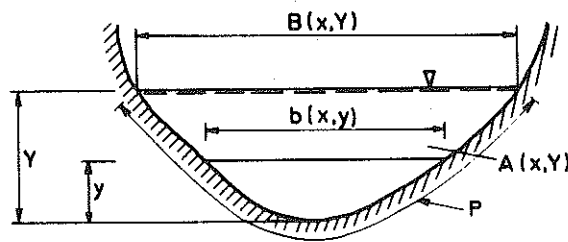


Fig. 2-2. Geometrisk definition av flödessektion.

Vidare erhålles efter derivering

$$\frac{\partial A}{\partial t} = B \frac{\partial Y}{\partial t} ; \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \int_0^Y \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} dy + B \frac{\partial Y}{\partial x} ; \quad (2.4b)$$

där $B = B(x, Y)$ är sektionens bredd i vattenlinjen. Vid prismatisk kanal, $b = b(y)$, reduceras ekv. (2.4b) till

$$\frac{\partial A}{\partial x} = B \frac{\partial Y}{\partial x} ; \quad (2.5)$$

Kontinuitetsekvationen kan således skrivas på följande alternativa former:

Beroende variabler:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 ; \quad Q, A \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 ; \quad Q, Y \quad (2.6b)$$

$$A \frac{\partial V}{\partial x} + VB \frac{\partial Y}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 ; \quad V, Y \quad (2.6c)$$

(prismatisk kanal)

där $V = Q/A$ är flödets medelhastighet.

2.3 Rörelsemängdekvationen

En ekvation som uttrycker ett flödes dynamiska förhållanden kan härledas antingen ur Newtons andra lag eller ur termodynamikens första huvudsats. Härledningen genomförs här enligt det första alternativet.

Enligt Newtons andra lag gäller att vektorsumman $\vec{F}$ av alla krafter som verkar på en masspartikel Δm är lika med förändringen per tidsenhet av rörelsemängdvektorn $\Delta m \cdot \vec{v}$, där $\vec{v}$ är hastighetsvektorn. Således

$$\frac{d}{dt} (\Delta m \vec{v}) = \vec{F} ; \quad (2.7)$$

Detta samband kan även utnyttjas för en kontinuerlig samling av partiklar, såsom en del av en strömmande vätska, varvid $\vec{F}$ representerar de på partikelsamlingen verkande yttre krafterna.

Tillskottet i rörelsemängd p g a de verkande krafterna för den vid tiden t befintliga vätskemassan i kontrollvolymen i fig. 2-1 kan skrivas som summan av nettoutflödet av rörelsemängd och ökningen per tidsenhet av rörelsemängden inom kontrollvolymen, se t ex Daily och Harleman (1966) eller Whitaker (1968).

$$\frac{d}{dt}(\Delta m \cdot \vec{v}) = \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n} dS) + \frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho \vec{v} dW ;$$

där $\vec{n}$ är normalvektorn riktad ut från ytelementet dS på kontrollvolymen. I huvudflödesriktningen ¹⁾ erhålles med $\rho = \rho_0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta m \cdot v_x) &= \rho_0 \int_{S_2} v_x^2 dS - \rho_0 \int_{S_1} v_x^2 dS + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_A v_x dA \right) dx = \\ &= \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) dx + \rho_0 \frac{\partial Q}{\partial t} dx ; \end{aligned} \quad (2.8)$$

där S_1 och S_2 är kontrollvolymens ändytor enligt fig. 2-1, v_x är hastighetsvektorns $\vec{v}$ komponent i x-riktningen och β är en hastighetsfördelningskoefficient definierad enligt

$$\beta = \frac{A}{Q^2} \int_A v_x^2 dA ;$$

Vi observerar att $\beta = 1$ om hastigheten är lika stor i alla punkter i tvärsnittet.

De på kontrollvolymen i flödesriktningen verkande krafterna är tyngdkraften F_g ; tryckkrafter F_p och tangentiella krafter F_t .

Tyngdkraftens komponent i x-riktningen är

$$F_g = \rho_0 g A dx \cdot \sin \theta = \rho_0 g A I_0 dx \quad (2.9)$$

1) x-riktningen

där θ = kanalbottenens lutningsvinkel, $I_0 = \sin \theta \approx \tan \theta$ = kanalens bottenlutning och g = jordaccelerationen.

Resultterande tryckkraften i x-riktningen erhålles med i fig. 2-3 definierade tryckkrafter F_1 , F_2 , F_3 och F_4 till

$$F_p = F_1 - F_2 + F_3 + F_4 ; \quad (2.10)$$

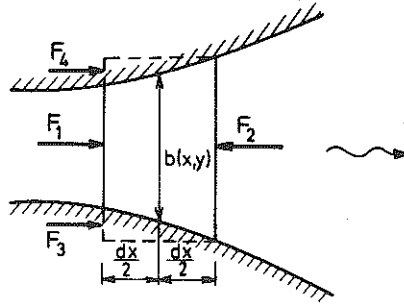


Fig. 2-3 Hydrostatiska krafter i x-riktningen.

Vid gradvis varierande strömning förutsättes trycket vara hydrostatiskt och vattenytan horisontell i tvärsnitt vinkelrätt huvudströmningsriktningen. Således

$$\begin{aligned} F_2 - F_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^Y \left[\rho_0 g (Y-y) \cdot b(x, y) \cos \theta \right] dy \right) dx \\ &= \left(\int_0^Y \rho_0 g \cos \theta \left[\frac{\partial Y}{\partial x} \cdot b(x, y) + (Y-y) \cdot \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} \right] dy \right) dx; \end{aligned} \quad (2.11a)$$

$$F_3 + F_4 = \left(\int_0^Y \rho_0 g (Y-y) \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} \cos \theta dy \right) dx ; \quad (2.11b)$$

vilket med $\cos \theta = 1$, ($I_0 < 1\%$) ger

$$F_p = -\rho_0 g \frac{\partial Y}{\partial x} \left(\int_0^Y b(x, y) dy \right) dx = -\rho_0 g A \frac{\partial Y}{\partial x} dx ; \quad (2.12)$$

De tangentiella krafterna F_τ utgöres av friktionskrafter längs kanalens botten och sidor och kan skrivas

$$F_\tau = -\tau_M P dx \quad (2.13)$$

där τ_M är medelskjuvspänningen i x-riktningen längs den våta perimetern P, se fig. 2-2. Vi återkommer till den praktiska bestämningen av τ_M i kap. 2.5.

Summering av de fem termerna ger rörelsemängdekvationen på endimensionell form

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial Y}{\partial x} = gA (I_O - I_f); \quad (2.14)$$

där $I_f = \tau_M P / \rho_O g A$ och benämnes friktionslutningen.

Vid prismatisk kanal och konstant β kan ekv. (2.14) formuleras

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2\beta V \frac{\partial Q}{\partial x} + (gA - \beta BV^2) \frac{\partial Y}{\partial x} = gA (I_O - I_f); \quad (2.15)$$

En annan ofta redovisad formulering är ($\beta = 1$),

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(Y + \frac{V^2}{2g} \right) = I_O - I_f; \quad (2.16)$$

där de beroende variablerna Q, A överförts till V, Y med hjälp av kontinuitetsekvationen.

Som tidigare påpekats kan ett dynamiskt samband förutom ur Newtons andra lag härledas även ur termodynamikens första huvudsats, vilken utsäger att ökningen av systemets energi är lika med summan av till systemet utifrån tillfört värme och det arbete yttre krafter uträttar på systemet. Denna princip tillämpad på flödessystemet i fig. 2-1, ger med de antaganden som tidigare utnyttjats

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Y}{\partial x} = gA (I_o - I_e) \quad (2.17)$$

där I_e uttrycker flödets inre energidissipation (irreversibel överföring av mekanisk energi till värme) per massenhet och tidsenhet och α är en hastighetsfördelningskoefficient definierad enligt

$$\alpha = \frac{A^2}{Q^3} \int_A v^3 dA ;$$

Denna energiekvation skiljer sig från rörelsemängdekvationen dels genom att den innehåller hastighetsfördelningskoefficienten α istället för β , dels genom den annorlunda formulering av högerledet, I_e istället för I_f .

Det grundläggande antagandet vid härledningen av rörelsemängdekvationen är antagandet om att strömlinjernas krökning är liten, vilket leder fram till förutsättningen om hydrostatisk tryckfördelning ($p + \rho gy = \text{konstant}$). Denna förutsättning är exakt uppfylld endast om strömningen är stationär och likformig. ¹⁾

De uppställda differentialekvationerna skall kunna beskriva fortplantningshastigheten av i flödet införda störningar, dvs kunna ge rätt våghastighet. En viss uppfattning om den approximationsgrad som antagandet om försumbar krökning innebär kan erhållas genom en jämförelse med enligt potentialströmningsteori beräknad våghastighet.

-
- 1) Trycket $p = p(x, y, z, t)$ är i själva verket sammansatt av dels en hydrostatisk del beroende av avståndet till vattenytan, dels en dynamisk del relaterad till strömlinjernas krökning och flödets turbulenta egenskaper och kan erhållas genom integrering av y- och z-komponenterna i Reynolds ekvationer (allmänna rörelseekvationer formulerade med utgångspunkt från strömningens turbulenta egenskaper), se t ex Strelkoff (1969). Turbulensens inflytande på tryckfördelningen är dock i praktiken helt försumbar.

För en svängande våg med liten amplitud och våglängden L erhålles ur potentialströmningsteorin en våghastighet av, se t ex Henderson (1966).

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi Y}{L}} ; \quad (2.18)$$

För vågor på grunt vatten ($Y/L \ll 1$) kan detta samband approximeras till

$$c = \sqrt{gY} ; \quad (2.19)$$

vilket är den våghastighet som för stillastående vatten ($V=0$) definieras av de uppställda rörelseekvationerna.¹⁾ Vi finner då att max 5 procents fel vid beräkning av våghastigheten enligt ekv (2.19) kräver att $Y/L < 0.09$. Detta innebär att den av rörelseekvationerna definierade våghastigheten för $Y/L = 0.09$ är ca 5 procent för hög beroende på antagandet om hydrostatisk tryckfördelning.

2.4 Koefficienterna α och β

α - och β -värdena är vid likformig strömning funktioner av kanal-sektionens form och råhet samt av värdet på Reynolds tal $Re = V \cdot R / \nu$, där $R = A/P$ = hydrauliska radien och ν = vattnets kinematiska viskositet. Vid turbulent strömning är hastigheten förhållandevis jämnt fördelad över tvärsnittet varför α - och β -värdena avviker relativt litet från värdet 1.0. I tabell 2.1 redovisas från Chow (1959) hämtade värden för olika typer av sektioner.

	värde på α			värde på β		
	min	medel	max	min	medel	max
Regelbundna kanaler	1.10	1.15	1.20	1.03	1.05	1.07
Naturliga vattendrag	1.15	1.30	1.50	1.05	1.10	1.17
Floder med istäcke	1.20	1.50	2.00	1.07	1.17	1.33
Floddalar, översvämmade	1.50	1.75	2.00	1.17	1.25	1.33

Tabell 2.1 Normala variationsområden för hastighetsfördelningskoefficienterna α och β . Efter Chow (1959).

1) se kap 4.1.

Det bör påpekas att angivna värdena gäller för likformig strömning. I naturliga vattendrag med varierande sektionsform, krökar m m kan koefficientvärdena givetvis uppvisa avsevärt större variationer. Det är i sådana fall nödvändigt att genomföra uppmätningar av hastighetsprofilerna och beräkna värdena på β och α enligt de i ekv (2.8) och ekv (2.17) givna definitionerna.

Mätvärden avseende strömning i delvis fylld hydrauliskt glatt cirkulär sektion med diametern d redovisas i fig 2-4 som funktion av relativa vattendjupet Y/d . Ett representativt värde på β för $Y/d > 0.5$ är enligt dessa försök $\beta = 1.01$. För lägre värden på fyllnadsgraden växer β med avtagande vattendjup. Försöken utfördes inom ett snävt intervall med avseende på rörväggarnas råhet (stålrör), varför något högre värden, $\beta \approx 1.02 - 1.05$, kan förväntas för t ex betongrör av liten dimension.

Vid turbulent strömning är hastigheten relativt jämnt fördelad över tvärsnittet. Sambandet mellan β och α kan då approximativt skrivas, Engelund (1965),

$$\beta \approx 1 + \frac{\alpha - 1}{3}; \quad (2.20)$$

vilket samband i huvudsak satisfieras av de i fig 2-4 redovisade experimentella resultaten.

För stationär strömning ($\partial Q/\partial t = \partial Q/\partial x = 0$) och konstanta värden på α och β kan ekvationerna (2.14) och (2.17) överföras till formen

$$\frac{\partial Y}{\partial x} (1 - \beta Fr^2) = I_o - I_f; \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} (1 - \alpha Fr^2) = I_o - I_e; \quad (2.21b)$$

där $Fr = \text{Froudes tal} = V/\sqrt{gA/B}$. Av dessa samband framgår att den relativa betydelsen av α - och β -värdenas avvikelse från 1.0 avtar med värdet på Froudes tal.

För en av de i detta sammanhang aktuella praktiska tillämpningarna - beräkning av flödesförhållandena i mer eller mindre uppdämda älvfåror - är detta villkor med avseende på Froudes tal i de allra flesta fall uppfyllt, $Fr < \text{ca } 0.1$. Vid den andra aktuella tillämpningen

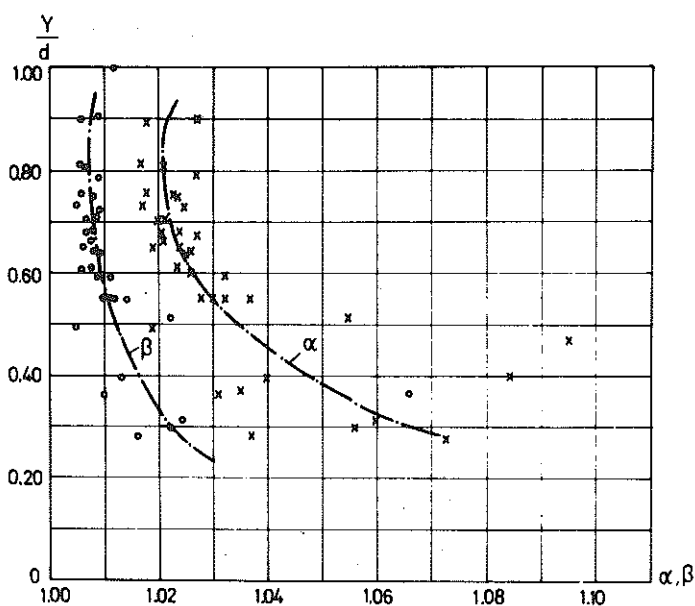


Fig 2-4 Experimentellt uppmätta värden på hastighetsfördelningskoefficienterna α och β i cirkulär ledning med diametern d . Reynolds tal VR/ν är av storleksordningen 10^5 . Efter Yevjevich och Barnes (1970).

- beräkning av flödesförlopp i dagvattenledningar - är förhållandet det, att man på grund av gällande svenska minimilutningar (krav på självrensning) kan erhålla superkritiska (stråkande) strömningsförhållanden med värden på Froudes tal strax över 1.0. Det synes dock icke rimligt, med hänsyn till övriga gjorda antaganden och approximationer, att i datorprogram inlägga rutiner som beaktar koefficienternas variation med vattendjupet, väggarnas råhet etc. Då det dessutom är flödesförloppen vid fyllnadsgrader större än 0.5, som är av störst intresse, föreslås att man i detta fall sätter $\beta = 1.03 = \text{konstant}$, vilket motsvarar $\alpha = 1.09$.

2.5 Uppskattning av τ_M , I_f och I_e .

Av ekvationerna (2.21) framgår att man för små värden på Froudes tal kan sätta $I_e \approx I_f$, dvs att

$$\tau_M = \rho_O g R I_f \approx \rho_O g R I_e ; \quad (2.22)$$

Vid likformig strömning gäller detta samband exakt.

Friktionslutningen och energilinjens lutning vid likformig strömning $I = I_e = I_f$ kan beräknas med hjälp av t ex Chezy's formel

$$V = C \cdot R^{1/2} \cdot I^{1/2} \quad (2.23)$$

eller Mannings formel

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} ; \quad (2.24)$$

där C är Chezy's koefficient, n är Mannings råhetskoefficient och $R = A/P$ är hydrauliska radien. Uttryckt i engelska fot - sekund - enheter får ekv (2.24) utseendet

$$V = \frac{1.486}{n} R^{2/3} I^{1/2} ; \quad (2.25)$$

I svensk litteratur sättes ofta $1/n = M$ där M benämnes Mannings tal. M omnämnes även som Stricklers koefficient.

Av dessa formler är Mannings formel den för kanalströmningsberäkningar mest använda.

Det är en allmänt vedertagen praxis att för gradvis varierande och icke stationär strömning förutsätta att I_e och I_f (och τ_M) kan beräknas som för likformig strömning. Detta torde i de flesta fall vara ett godtagbart och i praktiken nödvändigt antagande, men det är liksom antagandet om hydrostatisk tryckfördelning, en approximation.¹⁾

Enligt Liggett (1975) har mycket få försök gjorts att studera friktionskrafter vid olikformig och icke-stationär strömning, men det förutsättes allmänt att för likformig strömning erhållna experimentella resultat gäller även i dessa fall. Med tanke på de svårigheter som är förknippade med uppskattningen av värdet på råhetskoefficienter, torde dock de här diskuterade effekterna vara av sekundärt praktiskt intresse.

- 1) Vid likformig strömning erhålles fullt utbildade hastighetsprofiler, vilket ej är fallet vid varierande flöde. τ_M kan då ej formuleras som en entydig funktion av flöde och vattendjup vid given bottenråhet, utan hänsyn måste tas även till hastighetsprofilens förändring i tid och rum.

Friktionslutningen I_f och energilinjens lutning I_e uppskattas sålunda i praktiken på samma sätt. Av ekv (2.21a och b) framgår emellertid att vi vid olikformig strömning ej kan sätta identitetstecken mellan I_f och I_e .

2.6 Lateralt tillflöde

I de fall då ett lateralt tillflöde sker till huvudflödet måste hänsyn tas till detta i kontinuitets- och rörelsemängdekvationerna.

Vi förutsätter att tillflödet kan betraktas som ett jämnt fördelat flöde q per längdenhet av vattendraget. Till vänsterledet i ekv (2.1) måste då läggas termen $q \cdot dx$ varför kontinuitets-ekvationen blir

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q ; \quad (2.26)$$

Vad avser rörelsemängdekvationen behöver vi i ekv (2.8) endast dra termen $\rho_o q u_x dx$, (u_x är tillflödets hastighetskomponent i huvudflödets riktning) från nettoutflödet av rörelsemängd.

Rörelsemängdekvationen vid lateralt tillflöde blir då

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Y}{\partial x} = gA (I_o - I_f) + q u_x ; \quad (2.27)$$

2.7 Sammanfattning

Med utgångspunkt från lagen om massans oförstörbarhet resp Newtons andra lag har härletts två styrande ekvationer för icke stationär, gradvis varierande kanalströmning. Dessa ekvationer är kontinuitets- resp rörelsemängdekvationen:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 ; \quad \text{alternativt} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Y}{\partial x} = gA (I_o - I_f) ; \quad (2.29)$$

Till högerledet i ekv (2.28) resp ekv (2.29) skall vid lateralt tillflöde läggas termen q resp qu_x .

Vid strömning i prismatisk kanal kan rörelsemängdekvationen skrivas

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2\beta V \frac{\partial Q}{\partial x} + (gA - \beta BV^2) \frac{\partial Y}{\partial x} = gA (I_o - I_f) ; \quad (2.30)$$

β är en hastighetsfördelningskoefficient vars värde obetydligt avviker från 1.0 och som vid utpräglat subkritiska förhållanden (små värden på Froudes tal) kan approximeras till 1.0.

Friktionslutningen I_f kan beräknas ur för likformig strömning uppställda formler, t ex Mannings formel.

3. GRUNDLÄGGANDE EKVATIONER FÖR ICKE STATIONÄR RÖRSTRÖMNING

3.1 Vatten som kompressibel vätska. Tvärsektionens deformation.

Rörströmning kan äga rum vid delvis eller helt fylld ledningssektion. Vid delvis fylld sektion gäller de samband som härletts för strömning med fri vattenyta i kapitel 2. En ökning av massan mellan två kontrollsektioner ger då en förhöjning av vattenytan. Vid strömning i helt fylld sektion kan en ökning av massan däremot endast ske genom en komprimering av vattnet och en utvidgning av rörsektionen. Nya kontinuitets- och rörelsemängdekvationer måste därför uppställas, där hänsyn tas till vattnets kompressibilitet och rörsektionens deformationsegenskaper. Målsättningen är då att formulera de grundläggande ekvationerna, så att analogi erhålles mellan de två strömningstillstånden. Härigenom underlättas det numeriska beräkningsförfarandet vid gradvis övergång mellan strömning med fri vattenyta och i helt fylld sektion. De genomförda härledningarna bygger i huvudsak på gängse förutsättningar och antaganden inom den sk tryckslagsteorin, se t ex Parmakian (1963) eller Streeter och Wylie (1967). Sektionsarean förutsättes vara cirkulär och ha diametern d . Beteckningar framgår av fig. 3-1.

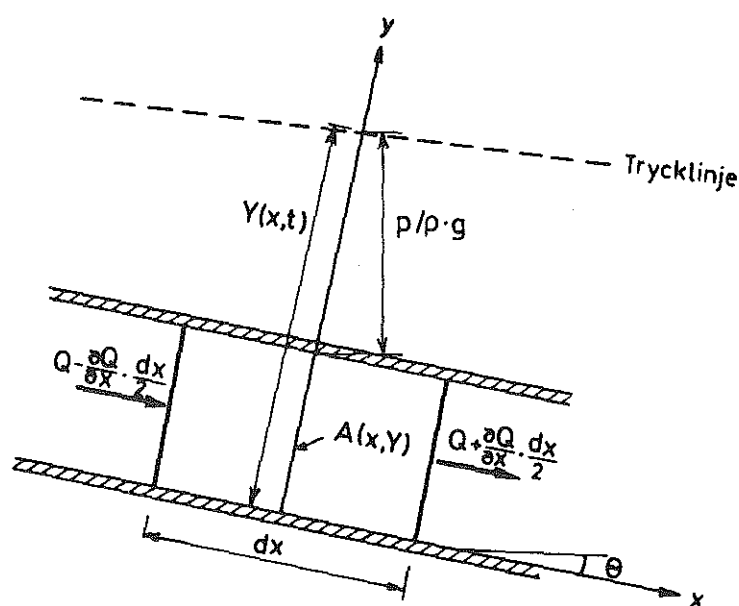


Fig. 3-1. Kontrollvolym för strömning i helt fylld ledning med diametern d . p är övertrycket relativt trycket vid nätt och jämnt fylld ledning.

När trycket i en vattenvolym ökar med Δp ändras vattnets densitet med $\Delta \rho$. Storleken av denna ändring definieras av sambandet

$$\Delta \rho = \frac{\rho}{E_v} \cdot \Delta p \approx \frac{\rho_0}{E_v} \cdot \Delta p = \frac{\Delta p}{a_0^2}; \quad (3.1)$$

där E_v = vattnets elasticitetsmodul, vilken för praktiskt bruk kan förutsättas vara konstant och sättas till $2,1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

Densiteten ρ har approximerats med vattnets densitet ρ_0 vid nätt och jämnt fylld sektion, vilken satts lika med densiteten vid atmosfärstryck. Vi förutsätter vidare att densiteten är konstant över tvärsnittet. $a_0 = \sqrt{E_v/\rho_0}$ är ljudets hastighet (elastiska tryckvågors hastighet) i en vattenvolym med oändlig utbredning eller i en av oeftergivliga väggar omsluten vattenvolym och uppgår till 1435 m/s.

Vid hydrostatisk tryckfördelning gäller relationen $dp = -\rho g dy \cos \theta$ vilket för små ledningslutningar kan reduceras till $dp \approx -\rho g dy$. Om detta samband insättes i ekv. (3.1) vilken sedan integreras över intervallet ($y = d$; $y = Y$), där Y är trycklinjens nivå relativt rörbotten, erhålles vattnets densitet vid övertrycket $\rho g (Y-d)$ till

$$\rho = \rho_0 e^{g(Y-d)/a_0^2} \approx \rho_0 (1 + g(Y-d)/a_0^2); \quad (3.2)$$

Ett relativt övertryck motsvarande 20 meter vattenpelare medför således en så liten relativ densitetsdifferens som $\Delta \rho/\rho = 10^{-4}$.

Med hjälp av ekv. (3.2) kan nu övertrycket p relativt trycket vid nätt och jämnt fylld ledning skrivas

$$\begin{aligned} p &= \int_d^Y g \rho_0 (1 + g(Y-y)/a_0^2) dy = \\ &= g \rho_0 (Y-d) (1 + g(Y-d)/2 a_0^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Om deformationen av ett ledningssegment dx antas oberoende av omgivande sektioner kan för en cirkulär ledning med diame-

tern d , sektionens areans ökning ΔA skrivs

$$\Delta A \approx \frac{A_o d}{e E_r} \Delta p = \frac{A_o}{\rho_o a_r^2} \Delta p ; \quad (3.4)$$

där E_r = rörmaterialets elasticitetsmodul, $A_o = \pi d^2/4$,
 e = rörväggens tjocklek och $a_r = \sqrt{E_r e / \rho_o d}$ med dimen-
sionen hastighet. För betongrör är E_r av storleksordning-
en $4 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$. Med $d = 1 \text{ m}$ och $e = 0,05 \text{ m}$ erhålles
 a_r till 1400 m/s .

Tvärsektionens area vid övertrycket $\rho g (Y-d)$ erhålles nu
med ekv (3.3) till

$$A = A_o \left[1 + \frac{g (Y-d) (1 + g(Y-d) / 2 a_o^2)}{a_r^2} \right] \\ \approx A_o (1 + g(Y-d) / a_r^2) ; \quad (3.5)$$

där vi försummat termer av storleksordningen $1/(a_r a_o)^2$.
Ett övertryck motsvarande 20 m vattenpelare ger alltså med
 $a_r = 1400 \text{ m/s}$ en relativ areaökning $\Delta A/A_o = 10^{-4}$.

3.2 Kontinuitetsekvationen

Kontinuitetsekvationen baserar sig liksom vid strömning med
fri vattenyta på principen om massans oförstörbarhet. Netto-
inflödet av massa till kontrollvolymen i fig. 3.1 måste därför
vara lika med ökningen av kontrollvolymens massa,

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho Q) dx dt = \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) dx dt ; \quad (3.6)$$

Densiteten ρ antages som tidigare vara konstant över tvär-
snittet.

Efter utveckling av derivatorna erhålles

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ; \quad (3.7)$$

De två sista termerna i denna ekvation kan med hjälp av ekv (3.2) och (3.5) och med $A/\rho = A_0/\rho_0$ skrivas

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = g A_0 \frac{\partial Y}{\partial t} \left(\frac{1}{a_r^2} + \frac{1}{a_0^2} \right) = \frac{g A_0}{a^2} \frac{\partial Y}{\partial t}; \quad (3.8)$$

där $a = a_0 / \sqrt{1 + a_0^2 / a_r^2}$ och representerar ljudets hastighet ¹⁾ i vattnet under hänsynstagande av vattnets kompressibilitet och rörväggs deformation. För den tidigare specificerade betongledningen är $a_0 \approx a_r \approx 1400$ m/s varför $a \approx 1000$ m/s.

Ekv. (3.7) kan då skrivas

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{g A_0}{a^2} \frac{\partial Y}{\partial t} = 0; \quad (3.9)$$

Om vi nu jämför detta samband med ekv. (2.6b) finner vi, att analogi erhålles mellan sambanden för strömning i helt fylld sektion resp strömning med fri vattenyta, om för $Y > d$ gäller att

$$B = B_s = g A_0 / a^2 \quad (3.10)$$

samt om termen $\frac{Q}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ är försumbar (3.11)

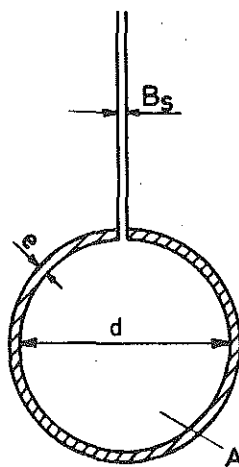


Fig. 3-2

Analogi mellan strömning med fri vattenyta och i helt fylld ledning erhålles genom införande av en smal fiktiv spalt i rörets hjässa.

1) Elastiska tryckvågors hastighet

Det första villkoret motsvarar införandet av en mycket smal fiktiv spalt med bredden B_s i rörets hjässa, fig. 3-2. För $d = 1 \text{ m}$ och $a = 1000 \text{ m/s}$ är B_s av storleksordningen 10^{-5} m .

Det andra villkoret är normalt uppfyllt av följande skäl. Vid stationär strömning är de longitudinella tryckdifferenserna $(\partial p / \partial x)$ små varför densitetsdifferenserna är försumbara $(\partial \rho / \partial x = 0)$. En så stor tryckdifferens som $\Delta p = 50\,000 \text{ N/m}^2$ (motsvarar 5 m vattenpelare) ger en relativ densitetsdifferens $\Delta \rho / \rho$ av endast $3 \cdot 10^{-5}$. Vi behöver därför här endast beakta de longitudinella densitetsdifferenser som beror av flödesvariationerna i tid och rum. För dessa överliggande differenser $\Delta [\partial \rho / \partial x]$ kan man emellertid visa att, se Parmakian (1963)

$$-\Delta \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = + \frac{1}{a} \frac{\partial \rho}{\partial t}; \quad (3.12)$$

Eftersom kvoten V/a normalt är mindre än $1/100$ kan vi försumma termen $(Q/\rho) \partial \rho / \partial x$ i förhållande till termen $(A/\rho) \partial \rho / \partial t$ i ekv. (3.7).

Kontinuitetsekvationen för icke stationär strömning i fylld ledning kan således skrivas (i analogi med ekv. (2.6b))

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B_s \frac{\partial Y}{\partial t} = 0; \quad (3.13)$$

där

$Y \geq d = \text{rörets diameter}$

$B_s = g A_0 / a^2 = \text{den fiktiva spaltens bredd}$

$a = a_0 / \sqrt{1 + E_v d / e E_r} = \text{tryckvågens hastighet}$

Idén med införandet av den fiktiva spalten presenterades först av Preissmann, se Preissmann och Cunge (1961), och utnyttjades sedan av Cunge och Wegner (1964) för beräkning av svallningsförloppet i en kraftverkstunnel med alternerande fri vattenyta resp. fylld sektion.

De antaganden och det resonemang som använts ovan är det som normalt användes inom tryckslagsteorin. Vi skall emellertid visa att analogin mellan strömning med fri vattenyta och strömning i helt fylld sektion kan diskuteras fram på ett något annorlunda sätt med utgångspunkt från massflödet $Q_m = \rho Q$.

Om vi i ekv. (3.6) inför massflödet $Q_m = \rho Q$ erhåller vi med hjälp av ekv. (3.8) och (3.10)

$$\frac{\partial Q_m}{\partial x} + \rho B_s \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 ; \quad (3.14)$$

Då vi tidigare visat att den maximala relativa densitetsdifferensen vid de flödesförlopp vi här avser studera är mindre än 10^{-4} , kan vi i koefficienten framför $\partial Y / \partial t$ sätta $\rho = \rho_0$. Ekv. (3.14) kan då skrivas på samma form som ekv. (2.6b)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_m}{\rho_0} \right) + B_s \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 ; \quad (3.15)$$

men uttryckt i de beroende variablerna Q_m / ρ_0 , Y istället för Q , Y . Kravet på beräkningsnoggrannheten bör dock ej ställas högre än att det är likgiltigt om vi beräknar Q_m / ρ_0 eller Q , eftersom $1 \leq Q_m / \rho_0 Q < 1 + 10^{-4}$. Vi kan därför tillåta oss att byta variabeln Q_m / ρ_0 mot variabeln Q , vilket åter leder oss till ekv. (3.13).

Det genomförda resonemanget är givetvis i princip analogt med det tidigare. Skillnaden är endast den att vi i denna senare härledning ej behövt utnyttja ekv. (3.12).

3.3 Rörelsemängdekvationen

Ekv. (2.7) applicerad på kontrollvolymen i fig. 3-1 ger på motsvarande sätt som för strömning med fri vattenyta

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho Q) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \rho \frac{Q^2}{A} \right) + A \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g A (I_0 - I_f) ; \quad (3.16)$$

där p är övertrycket enligt fig. 3-1.

Inom tryckslagsteorin är det praxis att i rörelsemängdekvationen helt försumma variationer i densiteten ρ och tvärsektionens area A . Om vi i enlighet med denna praxis sätter $\rho = \rho_0 = \text{konstant}$, $A = A_0 = \pi d^2/4$ och $\partial p / \partial x = \rho_0 g \partial Y / \partial x$ erhålles

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A_0} \right) + g A_0 \frac{\partial Y}{\partial x} = g A_0 (I_0 - I_f); \quad (3.17)$$

vilket samband är analogt med det för strömning med fri vattenyta, ekv. (2.14) fränsett det förhållandet att vi här arbetar med en tvärsektion med konstant area.

Man kan vidare visa, se Parmakian (1963), att termen $\partial(\beta \cdot Q^2 / A_0) \partial x$ i analogi med ekv. (3.12) är försumbar jämförd med $\partial Q / \partial t$.

Denna ytterligare möjlighet till förenkling kommer vi emellertid ej att utnyttja. I tryckslagsberäkningar försummas dessutom ofta friktionskrafterna beroende på att man vid t ex en snabb ventilstängning får mycket större tryckvariationer än de som normalt förekommer vid stationär strömning.

Ekv. (3.17) har alltså erhållits med utgångspunkt från antagandet om konstant densitet och konstant tvärsektion. Om vi i stället liksom vid diskussionen av kontinuitetsekvationen inför massflödet Q_m i ekv. (3.16) erhålles, jfr ekv (3.14),

$$\frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta Q_m^2}{\rho A} \right) + A \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g A (I_0 - I_f); \quad (3.18)$$

Vi observerar att om termer av storleksordningen $1/(a_r a_0)^2$ försummas blir

$$\begin{aligned} \rho A &= \rho_0 A_0 (1 + g(Y-d)/a_0^2) (1 + g(Y-d)/a_r^2) \\ &\approx \rho_0 (A_0 + B_s (Y-d)) = \rho_0 A_f \end{aligned} \quad (3.19)$$

där A_f = totala sektionens arean inklusive den fiktiva spaltens area.

Vidare erhålles på motsvarande sätt

$$A \frac{\partial p}{\partial x} \approx g \rho_o A_f \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (3.20)$$

Efter derivering och insättning av sambanden ovan får då ekv. (3.18) utseendet om $\beta = \text{konstant}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_m}{\rho_o} \right) + 2\beta V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_m}{\rho_o} \right) + (g A_f - \beta B_s V^2) \frac{\partial Y}{\partial x} = g A_f (I_o - I_f); \quad (3.21)$$

där $V = Q_m / \rho_o A_f$.

Detta samband är analogt med rörelsemängdekvationen (2.15) för prismatisk sektion men uttryckt i variablerna Q_m / ρ_o , Y . Liksom fallet var med kontinuitetsekvationen måste det även här vara tillåtet att byta variabeln Q_m / ρ_o mot variabeln Q , vilket ger oss en fullständig analogi mellan strömning med fri vattenyta och i helt fylld prismatisk ledning,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2\beta V \frac{\partial Q}{\partial x} + (gA - \beta B V^2) \frac{\partial Y}{\partial x} = gA (I_o - I_f); \quad (3.22)$$

Vid helt fylld ledning gäller alltså att $A = A_f = A_o + B_s (Y-d)$ där $B = B_s = gA_o / a^2$. Vi har sålunda visat att man, genom att i ledningens hjässan införa en fiktiv spalt vars bredd beror av vätskans och rörmaterialets deformationsegenskaper, kan överföra strömning i helt fylld sektion till strömning med fri vattenyta.

Den genomförda diskussionen kan synas vara av enbart akademiskt intresse. Ur praktisk beräkningssynpunkt är ju ekv. (3.17) och (3.22) likvärdiga, ty i ekv. (3.22) kan vi om vi så önskar utnyttja approximationerna

$$A = A_o + B_s (Y-d) = A_o \left(1 + \frac{g(Y-d)}{a^2} \right) \approx A_o; \quad (3.23)$$

$$(gA - \beta B_s V^2) \frac{\partial Y}{\partial x} \approx gA_o \frac{\partial Y}{\partial x} \left(1 - \beta \frac{V^2}{a^2} \right) \approx gA_o \frac{\partial Y}{\partial x};$$

Målsättningen har emellertid varit den att för strömning i helt fylld sektion söka formulera samband så likformiga med

de för strömning med fri vattenyta som möjligt. Detta mål har alltså uppnåtts genom att undvika att utnyttja alla "till-låtna" approximationer.

3.4. Sammanfattning

För strömning i helt fylld cirkulär sektion med diametern d har härletts kontinuitets- resp rörelsemängdekvationen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B_s \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 ; \quad (3.24a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \beta V \frac{\partial Q}{\partial x} + (gA - \beta B V^2) \frac{\partial Y}{\partial x} = gA (I_o - I_f) ; \quad (3.24b)$$

där $Y \geq d$, $B = B_s = gA_o/a^2$, $A = A_o + B_s \cdot (Y - d)$, $A_o = \pi d^2/4$ och a = elastiska tryckvågors hastighet i vattnet. Längden B_s kan tolkas som bredden på en mycket smal fiktiv spalt införd i rörets hjässa. Denna spalt representerar rörväggarnas och vattnets deformationsegenskaper.

Dessa samband är helt analoga med de som tidigare härletts för strömning med fri vattenyta i prismatisk kanal. Lateralt tillflöde behandlas som vid strömning med fri vattenyta.

4. ANALYS AV RÖRELSEEKVATIONERNAS EGENSKAPER. KARAKTERISTIKMETODEN

4.1 Integrering av förenklade rörelseekvationer

I kapitel 2 och har visats att endimensionell strömning med fri vattenyta resp i helt fylld ledning kan beskrivas med hjälp av analoga kontinuitets- och rörelseekvationer. Om vi för enkelhetens skull sätter $\beta = 1$ kan vi för prismatisk kanal eller helt fylld ledning skriva kontinuitets- resp rörelsemängdekvationen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 ;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 V \frac{\partial Q}{\partial x} + (gA - BV^2) \frac{\partial Y}{\partial x} = gA (I_o - I_f) ; \quad (4.1)$$

där $B = B_s = gA/a^2$ för helt fylld ledning. Vi har då förutsatt att det laterala tillflödet är lika med noll.

Dessa två icke -linjära partiella differentialekvationer uttryckta i de beroende variablerna (Q , Y) och de oberoende variablerna (x , t) har ingen allmän analytisk lösning. Vi skall emellertid här först behandla en förenklad problemställning som möjliggör en analytisk lösning inom ett begränsat område av xt -planet.

Låt oss betrakta en rak kanal med konstant rektangulärt tvärsnitt och horisontell botten. Förutsätt vidare att friktionskrafterna kan försummas. Ekv. (4.1) kan då skrivas ¹⁾

$$V \frac{\partial Y}{\partial x} + Y \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 ; \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 ; \quad (4.2b)$$

Vi inför nu hastigheten

$$c = \sqrt{gY} \quad (4.3)$$

1) jfr ekv (2.6c) och ekv (2.16)

vilken vi igenkänner som våghastigheten för långa vågor på vattendjupet Y . Eliminering av Y i ekv. (4.2) genom substitution av ekv. (4.3) ger

$$2 V \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial V}{\partial x} + 2 \frac{\partial c}{\partial t} = 0 ; \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + 2 c \frac{\partial c}{\partial x} = 0 ; \quad (4.4b)$$

Om vi summerar resp subtraherar dessa båda samband erhålles de två ekvationerna

$$\frac{\partial (V + 2c)}{\partial t} + (V + c) \frac{\partial (V + 2c)}{\partial x} = 0 ; \quad (4.5a)$$

respektive

$$\frac{\partial (V - 2c)}{\partial t} + (V - c) \frac{\partial (V - 2c)}{\partial x} = 0 ; \quad (4.5b)$$

En jämförelse mellan ekv. (4.5a) och den totala derivatan

$$\frac{d}{dt} (V + 2c) = \frac{\partial (V + 2c)}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial (V + 2c)}{\partial x} ; \quad (4.6)$$

visar att längs en linje C_+ i xt -planet med riktningen

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_+ = V + c ; \quad (4.7)$$

gäller att

$$\frac{d}{dt} (V + 2c) = 0 ; \quad \text{dvs att } V + 2c = \text{konstant} = J_+ ; \quad (4.8)$$

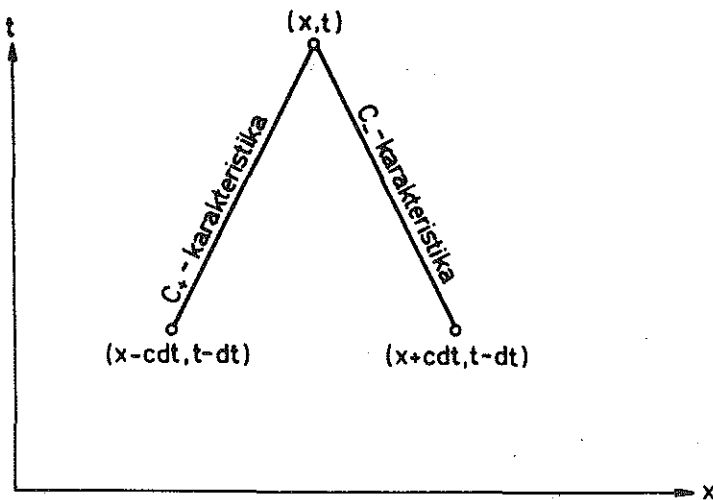


Fig. 4-1 Karakteristiska riktningar i xt -planet för $V = 0$.

På motsvarande sätt finner vi av ekv (4.5b) att längs en linje C_- med riktningen

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_- = V - c ; \quad (4.9)$$

gäller att

$$\frac{d}{dt}(V - 2c) = 0 ; \quad \text{d v s att } V - 2c = \text{konstant} = J_- ; \quad (4.10)$$

Linjerna C_+ och C_- benämnes karakteristikor. De mot dessa linjer svarande konstanterna (invarianterna) J_+ och J_- kallas Riemann-invarianter.

Vi har alltså visat att det för differentialekvationerna (4.2) är möjligt att definiera karakteristiska riktningar, se fig. 4-1, längs vilka vissa kvantiteter, Riemann-invarianterna, är konstanta. Om vi förflyttar oss med hastigheten $V + c$ parallellt x -axeln kommer vi att uppfatta kvantiteten $V + 2c$ som konstant. Hastigheterna $V + c$ och $V - c$ representerar alltså vid subkritiskt flöde, $V < \sqrt{gY}$, fortplantningshastigheten för störningar (differentiella störningar) i nedströms resp uppströms riktning.

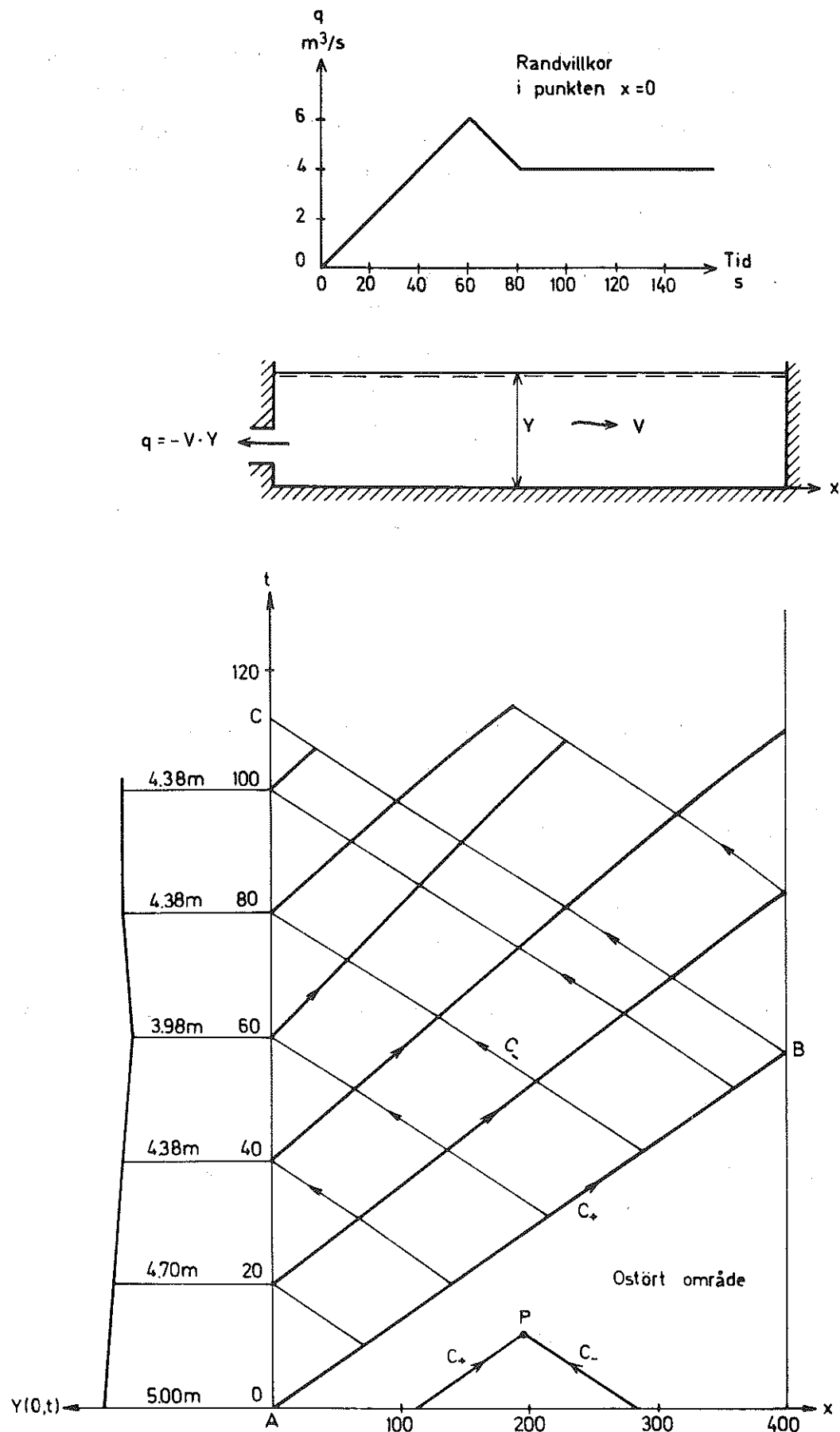


Fig. 4-2 Konstruktion av karakteristiskt rutnät och beräkning av vattenståndsutvecklingen $Y(0,t)$ i en 400 m lång horisontell kanal under antagande av försumbar friktion. Efter ABBOT (1966).

För att demonstrera det praktiska utnyttjandet av de härledda sambanden betraktar vi en 400 m lång horisontell kanal med konstant rektangulärt tvärsnitt, fig. 4-2. Vidare förutsättes att friktionsförlusterna kan försummas och att kanalens nedströmsände är sluten.

Vid tiden $t = 0$ gäller att vattendjupet $Y = 5$ m och medelhastigheten $V = 0$. Vi låter då avbördningen q per breddmeter i punkten $x = 0$ först öka linjärt från noll till $q_1 = 6 \text{ m}^2/\text{s}$ på tiden $\Delta t_1 = 60$ sekunder och därefter avta linjärt till $q_2 = 4 \text{ m}^2/\text{s}$ på tiden $\Delta t_2 = 20$ sekunder för att sedan vara konstant.

Vi finner då att det längs C_+ - resp. C_- - karakteristikor utgående från x -linjen ($t=0$) gäller att

$$J_+ = V + 2c = 14 \text{ m/s}$$

$$J_- = V - 2c = -14 \text{ m/s} \quad (4.11)$$

I skärningspunkten P mellan två sådana karakteristikor måste båda Riemann-invarianterna vara satisfierade.

Inom den del av xt -planet i fig. 4-2 som begränsas av linjen AB och x -axeln gäller således att $V = 0$ och att $c = 7 \text{ m/s}$, dvs att $Y = 5$ m. Tappningen i punkten $x = 0$ kan därför ej ge något utslag i punkten $x = 400$ m förrän efter tidigast $400/7 = 57$ sekunder.

Av ovanstående följer att det även längs alla C_- -karakteristikor utgående från linjen AB måste gälla att

$$J_- = V - 2c = V - 2\sqrt{gY} = -14 \text{ m/s} \quad (4.12)$$

medan längs t -axeln enligt de givna randvillkoren

$$V(0, t) \cdot Y(0, t) = \begin{cases} -q_1 t / \Delta t_1 ; & 0 \leq t \leq \Delta t_1 \\ -q_1 + (q_1 - q_2) \cdot (t - \Delta t_1) / \Delta t_2 ; & \Delta t_1 \leq t \leq \Delta t_1 + \Delta t_2 \\ -q_2 ; & \Delta t_1 + \Delta t_2 \leq t \end{cases} \quad (4.13)$$

$Y(0, t)$ kan nu lösas ur ekv. (4.12) och (4.13) för punkter på t -linjen inom avsnittet AC .

De erhållna vattenstånden framgår av fig. 4-2 tillsammans med av Abbot (1966) redovisade karakteristiska riktningar.

Längs C_+ -karakteristikan utgående från punkten $t = T$ på t -linjen gäller att

$$V + 2c = V(0, T) + 2c(0, T) \quad (4.14)$$

där $c(0, T) = \sqrt{gY(0, T)}$, medan längs alla C_- -karakteristikor inom området ABC

$$V - 2c = -2c(x, 0) = -14 \text{ m/s} \quad (4.15)$$

I skärningspunkterna mellan den betraktade C_+ -karakteristikan och C_- -karakteristikorna, dvs längs C_+ -karakteristikan, måste således gälla att

$$V(x, t) = V(0, T)/2 + \sqrt{gY(0, T)} - 7 \text{ m/s} = \text{konstant}$$

$$c(x, t) = V(0, T)/4 + \sqrt{gY(0, T)}/2 + 3,5 \text{ m/s} = \text{konstant} \quad (4.16)$$

C_+ -karakteristikans riktning erhålles ur sambandet

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_+ = V(0, T) + c(0, T) \quad (4.17)$$

varav följer att C_+ -karakteristikorna är räta men ej parallella linjer inom triangeln ABC, dvs inom det område som ej berörs av från punkten $x = 400 \text{ m}$ reflekterade störningar. C_- -karakteristikorna är däremot ej räta linjer.

Ekvationerna (4.7) - (4.10) ger oss alltså möjlighet att under vissa förutsättningar analytiskt beräkna V och Y (eller c) i alla punkter inom triangeln ABC, vilket ej är möjligt utanför linjen BC på grund av karakteristiskornas krökning. Där måste någon form av passningsräkning tillgripas.

Den här genomförda härledningen av karakteristikor och Riemann-ekvationer överensstämmer med den som ges av Stoker (1957).

I följande avsnitt redovisas en mera generell matematisk metod, se t ex Hildebrand (1962) eller Abbot (1966).

4.2 Matrisformulerad härledning av karakteristiska riktningar och tillhörande Riemann-ekvationer.

Man kan visa, se t ex Abbot (1966), att de karakteristiska riktningarna är kurvor i x, t -planet tvärs vilka förstaderivator (i detta fall $\partial Q/\partial x$, $\partial Q/\partial t$, $\partial Y/\partial x$ och $\partial Y/\partial t$) kan vara diskontinuerliga och längs vilka diskontinuiteter i dessa derivator kan överföras. Detta innebär att derivatorna längs karakteristikorna är obestämda. De karakteristiska riktningarna kan därför bestämmas genom att man söker de värden på dx/dt , för vilka dessa blir obestämda, dvs de värden på dx/dt för vilka de partiella derivatorna kan anta oändligt många värden.

Vi förutsätter att Q och Y samt deras partiella derivator existerar i hela xt -planet. De totala derivatorna av Q resp Y erhålles då till

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (4.18)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Ekvationerna (4.1) och (4.18) kan ses som ett system av fyra linjära ekvationer i fyra partiella derivator, vilket kan skrivas på matrisformen

$$M_1 \cdot X = M_2 ; \quad (4.19)$$

där

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & B \\ 2V & 1 & (gA - BV^2) & 0 \\ dx/dt & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx/dt & 1 \end{bmatrix} ; X = \begin{bmatrix} \partial Q/\partial x \\ \partial Q/\partial t \\ \partial Y/\partial x \\ \partial Y/\partial t \end{bmatrix} ; M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(I_o - I_f) \\ dQ/dt \\ dY/dt \end{bmatrix} ;$$

Enligt Cramers regel gäller att lösningen till detta ekvations-system kan skrivas

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\det N_1}{\det M_1}; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\det N_2}{\det M_1}; \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\det N_3}{\det M_1}; \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\det N_4}{\det M_1}; \quad (4.20)$$

där determinanten av N_1, N_2, N_3 och N_4 erhålles genom att i matrisen M_1 byta första, andra, tredje resp fjärde kolonnen mot vektorn M_2 . Kravet på oändligt antal lösningar, dvs odefinierade värden på de partiella derivatorna, innebär således att determinanterna i täljare och nämnare båda är noll.

$\det M_1 = 0$ ger efter utveckling

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2V \frac{dx}{dt} - \frac{(gA - BV^2)}{B} = 0; \quad (4.21)$$

Denna ekvation har två lösningar

$$\frac{dx}{dt} = V \pm \sqrt{\frac{gA}{B}}; \quad (4.22)$$

vilka definierar två karakteristiska riktningar i xt -planet för de två simultana ekvationerna (4.1). Den riktning som definieras av plustecknet benämnes som tidigare " C_+ -karakteristikan" medan den som ges av minustecknet benämnes " C_- -karakteristikan".

Villkoret $\det N_1 = 0$ ger

$$\frac{dQ}{dt} + (gA - BV^2) \frac{dY}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = gA (I_o - I_f); \quad (4.23)$$

(Man kan visa att motsvarande samband även kan härledas ur villkoren $\det N_2 = \det N_3 = \det N_4 = 0$).

Om vi nu substituerar ekv (4.22) i ekv (4.23) finner vi längs C_+ -karakteristikan att

$$\frac{dQ}{dt} - (V - \sqrt{\frac{gA}{B}}) \cdot B \frac{dY}{dt} = gA (I_o - I_f); \quad (4.24)$$

och längs C_- -karakteristikan att

$$\frac{dQ}{dt} - (V + \sqrt{\frac{gA}{B}}) \cdot B \frac{dY}{dt} = gA (I_o - I_f); \quad (4.25)$$

Dessa ekvationer, vilka i det följande benämnes Riemann-ekvationer, brukar i integrerad form kallas kvasi-invarianter till ekv (4.1) och de tillhörande karakteristikerna, ekv (4.22). Termen "kvasi" härrör från det förhållandet att högerledet är skiljt från noll. Om högerledet är lika med noll ($I_o = I_f$) erhålles nämligen ur text ekv (4.24) att

$$Q - \int (V - \sqrt{\frac{gA}{B}}) B dY = \text{konstant (invariant)}; \quad (4.26)$$

längs C_+ -karakteristikan, (jfr ekv (4.8)).

De simultana partiella differentialekvationerna (4.1) har två reella karakteristika, varför de benämnes hyperboliska. Ekvationer med en reell karakteristika kallas paraboliska medan ekvationer utan reell karakteristika är elliptiska.

4.3 Karakteristikmetoden

I föregående kapitel har visats att de partiella differentialekvationerna (rörelseekvationerna) enligt ekv (4.1) har kunnat överföras till ett system av ordinära differentialekvationer, Riemann-ekvationerna, vilka är satisfierade längs vissa kurvor, karakteristika, i xt -planet. Sålunda gäller att

$$\frac{dQ}{dt} - (V - \sqrt{\frac{gA}{B}}) B \frac{dY}{dt} = gA (I_o - I_f); \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Satisfierad längs} \\ C_+ \text{-karakteristikan} \\ \left[\frac{dx}{dt} \right]_+ = V + \sqrt{\frac{gA}{B}}; \end{array} \right. \quad (4.27a)$$

$$\frac{dQ}{dt} - (V + \sqrt{\frac{gA}{B}}) B \frac{dY}{dt} = gA (I_o - I_f); \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Satisfierad längs} \\ C_- \text{-karakteristikan} \\ \left[\frac{dx}{dt} \right]_- = V - \sqrt{\frac{gA}{B}}; \end{array} \right. \quad (4.27b)$$

Med hjälp av dessa ekvationer kan, under vissa förutsättningar ($I_o - I_f = 0$), analytiska lösningar erhållas inom de områden av

xt-planet där någon av karakteristikerna utgör en rät linje. Vid de flesta praktiska tillämpningarna är emellertid så ej fallet, varför ett numeriskt förfarande måste tillämpas. Vidare kan friktionen i allmänhet ej försummas.

Låt oss förutsätta att vi känner vattendjupet Y och flödet Q i de två punkterna 1 och 2 på x-linjen i fig. 4-3. Från punkterna 1 och 2 utgår karakteristikerna C_+ resp. C_- , vilka skär varandra i punkten 3. Om avståndet Δx mellan punkterna 1 och 2 väljes tillräckligt litet bör det vara en godtagbar approximation

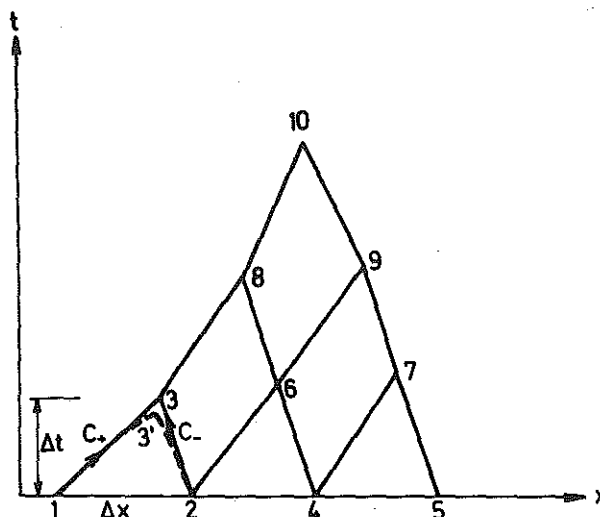


Fig. 4-3 Karakteristiskt rutnät vid beräkning med hjälp av karakteristikmetoden.

att ersätta de två karakteristikerna med deras tangenter i punkterna 1 och 2. Den nya punktens (3) koordinater definieras då av sambanden

$$\Delta t = \left[\left(\frac{dt}{dx} \right)_+ \right]_1 \cdot (x_3 - x_1);$$

$$\Delta t = \left[\left(\frac{dt}{dx} \right)_- \right]_2 \cdot (x_3 - x_2);$$
(4.28)

och värdena på Q och Y i denna punkt kan beräknas ur ekva-

tionssystemet (4.27) med följande värden avseende punkt 1 insatta i ekv (4.27a)

$$dt = \Delta t ;$$

$$dQ = Q_3 - Q_1 ;$$

$$dY = Y_3 - Y_1 ;$$

$$(V - \sqrt{\frac{gA}{B}}) = (V_1 - \sqrt{\frac{gA_1}{B_1}}) ; \quad (4.29)$$

$$gA (I_o - I_f) = gA_1 (I_o - I_{f1}) ;$$

och motsvarande värden avseende punkt 2 insatta i ekv (4.27b). På samma sätt beräknas Q och Y i punkterna 6 och 7, där-
efter i punkterna 8 och 9 och sedan i punkt 10. Om Q och Y
skall kunna beräknas i hela xt -planet erfordras, förutom be-
gynnelsevillkoren längs linjen $t = 0$, även lämpligt formulerade
randvillkor längs ränderna $x = 0$, $x = L$.

Den ovan skisserade beräkningsgången, karakteristikmetoden,
är i princip en exakt metod för lösning av transportproblem.
Såsom i exemplet ovan måste vi dock i praktiken på grund av
karakteristikornas krökning införa vissa approximationer vid
konstruktionen av det karakteristiska rutnätet. Om mera
"exakta" lösningar önskas kan t ex det iterativa förfarande som
beskrives i fig. 4-4 utnyttjas.

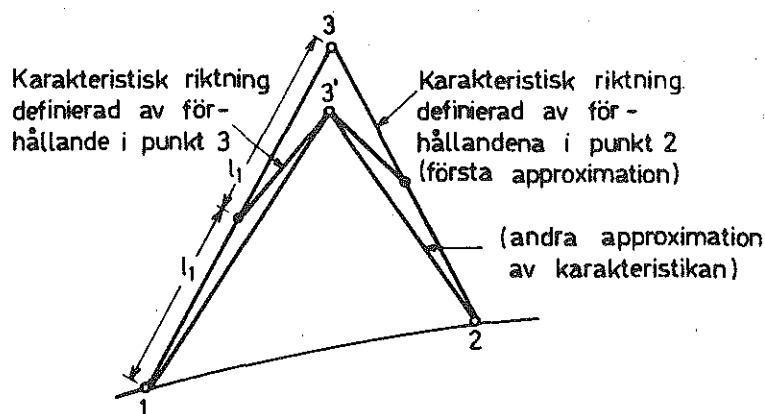


Fig. 4-4 Bestämning av karakteristikors skärningspunkt med hjälp av successiva approximationer.

Ekv. (4.27a och b) har alltså en sådan form att de kan lösas numeriskt genom en successiv beräkning av koordinaterna (x, t) för det karakteristiska rutnätet och motsvarande värden på de beroende variablerna (Q, Y) . På grund av de programmeringstekniska svårigheter som är förknippade med denna procedur är det dock ovanligt att karakteristikmetoden utnyttjas på det sätt som skisserats i fig 4-3. Ur beräkningssynpunkt är det oftast enklare att utnyttja så kallade finita differensschema, se kap 6. Karakteristikmetoden representerar emellertid i sig själv en differensmetod och måste som sådan betraktas som den mest optimala. Det är med denna metod möjligt att förklara "oförklarliga numeriska svårigheter" som kan uppstå vid beräkningar med hjälp av finita differensmetoder, Abbot (1966).

4.4 Definition av subkritiskt och superkritiskt tillstånd med hjälp av karakteristiska riktningar

Det framgår av den diskussion som tidigare förts att värdena på Q och Y inom området KPL i fig 4-5 helt bestäms av förhållandena, dvs värdena på Q och Y , längs linjen KL, eller, vilket är ekvivalent, förhållandena i punkten P bestäms av förhållandena längs denna linje. Området KPL brukar kallas beroendedområdet för P.

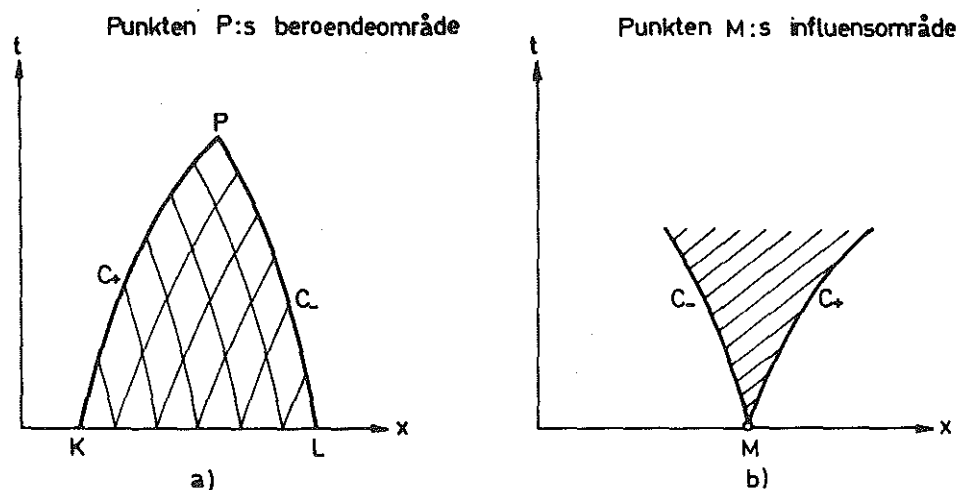


Fig. 4-5 Beroendedområde och influensområde

På motsvarande sätt inses att karakteristikorna utgående från punkten M i fig. 4-5 utgör yttre gränser för det område, punkten M:s influensområde, inom vilket förhållandena i denna punkt har något inflytande på lösningen av differentialekvationerna.

Enligt ekv. (4.27) definieras de karakteristiska riktningarna av sambanden

$$C_+ : \left[\frac{dx}{dt} \right]_+ = V + \sqrt{\frac{gA}{B}} ; \quad (4.30)$$

$$C_- : \left[\frac{dx}{dt} \right]_- = V - \sqrt{\frac{gA}{B}} ;$$

Sålunda gäller att om

$$V < \sqrt{gA/B} ; \text{ dvs } Fr = \frac{V}{\sqrt{gA/B}} < 1 ; \quad (4.31)$$

kommer förhållandena i punkten P att vara beroende av förhållandena både uppströms och nedströms denna punkt, vi har subkritiskt (strömmande) flödestillstånd, fig. 4-6a. En störning kan då fortplantas både i uppströms och nedströms riktning, negativ resp positiv x-riktning.

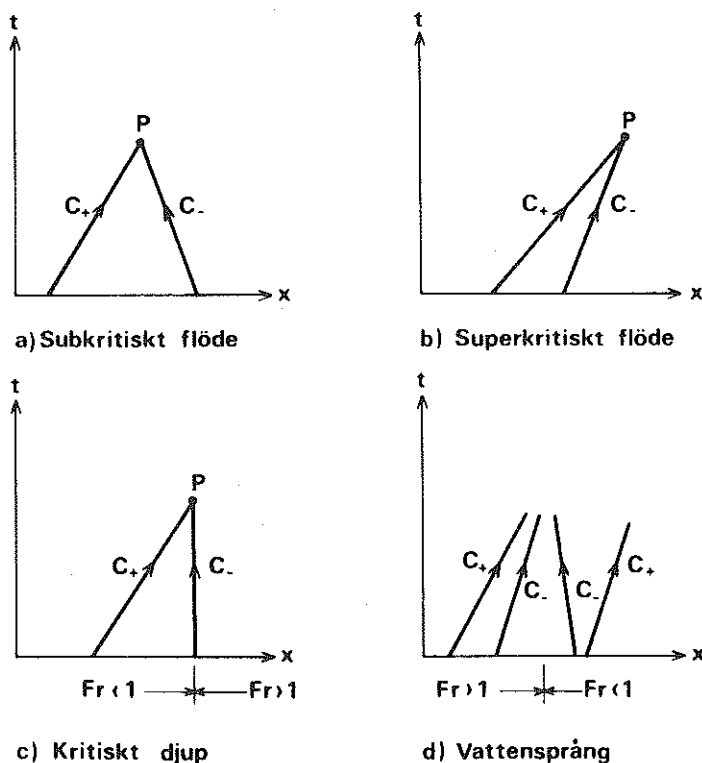


Fig. 4-6 Karakteristikor svarande mot olika värden på Froudes tal.

Om $Fr > 1$, kan en störning enbart fortplantas i nedströms riktning, vilket definierar superkritiskt (stråkande) tillstånd, fig. 4-6b.

I en övergångszon mellan subkritiskt och superkritiskt tillstånd måste C_u -karakteristikan någonstans vara parallell med t-axeln, fig. 4-6c. I den sektion, där detta inträffar, (kritisk sektion eller bestämmande sektion), råder ett entydigt samband mellan V och Y .

$$V = \sqrt{\frac{gA}{B}}; \text{ dvs } Fr = 1; \quad Y = Y_{\text{krit}} \quad (4.32)$$

Om $Fr < 1$ är således $Y < Y_{\text{krit}}$ och om $Fr > 1$ är $Y > Y_{\text{krit}}$.

Det framgår av ekv (2.21a) att vattenytan i en bestämmande sektion skulle ha en vertikal tangent, vilket är orimligt. Förklaringen är den att antagandet om gradvis varierande strömning (hydrostatisk tryckfördelning) ej är uppfyllt i närheten av en bestämmande sektion. Vid numeriska beräkningar vållar dock detta förhållande i allmänhet ej några problem.

Då flödestillståndet övergår från superkritiskt till subkritiskt tillstånd erhålles den situation som skisserats i fig. 4-6d. Karakteristikor av samma familj, C_u , konvergerar mot en skärningspunkt, innebärande att vattenståndet kan anta två värden. Två zoner med gradvis varierande strömning åtskiljs av ett s k vattensprång med icke försumbara vertikala accelerationer, fig 4-7. De endimensionella rörelseekvationerna är ej längre giltiga och karakteristikmetoden kan ej användas.

Rörelseekvationerna gäller således fortfarande såväl uppströms som nedströms vattensprånget medan vi för själva vattensprånget, diskontinuiteten, måste ställa upp särskilda samband som relaterar flöden och vattenstånd i uppströmssektionen till de i nedströmssektionen, se kap. 4.5.

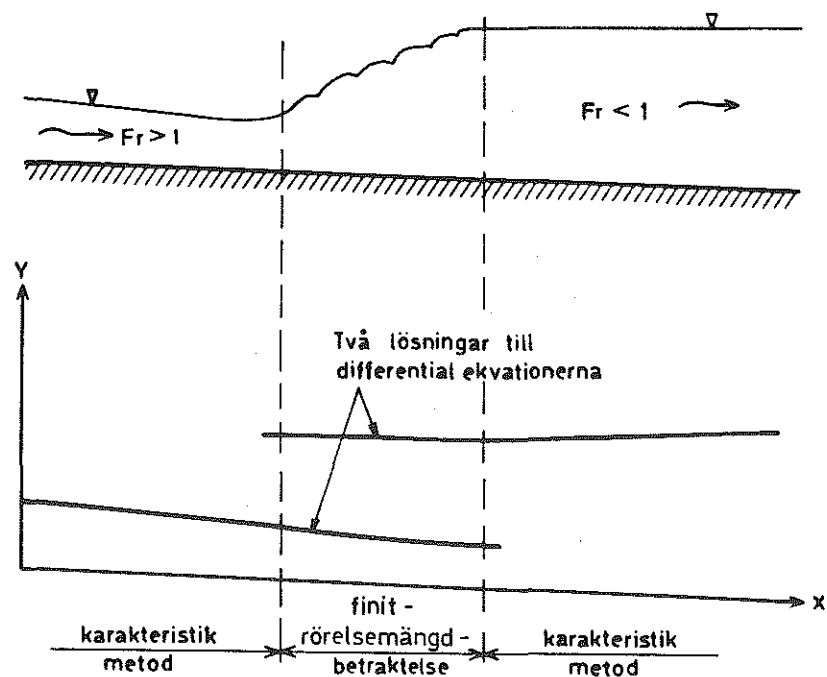


Fig. 4-7 Övergång från superkritiskt till subkritiskt tillstånd i vattensprång.

Ett mot vattensprånget svarande fenomen kan inträffa vid en snabb och stor vattenföringsökning. Genom att våghastigheten $c = \sqrt{gA/B}$ växer med vattendjupet kommer C_+ -karakteristikor att konvergera och forma en kurva beskrivande banan i xt -planet för en chockvåg med samma egenskaper som ett vattensprång, se fig. 4-8 och t ex Henderson (1966).

Som senare kommer att framgå erbjuder de numeriska metoderna goda möjligheter att approximera diskontinuiteter. Detta sammanhänger med att differensekvationerna snarare beskriver ett diskontinuerligt än ett kontinuerligt flöde.

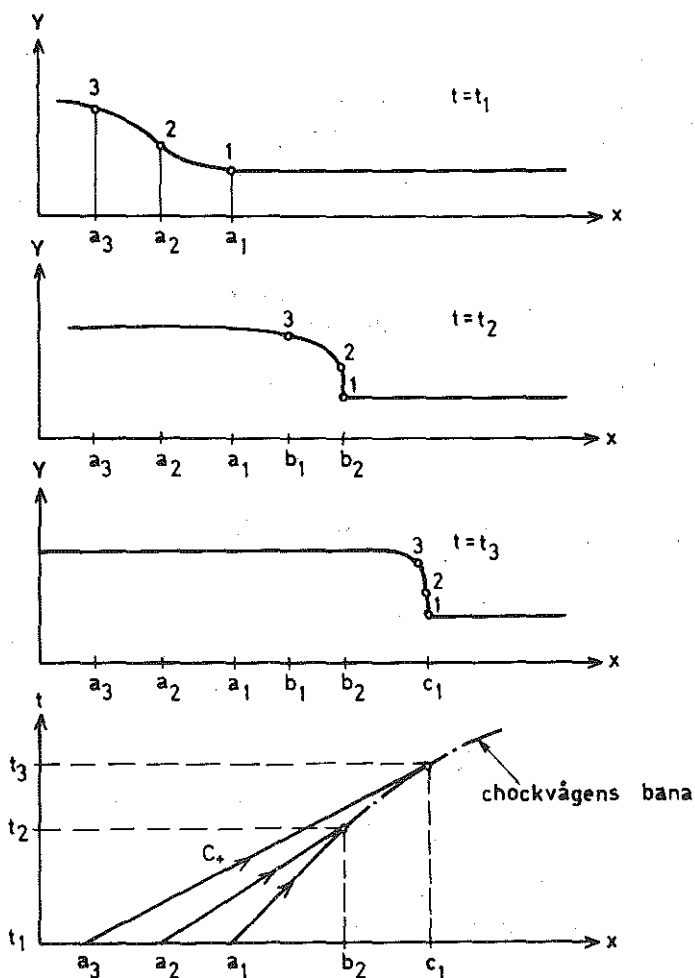


Fig. 4-8 Utbildande av chockvåg vid snabb vattenföringsökning.

4.5 Begynnelse- och randvillkor

För att vi skall kunna beräkna Q och Y i hela xt -planet krävs att vissa villkor är givna dels längs x -axeln ($t = 0$), dels vid uppströms och nedströms rand. Av karakteristikmetoden följer att antalet villkor måste vara lika med antalet karakteristika som har sitt ursprung från den aktuella randpunkten.

Från x -axeln utgår från varje punkt oberoende av strömningstillståndet två karakteristika (en positiv och en negativ) varför två begynnelsevillkor måste ges. Vanligen ges Q och Y , även om andra typer av begynnelsevillkor är möjliga.

Vid strömmande tillstånd utgår från vardera randen en karakteristika, se fig 4-9, varför ett villkor, Q eller Y , skall ges vid

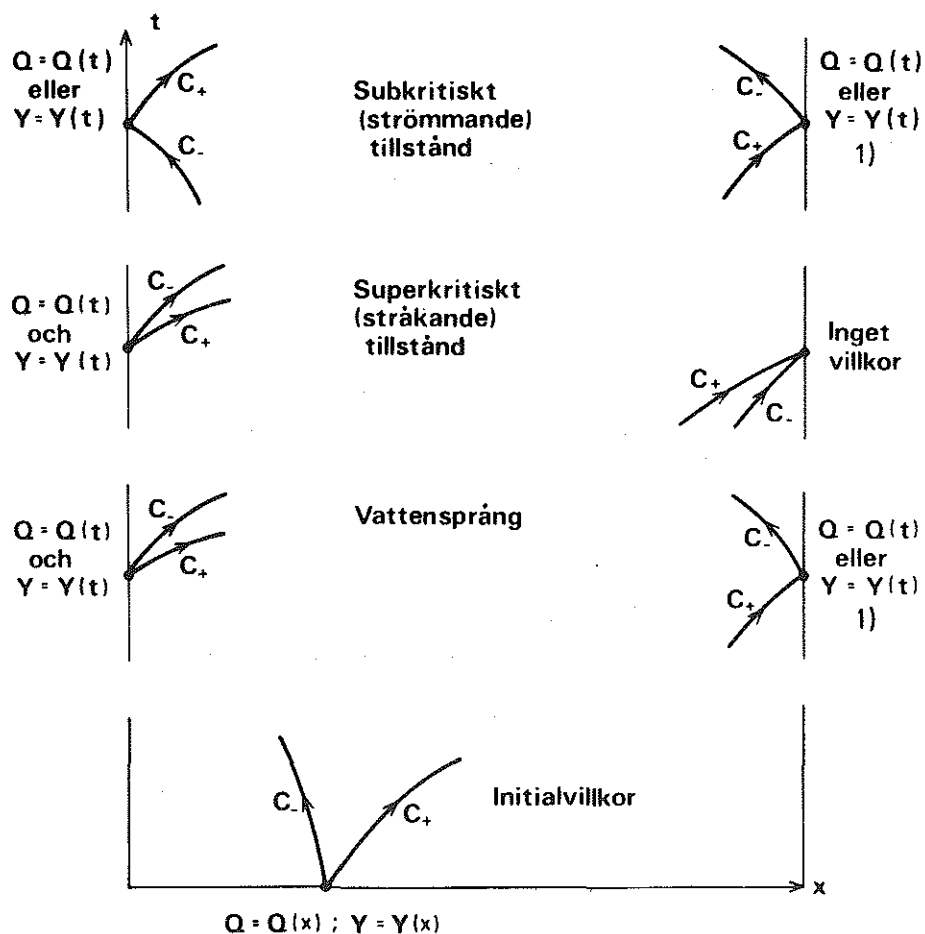


Fig. 4-9 Randvillkor vid olika flödesförhållanden

vardera randen. Om således $Q = Q(t)$ är given vid uppströms rand erhålles Y ur Riemann-ekvationen längs den mot randen inkommande C_- -karakteristikan.

Vid superkritisk strömning utgår två karakteristikor från uppströms rand och ingen från nedströms rand. Således skall inget nedströms-randvillkor ges medan Q och Y skall specificeras vid uppströms rand.

I en bestämmande sektion ges randvillkoret av det förhållandet att C_- -karakteristikan är vertikal, $Fr = 1$, dvs en entydig relation $Q = Q(Y)$.

1) eller entydigt samband $Q = Q(Y)$ i bestämmande sektion

Ibland utnyttjas en avbördningskurva i en icke bestämmande sektion som randvillkor av det skälet att någon sektion med användbart randvillkor ej finns tillgänglig. Detta är en approximation eftersom flödet ej kan vara en entydig funktion av vattendjupet.

Vattensprång uppträder om det vid uppströms rand råder superkritiska förhållanden och vid nedströms rand subkritiska förhållanden, se fig 4-7. Vi måste då ge två randvillkor vid övre randen och ett villkor vid den nedre. Flödesförhållandena är därigenom dock ej överbestämda, ty vattensprångets läge är fortfarande obestämt, vilket gör att vi måste tillskjuta ytterligare ett villkorligt samband. Detta samband¹⁾ beskriver relationen mellan de s k korresponderande vattendjupen, dvs vattendjupet uppströms resp nedströms vattensprånget, se t ex Chow (1959). För en kanal med horisontell botten får detta samband följande utseende om friktionskrafterna längs den korta sträcka som vattensprånget uppträder försummas,

$$\left[\rho Y_T A + \frac{\rho Q^2}{gA} \right]_{\text{uppströms}} = \left[\rho Y_T A + \frac{\rho Q^2}{gA} \right]_{\text{nedströms}} \quad (4.33)$$

där Y_T är den aktuella sektionens tyngdpunktsavstånd räknat från vattenytan. Storheten inom klammer benämnes specifik kraft och utgör summan av i sektionen verkande statisk tryckkraft och genom sektionen per tidsenhet passerande rörelsemängd.

De ovan angivna randvillkoren gäller oavsett utnyttjad numerisk beräkningsmetod. Avvikelsen från dessa regler kan medföra instabila beräkningar.

4.6 Sammanfattning

Rörelseekvationerna enligt ekv (4.1) har visats kunna överföras till två ordinära differentialekvationer, Riemann-ekvationerna, vilka är satisfierade längs vissa kurvor, karakteristikor, i xt-planet. Sålunda gäller att

1) En rörelsemängdbetraktelse med vattensprånget inlagt i en finit kontrollvolym.

$$\frac{dQ}{dt} - (V - \sqrt{\frac{gA}{B}}) B \frac{dY}{dt} = gA (I_o - I_f) ; \left\{ \begin{array}{l} \text{är satisfierad längs } C_+ - \\ \text{karaktistikan med rikt-} \\ \text{ningen} \\ \left[\frac{dx}{dt} \right]_+ = V + \sqrt{\frac{gA}{B}} ; \end{array} \right.$$

$$\frac{dQ}{dt} - (V + \sqrt{\frac{gA}{B}}) B \frac{dY}{dt} = gA (I_o - I_f) ; \left\{ \begin{array}{l} \text{är satisfierad längs } C_- - \\ \text{karaktistikan med rikt-} \\ \text{ningen} \\ \left[\frac{dx}{dt} \right]_- = V - \sqrt{\frac{gA}{B}} ; \end{array} \right.$$

Med utgångspunkt från dessa samband kan för givna begynnelse- och randvillkor konstrueras lösningar $Q(x, t)$ $Y(x, t)$ till rörelse-ekvationerna med hjälp av den s k karakteristikmetoden. Under vissa förutsättningar kan även analytiska lösningar erhållas.

Karakteristikmetoden är i princip en exakt metod för lösning av strömningsproblem. Det är med hjälp av denna metod möjligt att definiera strömmande och stråkande flödestillstånd samt att diskutera t ex flödesfronters egenskaper. Av karakteristikmetoden följer även randvillkorens korrekta formulering vid olika flödestillstånd.

5. KANALVÅGORS ALLMÄNNA EGENSKAPER

5.1 Inledning

Ur ingenjörssynpunkt är det givetvis av stort intresse att kunna bedöma kanalvågors egenskaper i stort. Med kanalvågor skall då i detta sammanhang förstås vattenföringsvariationer i delvis fyllda dagvattenledningar under ett nederbördstillfälle eller i naturliga vattendrag till följd av regleringsåtgärder.

Vi har tidigare visat att små störningar vid gradvis varierande strömning fortplantar sig med hastigheten

$$c = V \pm \sqrt{gA/B} = c_d; \quad (5.1)$$

Störningar som fortplantas med denna hastighet benämnes dynamiska vågor. För en kanal med rektangulär sektion och konstant bredd erhålles den relativa hastigheten $\sqrt{gY}$, vilken är hastigheten för en transporterande våg på grunt vatten.

En kanalvåg kan givetvis betraktas som sammansatt av många små dynamiska vågor vilket dock ej ger oss någon direkt möjlighet att uppskatta vågens hastighet i stort. Ett närmare studium av de dynamiska vågorna ger oss emellertid inblick i själva vågfrontens egenskaper och flödets stabilitetsförhållanden. Vi skall vidare visa att man vid långsamma vattenföringsvariationer kan utnyttja en förenklad analys, den s k kinematiska vågteorin.

5.2 Dynamiska vågors tillväxt och dämpning

Låt oss betrakta en liten positiv våg (t ex genererad av en vattenföringsökning) i en prismatisk kanal med initieellt likformig strömning med normaldjupet Y_n och motsvarande medelhastighet V_n . Vågfronten kommer då att få nedströmshastigheten $c_f = V_n + \sqrt{gD_n}$, där D är medeldjupet A/B .

Förhållandena närmast vågfronten beskrives enklast i det rörliga koordinatsystemet (ξ, u)

$$\xi = c_f \cdot t - x$$

$$u = t \quad (5.2)$$

Frontens läge definieras alltså av $\xi = 0$. Tidsvariabeln har bibehållits oförändrad men bytts mot u beroende på att derivatan $\partial/\partial t$ i det gamla koordinatsystemet (x, t) innebär att x -koordinaten hålls konstant, medan $\partial/\partial u$ i det nya systemet (ξ, u) innebär att ξ hålls konstant, vilket är vad vi önskar.

Ekv. (5.2) ger följande samband mellan de partiella derivatorna i de två systemen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} c_f + \frac{\partial}{\partial u};$$

Rörelseekvationerna uttryckta i de beroende variablerna V och Y och de nya oberoende variablerna ξ och u får då utseendet ¹⁾

$$\frac{\partial Y}{\partial u} + (c_f - V) \frac{\partial Y}{\partial \xi} - D \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0; \quad (5.4a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} + (c_f - V) \frac{\partial V}{\partial \xi} - g \frac{\partial Y}{\partial \xi} = g (I_o - I_f); \quad (5.4b)$$

Friktionslutningen I_f kan generellt formuleras (R är sektionens hydrauliska radie)

$$I_f = \text{koeff.} \cdot V^k / R^m; \quad (5.5)$$

Om Mannings formel utnyttjas gäller att koeff. = Mannings tal, $k = 2$, $m = 4/3$. Under förutsättning av att koeff. i ekv (5.5) har ett av Y och V oberoende värde kan I_f då skrivas (index "n" betecknar normaldjupsförhållanden)

1) jfr ekv (2.6c) sid 8 och ekv (2.16), sid 11.

Vi skall nu studera villkoren för att den dynamiska vågens branthet, definierad av $y_1(t)$, skall växa eller avta allteftersom vågen fortplantas nedströms. Om brantheten växer är flödet instabilt. Dämpas däremot störningen är flödet stabilt.

Insättning av ekv (5.7) i ekv (5.4a) ger i punkten $\xi = 0$ där $V = V_n$

$$v_1 = \frac{c_f - V_n}{D_n} y_1 \quad (5.9)$$

Efter derivering av ekv (5.4a och b) m a p ξ och insättning av ekv (5.7) erhålles efter diverse räkningar med hjälp av ekv (5.9) för $\xi = 0$

$$\frac{dy_1}{dt} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dD_n}{dY}\right) \sqrt{\frac{g}{D_n}} y_1^2 + \frac{gI_0 k}{2V_n} (Ve - 1) y_1; \quad (5.10)$$

där

$$Ve = \left(1 - R \frac{dP}{dA}\right) \frac{m}{K} \quad Fr_n = \text{Vedernikovs tal}$$

$$Fr_n = V_n / \sqrt{g D_n} = \text{Froudes tal}$$

$$R = A/P \quad \text{där } P = \text{våta perimetern}$$

Om vi nu inför beteckningarna

$$b = gI_0 k (1 - Ve) / 2 V_n \quad (5.11)$$

$$G = b \sqrt{D_n / g} / \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dD_n}{dY}\right) \quad (5.12)$$

kan ekv (5.10) kortare skrivas

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{b}{G} y_1 (y_1 - G); \quad (5.13)$$

Tillväxten av vågfrontens branthet är proportionell mot dy_1/dt . Vi finner då att om Vedernikovs tal $Ve > 1$, vilket innebär att $b < 0$, $G < 0$, kommer en positiv störnings branthet att växa

utan gräns. Vågfronten tenderar att bli vertikal och bryta. Flödet är alltså instabilt.

Om $Ve < 1$ har vi två möjligheter. För det fall att den initiella störningens branthet, representerad av $y_0 = y_1(0)$ är större än det kritiska värdet G givet av ekv (5.12) erhålles återigen en brytande våg. Om $y_0 < G$ kommer däremot vågens branthet att avta exponentiellt, vilket framgår efter integrering av ekv (5.12),

$$y_1(t) = \frac{y_0 Ge^{-tb}}{(G - y_0) + y_0 e^{-tb}}; \quad (5.14)$$

Villkoret $Ve < 1$ är alltså ett nödvändigt men ej tillräckligt villkor för erhållande av stabil stationär strömning. Detta villkor kan även formuleras med hjälp av Froudes tal. För en bred rektangulär kanal ($R \approx Y$, $P \approx B$) erhålles med Mannings formel ($k = 2$, $m = 4/3$ enligt ekv (5.5)) villkoret $Fr < 1.5$ medan Chezy's formel ($k = 2$, $m = 1$) ger villkoret $Fr < 2$. Detta analytiska stabilitetsvillkor är alltså känsligt för val av friktionsformel.

En mera generell formulering av Vedernikovs tal, vilken kan härledas ur definitionen i ekv (5.10), är

$$Ve = \frac{dV_n}{dw}; \quad (5.15)$$

där $dw = \sqrt{gB/A} \cdot dY$, se Escoffier och Boyd (1962).

Den genomförda analysen har visat att för värden på $Ve > 1$ växer störningens branthet oavsett dess initiella storlek. Om kanalen är tillräckligt lång erhålles en brytande vågfront. En approximativ uppskattning av den kanallängd som erfordras för att en brytande front skall utbildas kan erhållas ur ekv (5.14) genom att sätta nämnaren i högra ledet lika med noll. För en rektangulär kanal erhålles med utnyttjande av Mannings formel och med $\epsilon = y_0 / (y_0 - G)$

$$\begin{aligned}
 x_{\text{brott}} &= t_{\text{brott}} (V_n + \sqrt{gD_n}) = \frac{V_n + \sqrt{gD_n}}{b} \ln \epsilon = \\
 &= \frac{(1 + \frac{2}{3Ve})}{(1 - Ve)} \cdot \frac{V_n^2}{gI_o} \ln \epsilon ; \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

vilket samband överensstämmer med det som redovisas av Montuori (1963). x_{brott} är således i huvudsak proportionell mot $1/(Ve-1)$.

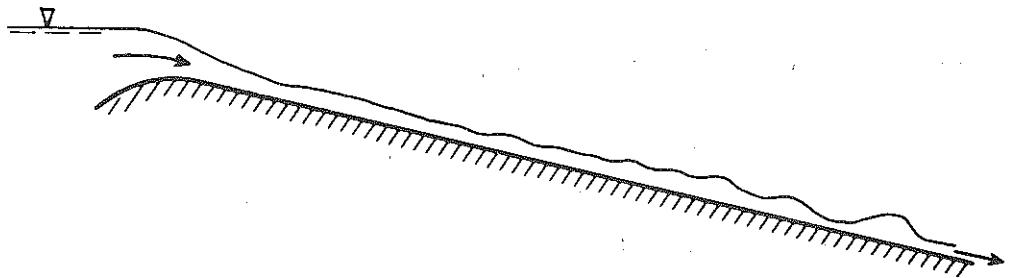
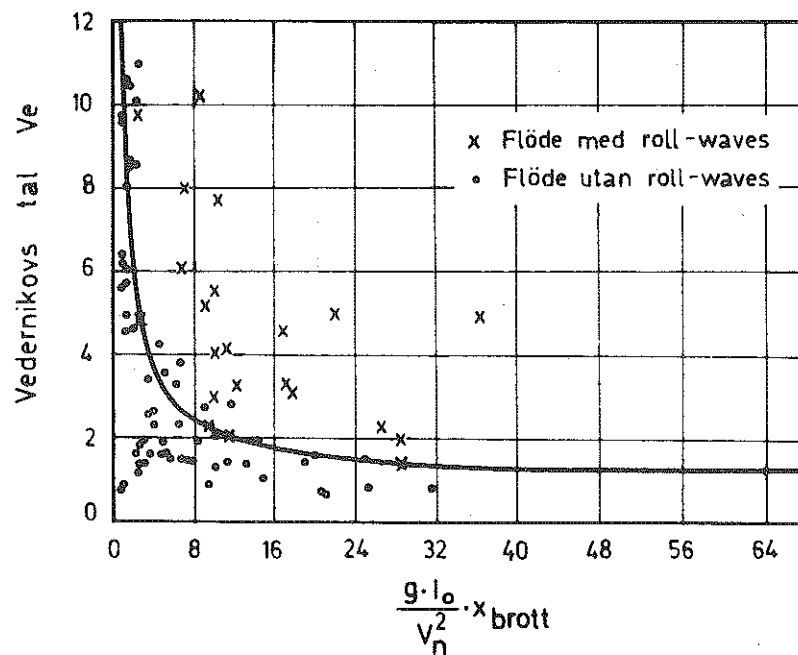


Fig 5-2 Bildandet av roll-waves i brant kanal ($Ve > 1$) vid stationärt tillflöde.

Erforderlig flytsträcka x_{brott} för utbildandet av roll-waves enligt experimentella resultat sammanställda av Montuori (1963). Den teoretiska gränskurvan är ekv (5.16) med $\epsilon = 10^{-4}$.

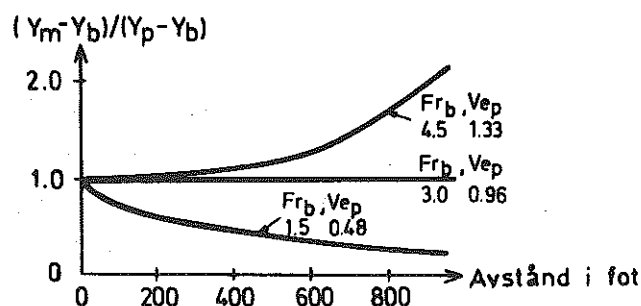
Härledningen av Vedernikovs stabilitetskriterium förutsätter små störningar. Sådana störningar förekommer alltid, även vid stationär strömning, och leder vid branta kanaler, för vilka $Ve > 1$, till bildandet av växande vågor, s k roll-waves, se fig 5-2. Vid dimensionering av branta kanaler kan utbildandet av sådana vågor medföra behov av större kanaldjup för att spill skall undvikas, se t ex Brock (1969). I fig 5-2 redovisas även en av Montuori (1963) utförd sammanställning av observationer rörande utbildandet av roll-waves. Gränskurvan ekv (5.16) åtskiljer väl flöden med och utan roll-waves om ϵ sättes till 10^{-4} . x_{brott} är dock endast en svag funktion av ϵ .

I de här aktuella praktiska tillämpningarna är varken villkoret om stationär likformig strömning eller villkoret om små störningar uppfyllt. Jolly och Yevjevich (1974) har emellertid med hjälp av numeriska experiment (datorberäkningar baserade på karakteristiskmetod med specificerade intervall) studerat möjligheten att utnyttja Vedernikovs kriterium för gradvis varierande strömning i en rektangulär kanal. På basis av resultaten från beräkningar avseende positiva vågor (vattenföringsvariationer) drog de följande slutsatser:

- när $Ve < 1$ över hela vågprofilen, dämpas vågen
- när $Ve < 1$ för vågprofilens övre del (vågtoppen) och $Ve > 1$ för dess nedre del, dämpas vågen
- när $Ve > 1$ över hela vågprofilen, växer våghöjden och vågfrontens branthet

Det för likformig strömning härledda stabilitetsvillkoret skulle således kunna utnyttjas även för bedömning av om en våg kommer att växa och efter en viss flytsträcka få en brytande front eller om den kommer att dämpas när den fortskrider längs kanalen.

De av Jolly och Yevjevich för $Ve > 1$ beräknade flödesförloppen kan givetvis endast vara giltiga så länge som vågfronten ej bryter. Allteftersom frontens branthet ökar, växer de vertikala accelerationerna för att så småningom ej längre vara försumbara, varvid de för gradvis varierande strömning uppställda differentialek-



- Y_m = maximalt uppmätt vattendjup längs kanalen
 Y_b = basflödesdjup
 Y_p = maximalt vattendjup i inflödessektionen
 Fr_b = Froudes tal för basflödet
 Ve_p = Vedernikovs tal Ve för vågtoppen i inflödessektionen

Fig. 5-3 Exempel på av Jolly och Yevjevich (1974) redovisade beräkningsresultat

variationerna ej längre är giltiga. Den numeriska beräkningsmetoden behöver därför visserligen ej ge orimliga resultat, men den kan ej ge en fullständigt korrekt bild av frontens utseende. Vi kommer emellertid att i följande avsnitt utnyttja Jolly och Yevjevich slutsatser för att diskutera den eventuella förekomsten av växande vågor och av brytande vågfronter i vattendrag och dagvattenledningar.

5.3 Förekomst av växande vågor och brytande vågfronter i reglerade vattendrag och dagvattenledningar.

I reglerade vattendrag råder nästan undantagslöst strömmande tillstånd ($Fr < 1$) varför Vedernikov-instabilitet ej är aktuell. Flödesvågorna kommer därför att successivt dämpas och flackas ut allteftersom de fortskrider längs vattendraget. Däremot kan vattenföringsvariationerna vid pådrag av turbinerna i kraftverken vara så häftiga (av storleksordningen $1000 \text{ m}^3/\text{s}$ på mindre än 30 sekunder) att det kritiska värdet G på vattennivåns stighastighet enligt ekv (5.11) kan komma att överskridas. Härvid kan en brytande front erhållas men knappast någon växande våg. Vid beräkningen av högsta och lägsta vattenstånd i samband med korttidsreglering är emellertid en exakt återgivning av dessa fronters utseende av ringa praktisk betydelse. Genom speciell numerisk

teknik kan en approximativ simulering göras av frontens fortplantning, se kap 7.6.

Vid strömning i ledning med cirkulär sektion kan, under förutsättning av att Mannings tal antas konstant för alla djup, Vedernikovs tal skrivas

$$Ve = \frac{2}{3} Fr \frac{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}{\varphi (1 - \cos \varphi)} ; \quad (5.17)$$

där φ är den mot vattendjupet svarande centrumvinkeln ($\varphi = 2\pi$ vid helt fylld sektion). Antagandet om konstant Mannings tal svarar mot den i fig 5-4 angivna s k delfyllnadskurvan Q/Q_{full} för likformig strömning. Q_{full} är avbördningskapaciteten vid nätt och jämnt fylld ledning.

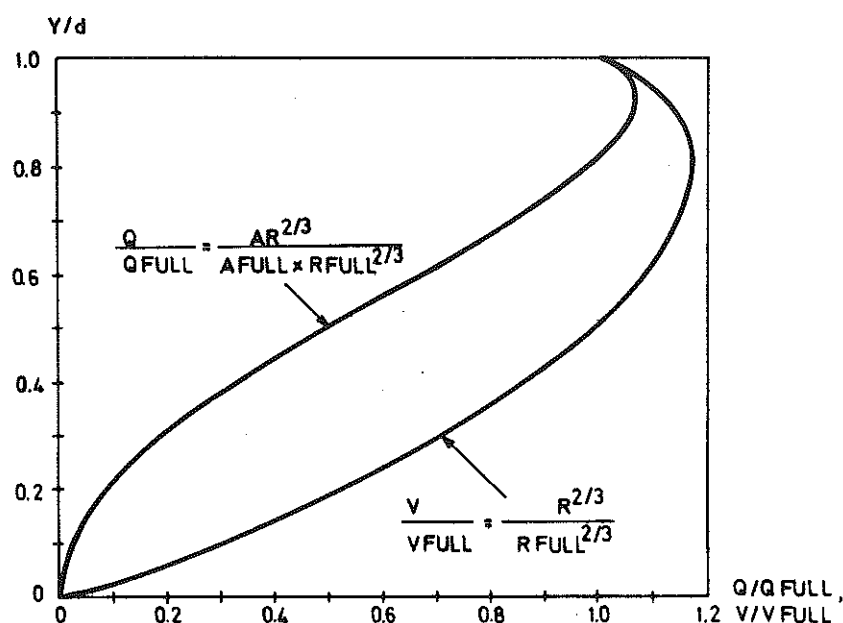


Fig 5-4 Samband mellan relativ fyllnadshöjd Y/d och relativt flöde Q/Q_{full} resp relativ hastighet V/V_{full} vid likformig strömning i cirkulär sektion med diametern d . Mannings tal har förutsatts vara konstant och oberoende av vattendjupet.

De mot kurvorna för neutral stabilitet, $Ve = 1$, svarande gränskurvorna har i fig 5-5 inlagts som funktion av Froudes tal. När Y/d går mot värdet 0.82 växer det kritiska värdet på Fr obegränsat. Värdet $Y/d = 0.82$ svarar mot den fyllnadsgrad då flödes-hastigheten har sitt maximum.

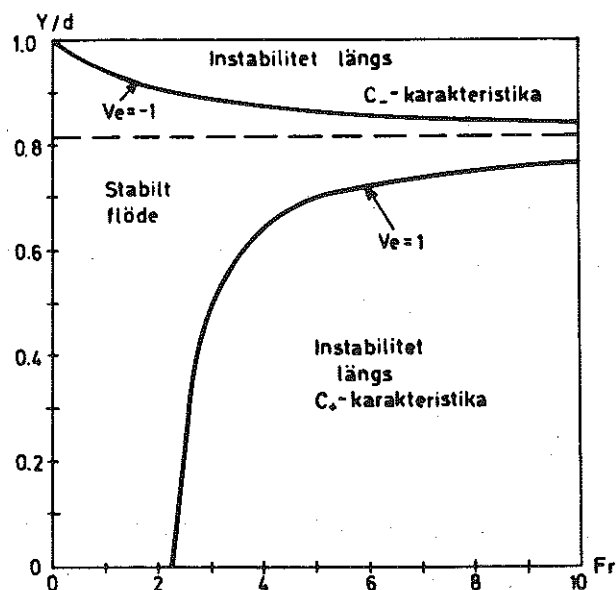


Fig 5-5 Stabilitetsförhållanden enligt Vedernikovs kriterium. Fr är det mot Y/d svarande värdet på Froudes tal.

För $Y/d > 0.82$ är $dV/dY < 0$ och således $Ve < 0$. En stabilitetsanalys genomförd längs C_- -karakteristikan $dx/dt = V - \sqrt{gA/B}$, leder då till stabilitetsvillkoret $Ve < -1$. Fysikaliskt kan denna instabilitet tolkas så att vi på baksidan av en positiv våg kan erhålla en växande branthet. Denna instabilitet, som är begränsad till själva vågtoppen, bör dock ej ha någon signifikant betydelse för flödesvågen som helhet.

Dagvattenledningar ligger ofta i så branta lutningar att superkritiska förhållanden erhålles. Större samlingsledningar torde dock i allmänhet ej ligga i så stora lutningar att så höga Froudes tal som $Fr = 2$ uppnås, se fig 5-6. Ledningar av mindre dimension har däremot ofta mycket stora lutningar.

För vågor med "våghöjder" större än $Y/d = 0.6$ krävs mycket stora ledningslutningar för att villkoret $Ve > 1$ över hela vågprofilen skall vara uppfyllt ($I_0 > 70 \text{ ‰}$ för en ledning med diametern 1000 mm). Allteftersom våghöjden växer avtar värdet på Vedernikovs tal för att så småningom bli mindre än 1.0, varvid vågens tillväxt avstannar. Någon obegränsad tillväxt av våghöjden bör därför ej vara möjlig.

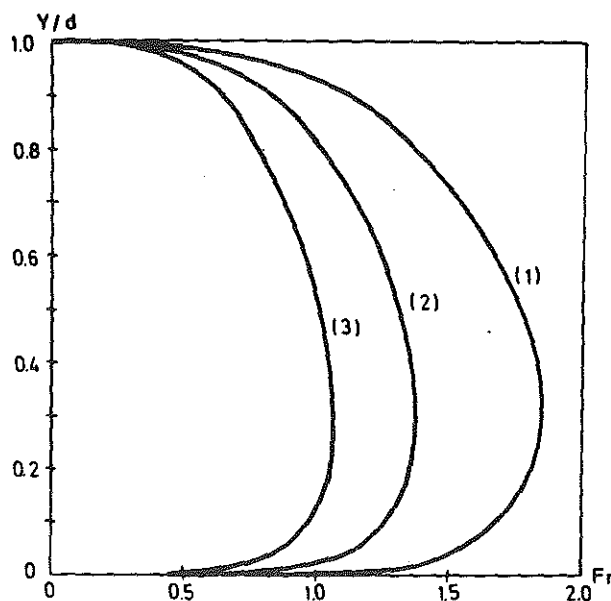


Fig 5-6 Samband Froudes tal Fr - relativ fyllnadsgrad Y/d vid likformig strömning i delvis fylld cirkulär sektion med diametern d . Q_{full} har beräknats med utgångspunkt från ekvivalenta sandråheten 1 mm och ledningslutningen 4 ggr d i svenska normer rekommenderade minimilutningarna m a p självrensning.

(1) : $d = 225 \text{ mm}$	$I = 18 \text{ }^{\circ}/\text{oo}$	$Q_{full} = 65 \text{ l/s}$
(2) : $d = 500 \text{ mm}$	$I = 8 \text{ }^{\circ}/\text{oo}$	$Q_{full} = 360 \text{ l/s}$
(3) : $d = 1000 \text{ mm}$	$I = 4 \text{ }^{\circ}/\text{oo}$	$Q_{full} = 1560 \text{ l/s}$

Brytande vågfronter kan även erhållas på grund av häftig tillrinning. Detta förhållande illustreras av det experimentella resultat som redovisas i fig 5-7. Försöket har utförts i ett 85 m långt plaströr med diametern $d = 0.105 \text{ m}$, lutningen $5 \cdot 10^{-3}$ och kapaciteten $Q_{full} = 6.3 \text{ l/s}$. Flödet var vid tiden $t = 0$ stationärt och lika med 0.7 l/s . Därefter ökade flödet i huvudsak linjärt till 6.1 l/s på 35 sekunder varefter det avtog linjärt för att efter ytterligare 35 sekunder åter vara stationärt och lika med 0.7 l/s .

Figuren illustrerar hur flödesvågens branthet växer intill dess att den ca 70 m från inloppspunkten får en "vertikal" front. Vidare framgår att vågens tillväxttakt ($\partial Y / \partial t$) i mätpunkten $x = 5 \text{ m}$ är av samma storleksordning som den kritiska tillväxttakt $c_f \cdot G$ som ges av ekv (5.12) för vattendjupen 2.4 resp 5.0 cm. Froudes tal varierade under flödesförloppet i intervallet $1.0 < Fr < 1.15$, dvs $Ve < 0.5$.

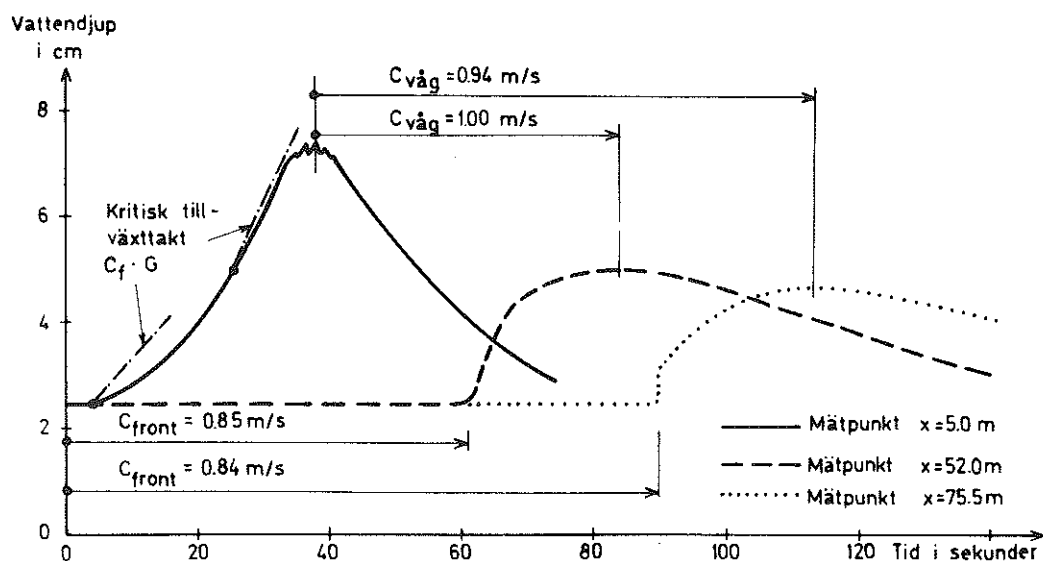


Fig 5-7 Laboratorieförsök CTH. I plaströr med diametern 10,5 cm registrerade vattendjup på olika avstånd x från inloppspunkten vid en i huvudsak triangulär tillflödeshydrograf med basflödet 0,7 l/s, toppflödet 6,1 l/s och varaktigheten 70 sekunder.

För att en uppfattning skulle erhållas om det redovisade modelltillflödets praktiska motsvarighet har i tabell 5-1 detta överförs med hjälp av Froudes modellregel ($Fr_{\text{modell}} = Fr_{\text{prototyp}}$) till tre prototypledningar med samma lutning och friktionsegenskaper som den experimentella ledningen.

d (mm)	Q_{full} (l/s)	Q_{topp} (l/s)	Q_{bas} (l/s)	Varaktighet (s)	Vertikal vågfront efter (m)
105	6,3	6,1	0,7	70	70
225	42	41	5	102	150
500	312	302	35	153	330
1000	1763	1707	196	216	670

Tabell 5-1 Enligt Froudes modellregel beräknade inflödeshydrografer för ledningar med diametern 225, 500 resp 1000 mm. Ledningarnas lutning är 5 ‰ och ekvivalenta sandråheten 0,1 mm.

De uppskattade "prototyphydrograferna" är mycket branta men kan likväl tänkas förekomma i samband med exceptionella regn. Det är dock, utan omfattande modellstudier med olika kombinationer av basflöden och hydrografer, omöjligt att uppskatta frekvensen av sådana flödesförlopp som det som redovisats i fig 5-7. Vid små basflöden får man dock alltid räkna med att en vertikal flödesfront utbildas.

5.4 Kinematisk vågteori

Med rörelsemängdekvationen skriven på formen, jfr ekv (2.16),

$$I_f = I_o - \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t}; \quad (5.18)$$

framgår att, om de termer i högerledet som beaktar flödets och vattendjupets variation i tid och rum, de s k sekundära gradienttermerna, är försumbara jämförda med bottenlutningen I_o ¹⁾, kan ekvationen approximeras med sambandet

$$I_f = I_o; \quad (5.19)$$

innebärande att Q kan beräknas som för likformig strömning. Med t ex Mannings formel kan rörelseekvationerna då skrivas

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial t} = 0; \quad (5.20a)$$

$$Q = M \cdot A \cdot R^{2/3} \cdot I_o^{1/2} \quad (5.20b)$$

Eftersom Q är en entydig funktion av vattendjupet (vi förutsätter att M -värdet ej beror av Q) kan kontinuitetsekvationen formuleras

$$\frac{1}{B} \frac{dQ}{dY} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0; \quad (5.21)$$

Vi noterar vidare att det definitionsmässigt gäller att

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial t}; \quad (5.22)$$

En jämförelse mellan de två sista sambanden visar att för

1) Vattendrag med tämligen stor lutning och relativt långsamma vattenföringsvariationer ("flack" våg).

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{B} \frac{dQ}{dY} \text{ är } \begin{cases} \frac{dY}{dt} = 0 ; \\ \frac{dQ}{dt} = 0 ; \end{cases} \quad (5.23)$$

Detta innebär att Q och Y synes ha konstanta värden för en observatör som förflyttar sig med hastigheten $dx/dt = (dQ/dY)/B$, vilket är definitionen på en sann odämpad vågrörelse. Denna vågrörelse, definierad av ekvationssystemet (5.20), benämnes "kinematisk våg", Lighthill och Whitham (1955).

Varje punkt på vågprofilen förflyttar sig således med den mot det aktuella djupet svarande kinematiska hastigheten

$$c_k = \frac{dQ}{dA} = \frac{1}{B} \frac{dQ}{dY} ; \quad (5.24)$$

vilken växer med vattendjupet om Q är en växande funktion av A .

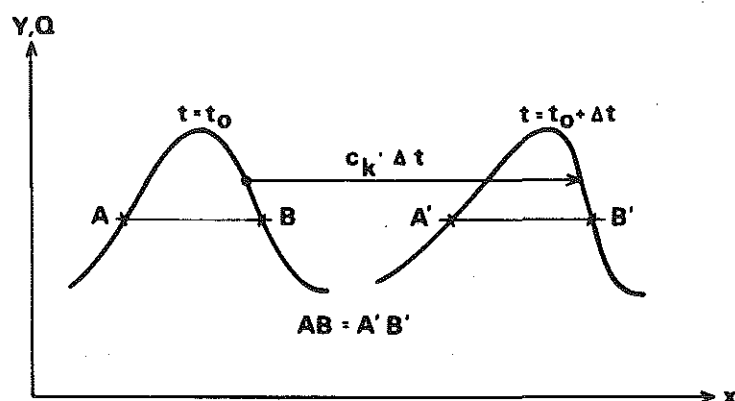


Fig. 5-8 Formändring hos "kinematisk våg". Vågprofilen vid tidpunkterna t_0 och $t_0 + \Delta t$.

Den "kinematiska vågens" framsida kommer därför att bli successivt brantare allteftersom den rör sig nedströms vattendraget.¹⁾ Vågen kommer att ändra form men den bibehåller sitt maximidjup och maximiflöde, se fig 5-8. Den kinematiska teorin beaktar således ej förhållandena nedströms om vågen. Ekvationssystemet (5.20) definierar endast en karakteristika, $dx/dt = c_k$, varför "information" ej kan transporteras i uppströms riktning. Teorin kan därför ej utnyttjas när nedströms randvillkor signifikant påverkar flödesförloppet.

1) Jfr även kap 5.6, fig 5-11.

Om vi inför Vedernikovs tal Ve , definierat av ekv (5.15), kan den kinematiska våghastigheten c_k skrivas

$$c_k = \frac{1}{B} \frac{dQ}{dY} = V + \frac{A}{B} \frac{dV}{dY} = V + \sqrt{\frac{gA}{B}} Ve ; \quad (5.25)$$

medan den dynamiska våghastigheten är

$$c_d = V + \sqrt{gA/B} ; \quad (5.26)$$

Sålunda finner vi att den kinematiska våghastigheten är mindre än eller lika med den dynamiska våghastigheten om $Ve \leq 1$. Det tidigare härledda villkoret $Ve < 1$ för ett flödes stabilitet kan således tolkas så att flödet är stabilt om $c_k < c_d$.

Av ekv (5.25) framgår att den kinematiska våghastigheten är större än flödets medelhastighet om $dV/dY > 0$. För en bred rektangulär kanal erhålles enligt Mannings formel

$$c_k = V + Y \frac{dV}{dY} = V + Y \frac{d}{dY} (MY^{2/3} I_o^{1/2}) = \frac{5}{3} V ; \quad (5.27)$$

(Chezy's formel ger $c_k = 3V/2$)

Den kinematiska våghastigheten växer således med vattendjupet. Detta är emellertid inte fallet vid strömning i en ledning med cirkulär sektion, varför detta fall tas upp speciellt i kap 5. 6.

Eftersom de sekundära gradienttermerna aldrig är helt försumbara kan en kinematisk beskrivning av en våg ej bli helt exakt utan vi kommer hela tiden att ha en "tävlan" mellan vågens kinematiska och dynamiska egenskaper. ¹⁾ Utnyttjandet av den kinematiska teorin innebär således alltid en större eller mindre grad av approximation.

Om $Ve < 1$ ($Fr < 1.5$ á 2.0 för en rektangulär kanal), ett villkor vilket normalt är uppfyllt i naturliga vattendrag, är alltså den kinematiska våghastigheten mindre än den dynamiska våghastigheten och de dynamiska vågorna kommer att fungera som förelöpare till huvudvågen. Vi har emellertid tidigare visat att dynamiska vågor avtar exponentiellt om den initiella brantheten underskrider värdet G , givet av ekv (5.12). En flack våg kommer därför trots allt att uppvisa kinematisk karaktär.

1) kinematisk uppbrantning resp dynamisk utflackning.

För att undersöka vilka villkor som är förknippade med den kinematiska teorins förutsättningar studerar vi en positiv våg i en kanal med rektangulär prismatisk sektion med bredden B . Vi förutsätter då att vågen i huvudsak har kinematisk karaktär, dvs att

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c_k \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + c_k \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 ; \quad (5.28)$$

$$Q = M \cdot B \cdot Y^{5/3} \cdot I_0^{1/2} ; \quad c_k = \frac{1}{B} \frac{dQ}{dY} ;$$

Vi finner då med hjälp av kontinuitetsekvationen, ekv (5.20a), att

$$\frac{\partial Y}{\partial x} / I_0 = - \frac{\frac{9}{25} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q^{4/5} \cdot M^{6/5} \cdot I_0^{8/5} \cdot B^{1/5}} \quad (5.29)$$

$$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} / \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{2}{3} Fr^2 ; \quad \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} / \frac{\partial Y}{\partial x} = - \frac{10}{9} Fr^2 ; \quad (5.30)$$

där Fr är Froudes tal. De två sista gradienttermerna är således ej av större storleksordning än $\partial Y / \partial x$, såvida inte $Fr^2 \gg 1$.

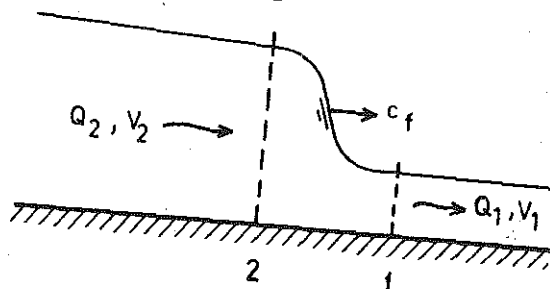
Förhållandet $(\partial Y / \partial x) / I_0$ beror av dels bottenlutningen I_0 , dels av flödets variation med tiden, $\partial Q / \partial t$. Låt oss förutsätta ett vattendrag med bredden 200 m, flödet $200 \text{ m}^3/\text{s}$ och bottenlutningen $I_0 = 10^{-4}$. Om vi vidare sätter $M = 30$ ($Y \approx 2 \text{ m}$, $Fr \approx 0,1$) och kräver att $\partial Y / \partial x < 0,1 I_0$ för att de sekundära gradienttermerna skall kunna anses vara försumbara, finner vi efter insättning i ekv (5.29) att vattenföringsökningen ej skulle få vara större än ca $9,5 \text{ m}^3/\text{s}$ och timma för att en våg med kinematiska egenskaper skall erhållas. Det kriterium vi här utnyttjat kräver således en långsam flödesökning.

En av Henderson (1963, 1966) genomförd analys av flacka kanalvågors dämpning och hastighet visade att vågtoppens hastighet endast obetydligt avvek från den kinematiska. Även våghöjdens dämpning visade sig vara liten för flacka vågor. Det är dock omöjligt att sätta ett generellt kriterium för vad som är försumbar dämpning eller ej. Detta bestäms av de praktiska konsekvenserna i det aktuella fallet. Enligt Chow (1961) och Henderson (1966) tyder utförda observationer i naturliga oreglerade vattendrag på att flodvågornas hastighet ofta väl approximeras av den kinematiska hastigheten.

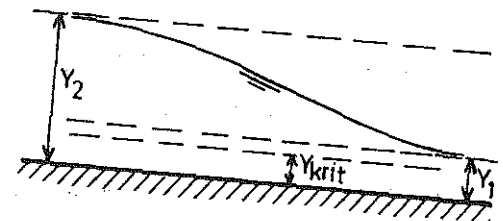
De flesta större svenska vattendrag är reglerade och avtrappade genom vattenkraftutbyggnader. Vattenföringsvariationerna beror då nästan helt av tappningarna vid kraftverken. Tappningsändringarna är ofta stora och snabba och lutningarna flacka varför villkoret för erhållande av kinematiska vågor ej är uppfyllt. Den kinematiska teorin är ju dessutom endast tillämpbar i de fall då flödesförloppet är oberoende av nedströms randvillkor, vilket ej är fallet i ett reglerat vattendrag.

5.5 Branta flödesfronters hastighet. Monoklin våg.

Fig 5-9a avses åskådliggöra en brant flödesfront genererad av en plötslig flödesökning $Q_2 - Q_1$ i t ex en kraftstations avloppskanal. Fronten rör sig med hastigheten $c_f > V_2 > V_1$ och kommer bl a genom friktionskrafternas inverkan att ändra utseende allteftersom den fortplantas längs kanalen. Om kanalen ej är alltför lång kan vi försumma denna förändring och betrakta fronten som en likformigt fortskridande våg. Genom sektionerna 1 och 2, vilka förutsätts

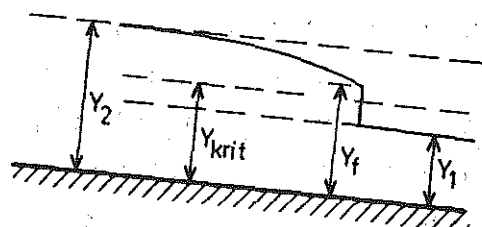


a) Brant flödesfront



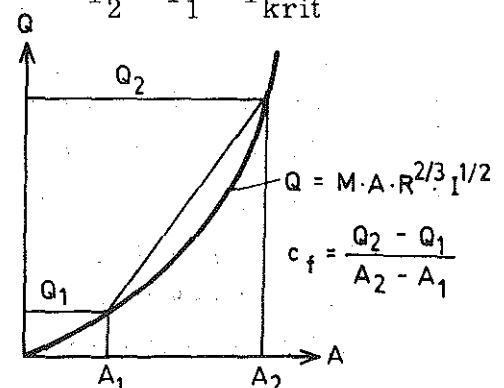
b) Monoklin vågprofil:

$$Y_2 > Y_1 > Y_{krit}$$



c) Monoklin vågprofil:

$$Y_2 > Y_{krit} > Y_1$$



d) Beräkning av monoklin vågs hastighet

Fig 5-9 Olika typer av vågfronter. Y_{krit} är det mot flödet Q_r (overrun) svarande kritiska djupet.

röra sig med frontens hastighet, passerar då det stationära flödet

$Q_r = (c_f - V_1)A_1 = (c_f - V_2)A_2$, vilket i engelsk text benämnes "overrun". Frontens hastighet kan således skrivas

$$c_f = \frac{V_2 A_2 - V_1 A_1}{A_2 - A_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{A_2 - A_1} \quad (5.31)$$

Den genom fronten per tidsenhet passerande massan $\rho(c_f - V_2)A_2$ erhåller hastighetsökningen $V_2 - V_1$. Rörelsemängdtillskottet per tidsenhet är således $\rho(c_f - V_2)A_2(V_2 - V_1)$. Enligt Newtons andra lag, se kap 2.3, balanseras detta tillskott av den på den aktuella massan verkande resulterande kraften. Om vi förutsätter att friktionskraften balanseras av tyngkraftens komponent parallellt botten utgöres den resulterande kraften av skillnaden mellan de hydrostatiska tryckkrafterna i sektion 2 och sektion 1. Således

$$\rho(c_f - V_2)A_2(V_2 - V_1) = \rho g A_2 \bar{y}_2 - \rho g A_1 \bar{y}_1 \quad (5.32)$$

där $\bar{y}_1$ och $\bar{y}_2$ är areornas A_1 och A_2 tyngdpunktsavstånd räknat från vattenytan. Eliminering av V_2 med hjälp av ekv (5.31) ger

$$c_f = V_1 \left(\pm \sqrt{\frac{g(A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)}{A_1(1 - A_1/A_2)}} \right) \quad 1) \quad (5.33)$$

som vid rektangulär sektion reduceras till $c_f = V_1 \left(\pm \sqrt{g Y_2 (1 + Y_2/Y_1)/2} \right)$.

Vågfronter med liten höjd ($Y_2/Y_1 \approx 1$) fortplantas alltså med en hastighet motsvarande den dynamiska hastigheten, ekv (5.26).

Monoklin våg:

Allteftersom en flödesfront genererad av en vattenföringsökning fortplantas längs en kanal kommer dess profil att förändras. Om kanalen är tillräckligt lång kan emellertid en i huvudsak likformigt fortskridande vågprofil uppnås. En sådan våg benämnes monoklin våg. Den utgör ett asymptotiskt gränstillstånd vid vilket jämvikt erhållits mellan den dynamiska utfläckningen och den kinematiska uppbrantningen.

Man kan visa att vågprofilen satisfierar ekvationen (om en bred kanal med konstant bredd B och om I_f beräknas enligt Chezy's formel) ²⁾

1) För givna värden på Q_2 , Q_1 och A_1 kan c_f och A_2 beräknas genom passning ur ekv (5.33) och sambandet $c_f = (Q_2 - Q_1)/(A_2 - A_1)$

2) se vidare Chow (1959) eller Lighthill och Whitham (1955).

$$\frac{dY}{dx} = -I_0 \frac{(Y-Y_1)(Y_2-Y)(Y-Y_a)}{Y^3 - Y_{krit}^3} \quad (5.34)$$

där $Y_{krit}^3 = Q_r^2/gB^2$ och $Y_a = Y_1/(1 + \sqrt{Y_1/Y_2})^2$. Om $Y_2 > Y_1 > Y_{krit}$ erhålles således en gradvis varierande profil som asymptotiskt ansluter sig till normaldjupen Y_1 resp. Y_2 . Vågfronten får mycket stor längd och kan endast utbildas i mycket långa kanaler, fig 5-9b.

Om $Y_2 > Y_{krit} > Y_1$ följer av ekv (5.34) att den teoretiska vågprofilen antar ett fysikaliskt orimligt utseende och att den är vertikal för $Y = Y_{krit}$. I själva verket kommer en brant, turbulent front att utbildas vid vågens nedströmsände, fig 5-9c.¹⁾

Eftersom flödet är likformigt både framför och bakom fronten kan man med hjälp av t ex Mannings formel beräkna den monoklina vågens hastighet direkt ur ekv (5.31), vilken formulerats under antagande av en likformigt fortskridande vågprofil, se fig 5-9d.

Vid inte alltför stora våghöjder $Y_2 - Y_1$ kan den monoklina vågens hastighet approximeras med den mot medelvattendjupet $Y_m = (Y_1 + Y_2)/2$ svarande kinematiska hastigheten,

$$c_f \approx \left[\frac{dQ}{dA} \right]_m = c_{km} ; \quad (5.36)$$

Det ovan genomförda resonemanget kan även appliceras på en "triangulär" våg (en våg där flödet efter viss tid sjunker tillbaka till utgångsvärdet), även om det för en sådan våg ej är möjligt att definiera något stabilt asymptotiskt gränstillstånd. Om $Ve < 1$ kommer en triangulär våg förr eller senare alltid att dämpas och flackas ut även om själva fronten kan tillväxa i branthet, jfr fig 5-7. Efterhand som våghöjden dämpas kommer de sekundära gradienttermernas inverkan att minska i området kring vågtoppen och vågens "framsida" kommer att få karaktären av monoklin våg. Vågtoppens has-

1) Man kan visa att vattendjupet Y_f alldeles uppströms den branta fronten är större än Y_{krit} . En ökning av Y_{krit} medför en ökning av Y_f . Innan Y_f blir lika med Y_2 över-skrider emellertid Froudes tal värdet 2 ($Ve > 1$) varför flödet blir instabilt. Lighthill och Whitham (1955).

tighet kan då approximativt uppskattas enligt den kinematiska teorin och vågfrontens enligt den monoklina vågens förutsättningar.

5.6 Kinematiska vågor i delvis fylld cirkulär sektion

Fördelen med den kinematiska teorin är att den ger ekvationer som har en enkel analytisk lösning, ekv (5.23). Man har därför diskuterat att använda denna teori vid beräkning av flödesförlopp i dagvattenledningar. Sådana ledningar lägges ofta i branta lutningar och flödesförloppet är relativt oberoende av nedströmsförhållandena. Förutsättningarna för den kinematiska teorin skulle därför kunna vara uppfyllda, i varje fall vid inte alltför häftiga tillflöden.

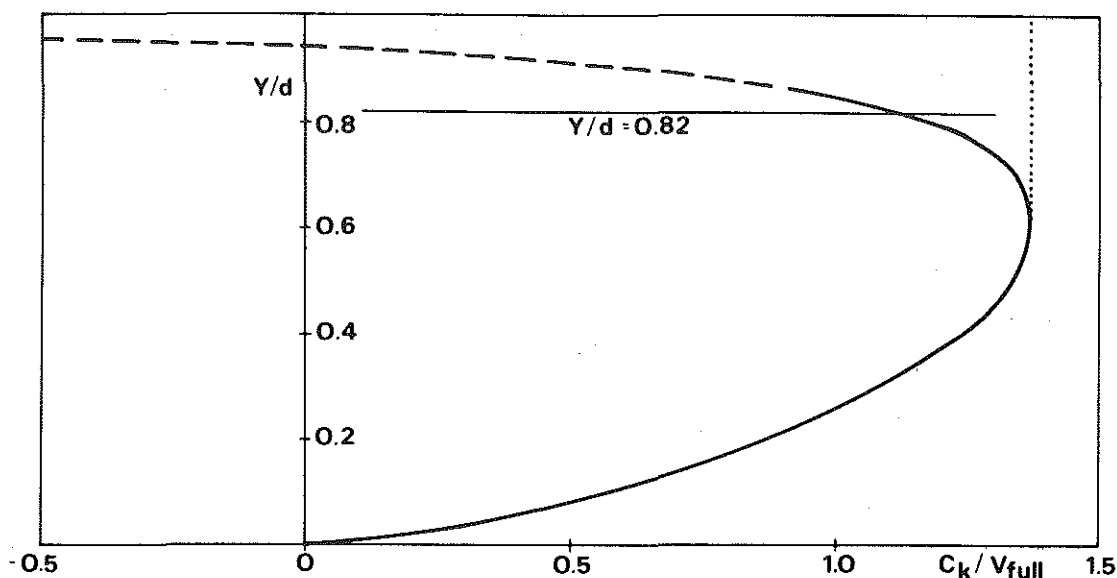


Fig 5-10 Relativ kinematisk våghastighet c_k/V_{full} vid strömning i ledning med delvis fylld cirkulär sektion under förutsättning av konstant Mannings tal.

I ett naturligt vattendrag ökar den kinematiska våghastigheten c_k med vattendjupet. Vid strömning i ledning med cirkulär sektion avtar däremot c_k för värden på relativa fyllnadshöjden $Y/d > 0.6$, se fig 5-10. Den kinematiska teorin ger en växande branthet dels på vågens framsida inom djupintervallet $0 < Y/d < 0.6$, dels på vågens baksida för $Y/d > 0.6$. Om ledningen är tillräckligt lång skulle således ett okritiskt utnyttjande av den kinematiska ansat-

sen kunna ge det i fig 5-11 skisserade fysikaliskt sett orimliga förloppet. Hänsyn måste givetvis tas till det förhållandet att det utbildas vertikala fronter. Förfarandet blir helt analogt med det som redovisats i fig 4-8 för en snabb vattenföringsökning, varför man blir tvungen att i xt -planet konstruera envelopkurvan till karakteristikornas skärningspunkter (chockvågens bana). Även om detta är i princip möjligt att genomföra måste den analytiska lösningen enligt den kinematiska teorin bedömas som praktiskt oanvändbar.¹⁾

Det bör dock tilläggas att flera numeriska beräkningsmetoder utgår från den kinematiska ansatsen, t ex RRL-metoden, se kap 9.6. Förklaringen till att dessa metoder trots allt ger rimliga resultat är att den utnyttjade numeriska tekniken inför sådana approximationer att en artificiell dämpning erhålles av flödesvågen. Beräkningsresultatet överensstämmer således ej med förutsättningen om en odämpad våg.

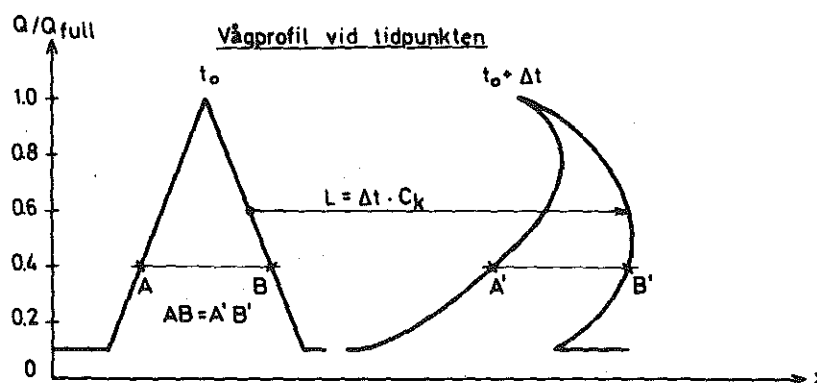


Fig 5-11 Med hjälp av kinematisk vågteori beräknad flödesprofil (fysikaliskt orimlig) vid tidpunkten $t_0 + \Delta t$. Cirkulär sektion med diametern d .

Allteftersom vågtoppen dämpas och flackas ut växer möjligheten att uppskatta dess hastighet med hjälp av den kinematiska vågteorin. Att så är fallet även vid strömning i cirkulär sektion framgår av de i fig 5-7 och fig 5-12 redovisade våghastigheterna för två uppmätta flödesförlopp. (Med vågtoppen avses det maximalt erhållna vattendjupet i sektionen ifråga. Det maximala flö-

1) Detta gäller givetvis även för flödesförlopp i kanaler och naturliga vattendrag.

det i en given sektion inträffar normalt tidigare än det maximala vattendjupet. Se vidare Henderson (1966)). För vattendjupen 4, 6 och 8 cm uppgår den kinematiska hastigheten i det aktuella fallet till 0.88, 1.00 resp 0.92 m/s,¹⁾ vilka väl rimmar med de uppmätta medelvåghastigheterna förutom då vågtoppens höjd är större än ca 7 cm. Våghastigheten är då större än den kinematiska hastigheten vid dessa nivåer. En rimlig uppskattning av vågtoppens hastighet kan då erhållas med utgångspunkt från den kinematiska hastighetens maximivärde för $Y/d = 0.60$, enligt den prickade vertikala linjen i fig 5-10. Den mot basflödet 0.7 l/s svarande dynamiska våghastigheten uppgår till 0.88 m/s vilken väl approximerar vågfronternas hastighet.

Enligt Ackers och Harrison (1964) visar även resultaten från deras experimentella undersökningar avseende vågors dämpning i delvis fylld cirkulär sektion att den kinematiska hastigheten ofta väl approximerar vågtoppens hastighet.²⁾ Undersökningen omfattade inloppshydrografer av varierande branthet i en ledning med diametern 10.5 cm och lutningar i intervallet $2 \cdot 10^{-2} - 10^{-3}$.

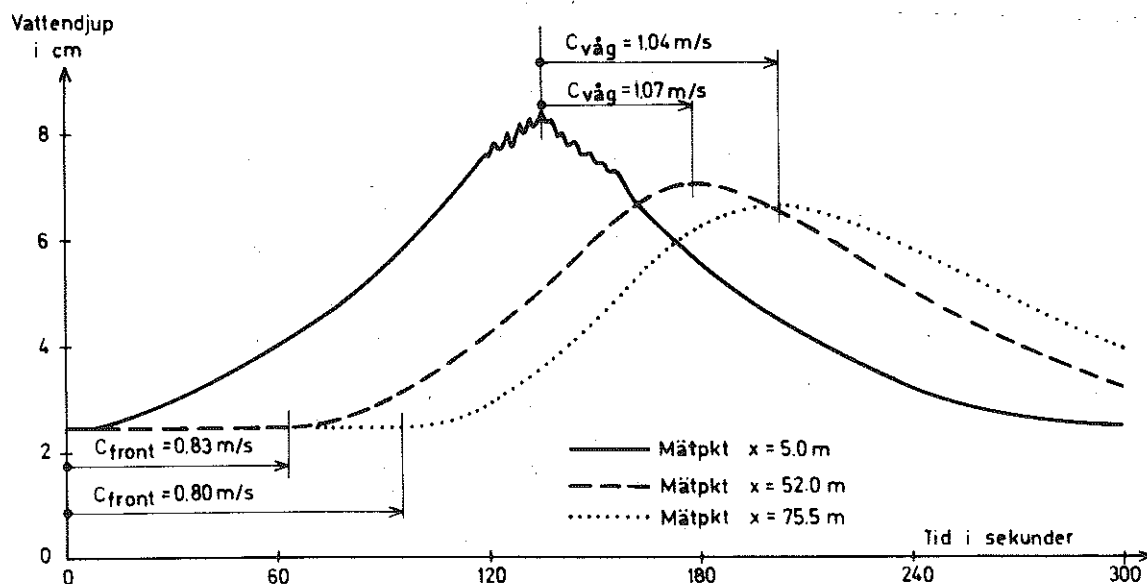


Fig 5-12 Laborieförsök CTH. I plaströr med diametern 10.5 cm registrerade vattenstånd på olika avstånd x från inloppspunkten vid en i huvudsak triangulär tillflödeshydrograf med basflödet 0.7 l/s, toppflödet 6.1 l/s och varaktigheten 264 sekunder. $I_0 = 5 \cdot 10^{-3}$. $1.0 < Fr < 1.15$. $Ve < 0.5$.

- 1) Motsvarande dynamiska våghastigheter är 1.18, 1.46 resp 1.70 m/s.
- 2) Eftersom vågens dämpning är okänd och $c_k = c_k(Y)$ kan vågtoppens hastighet uppskattas endast över kortare flytsträckor.

5.7 Sammanfattning

I detta kapitel har diskuterats kanalvågors stabilitetsegenskaper och möjligheten att med utgångspunkt från en förenklad teoretisk ansats (kinematisk teori) uppskatta vågornas hastighet.

För värden på Vedernikovs tal $Ve > 1$ är flödet instabilt, dvs en genererad störning dämpas ej utan tillväxer i höjd och branthet oavsett dess initiala storlek allteftersom vågen fortplantas nedströms vattendraget. Villkoret $Ve > 1$ motsvarar för en bred kanal villkoret $Fr > 1.5$ á 2.0 och leder vid branta kanaler, för vilka $Ve > 1$, till bildandet av växande vågor, s k roll-waves, även vid stationärt tillflöde.

Det härledda stabilitetsvillkoret kan även utnyttjas för bedömning av om en våg kommer att växa eller dämpas när den fortskrider längs kanalen. När $Ve > 1$ över hela vågprofilen erhålles sålunda en successiv tillväxt av vågens höjd och branthet. Om kanalen är tillräckligt lång kan en brytande vågfront erhållas. Brytande vågfronter kan även erhållas vid snabba och stora flödesökningar oaktat $Ve < 1$.

Den kinematiska vågteorin förutsätter att flödet Q är en entydig funktion av vattendjupet Y , dvs att Q kan beräknas som för likformig strömning. Denna ansats leder till en vågrörelse som bibehåller sitt maximidjup och maximiflöde och där varje punkt på vågprofilen förflyttar sig med den mot det aktuella vattendjupet svarande kinematiska hastigheten $c_k = dQ/dA$.

Den kinematiska teorin kan utnyttjas för bedömning av vågtoppens hastighet i kanaler och ledningar med tämligen stor lutning och ej alltför snabba flödesvariationer.

I en tillräckligt lång kanal kan en likformigt fortskridande vågfront uppnås. En sådan vågfront benämnes monoklin våg och den utgör alltså ett asymptotiskt gränstillstånd, till vilket en av en vattenföringsökning genererad vågfront så småningom anpassar sig.

6. NUMERISK LÖSNING AV RÖRELSEEKVATIONERNA

6.1 Inledning

Det har som tidigare framgått ej varit möjligt att finna analytiska lösningar till rörelseekvationerna som med tillräcklig noggrannhet beskriver flödesförloppet i ett reglerat vattendrag eller i en dagvattenledning. Numerisk lösning måste därför tillgripas.

De numeriska metoderna kan indelas i följande kategorier

- beräkning baserad på differentialekvationerna överförda i s k karakteristisk form, Riemann-ekvationerna
- beräkning med explicita eller implicita differensschema baserade på de ursprungliga differentialekvationerna

De olika beräkningsprinciperna kommer kortfattat att beskrivas nedan.

6.2 Karakteristikmetoden

Denna metod har tidigare redovisats i kap 4.3 av vilket framgår att Q och Y erhålles för oregelbundna tids- och avståndsintervall vilket ofta bedömes som programmeringstekniskt obekvämt. Ett mera överskådligt beräkningsschema erhålles om man utnyttjar ett fast rektangulärt rutnät i xt -planet, vilket är fallet med "karakteristikmetod med specificerade intervall" eller som den också benämnes Hartrees metod, se t ex Yevjevich och Barnes (1970) eller Ligget och Cunge (1975).

I denna metod beräknas Q och Y i punkten P i xt -planet i fig 6-1 med utgångspunkt från kända värden på Q och Y i punkterna M , R och L . Tidsteget Δt förutsättes vara så litet att karakteristikerna PE och PF kan approximeras med rätta linjer och att E och F faller inom intervallet ML . Δt måste sålunda satisfiera det s k Courant-villkoret

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|V \pm \sqrt{gA/B}|} ; \quad (6.1)$$

Kvoten $Cr = \Delta t \cdot |V \pm \sqrt{gA/B}| / \Delta x$ benämnes Courants tal. Värden på Δt som satisfierar ekv. (6.1) ger således Courants tal $Cr \leq 1$.

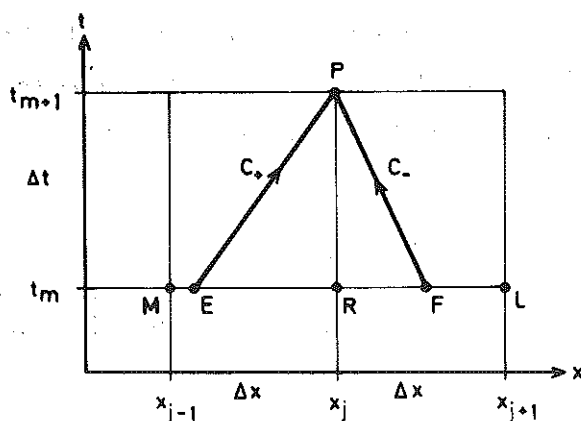


Fig. 6-1 Karakteristikmetod med specificerade intervall. Subkritisk strömning.

Punkterna E och F:s x-koordinater kan vid subkritisk strömning bestämmas ur sambanden, jfr ekv (4.28),

$$\begin{aligned} x_E &= x_R - \frac{1}{2} \left[(V + \sqrt{gA/B})_R + (V + \sqrt{gA/B})_M \right] \Delta t \\ x_F &= x_R + \frac{1}{2} \left[(V - \sqrt{gA/B})_R + (V - \sqrt{gA/B})_L \right] \Delta t \end{aligned} \quad (6.2)$$

Värdena Q_E , Q_F , Y_E och Y_F kan därefter beräknas genom interpolation varefter Riemann-ekvationerna utnyttjas på motsvarande sätt som i kap 4.3 för beräkning av Q_P och Y_P .

Om sålunda Q och Y är kända i alla beräkningssektioner vid tiden t , kan nya värden på Q och Y erhållas för tidpunkten $t + \Delta t$. Q och Y vid uppströms och nedströms rand erhålles ur de givna randvillkoren och Riemann-ekvationerna längs de negativa resp positiva karakteristikorna.

Hartree-metoden har ovan beskrivits i sin enklaste form. Dess noggrannhet kan förbättras med hjälp av olika iterations- och

interpolationsförfaranden.

6.3 Beräkning med explicita differensschema

För att undvika de interpolationsrutiner som ingår i karakteristik-metoderna användes i allmänhet s k finita differensmetoder, där man med hjälp av differenser approximerar derivatorna i de ursprungliga differentialekvationerna. Vi illustrerar här detta förfarande med hjälp av kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 : \quad (6.3)$$

där vi för enkelhetens skull förutsätter att $B = \text{konstant}$.

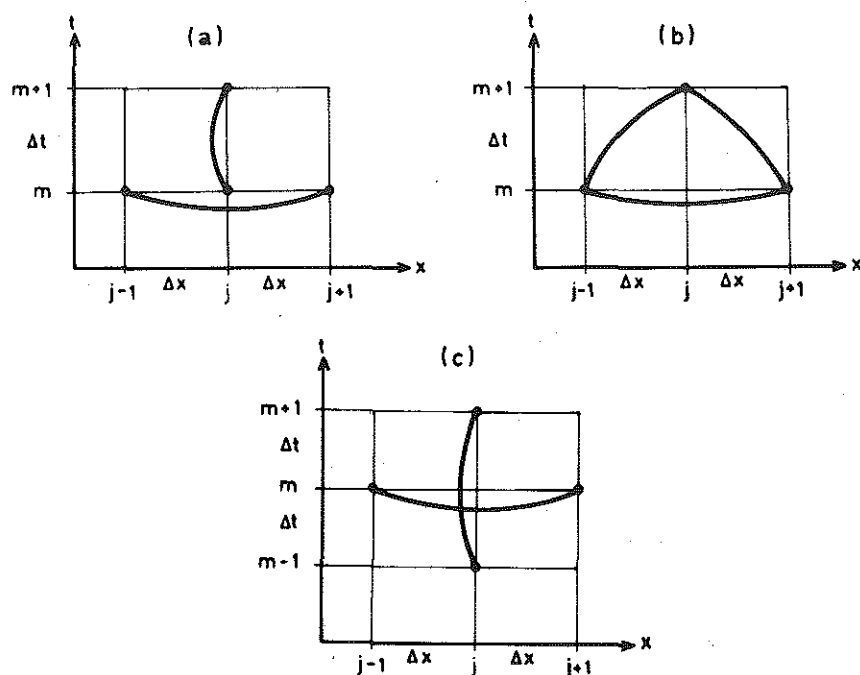


Fig. 6-2

Exemplifiering av explicita differensapproximationer: a) instabilt schema b) villkorligt stabilt schema (diffusivt schema) c) villkorligt stabilt schema (Leap-frog schemat).

Vi approximerar derivatorna enligt det i fig 6-2a angivna schemat:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_j^m = (Q_{j+1}^m - Q_{j-1}^m) / 2\Delta x ; \quad (6.4)$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_j^m = (Y_j^{m+1} - Y_j^m) / \Delta t ; \quad (6.5)$$

där t.ex. Q_{j+1}^m är flödet i punkten $(j+1, m)$ i xt -planet.

Insatta i ekv (6.3) ger dessa approximationer differensekvationen

$$(Q_{j+1}^m - Q_{j-1}^m) / 2\Delta x + B (Y_j^{m+1} - Y_j^m) / \Delta t = 0 ; \quad (6.6)$$

Om vi på motsvarande sätt överför även rörelsemängdekvationen till differensform och därvid approximerar koefficienterna framför derivatorna och övriga "konstanter" i punkten (j, m) erhålles två linjära ekvationer i Q_j^{m+1} och Y_j^{m+1} , vilka kan omformas till explicita uttryck för beräkning av Q och Y på den nya t -linjen under förutsättning av att vi känner lösningen på linjen t_m .

Låt oss nu anta att vi inom ett litet område kring punkten (j, m) kan utveckla Q och Y i Taylorserier enligt

$$Q_{j+1}^m = \left[Q_j^m + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \right]_j^m ; \quad (6.7)$$

$$Y_j^{m+1} = \left[Y_j^m + \frac{\partial Y}{\partial t} \cdot \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 Y}{\partial t^3} \cdot \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \right]_j^m ;$$

Om vi substituerar dessa serier i ekv (6.6) erhålles

$$\left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_j^m + \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \right)_j^m \cdot \frac{\Delta x^2}{3!} + \dots \right\} + B \left\{ \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right)_j^m + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \right)_j^m \cdot \frac{\Delta t}{2!} + \dots \right\} = 0 ; \quad (6.8)$$

Ekv (6.8) går tydligen mot ekv (6.3) när Δt och Δx går mot noll, vilket innebär att differensekvationen (6.6) är i överensstämmelse med (konsistent med) differentialekvationen (6.3).

Utnyttjandet av ekv (6.6) för approximering av ekv (6.3) motsvarar en trunkering (avkortning) av Taylorserierna. Schemat (6.6) säges sålunda ha ett trunkeringsfel av $O(\Delta x^2, \Delta t)$ ("O" = storleksordningen). Man säger också att differensschemat är

av andra ordningen m a p Δx och av första ordningen m a p Δt . En halvering av Δx skulle alltså förväntas ge en reduktion av det av Δx beroende trunkeringsfelet med faktorn 0.25. Motsvarande faktor för Δt är 0.5.

Man finner tyvärr att approximationen (6.5) av tidsderivatan i de allra flesta fall leder till instabila beräkningar, dvs att beräknade värden på Q och Y blir allt orimligare även om Courant-villkoret, ekv (6.1), är uppfyllt. Stabila beräkningar erhålles för $Cr \leq 1$ om vi skriver, jfr fig 6-2b, (motsvarande för $\partial Q / \partial t$ i rörelseekvationen)

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right)_j^m \approx \left[Y_j^{m+1} - (Y_{j+1}^m + Y_{j-1}^m) / 2 \right] / \Delta t ; \quad (6.9)$$

Om vi nu går tillbaka via Taylorutvecklingarna till den ursprungliga differentialekvationen finner vi emellertid att den nya differens-ekvationen ej längre konvergerar likformigt mot ekv (6.3) utan istället approximerar följande ekvation med ett trunkeringsfel av $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial t} = B \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} ; \quad (6.10)$$

Differensschemat (6.9) har alltså introducerat en tilläggsterm av diffusiv (dämpande) karaktär, vilket dels var nödvändigt ur stabilitetssynpunkt, dels visat sig vara fördelaktigt vid beräkningar avseende branta flödesfronter, se kap 6.5. Tilläggstermen kan även ses som ett trunkeringsfel, som för att vara så litet som möjligt kräver små värden på $(\Delta x)^2$ i förhållande till Δt .

Det sätt på vilket derivatorna i differentialekvationerna approximeras bestämmer således trunkeringsfelets storlek och om differens-ekvationerna är i överensstämmelse med differentialekvationerna. Approximationssättet avgör även om differensschemat kommer att leda till stabila beräkningar eller ej.

6.4. Numerisk stabilitet¹⁾

Differensekvationernas numeriska stabilitet kan testas genom att man undersöker om någon del av lösningen kan växa i tiden utan gräns så att den till slut får beräkningen att bryta samman. Den-na test, som utvecklats av von Neumann, se O'Brien, Hyman och Kaplan (1951), förutsätter att lösningen till differentialekvationerna kan skrivas som Fourierserier:

$$Q(x, t) = \sum_n Q_n \exp \left[i (\sigma_n x - \beta_n t) \right] \quad (6.11a)$$

$$Y(x, t) = \sum_n Y_n \exp \left[i (\sigma_n x - \beta_n t) \right] \quad (6.11b)$$

där Q_n och Y_n är Fourier-konstanter, σ_n och β_n är vågtal i rum och tid samt $i = \sqrt{-1}$. Vi inför dessa samband i differensekvationerna och studerar kvoten mellan motsvarande termer i serien i punkten $x = j\Delta x$ vid tidpunkterna $(m+1)\Delta t$ och $m\Delta t$, dvs

$$\frac{\exp \left[i (j\sigma_n \Delta x - (m+1)\beta_n \Delta t) \right]}{\exp \left[i (j\sigma_n \Delta x - m\beta_n \Delta t) \right]} = e^{-i\beta_n \Delta t}; \quad (6.12)$$

$e^{-i\beta_n \Delta t}$ kan ses som en tidsberoende amplitudfaktor. Villkoret för stabilitet är att amplitudfaktorerna belopp ≤ 1 , dvs att

$$\left| e^{-i\beta_n \Delta t} \right| \leq 1; \quad (6.13)$$

vilket för explicita schema leder till att Courant-villkoret, ekv (6.1) skall vara satisfierat, såvida schemat överhuvudtaget är stabilt. Detta nödvändiga villkor följer ju även direkt av definitionen på beroendedområde och influensområde, se kap 4.4.

Stabilitetsanalysen kan endast utföras för linjära eller linjariserade ekvationer. Den linjära analysen bedömes dock ge för de ursprungliga icke-linjära ekvationerna tillämpliga resultat.

1) I Appendix redovisas en stabilitetsanalys av ett implicit differensschema.

Med hjälp av Fourieranalysen kan man även studera kvantiteterna R_1 och R_2 , se Ligget och Cunge (1975) och Appendix,

$$R_1 = \frac{\text{differenslösningens amplitudfaktor}}{\text{den analytiska lösningens amplitudfaktor}}$$

$$R_2 = \frac{\text{av differenslösningen definierad våghastighet}}{\text{av analytiska lösningen definierad våghastighet}}$$

Om $R_1 < 1$ ger den numeriska lösningstekniken en artificiell dämpning av uppträdande vågor. Differensschemat benämnes då diffusivt eller amplitud-dissipativt.¹⁾ Dämpningen är beroende av antalet delsträckor Δx per våglängd L och avtar med växande värde på $L/\Delta x$, se fig 6-3. Det finns således en övre gräns för storleken på Δx för ett givet maximalt dämpningsfel.

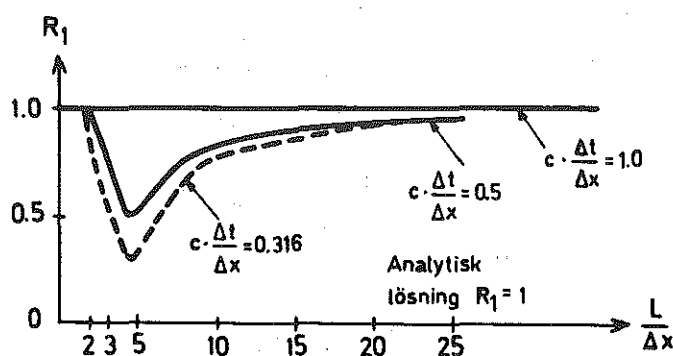


Fig 6-3 Relativa amplitudfaktorn R_1 som funktion av $L/\Delta x$ för ett diffusivt explicit schema applicerat på den linjära differentialekvationen $\partial V/\partial t - c \cdot \partial V/\partial x = 0$. Efter Ligget och Cunge (1975).

Från karakteristikmetoden vet vi att den av differentialekvationerna definierade våghastigheten är oberoende av den studerade störningens våglängd. Den av differensekvationerna genererade våghastigheten visar sig emellertid vara beroende av våglängden och av samma storlek som den analytiska endast för det fall att Courant-villkoret är exakt uppfyllt. (Vissa implicita schema genererar dock en våghastighet som alltid är skild från den analytiska). För finita differensschema gäller således nästan alltid att $R_2 \neq 1$, de är dispersiva²⁾. Allmänt sett synes tätare sektionsindelning ge mera korrekta våghastigheter, se även Appendix.

1) Diffusivt schema = artificiellt dämpande schema.

2) Dispersivt schema = störningarnas fortplantningshastighet våglängdsberoende.

Ett differenssschemas dispersiva egenskaper kan leda till att energi överföres från längre till kortare våglängder vilket, om ingen artificiell dämpning förefinnes, kan medföra parasitisk vågbildning, se fig 6-5. Det kan därför i vissa sammanhang vara beräkningstekniskt fördelaktigt att utnyttja diffusiva differensschema för att dämpa tillväxten av dessa icke önskade vågor. Ofta är dock den i de fullständiga ekvationerna via den kvadratiske friktionstermen inbyggda naturliga dämpningen tillräcklig för att dämpa ut de parasitiska vågorna.

6.5 Beräkning med implicita differensschema¹⁾

Stabilitetsvillkoret $Cr \leq 1$ för explicita differensschema har den i vissa fall olyckliga konsekvensen att, om beräkningsstegen Δx av noggrannhetsskäl (t ex varierande geometri) måste väljas små, kan det tillåtna värdet på Δt bli så litet att problemets lösning kräver ett orimligt stort antal beräkningscykler. I sådana fall är det ur beräkningsekonomisk synpunkt önskvärt att kunna utnyttja differensschema som är stabila oberoende av valet av Δt , dvs där valet av Δt kan baseras enbart på överväganden rörande önskad beräkningsnoggrannhet. Ett sådant schema erhålles om vi låter differensschemats beroendedområde täcka hela beräkningsområdet m a p x .

Ett implicit differensschema erhålles om derivatorna approximeras på t ex följande sätt, fig 6-4a

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left[\theta (Q_{j+1}^{m+1} - Q_{j-1}^{m+1}) + (1 - \theta) \cdot (Q_{j+1}^m - Q_{j-1}^m) \right] / 2\Delta x; \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = (Y_j^{m+1} - Y_j^m) / \Delta t;$$

$$B = B_j^m;$$

där θ är en koefficient i intervallet $0 \leq \theta \leq 1$, med vars hjälp olika vikt kan läggas på differenserna på "gamla" och "nya" tidsnivån.

1) En analys av olika implicita schemas egenskaper redovisas i Appendix.

När $\theta = 0$ erhålles ett explicit schema, vilket framgår av en jämförelse med ekv (6.4). Om $\theta > 0$ erhålles en ekvation med tre obekanta på linjen t_{m+1} : Q_{j+1} , Y_j och Q_{j-1} .

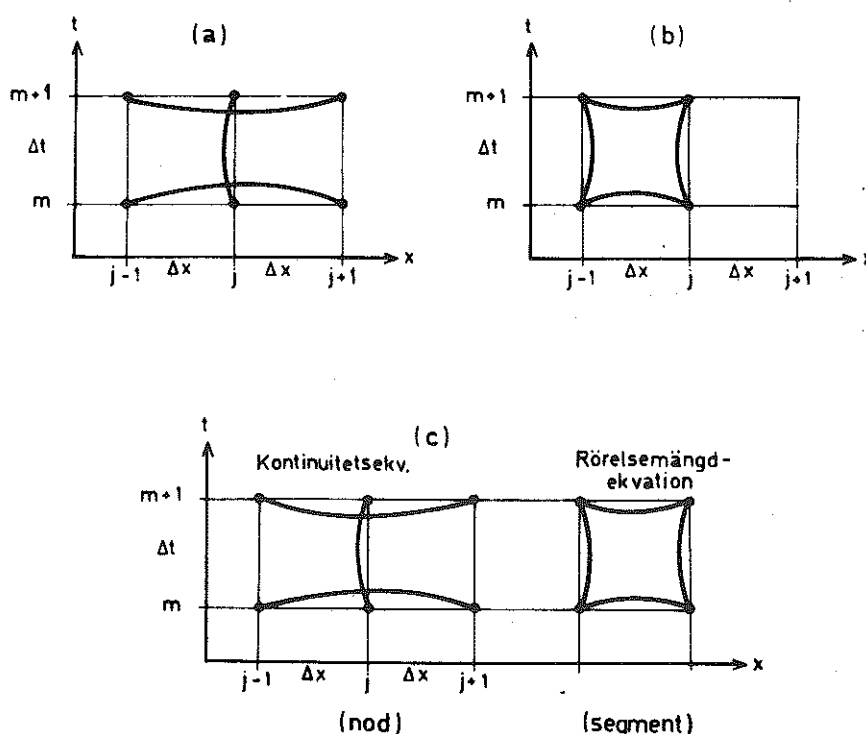


Fig 6-4 Exemplifiering av implicita differensschema:

- a) centrerat schema (Crank-Nicolson)
- b) Preissman's schema (boxschema)
- c) nod-segment schema

Formulerar vi rörelsemängdekvationen på motsvarande sätt som kontinuitetsekvationen erhålles för varje inre beräkningssektion två ekvationer i sex obekanta på linjen t_{m+1} . Med totalt N sektioner ($N-2$ inre sektioner) fås ett system av $2N-4$ ekvationer i $2N$ obekanta. Om dessa ekvationer kompletteras med ytterligare fyra ekvationer (vid subkritisk strömning ett randvillkor och en Riemannekvation vid vardera randen) erhålles slutligen ett ekvationssystem varur de $2N$ obekanta kan lösas med hjälp av iterativ teknik eller det speciella Gausselimineringsförfarande som benämnes dubbel-sveps metoden, se kap 7.4.

Det erhållna ekvationssystemet är linjärt om koefficienterna i differentialekvationerna approximeras på linjen t_m . En stabilitetsanalys visar då att schemat är ovillkorligt stabilt om $0.5 \leq \theta \leq 1$. För undvikande av icke linjär instabilitet bör dock den kvadratiske friktionstermen I_f approximeras i punkten $(j, m + 1/2)$, Strelkoff (1970), Abbot och Ionescu (1967). Denna approximation kan göras utan att systemets linearitet spolieras, se kap 7.2.

En Taylorutveckling av Q och Y kring punkten $(j, m + 1/2)$ visar att differensekvationerna är i överensstämmelse med differentialekvationerna.¹⁾ Vi bortser då från att även koefficienterna skulle vara approximerade i denna punkt vilket kan ske via en iterativ procedur, se Abbot och Ionescu (1967). För $\theta > 0.5$ introducerar differensschemat tilläggstermer av diffusiv karaktär och trunke-ringsfelet växer från $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ till $O(\Delta x^2, \Delta t)$.

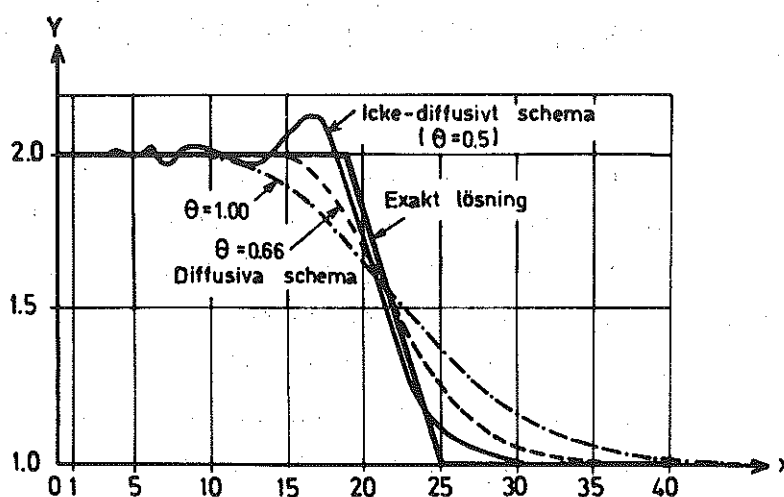


Fig 6-5 Jämförelse mellan analytiska och numeriska lösningar med implicit schema (Preissmanns schema, se fig 6-4b) applicerade på de linjära differentialekvationerna $\partial V/\partial t + \partial Y/\partial x = 0$, $\partial V/\partial x + \partial Y/\partial t = 0$. Efter Ligget och Cunge (1975). $Cr = 2$.

Differensschemat är alltså för de lineariserade rörelseekvationerna av andra ordningen och icke-diffusivt om $\theta = 0.5$. För $\theta > 0.5$ är schemat av första ordningen m a p Δt och diffusivt, dvs artificiellt dämpande, jfr fig 6-5. Alla differensschema applicerade på rörelseekvationerna är som tidigare påpekats dispersiva, (se sid 76).

I denna framställning har exempel givits endast på differensschema ledande till linjära ekvationssystem. Om även koefficienterna och termen I_f approximeras på den nya t -linjen erhålles ett icke-linjärt system vilket måste lösas via mera tids- och kostnadskrävande iterativa metoder, se t ex Amein och Chu (1975). Samma grad av noggrannhet bör kunna erhållas för motsvarande kostnad med ett linjärt system om Δt väljes litet.

Som framgått av beskrivningen ovan kräver de implicita metoderna per beräkningssteg i tiden ett mera omfattande beräkningsarbete än de explicita metoderna. För att en beräkningsekonomisk vinst skall kunna göras krävs därför att man med den implicita metoden kan utnyttja ett större tidssteg än det som definieras av Courant-villkoret.

6.6 Svaga lösningar vid diskontinuerligt flöde.

Dissipativ operator ¹⁾

Av karakteristikmetoden följer att de differentialekvationer vi ställt upp för gradvis varierande strömning ej förmår beskriva starkt föränderliga förlopp såsom branta fronter till följd av snabba vattenföringsökningar. Vid sådana flödesfronter erhålles skärningar mellan karakteristikor av samma familj vilket indikerar att differentialekvationerna ej har någon entydig lösning. De antaganden under vilka rörelseekvationerna är uppställda är ej längre uppfyllda.

Med hjälp av differentialekvationerna kan vi beskriva flödesförhållandena nedströms och uppströms fronten. Vi kan dessutom relatera frontens hastighet till förhållandena uppströms och nedströms om denna via finita rörelsemängds- och kontinuitetsbetraktelser. Denna princip utgör grunden för en speciell metod att behandla diskontinuiteter, s k isolering av fronten (shockfitting), se t ex Faure och Nahas (1961). Metoden medför emellertid programmeringstekniska svårigheter varför den är olämplig för praktiskt bruk. Det mest rationella är givetvis en beräkningsprocedur av samma typ som den vi utnyttjar för gradvis varierande strömning.

1) I detta avsnitt har benämningen dissipativ samma betydelse som diffusiv. Ett dissipativt schema är således detsamma som ett artificiellt dämpande schema.

De differensekvationer vi uppställt är formulerade med utgångspunkt från differentialekvationerna för gradvis varierande flöde, men genom sin finita konstruktion representerar de egentligen ett diskontinuerligt flöde. Även i de fall då differentialekvationerna ej har någon entydig lösning definierar differensekvationerna en sådan. Differensekvationerna kommer därigenom att kunna simulera den vågformade yta som i vissa fall kan erhållas bakom en brant flödesfront. Om frontens branthet och höjd är alltför stor kan emellertid de genom den numeriska tekniken genererade parasitiska vågorna komma att växa långt över fysikaliskt rimliga nivåer och eventuellt medföra instabilitet i beräkningarna, jfr fig 6-5.

Som vi tidigare sett kan differensekvationernas förmåga att beskriva en brant flödesfront ytterligare förbättras genom utnyttjandet av diffusiva differensschema vilka ger en artificiell dämpning av uppträdande vågor. Dessa differensschema approximerar, som framgår av ekv (6.10), differentialekvationer av diffusiv karaktär medan de ursprungliga ekvationerna är av konvektiv karaktär. De numeriska lösningarna ger ingen skarp front utan sprider ut denna över ett visst längdintervall, se fig 6-6. Utflackningsgraden beror av schemats dämpande och dispersiva egenskaper. Frontens medelhastighet kan dock bli väl återgiven. Det är således möjligt att med hjälp av differensekvationer generera så kallade generaliserade eller svaga lösningar till de ursprungliga differentialekvationerna, Abbot (1974) och (1975), Cunge (1975). De svaga lösningarnas utseende är emellertid beroende av hur rörelseekvationerna formuleras.

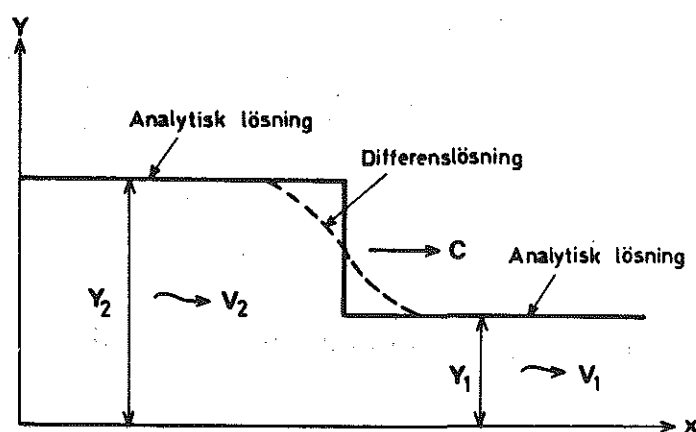


Fig 6-6 Brant front åtskiljande två zoner med gradvis varierande flöde.

För en rektangulär kanal med horisontell botten och försumbar friktion kan rörelseekvationerna skrivas

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial(VY)}{\partial x} &= 0 ; \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + gY \right) &= 0 ;\end{aligned}\quad (6.16)$$

Den första ekvationen uttrycker lagen om massans konstans och den andra lagen om energins konstans. Ekvationerna kan även skrivas på formen

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G(F)}{\partial x} = 0 ;$$

där

(6.17)

$$F = \begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix} ; \quad G = \begin{bmatrix} VY \\ V^2/2 + gY \end{bmatrix} ;$$

Enligt Lax (1957) gäller att om en diskontinuitet (brant front) åtskiljer två kontinuerliga flödeszoner, se fig 6-6, och om vi nedströms och uppströms om denna diskontinuitet har de genuina lösningarna F_1 och F_2 , bildar F_1 och F_2 tagna tillsammans en svag lösning om och endast om

$$c \cdot (F_1 - F_2) = G(F_1) - G(F_2) \quad (6.18)$$

där c är diskontinuitetens hastighet.

Om vi applicerar ekv (6.18) på diskontinuiteten i fig 6-6 erhålles

$$c = V_1 \left(\frac{+}{-} \right) \sqrt{\frac{2gY_2^2}{Y_1 + Y_2}} ; \quad (6.19)$$

vilken hastighet ej överensstämmer med det allmänt vedertagna sambandet, se kap 5.5,

$$c = V_1 \left(\frac{+}{-} \right) \sqrt{\frac{gY_2}{2Y_1} (Y_1 + Y_2)} ; \quad (6.20)$$

för en brant fronts fortplantningshastighet.

Väljer vi däremot att formulera rörelseekvationerna enligt dels lagen om massans konstans, dels lagen om rörelsemängdens konstans ($V \cdot Y$ sättes här lika med Q)

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 ;$$

(6.21)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{Y} \right) + gY \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 ;$$

erhålls den fronthastighet som ges av ekv (6.20). Även om ekv (6.16) och (6.21) har samma genuina lösningar har de ej därmed även samma svaga lösningar. För att den svaga lösningen skall ge en korrekt fronthastighet måste således rörelseekvationerna formuleras enligt ekv (6.21).

Som redan framgått av fig 6-5 kan diffusiva differensschema generera svaga lösningar. Diffusiva tilläggstermer kan erhållas på det sätt som anges av ekv (6.9) där vi bytt Y_j^m i ekv (6.5) mot

$$Y_j^* = (Y_{j+1}^m + Y_{j-1}^m) / 2 \quad (6.22)$$

Abbot (1974) har emellertid visat att detta dissipativa schema inte är något annat än ett specialfall av vad han benämner "dissipative interface", här benämnt dissipativa operatorer, vilka applicerade på icke-dissipativa schema ger schema vilka kan generera svaga lösningar. En generellt formulerad operator är

$$F_j^* = F_j^* (\gamma_{j-i} F_{j-i}, \dots, \gamma_{j+i} F_{j+i})$$

$$F = \begin{bmatrix} Y \\ Q \end{bmatrix} ; \quad (6.23)$$

vilken är relaterad till F_j enbart genom villkoret att $F_j^* = F_j$ om alla dissipativa faktorerna γ är lika med noll. En enkel dissipativ operator är den centrerade operatören

$$F_j^* = F_j + \gamma (F_{j+1} - 2 F_j + F_{j-1}) ; \quad (0 < \gamma < 0.5) \quad (6.24)$$

vilket som ett specialfall ger ekv (6.22) för $\gamma = 0.5$. Den dissipativa operatoren reducerar alltså amplituden på den vid beräkningen erhållna kortvågiga parasitiska vågbildningen, se fig 6-7 varigenom den energiförlust som erhålles i ett vattensprång eller vid en brant front simuleras. Då givetvis även längre vågors amplitud

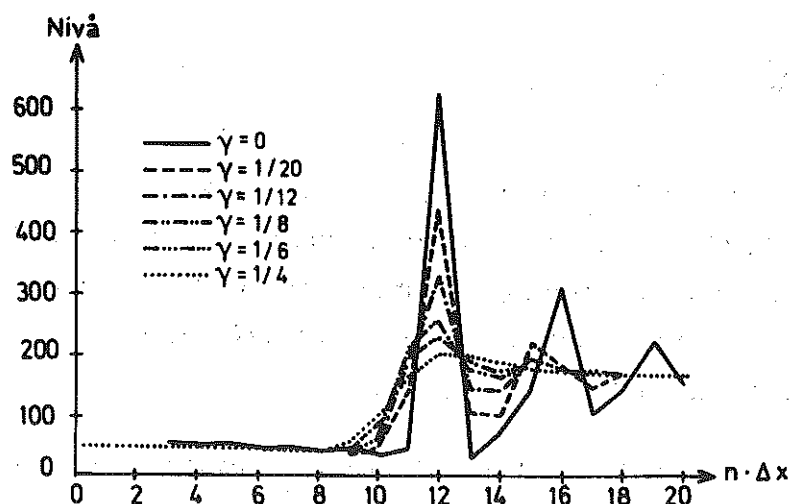


Fig 6-7 Effekten av ökande värde på γ för en centrerad dissipativ operator applicerad på en vandrande front. Efter Abbot (1974).

reduceras bör användningen av dissipativa operatörer begränsas till kritiska områden i xt -planet och dess styrka (dissipativa faktorn γ) bör hållas så låg som möjligt. Om en uppträdande våg har våglängden L kommer den centrerade operatoren att ge amplitudreduceringsfaktorn

$$k_r = 1 - 2\gamma \left(1 - \cos \frac{2\pi\Delta x}{L}\right); \quad (6.25)$$

vars värde som funktion av γ och antalet delsträckor $L/\Delta x$ per våglängd framgår av fig 6-8.

I Preismanns schema, fig 6-4b, utnyttjas koefficienten θ för genererande av svaga lösningar. Som framgår av fig 6-5 växer detta schemas dissipativa effekt med värdet på θ .

Ytterligare exempel på användandet av dissipativ operator och viktningskoefficient vid implicit metod redovisas i kap 7.6.

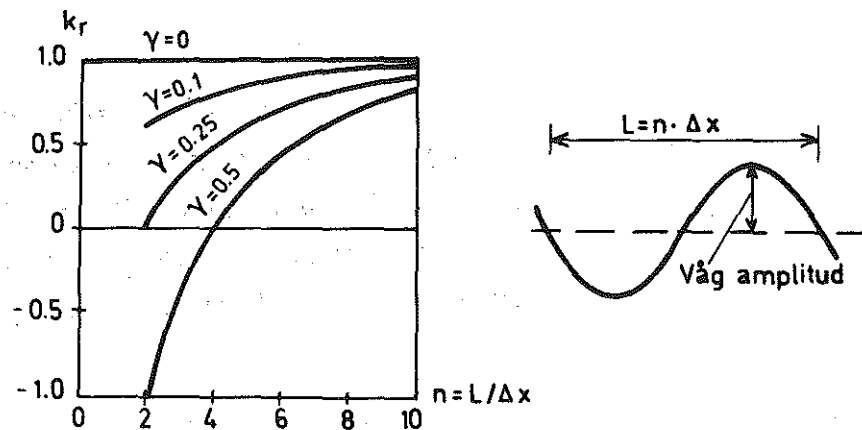


Fig 6-8 Den centrerade dissipativa operators amplitud-reduceringsfaktor k_r som funktion av dissipativa faktorn γ och antalet delsträckor $n = L/\Delta x$ per våglängd.

6.7 Sammanfattning

De numeriska metoderna kan grovt indelas i följande kategorier:

karaktistikmetoden
 explicita metoder
 implicita metoder

Karaktistikmetoden och de explicita metoderna kräver för att stabila beräkningar skall erhållas att

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|V \pm \sqrt{gA/B}|};$$

dvs att Courants tal

$$Cr = \Delta t \cdot |V \pm \sqrt{gA/B}| / \Delta x \leq 1.$$

Implicita metoder är däremot i allmänhet ovillkorligt stabila, dvs att Δt och Δx ur numerisk synpunkt kan väljas oberoende av varandra. Valet av dessa storheter kan därför baseras enbart på överväganden om önskad beräkningsnoggrannhet vilket i vissa fall kan leda till lägre beräkningskostnader.

Ett differensschema är diffusivt (amplitud-dissipativt) om den numeriska lösningens komponenter (Fourierserie-komponenter) dämpas snabbare än den analytiska lösningen. Exempel på icke diffusiva schema är de implicita differensschema som skisserats i fig 6-4, förutsatt att differenserna på "gamla" och "nya" tidnivån ges samma vikt.

Även om det är önskvärt att utnyttja icke diffusiva schema kan det ibland vara nödvändigt, t ex vid beräkningar avseende branta flödesfronter, att så modifiera schemat att det blir diffusivt. Detta kan ske med hjälp av en sk dissipativ operator eller en viktningskoefficient.

7. BESKRIVNING AV UTNYTTJADE IMPLICITA METODER. NUMERISKA EXPERIMENT.

7.1 Val av metod

Det är ovanligt att man i rapporter rörande numeriska beräkningar avseende icke stationär strömning finner någon diskussion kring motiven för valet av en viss metod. Detta sammanhänger troligtvis med att beräkningstekniken har varit och fortfarande är i en snabb utvecklingsfas. Någon litteratur med försök till en samlad diskussion av olika metoders för- och nackdelar har ej funnits. Det första verket av denna typ synes vara det föreläsningsmaterial från en kurs om icke stationär strömning i Fort Collins, 1974, som utgivits av Mahmood och Yevjevich (1975). Samtidigt presenterades en bibliografi över ämnesområdet av Miller och Yevjevich (1975).

Några generella objektiva kriterier för valet av numerisk beräkningsmetod går ej att ställa upp. Det viktigaste kriteriet är givetvis att beräkningsmodellen skall kunna simulera de aktuella flödesförhållandena med en viss noggrannhet. Vilka krav man härvid ställer är beroende av problemets natur och varierar från fall till fall. Andra faktorer av betydelse är beräkningskostnader och användarvänlighet. Viss vägledning kan även erhållas utifrån en analys av differensschemats diffusiva och dispersiva egenskaper. Det synes sålunda önskvärt att arbeta med ett icke diffusivt schema som vid behov kan göras diffusivt.

Som framgått av kap 1 har målsättningen för projektet avseende flödesförlopp i dagvattensystem varit att ta fram en beräkningsmodell som möjliggör beskrivning av flödesförloppet i delvis eller helt fyllda ledningssystem. Vid strömning i helt fylld ledning erhålles dynamiska våghastigheter av storleksordningen 1000 m/s, innebärande orimligt små tidssteg Δt vid explicita metoder. Det be-

dömdes därför vara nödvändigt att utveckla en implicit metod om inte alltför stora approximationer skulle behöva tillgripas vid strömning i helt fylld ledning.

Den konstruerade beräkningsmodellen bygger på det i fig 6-4c skisserade nod-segment schemat och möjliggör beräkning av såväl subkritiska som superkritiska flödessituationer. Schemats uppbyggnad tillåter även förekomst av vattensprång. Under vissa betingelser kan dock vattensprång ge okontrollerbara beräkningsstörningar. Strömning i helt fylld sektion approximeras med hjälp av den i kap 3.2 introducerade spalten i rörets hjässa.

Som framgår av diskussionen i Appendix synes nod-segment schemats dispersiva egenskaper vara något sämre än boxschemats (Preismann-schemat). Vissa inledande beräkningar genomfördes också med detta senare schema såsom det presenterats av Cunge och Wegner (1964). I denna artikel utnyttjades för första gången den fiktiva spalten. En mera genomarbetad formulering av boxschemat än den som ges av Cunge och Wegner redovisas av Ligget och Cunge (1975).

Vissa svårigheter uppstod emellertid vid försöken att anpassa boxschemat till de för vattensprång gällande randvillkoren vilket ledde fram till konstruktionen av nod-segment schemat. Det är möjligt att dessa svårigheter vad avser boxschemat skulle ha kunnat övervinnas med hjälp av nu vunna beräkningserfarenheterna. Nod-segment schemat visade sig emellertid ge en fullgod simulering av uppmätta flödesförlopp varför den fortsatta modellutvecklingen baserades på detta schema.

När föreliggande projekt avseende flödesförlopp i reglerade vattendrag startades byggde den första matematiska modellen på nod-segment-schemat. Mycket god överensstämmelse erhöles därvid mellan

uppmätta och beräknade vattenståndsutvecklingar. För vissa älvsträckningar erhöles emellertid instabila beräkningar, vilket sammanhänger med alltför snabba variationer i sektionsareorna längs älven. Med hjälp av en svag dissipativ operator kunde de uppträdande parasitiska vågorna kontrolleras utan men för beräkningsresultatet.

Det bedömdes emellertid vara av intresse att studera även någon annan typ av differensapproximation. En älvmodell konstruerades därför enligt ett av Abbot och Ionescu (1967) presenterat differensschema. Även detta schema kunde dock ge instabila beräkningar vid alltför snabbt varierande sektionsareor. På grund av att Abbots schema leder till en enkel dubbel-sveps algoritm med lägre beräkningskostnad baserades emellertid den fortsatta programutvecklingen på detta schema. Älvmodellerna är konstruerade enbart för subkritiska flödesförhållanden.

I det följande ges en detaljerad beskrivning av uppbyggnaden av det modifierade Abbot-schemat och den vid lösningen av ekvationssystemet utnyttjade metoden. Därefter kommer nod-segment-schemats konstruktion att skisseras.

7.2 Överföring av rörelseekvationerna till differens- ekvationer enligt modifierat Abbot-schema.

Kontinuitets- och rörelsemängdekvationen kommer att överföras till differensform enligt det implicita differensschema som beskrivits av Abbot och Ionescu (1967). Detta schema har dock här modifierats vad avser uppströms- och nedströms rand för att möjliggöra byte av randvillkor under beräkningens gång.

Vi förutsätter att beräkningen avser ett vattendrag med prismatisk sektion varför kontinuitets- resp rörelsemängdekvationen får utseendet ($\beta = 1$)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial t} = q \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Y}{\partial x} = gA (I_o - I_f) \quad (7.2)$$

Det laterala tillflödet q har då för enkelhetens skull antagits vara vinkelrätt huvudflödet.

Om vi inför vattenytans nivå H över en viss given referensnivå kan vi eliminera I_o enligt

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} - I_o; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial t}; \quad (7.3)$$

Vidare kan vi med hjälp av kontinuitetsekvationen skriva

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2Q}{A} \left(q - B \frac{\partial H}{\partial t} \right) - \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \frac{\partial A}{\partial x}; \quad (7.4)$$

Rörelseekvationerna erhålles då till

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial H}{\partial t} = q; \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - 2 \frac{QB}{A} \frac{\partial H}{\partial t} - \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \frac{\partial A}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial x} = -gA I_f - \frac{2Q}{A} q; \quad (7.6)$$

Det aktuella avsnittet av vattendraget indelas i $N-1$ delsträckor, med längden $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ enligt fig 7-1. N är ett udda tal.

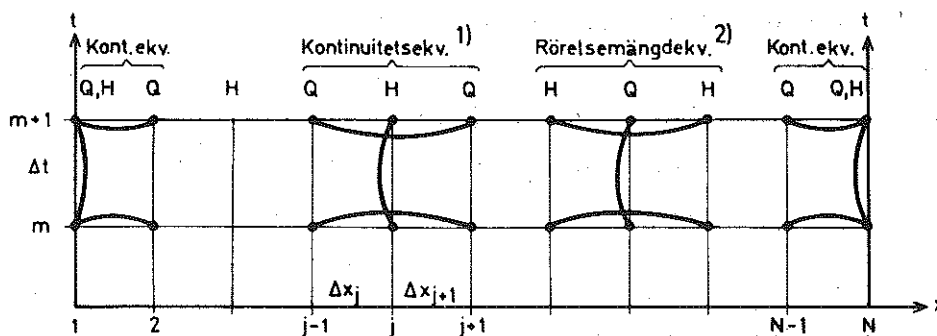


Fig 7-1 Modifierat Abbot-schema med udda antal sektioner oberoende av randvillkorens utformning.

- 1) I alla inre H-punkter
- 2) I alla inre Q-punkter

Sektioner med udda nummer benämnes H-punkter och sektioner med jämna nummer Q-punkter. Ändsektionerna betecknas dock QH-punkter. Antalet obekanta på t_{m+1} -linjen är lika med $N+2$, varför det förutom de två randvillkor som måste ges vid subkritisk strömning, se fig 4-9, krävs N stycken differensekvationer för problemets lösning.

Kontinuitetsekvationen:

Kontinuitetsekvationens differensekvation centreras kring en H-punkt enligt fig 7-1.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta 2x_j} \left[\frac{1}{2} (Q_{j+1}^{m+1} - Q_{j-1}^{m+1}) + \frac{1}{2} (Q_{j+1}^m - Q_{j-1}^m) \right] \quad (7.7)$$

$$B \frac{\partial H}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} B_j^m (H_j^{m+1} - H_j^m) \quad (7.8)$$

$$q \approx \frac{1}{2} (q_j^{m+1} + q_j^m) \quad (7.9)$$

där $\Delta 2x_j = x_{j+1} - x_{j-1}$. B_j^m är medelbredden på avsnittet $x_{j+1} - x_{j-1}$ och erhålles genom interpolering mellan närliggande H-punkter. Sektionsdata ges således enbart i H-punkterna.

Ekv (7.5) differensform blir då ($j = 3, 5, \dots, N-2$)

$$CC1(j) \cdot Q_{j+1}^{m+1} + CC2(j) \cdot H_j^{m+1} + CC3(j) \cdot Q_{j-1}^{m+1} = RC(j) \quad (7.10)$$

där

$$CC1(j) = \frac{1}{2\Delta 2x_j}$$

$$CC2(j) = B_j^m / \Delta t$$

$$CC3(j) = \frac{-1}{2\Delta 2x_j}$$

$$RC(j) = \frac{1}{2\Delta 2x_j} (Q_{j-1}^m - Q_{j+1}^m) + \frac{1}{\Delta t} B_j^m H_j^m + \frac{1}{2} (q_j^{m+1} + q_j^m);$$

Koefficienterna i ekv (7.10) är alltså funktioner av enbart kända storheter på den gamla tidsnivån $t = t_m$. q_j ges som indata.

Vid ränderna, dvs för $j=1$ resp $j=N$ formuleras kontinuitets-ekvationen på motsvarande sätt enligt det i fig 7-1 angivna schemat

$$CC(1) \cdot Q_2^{m+1} + CC2(1) \cdot H_1^{m+1} + CC3(1) \cdot Q_0^{m+1} = RC(1); \quad (7.11)$$

$$CC1(N) \cdot Q_{N+1}^{m+1} + CC2(N) \cdot H_N^{m+1} + CC3(N) \cdot Q_{N-1}^{m+1} = RC(N); \quad (7.12)$$

där Q_0 och Q_{N+1} representerar flödet i sektionen $J = 1$, resp $j = N$.

Rörelsemängdekvationen:

Denna ekvation centreras i Q-punkterna vilka placeras mittemellan två H-punkter. Följande differensapproximationer utnyttjas:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} (Q_j^{m+1} - Q_j^m); \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} \approx \frac{1}{2\Delta t} \left[(H_{j-1}^{m+1} - H_{j-1}^m) + (H_{j+1}^{m+1} - H_{j+1}^m) \right]; \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} \approx \frac{1}{2 \cdot \Delta 2x_j} \left[2(A_{j+1}^m - A_{j-1}^m) + (H_{j+1}^{m+1} - H_{j+1}^m) \cdot B_{j+1}^m - (H_{j-1}^{m+1} - H_{j-1}^m) B_{j-1}^m \right]; \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta 2x_j} \left[\frac{1}{2} (H_{j+1}^{m+1} - H_{j-1}^{m+1}) + \frac{1}{2} (H_{j+1}^m - H_{j-1}^m) \right] \quad (7.16)$$

Friktionslutningen I_f förutsättes beräknad enligt Mannings formel

$$I_f = \frac{Q|Q|}{M^2 A^2 R^{4/3}} = \frac{Q|Q|}{K^2} \quad (7.17)$$

och approximeras i differenskvationen med hjälp av linjari-seringen

$$I_f \approx Q_j^{m+1} |Q_j^m| / (K_j^m)^2 \quad (7.18)$$

där K_j^m erhålles genom interpolering mellan omgivande H-punkter. Vidare sättes

$$2 \frac{Q}{A} q \approx (Q_j^m + Q_j^{m+1}) (q_j^{m+1} + q_j^m) / 2A_j^m \quad (7.19)$$

där

$$A_j^m \approx (A_{j+1}^m + A_{j-1}^m) / 2 ;$$

Om övriga koefficienter framför derivatorna approximeras i Q-punkten analogt med A_j^m kan rörelsemängdekvationen skrivas ($j = 2, 4, \dots, N-1$)

$$CR(j) \cdot H_{j+1}^{m+1} + CR2(j) \cdot Q_j^{m+1} + CR3(j) \cdot H_{j-1}^{m+1} = RR(j) ; \quad (7.20)$$

där koefficienterna är funktioner av enbart kända storheter på gamla tidsnivån t_m .

7.3 Kommentarer till differensekvationerna

De icke linjära rörelseekvationerna har alltså approximerats med två linjära differensekvationer. Det utnyttjade differensschemat är ovillkorligt numeriskt stabilt om, såsom här gjorts, termen I_f approximeras i punkten $(j, m+1/2)$, se Abbot och Ionescu (1967). Tidssteget Δt kan alltså ur numerisk synpunkt väljas oberoende av Δx , dvs vi kan arbeta med Courant-tal

$$Cr = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left| V \pm \sqrt{gA/B} \right| > 1 ; \quad (7.21)$$

En Taylorutveckling av differensekvationerna kring punkten $(j, m+1/2)$ visar att trunkeringsfelet vid konstanta delsträckor Δx_j är av $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ med avseende på ingående derivator medan det för koefficienterna är av $O(\Delta x^2, \Delta t)$. Detta senare trunkeringsfel kan emellertid reduceras till $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ genom en cyklisk repetering av beräkningen varvid koefficienterna app-

roximeras i punkten $(j, m + 1/2)$ med hjälp av de senast beräknade variabelvärdena på linjen t_{m+1} . Denna möjlighet, som dock leder till högre beräkningskostnader, har ej behövt utnyttjas.

Vid beräkningar avseende naturliga vattendrag är det oftast omöjligt att arbeta med konstanta delsträckor. För H-punkterna kommer då $\Delta x_j \neq \Delta x_{j+1}$ vilket innebär att kontinuitetsekvationens trunkeringsfel är av $O(\Delta x_{j+1} - \Delta x_j, \Delta t^2)$. Rörelsemängdekvationen är dock även i detta fall av andra ordningen eftersom Q-punkterna placeras mitt emellan H-punkterna. Kontinuitetsekvationerna vid ränderna har trunkeringsfel av $O(\Delta x, \Delta t^2)$.

Differensschemat är icke-dissipativt men dispersivt, liksom alla schema applicerade på rörelseekvationerna, se kap 6 och Appendix.

Eftersom alla sektionsdata i Q-punkterna beräknas genom interpolering utifrån motsvarande data i närmast liggande H-punkter, bör H-punkterna väljas så att tvärsektionen varierar så likformigt som möjligt mellan dessa punkter. Detta gäller givetvis alla typer av schema.

Ett alternativ till den kompletterande kontinuitetsekvationen vid uppströms- och nedströms rand skulle kunna vara en Riemann-ekvation längs en negativ resp positiv karakteristika, se fig 7-2.

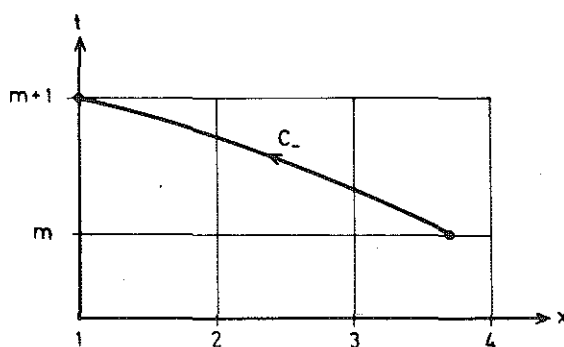


Fig 7-2 C_- -karakteristika längs vilken Riemann-ekvationen integreras. Exempel på alternativt uppströms randvillkor.

Vid höga värden på Courants tal innebär emellertid detta förfarande att karakteristikans ursprungspunkt ligger flera Δx från randen,

vilket gör en integrering längs karakteristikan praktiskt omöjlig att genomföra. Vid explicita metoder är utnyttjandet av en Riemann-ekvation vid randen den enda generella möjligheten.

7.4 Lösning av de implicita ekvationerna

Ekvationerna (7.10), (7.11), (7.12) och (7.20) bildar tillsammans med två givna randvillkor ett ekvationssystem om $N+2$ ekvationer uttryckta i lika många obekanta, vilket skall lösas vid varje tidssteg. Ekvationssystemet är linjärt och kan lösas med hjälp av standardmetoder för linjära system (iterering eller eliminering).

Det framgår av ekvationernas utseende att ekvationssystemets koeficientmatris har diagonal form vilket medför att en speciell Gauss-elimineringss metod, den s k dubbelsveps-metoden (DS-algoritm) kan utnyttjas. Detta gäller oavsett differensekvationernas uppbyggnad. Med de i detta fall kring Q- och H-punkter uppbyggda differensekvationerna är systemets matris tridiagonal varför systemet kan lösas med hjälp av den DS-algoritm som brukar benämnas Richtmeyer-algoritmen, se Richtmeyer och Morton (1967) eller Abbot och Ionescu (1967). Denna algoritm kommer att beskrivas närmare i det följande.

Låt oss förutsätta att H_{j-1}^{m+1} kan skrivas som en linjär funktion av Q_j^{m+1} ,

$$H_{j-1}^{m+1} = EC(j) \cdot Q_j^{m+1} + FC(j) \quad (7.22)$$

där $EC(j)$ och $FC(j)$ är konstanter. Om vi ersätter H_{j-1}^{m+1} i ekv (7.20) med detta samband erhålles

$$Q_j^{m+1} = ER(j+1) \cdot H_{j+1}^{m+1} + FR(j+1) \quad (7.23)$$

där

$$ER(j+1) = - CR1(j) / (CR2(j) + CR3(j) \cdot EC(j)) ;$$

$$FR(j+1) = (RR(j) - CR3(j) \cdot FC(j)) / (CR2(j) + CR3(j) \cdot EC(j))$$

Kombinerar vi vidare ekv (7.23) med kontinuitetsekvationen i H-punkten x_{j+1} erhåller vi

$$H_{j+1}^{m+1} = EC(j+2) \cdot Q_{j+2}^{m+1} + FC(j+2); \quad (7.24)$$

där

$$EC(j+2) = -CC1(j+1)/(CC2(j+1) + CC3(j+1) \cdot ER(j+1))$$

$$FC(j+2) = (RC(j+1) - CC3(j+1) \cdot FR(j+1)) / (CC2(j+1) + CC3(j+1) \cdot ER(j+1))$$

Om vi förutsätter att vi överallt har subkritiska förhållanden och att randvillkoren är

$$\begin{aligned} Q_0^{m+1} &= QUPP(t_{m+1}) \\ H_N^{m+1} &= HNED(t_{m+1}) \end{aligned} \quad (7.25)$$

erhålles genom identifiering ur ekv (7.23) för $j = 0$

$$ER(1) = 0; \quad FR(1) = QUPP(t_{m+1}) \quad (7.26)$$

Genom cyklisk repetering av ekv (7.24) och (7.23) kan vi nu beräkna kvasikonstanterna $EC(j)$, $FC(j)$ och $ER(j+1)$, $FR(j+1)$ för växande $j = 2, 4, \dots, N+1$, för att vid nedre randen erhålla

$$H_N^{m+1} = EC(N+1) \cdot Q_{N+1}^{m+1} + FC(N+1); \quad (7.27)$$

vilket samband tillsammans med nedre randvillkoret ger Q_{N+1}^{m+1} . Cyklisk repetering av ekv (7.23) och (7.24) ger därefter Q_j^{m+1} och H_{j-1}^{m+1} för avtagande $j = N-1, N-3, \dots, 2$.

Med $H_N = H_N(t)$ som nedre randvillkor är egentligen kontinuitetsekvationen (7.12) överflödig. Vi hade kunnat sluta med sambandet

$$Q_{N-1}^{m+1} = ER(N) \cdot H_N^{m+1} + FR(N) \quad (7.28)$$

Q_{N-1}^{m+1} hade ej behövt beräknas. Likaledes är kontinuitetsekvationen (7.11) överflödig om övre randvillkoret är $H_1 = H_1(t)$, och Q_0^{m+1} hade ej behövt beräknas. Abbots ursprungliga schema byggde på detta förhållande vilket dock medförde att antalet sektioner blev beroende av randvillkorens formulering. Byte av randvillkor under beräkningens gång hade därigenom inneburit vissa problem.

Den för lösningen av ekvationssystemet utnyttjade metodiken innebär således för subkritiska förhållanden en successiv beräkning nedströms vattendraget av konstanterna ER, FR, EC och FC varefter Q och H kan lösas i uppströms riktning, vilket förklarar benämningen dubbel-sveps metod.

Det bör påpekas att DS-metoden generellt sett ej är någon bra lösningsmetod emedan konstanterna under vissa förhållanden kan växa exponentiellt med j, innebärande att Q och H erhålles som skillnaden mellan mycket stora tal. Även om differensschemat är ovillkorligt stabilt kan således instabila och fysikaliskt sett helt orimliga lösningar erhållas på grund av otillräcklig numerisk precision. Man kan därför tvingas vidta speciella åtgärder som t ex att arbeta med sk dubbel precision (dubbelt antal signifikanta siffror) vilket avsevärt ökar beräkningskostnader och erforderligt minnesutrymme i datorn. Inga sådana åtgärder har dock hitintills behövt utnyttjas.

Vid superkritisk strömning krävs i princip ingen DS-algoritm. Q och H är då båda kända vid uppströms rand varför övriga Q och H kan lösas direkt i nedströms riktning. Modellen har dock ej testats för detta fall.

7.5 Nod-segment schemat

För beräkningar avseende strömning i ledningssystem har utvecklats ett speciellt schema, nod-segment schemat, i fig 6-4c. För en ledning indelad i N-1 delsträckor ger detta schema 2N-3 differensekvationer i 2N obekanta. Vid subkritiskt och superkritiskt flöde krävs förutom de två randvillkoren, se fig 4-9, en kompletterande ekvation.

Som sådan utnyttjas en kontinuitetsekvation vid uppströms rand vid subkritisk strömning och vid nedströms rand vid superkritisk strömning, fig 7-1.

Differensekvationerna bygger direkt på ekv (7.1) och (7.2). Kontinuitetsekvationen är konstruerad på motsvarande sätt som för Abbot-schemat. Dock har schemat försetts med en viktningskoefficient θ enligt ekv (6.15). $\beta = \text{konstant} = 1.03$.

Rörelsemängdekvationen är uppbyggd enligt box-schemat, fig 6-4b, med hjälp av följande approximationer:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{1}{2\Delta t} \left[(Q_{j+1}^{m+1} - Q_{j+1}^m) + (Q_j^{m+1} - Q_j^m) \right] ;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x_j} \left[\theta (Q_{j+1}^{m+1} - Q_j^{m+1}) + (1-\theta) (Q_{j+1}^m - Q_j^m) \right] ; \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \approx \frac{1}{\Delta x_j} \left[\theta \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1}^{m+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j^{m+1} \right] + (1-\theta) \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{j+1}^m - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j^m \right] \right] ;$$

$$gA \frac{\partial Y}{\partial x} \approx \frac{g}{2\Delta x_j} (A_{j+1}^m + A_j^m) \left[\theta (Y_{j+1}^{m+1} - Y_j^{m+1}) + (1-\theta) (Y_{j+1}^m - Y_j^m) \right] ;$$

$$I_f \approx \frac{1}{2} \left[\theta (I_{f,j+1}^{m+1} + I_{f,j}^{m+1}) + (1-\theta) (I_{f,j+1}^m + I_{f,j}^m) \right] ;$$

$$gAI_o \approx \frac{gI_o}{2} \left[A_{j+1}^m + A_j^m + \theta \cdot B_{j+1}^m (Y_{j+1}^{m+1} - Y_{j+1}^m) + \theta \cdot B_j^m (Y_j^{m+1} + Y_j^m) \right]$$

där

$$0,5 \leq \theta \leq 1$$

$$\left(\frac{Q^2}{A} \right)_j^{m+1} \approx \left(\frac{Q^2}{A} \right)_j^m + 2 \left(\frac{Q}{A} \right)_j^m (Q_j^{m+1} - Q_j^m) - \left(\frac{Q^2}{A^2} \right)_j^m B_j^m (Y_j^{m+1} - Y_j^m)$$

$$I_{f,j}^{m+1} \approx I_{f,j}^m + 2 \left[\frac{I_f}{Q} \right]_j^m (Q_j^{m+1} - Q_j^m) - 2 \left[\frac{I_f}{K} \right]_j^m \cdot \left[\frac{dK}{dY} \right]_j^m (Y_j^{m+1} - Y_j^m) ;$$

$$K = \text{MAR}^{2/3} \text{ enligt ekv (7.17).}$$

De icke linjära termerna $\partial(Q^2/A)/\partial x$ och I_f har alltså linjariserats med hjälp av dessa termers resp förstaderivata på den gamla t -linjen.

Den kompletterande kontinuitetsekvationen vid randen approximeras enligt box-schemat.

Man kan visa att differensschemat är stabilt om $0.5 \leq \theta \leq 1.0$. Det är icke diffusivt om $\theta = 0.5$, i varje fall vid applicering på linjära problem (linjära differentialekvationer), se Appendix.

Om den kompletterande kontinuitetsekvationen vid superkritisk strömning placeras vid uppströms rand kan flöde och vattenstånd i princip lösas direkt i nedströms riktning utan DS-algoritm. Denna lösningsmetodik visade sig emellertid leda till instabila beräkningar. Vidare kan man med denna formulering ej behandla flödesfall med subkritisk strömning i ledningens övre del och superkritisk strömning i dess nedre del eller vice versa. Genom att placera den kompletterande ekvationen vid nedströms rand erhålls dels stabila beräkningar, dels en enkel anpassning till alla förekommande flödesfall, se vidare kap 9. Förfarandet leder dessutom till att samma DS-algoritm utnyttjas oberoende av flödestillståndet.

Eftersom lösningen till differentialekvationerna enligt den i kap 5.2 genomförda analysen är instabil om Vedernikovs tal $Ve > 1$, skulle man kunna förvänta att även differenslösningen uppvisar motsvarande egenskaper. Resultaten från testberäkningar tyder emellertid på att differensschemat applicerat på de aktuella icke linjära problemen har vissa dissipativa egenskaper som medför att beräkningarna förblir stabila även vid höga värden på Ve . En mycket svag tendens till växande våghöjder har dock i vissa fall kunnat förmärkas.

De randvillkor som kan utnyttjas i modellen är av följande typ

$$\begin{aligned} Q &= Q(t) \\ Y &= Y(t) \\ Q^{m+1} &= \left[A \sqrt{gA/B} \right]^{m+1} \quad (\text{kritiskt djup}) \end{aligned} \quad (7.30)$$

Det sista sambandet är icke linjärt och kräver ett iterativt förfarande för att Q och Y skall kunna lösas vid ränderna. Detta villkor är alltså formulerat enbart på tidsnivån t_{m+1} .

På grund av att flödesförhållandena under beräkningens gång skiftar från superkritiskt till subkritiskt tillstånd, från helt fylld till delvis fylld ledning etc, måste även randvillkorens utseende variera. Detta kräver att man efter varje genomfört beräkningssteg i tiden genomför en kontroll av flödesförhållandena i alla i ledningssystemet ingående ledningar och utifrån resultatet av denna kontroll väljer randvillkor för varje lednings uppströms- och nedströmssektion. Hur detta sker kommer närmare att beskrivas i kap 9.

7.6 Beräkning av snabbt varierande flödesförlopp med hjälp av dissipativ operator och viktningskoefficient θ

Med hjälp av dissipativa (diffusiva) differensschema genomförda beräkningar avseende branta flödesfronter har tidigare redovisats i fig 6-5 och fig 6-7. Vi skall emellertid här närmare beskriva utnyttjandet och effekten av dissipativa operatorer.

Den dissipativa operatoren utnyttjas vid implicita beräkningsmetoder som ett mellanled i beräkningsgången. När man sålunda för tidsnivån t_m har beräknat alla Q_j^m , Y_j^m ($j = 1, N$) appliceras den centrerade operatoren enligt

$$Q_j^* = Q_j^m + \gamma (Q_{j+1}^m - 2 \cdot Q_j^m + Q_{j-1}^m) ; \quad (7.31)$$

$$(0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2})$$

$$Y_j^* = Y_j^m + \gamma (Y_{j+1}^m - 2 \cdot Y_j^m + Y_{j-1}^m) ;$$

för alla j inom det område av kanalen där operatoren behöver utnyttjas.¹⁾ De så erhållna nya värdena Q_j^* och Y_j^* användes sedan i differensekvationerna för beräkning av Q_j^{m+1} , Y_j^{m+1} . Genom att öka värdet på den dissipativa faktorn γ kan man i de flesta fall undertrycka icke önskvärd parasitisk vågbildning i erforderlig utsträckning. Vid uppströms och nedströms rand användes i exemplet nedan en operator av formen

1) Områden där icke önskvärd parasitisk vågbildning uppträder.

$$Y_j^* = (1 - \gamma) Y_j^m + \gamma Y_{j+1}^m ; \quad (0 \leq \gamma \leq 1) \quad (7.32)$$

på den variabel som ej är given som randvillkor.

Låt oss betrakta den i fig 7-3 skisserade problemställningen. Flödet i tilloppskanalen till kraftstationens tubintag förutsättes vid tiden $t = 0$ vara $1000 \text{ m}^3/\text{s}$ varefter man på 15 sekunder minskar tappningen genom stationen till $100 \text{ m}^3/\text{s}$. Därefter hålls tappningen kvar på denna nivå. Vattenståndet i reservoaren antages vara konstant $+114.00$ och oberoende av tappningen. Vilket vattenstånd kommer vi då att ha i kanalen 60 resp 120 sekunder efter tappningsändringens början. Kanalen förutsättes vara rektangulär och ha horisontell botten. Vidare försummas friktionskrafterna.

I fig 7-3 redovisas med hjälp av den numeriska modellen baserad på det modifierade Abbot-schemat beräknade frontprofiler för några olika värden på Δt , Δx och dissipativa faktorn γ . Bakom fronten erhålles parasitisk vågbildning medan flödet framför fronten är helt fritt från störningar. Det för utsläckningen av den parasitiska vågbildningen erforderliga γ -värdet växer med värdet på Courants tal Cr .

Medelnivån bakom fronten synes vara i huvudsak oberoende av värdet på γ och Cr . Vattendjupet bakom fronten (Y_2) överensstämmer med det värde som för en plötslig tappningsändring $Q_2 - Q_1$ kan beräknas ur följande samband, vilket förutom ovan angivna förutsättningar bygger på antagandet att vågfrontens form ej ändras se kap 5.5,

$$c_f = V_1 + \sqrt{\frac{g(A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)}{A_1 (1 - A_1/A_2)}} \quad (7.33)$$

$$Q_2 - Q_1 = c_f (A_2 - A_1)$$

där index 1 betecknar de initiella förhållandena och c_f är frontens hastighet. $\bar{y}_1$ och $\bar{y}_2$ är areornas A_1 resp A_2 tyngdpunktsavstånd räknat från vattenytan. Minustecknet hänför sig till det fall att $Q_2 < Q_1$. Vid rektangulär sektion, $\bar{y}_1 = Y_1/2$, $\bar{y}_2 = Y_2/2$, $A = Y \cdot B$, reduceras ekv (7.33) till ekv (6.20). Med insatta aktuella värden ($Y_1 = 14.00 \text{ m}$, $Q_1 = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 100 \text{ m}^3/\text{s}$, $B = 60 \text{ m}$) erhålles $c_f = -11.4 \text{ m/s}$; $Y_2 = 15.33 \text{ m}$.

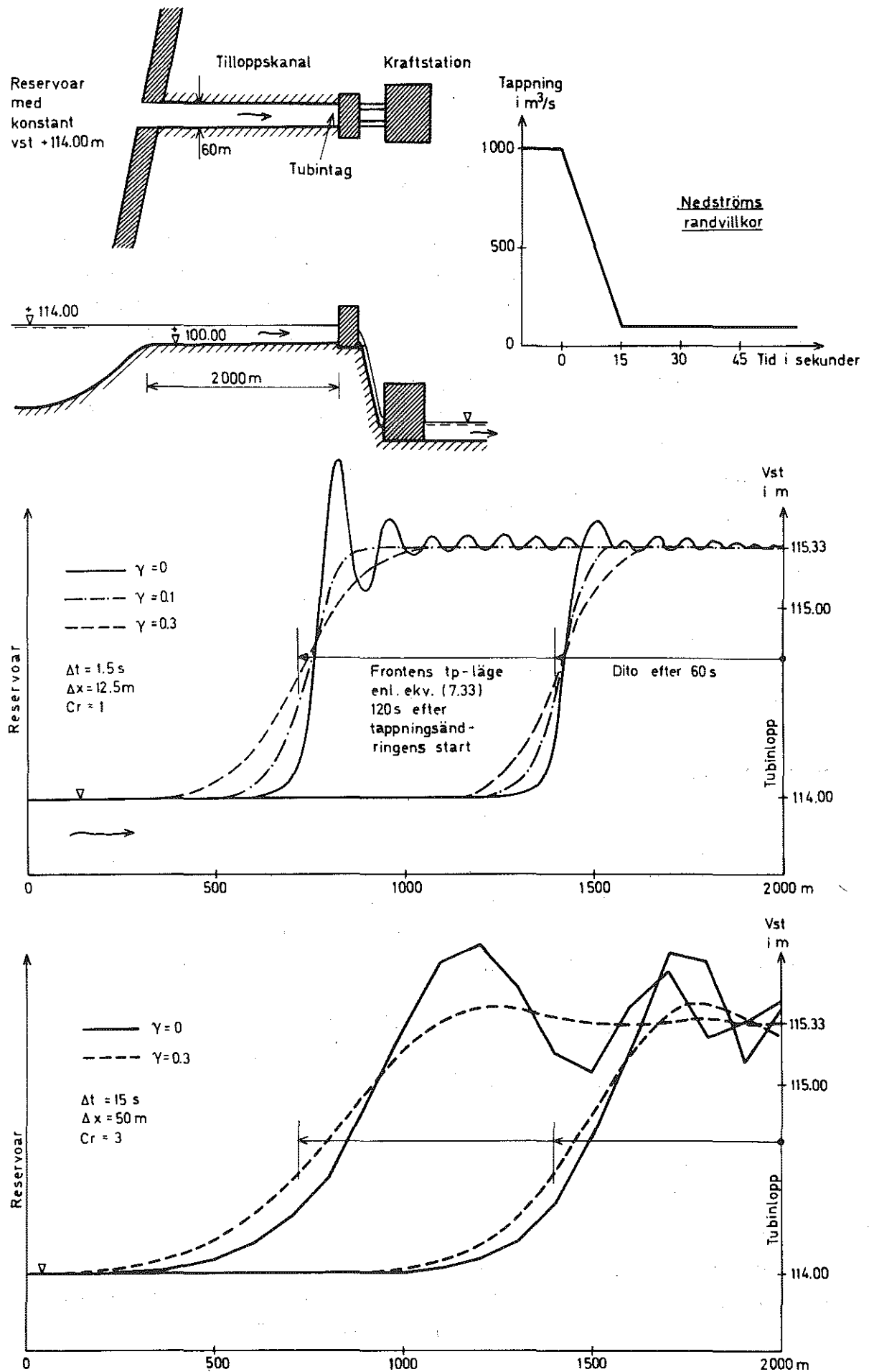


Fig 7-3 Beräkning av vattenståndsvariationer i tilbøpskanal till kraftstation vid tappningsreducering.

Det bör i detta sammanhang påpekas att man vid en snabb vattenföringsändring kan erhålla två typer av fronter, antingen en brytande front eller en vågformad front (undular mobile jump), se fig 7-4.

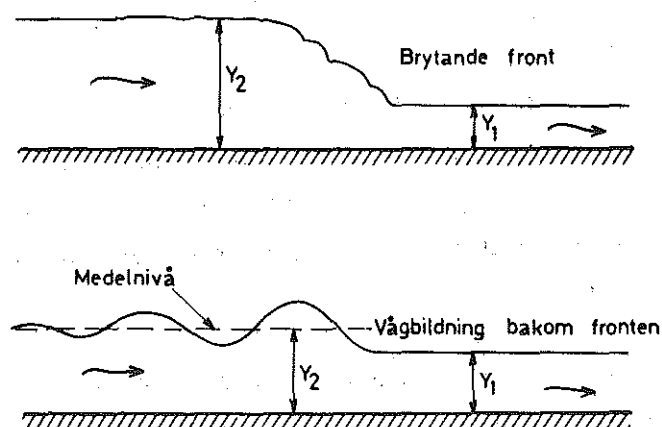


Fig 7-4 Möjliga typer av frontprofiler vid snabb vattenföringsändring.

En brytande front erhålles om frontens energi är så stor att dess dissipation kräver att fronten bryts. I annat fall sker energidissipationen via utbildandet av vågor bakom fronten, s k Favre-vågor. Uppskattningar av dessa vågors utbildande kräver utnyttjande av "högre-ordningens" teori, dvs hänsyn måste tas till strömlinjernas krökning, se t ex Hansen (1966), Abbot och Rhodnius (1972).

Den med utgångspunkt från de endimensionella rörelseekvationerna erhållna vågbildningen får ej ses som en simulering av dessa s k Favre-vågor. Den kan endast ses som en spegling av den energidissipation som i verkligheten skulle skett i vågfronten men som varken differentialekvationerna eller differensekvationerna är konstruerade för att simulera. Vi omnämner därför även i det följande de av differensschemat genererade sekundära vågorna som parasitiska. De endimensionella rörelseekvationerna kan endast utnyttjas för bedömning av medelnivån Y_2 i fig 7-4.

Med hjälp av den dissipativa operatoren kan alltså den eventuella parasitiska vågbildningens tillväxt kontrolleras. Eftersom den utnyttjas som ett mellanled i beräkningarna är det programmerings-tekniskt enkelt att ändra operators utseende och att begränsa dess applicering i tid och rum.

Parasitisk vågbildning kan vid utnyttjande av nod-segment schemat dämpas med hjälp av den centrerade dissipativa operatoren eller med hjälp av viktningskoefficienten θ . Tyvärr har dock ej operatoren kunnat ges någon för ränder med varierande randvillkor lämplig formulering.

Effekten av ett ökat värde på viktningskoefficienten θ vid beräkning av en snabb flödesökning i en rak ledning med cirkulär sektion redovisas i fig 7-5.

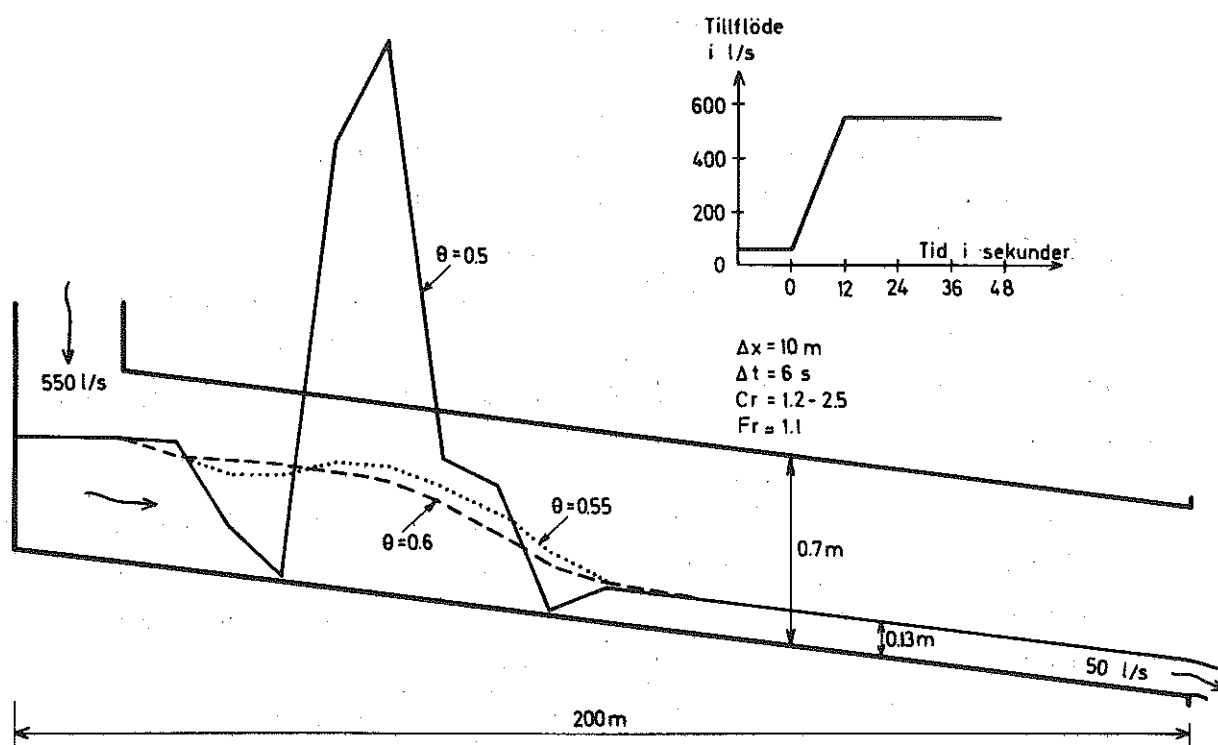
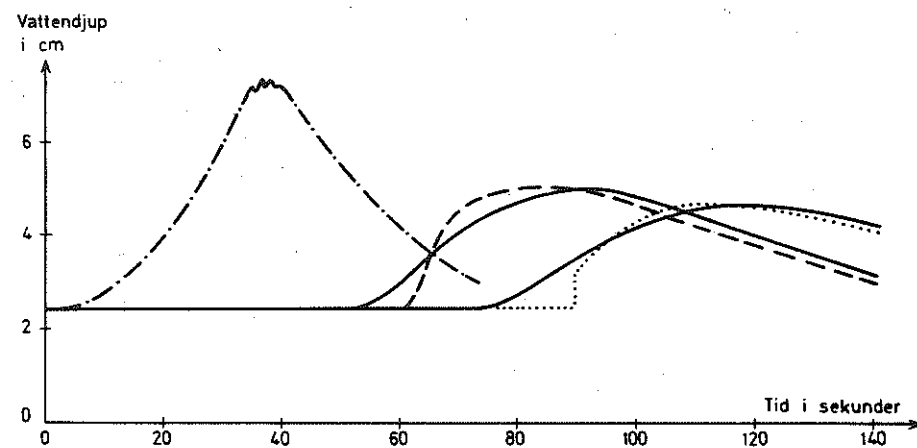
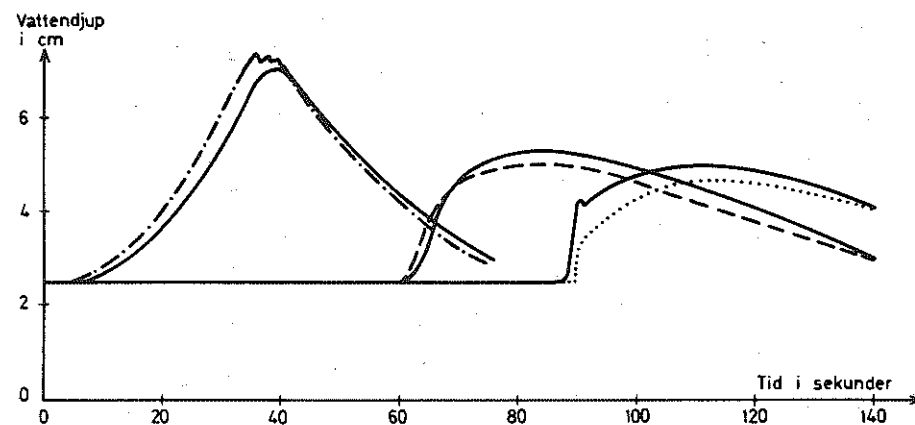
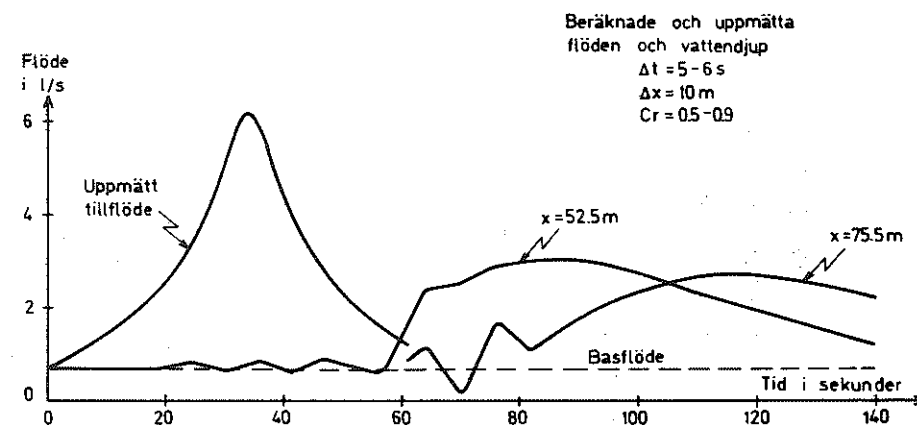
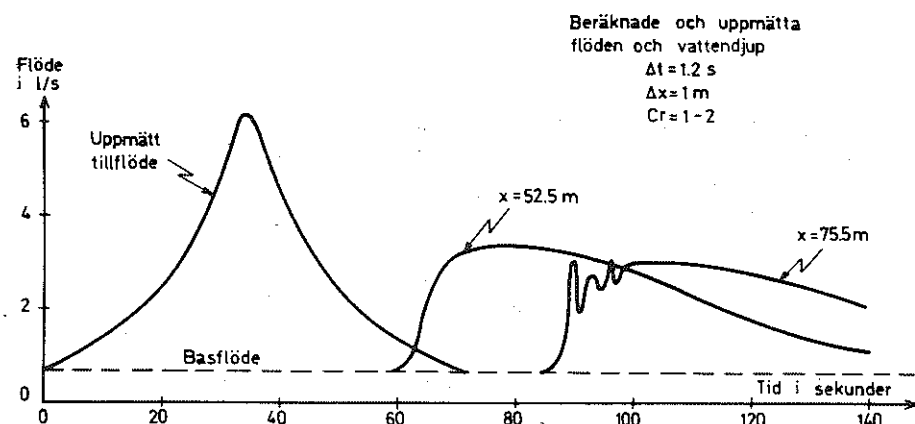


Fig 7-5 Beräknade vattenstånd i ledning med cirkulär sektion vid snabb flödesökning. Redovisade vattenstånd avser förhållandena 36 sekunder efter flödesökningens start.

För $\theta = 0.5$ leder beräkningarna redan efter ett par tidsteg till orimliga värden på flöden och vattendjup. Den parasitiska vågbildningen omöjliggör förr eller senare satisfiering av randvillkoren varvid beräkningen spårar ur.



Beräknade värden: hel dragen linje
 Uppmätta värden: --- $x = 5$ m
 --- $x = 52.5$ m
 $x = 75.5$ m

Fig 7-6

Jämförelse mellan beräknade och uppmätta flödesförlopp i ledning med diametern 0.105 m, lutningen 5 ‰ och kapaciteten $Q_{full} = 6.3$ l/s. Beräkningarna är genomförda med nod-segment schemat. $\theta = 0.5$.

I fig 7-6 redovisas en jämförelse mellan ett med nod-segment schemat beräknat flödesförlopp ($\theta = 0,5$) och ett experimentellt uppmätt förlopp (tidigare redovisat i fig 5-7). För att en god simulering av den brytande vågfrontens hastighet skall uppnås krävs små värden på Δt och Δx . Stora beräkningssteg ger en utflackning av fronten, dock utan att vågens höjd eller form allvarligt förvanskas. De parasitiska flödesvariationerna har mycket liten effekt på vattenståndsutvecklingen.

7.7 Beräkning av vattensprång.

Det framtagna nod-segment schemat är så uppbyggt att det enkelt kan anpassas till de randvillkor som gäller i fall av vattensprång. Enligt fig 4-9 krävs i detta fall tre randvillkor: vid uppströms rand givet flöde och vattenstånd, vid nedströms rand givet flöde eller givet vattenstånd, varför den kompletterande kontinuitetsekvationen vid randen kan slopas.

I fig 7-7 redovisas en beräkning avseende vattensprång vid icke stationär strömning i ledning med cirkulär sektion. Den erhållna lösningen karakteriseras av en "sågtandad profil" såväl vad avser vattendjup som flöde, varvid ett lokalt vattendjupsmaximum motsvaras av ett lokalt flödesmaximum. Denna sågtandade lösning har ej kunnat dämpas ut med hjälp av en dissipativ operator eller med hjälp av viktningskoefficienten θ , vilket ju visat sig vara möjligt vid beräkningar av snabbt varierande flödesförlopp. Ett ökat värde på θ har däremot en dämpande effekt på den "sekundära" parasitiska vågbildning som den erhållna lösningen eventuellt kan ge upphov till.

Svåra stabilitetsproblem kan erhållas då vattensprånget befinner sig nära uppströms eller nedströms rand och om den sågtandade profilen blir så starkt uttalad att $Fr < 1$ i "vågdalarna" och $Fr > 1$ i "vågtopparna". Vid valet av randvillkor kan då flödes-

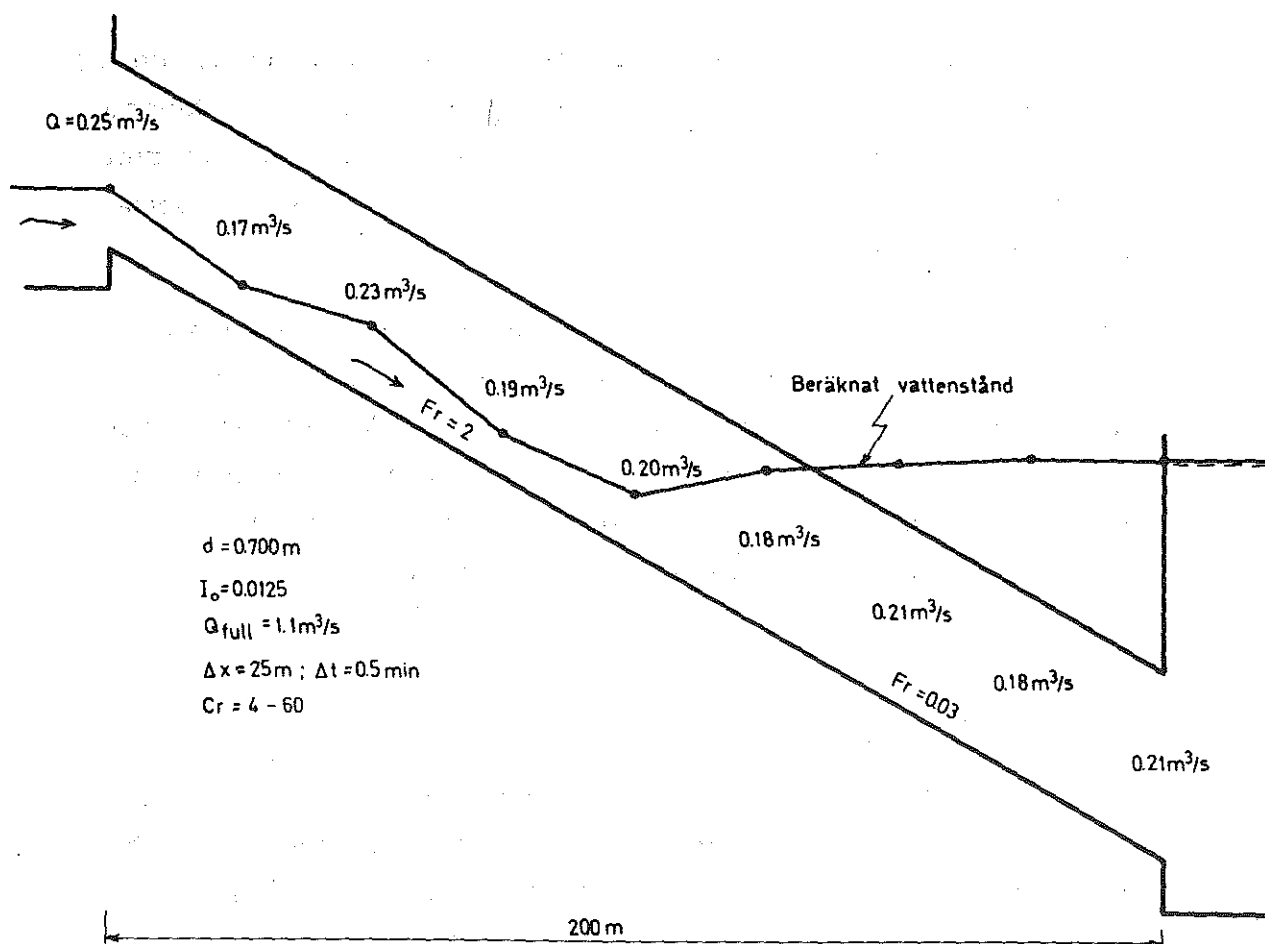


Fig 7-7 Vattenstånds- och flödesprofiler vid vattensprång i ledning med cirkulär sektion. Nod-segment schemat. $\theta = 0.5$.

situationen feltolkas så att ett felaktigt randvillkor införes, vilket snabbt leder till att beräkningarna spårar ur.

Skälet till att en "sågtandad" lösning erhålles med nod-segment schemat är kontinuitetsekvationens differensform, vilken vid stationärt flöde endast kräver att $Q_{j+1} = Q_{j-1}$. En sågtandad flödesprofil kan således även vid stationärt tillstånd satisfiera kontinuitetsekvationen.

En bättre lösning kan genereras med ett "omvänt" nod-segment schema där kontinuitetsekvationen formuleras enligt boxschemat

och rörelsemängdekvationen enligt det centrerade schemat, se fig 6-4. Detta schema ger ett pulserande förlopp vilket kan dämpas. Tyvärr har det emellertid hitintills ej visat sig möjligt att formulera randvillkoren så att stabila beräkningar erhålles med detta omvända schema.

Det måste därför konstateras att det utnyttjade nod-segment schemat visserligen i princip kan behandla vattensprång men att icke kontrollerbar instabilitet kan erhållas då vattensprånget befinner sig nära uppströms eller nedströms rand. Stabilitetsproblemen minskar dock med vattensprångets styrka dvs med värdet på Froudes tal uppströms vattensprånget.

7.8 Sammanfattning

I detta kapitel har redogjorts för det modifierade Abbot-schema för implicit numerisk lösning av rörelseekvationerna och tillhörande dubbelsvepsalgoritm som konstruerats för beräkning av subkritiska flödesförlopp i reglerade vattendrag.

För beräkning av flödesförhållandena i delvis eller helt fyllda ledningar utnyttjas en implicit metod baserad på det s k nod-segment schemat. Detta schemas uppbyggnad har översiktligt berörts.

Snabba flödesvariationer medför sekundär parasitisk vågbildning vilken, om den ej dämpas, kan leda till instabila beräkningar. Erforderlig dämpning kan uppnås med hjälp av en dissipativ operator eller med hjälp av en s k viktningskoefficient.

Vid övergång från superkritisk till subkritisk strömning (vattensprång) kan nod-segment schemat ge icke kontrollerbara instabilitetsfenomen.

8. BERÄKNING AV ICKE STATIONÄRA FLÖDEFÖRLOPP I REGLERADE VATTENDRAG

8.1 Inledning

En flödesvågs fortplantning i ett naturligt vattendrag med varierande geometri är givetvis mycket mera komplicerad än i en rektangulär kanal. Vattendragets tvärsektion har t ex ofta den form som skisserats i fig 8-1a, varför den dynamiska våghastigheten $c = V + \sqrt{gY}$ avtar mot stränderna. En störnings fortplantningshastighet är således störst i sektionens mitt vilket vid stigande vattenföring medför ett högre centrumvattenstånd och en lateral utströmning mot de grundare områdena (fig 8-1b). Vid avtagande flöde erhålles det motsatta förhållandet (fig 8-1c).

De ovan skisserade flödesbilderna strider mot de antaganden på vilka vi grundat härledningen av rörelseekvationerna (se kap 2.1). Andra faktorer, som vid såväl stationär som icke stationär strömning medför avvikelser från förutsättningen att flödet är endimensionellt, är centrifugaleffekter då vattendraget kröker och virvelavlösningar vid plötsliga variationer i tvärsektionens area. Efter- som den endimensionella matematiska modellen försummar inver-



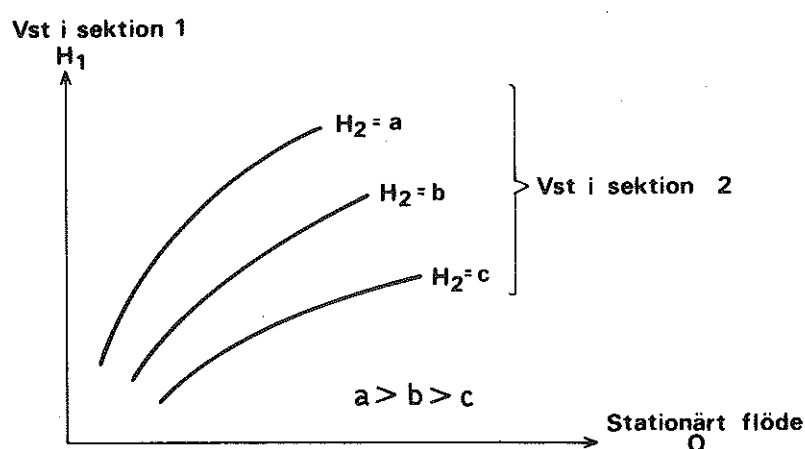
a) olika våghastigheter

b) lateral utströmning från huvudfåran
vid stigande vattenföring

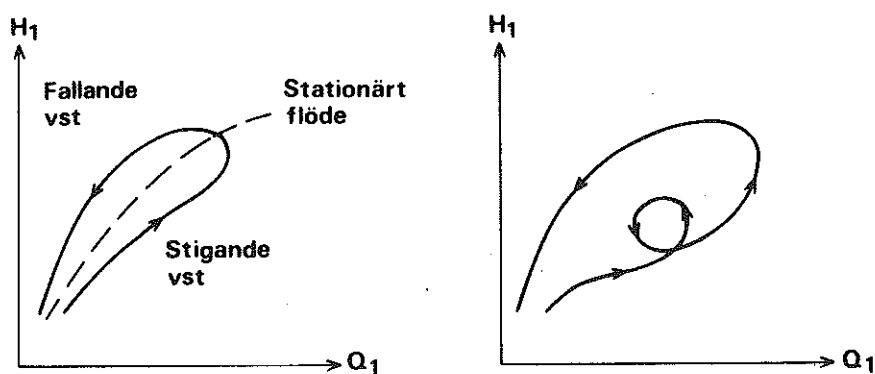
c) lateral inströmning mot huvudfåran
vid sjunkande vattenföring

Fig 8-1 Lateral (tvådimensionella) flödesförhållanden
vid icke stationär strömning.

kan av dessa faktorer och på grund av att vi ej kan förutsäga vilka felaktigheter dessa medför, bör modellen testas mot observerade flödesförlopp. Vi måste undersöka om det med hjälp av lämpligt valda råhetskoefficienter eller genom införandet av extra energiförlusttermer är möjligt att simulera de verkliga flödes- och vattenståndsförhållandena.



- a) Stationärt flöde. Avbördningskurvor svarande mot olika dämningförhållanden. Sektion 2 är nedströmssektion.



- b) Samband vattenstånd-flöde av loop-typ vid icke stationärt flöde.

Fig 8-2 Samband vattenstånd-flöde vid stationärt och icke stationärt flöde

Vid stationär strömning utan dämningseffekter är det möjligt att för varje sektion i vattendraget uppställa ett entydigt samband mellan flöde och vattendjup. Om dämningseffekter finns måste vi konstruera en avbördningskurva för varje dämningssnivå, vilket kan ske på det sätt som skisserats i fig 8-2a. Vi får alltså ett samband av typen $Q = f(H_1, H_2)$ där H_1 och H_2 är vattenstånden i två skilda sektioner.

Om flödet varierar kan vi ej konstruera någon unik avbördningskurva. För det fall att flödesvariationerna är långsamma kan vi eventuellt anta att avbördningskurvan fortfarande är av typen $Q = f(H_1, H_2)$, se t ex Rundgren (1969). Vid snabbare variationer måste vi dock ta hänsyn till att flödet Q_1 i sektion 1 är skilt från flödet Q_2 i sektion 2, vilket ger oss samband av formen $Q_1 = f(H_1, H_2, Q_2)$ vilka blir praktiskt omöjliga att konstruera emedan de blir beroende av flödets variation i tiden. Vid icke stationärt flöde blir sambandet $Q_1 = f(H_1)$ av loop-typ, ofta med komplex form, se fig 8-2.

Under årens lopp har ett mycket stort antal beräkningsmetoder baserade på förenklade rörelseekvationer utvecklats (t ex genom försummande av en eller flera accelerationstermer, linearisering eller försummande av friktionstermen), se Miller och Cunge (1975). Den mest kända är den på kontinuitetsekvationen baserade Muskingum-metoden, se även Chow (1959) och Cunge (1969).

Allmänt sett ger användandet av de fullständiga rörelseekvationerna säkrare resultat än de förenklade metoderna. Framför allt är matematiska modeller baserade på de fullständiga ekvationerna mera generella och lättare att anpassa till olika typer av problemställningar. Förenklade metoder kan dock i många fall fortfarande vara att föredraga vid t ex långsamt varierande flöden på grund av lägre beräkningskostnader. Tendensen synes dock vara den att utvecklingen går mot ett allt större utnyttjande av de fullständiga ekvationerna allt eftersom dokumentationen rörande lösningsmetoder och beräkningsresultat växer. En stor andel i denna utveckling har den ökade tillgången på snabba datorer med stor minneskapacitet.

8.2 Målsättning med den utvecklade matematiska modellen.

Målsättningen med den matematiska modellen, applicerad på reglerade vattendrag vid subkritisk strömning, är att för givna tappningsförhållanden vid uppströms och nedströms kraftstation kunna beräkna vattenstånds- och flödesvariationer längs vattendraget mellan de två stationerna.

Enligt denna målsättning är alltså randvillkoren $Q_{\text{upp}} = Q_{\text{upp}}(t)$; $Q_{\text{ned}} = Q_{\text{ned}}(t)$. Även andra randvillkor kan dock hanteras t ex $Q_{\text{upp}} = Q_{\text{upp}}(t)$ och $H_{\text{ned}} = H_{\text{ned}}(t)$ för att vid given tappning i uppströms kraftstation kunna beräkna erforderlig tappning vid nedströms station för att där hålla konstant vattenstånd. Byte av nedströms randvillkor kan ske under beräkningens gång. Vidare tillåtes lateralt tillflöde mellan stationerna. Modellen kan i sin nuvarande utformning ej behandla älvsträckor med "shuntledning" (loop), se fig 8-3a. Dubbelsveps-algoritmen kan dock anpassas även till detta beräkningsfall. Svårigheter har emellertid tillstött vad avser den numeriska precisionen varför den framtagna algoritmen ännu ej är praktiskt användbar (kräver beräkning med s k dubbel precision innebärande hög beräkningskostnad och stort minnesbehov).

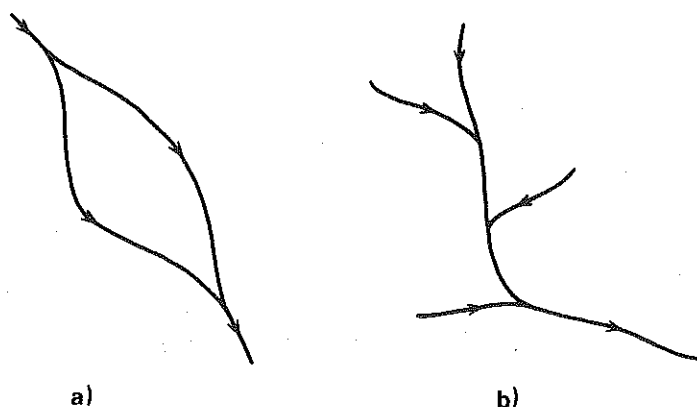


Fig 8-3 a) Älvsträckning med "loop"
b) Konvergerande flodsystem

En anpassning av modellen för beräkning av ett trädformat (konvergerande) älv- eller kanalsystem, fig 8-3b, erbjuder inga principiella svårigheter. Den härför erforderliga tekniken utnyttjas vid beräkning av flödesförlopp i ledningssystem, se kap 9.

8.3 Geometrisk indata

Den finita differenstechniken kräver att vattendraget indelas i segment genom val av beräkningspunkter. Det här utnyttjade differensschemat förutsätter en indelning i H-punkter och Q-punkter där H-punkterna bör väljas så att sektionen varierar möjligast likformigt mellan dessa punkter, se fig 8-4. Q-punkterna placeras därefter automatiskt mitt emellan H-punkterna.

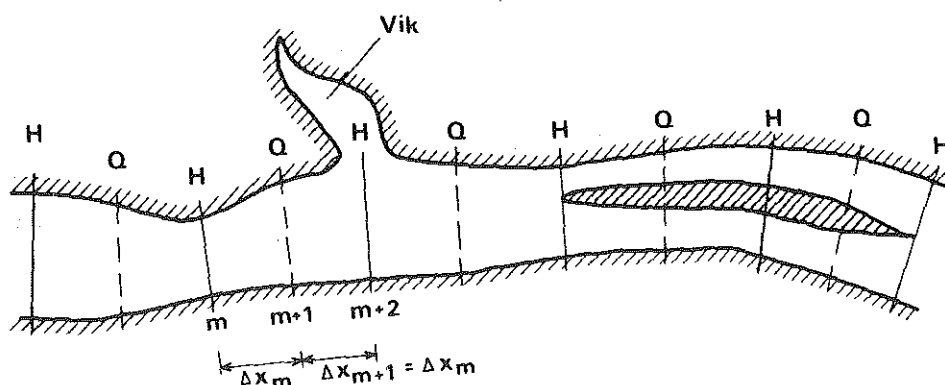


Fig 8-4 Val av beräkningspunkter. Sektionsdata ges endast i H-punkterna.

I H-punkterna tabelleras för varje brytpunkt sektionsbredderna b_1 och b_2 enligt fig 8-5, så att arean A och hydrauliska radien R kan beräknas för varje vattennivå under det aktuella flödesförloppet. Ur beräkningskostnadssynpunkt kunde det möjligen vara gynnsammare att även tabellera A och R och ta fram mellanliggande värden genom interpolering.

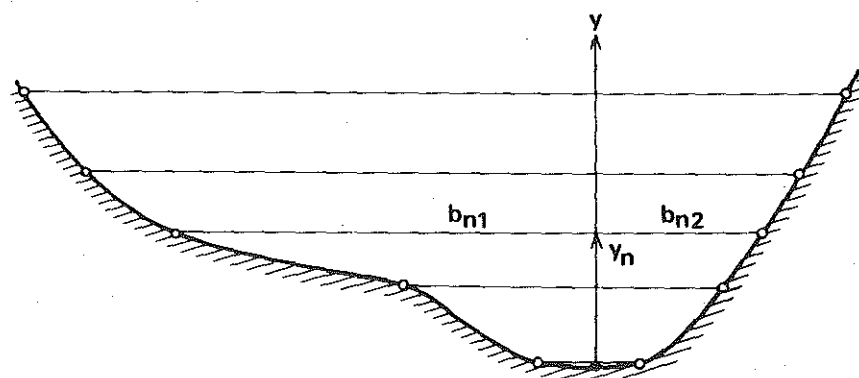


Fig 8-5 Geometrisk representation av tvärsektionen. Brytpunkternas nivåer relateras till aktuellt höjdsystem.

Vikar, avsnörda sjöar m m betraktas som enbart magasinsvolymer och hänföres till närmast liggande H-punkt. Om vattendraget delas upp i en huvudfåra och en sidofåra av en mindre bank eller ö, behandlas dessa som en sammansatt sektion, se ekv (8.6).

8.4 Beräkning av friktionstermen I_f

Vattendragets hydrauliska kapacitet beskrivs av friktionsförlusten I_f , vilken allmänt formulerad kan skrivas

$$I_f = Q |Q| / K^2 \quad (8.1)$$

där K är den aktuella sektionens transportfaktor (eng. conveyance factor). Om vi utnyttjar Mannings formel

$$Q = M R^{2/3} |I_f|^{1/2} \cdot I_f / |I_f| \quad (8.2)$$

där M är Mannings tal (eller Stricklers koefficient) erhålles transportfaktorn till

$$K = M R^{2/3} ; \quad (8.3)$$

Under förutsättning av en bred rektangulär kanal med likformigt fördelad skärspänning längs botten kan Mannings tal vid turbulent strömning visas vara en funktion av bottenens ekvivalenta sandråhet k enligt, se t ex Engelund (1964),

$$M = 25.4 / k^{1/6} ; \quad \left[m^{1/3} / s \right] \quad (8.4)$$

om

$$5 < R/k < 340.$$

I ett naturligt vattendrag är förutsättningen om likformigt fördelad skärspänning aldrig uppfylld varför Mannings tal, definierat av ekv (8.2), ej blir en entydig funktion av bottenens råhet. Genom att förutsätta att hastighetsfördelningen i varje vertikal följer en logaritmisk lag har emellertid Engelund (1964) visat att man genom att byta den hydrauliska radien R mot en motståndsradie R_*

$$\sqrt{R_*} = \frac{1}{A} \int_0^B y^{3/2} dz ; \quad (8.5)$$

kan återföra Mannings tal till att vara en funktion av enbart bottenens råhet. I ekv (8.5) är y det lokala vattendjupet i tvärsektionen på avståndet z från ena stranden.

Man kan diskutera om det är motiverat att för ett naturligt vattendrag komplicera beräkningarna genom att införa R_* ¹⁾. Förutsättningarna för att vi skall kunna bestämma Mannings tal med utgångspunkt från en definierad sandråhet k är mycket små. De totala förlusterna längs ett vattendrag utgöres dels av så rena friktionsförluster (Mannings förluster), dels av tilläggsförluster på grund av variationer i sektionsarean längs vattendraget, krökar m m. Det är givetvis önskvärt att man om möjligt separerar dessa olika typer av förluster. Den aktuella modellen medger emellertid ej ett sådant förfarande. Modellens uppbyggnad förutsätter alltså i sin nuvarande utformning att man, med utgångspunkt från observerade flödesförhållanden, kan bestämma ett värde på Mannings tal, som tar hänsyn till dels normala friktionsförluster, dels tilläggsförluster av vad slag de vara månde. En sådan bestämning bör ju vara möjlig för ett reglerat vattendrag, där vattenståndet oftast uppvisar en relativt blygsam variation och således både friktionsförluster och tilläggsförluster i huvudsak är proportionella mot kvadraten på strömningshastigheten.

I de fall då vattendraget delas upp i en huvudfåra och sidofåra åtskilda av en mindre bank eller ö, behandlas dessa som en sammansatt tvärsektion, dvs transportfaktorn erhålles som summa av huvudfårans och sidofårans K -värden,

$$K_{\text{total}} = K_{\text{huvudfåra}} + K_{\text{sidofåra}} \quad (8.6)$$

Som framgått av diskussionen finns många möjligheter till utveckling och eventuellt också förenkling av modellen vad avser beräkningen av transportfaktorn K . Den största nackdelen med den nuvarande utformningen är att man har svårt att förutsäga effekten av t ex en vidgning av en trång sektion. För att en tillförlitlig prognos skall kunna göras krävs en separering av friktions- och tilläggsförluster.

1) Ökad beräkningskostnad.

8.5 Beräkning av initiella vattenstånd

För att beräkningen skall kunna startas krävs som begynnelsevillkor att vattenstånd och vattenföring är givna i varje beräkningssektion. I modellen beräknas vattenstånden utifrån förutsättningen att flödet är stationärt och att vattenståndet vid nedströms rand är givet (modellen avser ju enbart subkritiska förhållanden). Beräkningen sker stegvis i uppströms riktning sektion för sektion på gängse sätt genom iterering baserad på rörelseekvationerna för stationär, gradvis varierande strömning ($\beta = 1$)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q; \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H}{\partial x} = -gAI_f;$$

Som kommer att framgå av kap 8.6 dör effekten av initiella data snabbt ut om som uppströms randvillkor utnyttjas $Q=Q_{\text{upp}}(t)$ och som nedströms randvillkor $H = H_{\text{ned}}(t)$. Det är således ej nödvändigt att genom mätningar skaffa sig initiella data längs älven för ett tidsberoende förlopp. De beräknade värdena kommer efter viss beräkningstid att anpassa sig till det verkliga förloppet oberoende av vilka initiella data som givits.

8.6 Kalibrering och test av den matematiska modellen

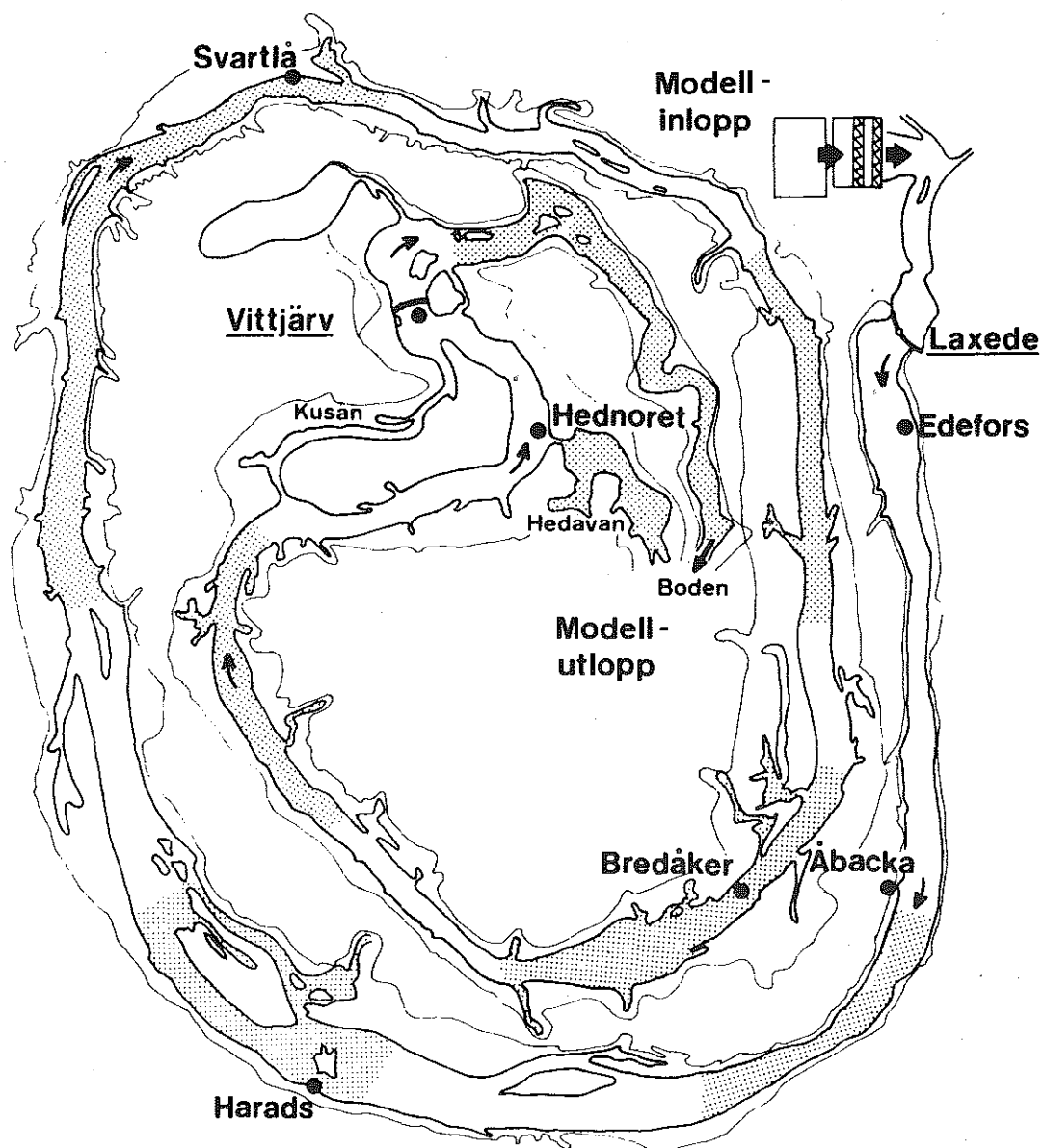
Vid Statens Vattenfallsverks vattenbyggnadslaboratorium i Älvkarleby har byggts en fysikalisk modell av den 61 km långa älvräckan i Lule älven mellan kraftstationerna Laxede och Vittjärv, fig 8-6. Av utrymmesskäl har modellen utformats som en spiral. De prickade avsnitten i figuren utgörs av älvräckor vilka i modellen har en annan krökning än i prototypen. Som framgår av de angivna modellskalorna är modellen förställd. Med hjälp av speciella råhetselement har modellen kalibrerats så att i prototypen uppmätta vattenstånd kunnat reproduceras vid stationära vattenföringar, se tabell 8-1.

Mät punkt	Avst. från Laxede i km	Vattenstånd i m ö h vid angiven konstant vattenföring										
		450 m ³ /s			595 m ³ /s			680 m ³ /s			1000 m ³ /s	
		A	B	C	A	B	C	A	B	C	B	C
Edefors	1.2	19.97	19.99	19.97	20.25	20.22	20.25	20.39	20.42	20.41	20.98	20.98
Åbacka	7.0	19.94	19.93	19.94	20.20	20.18	20.20	20.34	20.36	20.35	20.90	20.90
Harads	15.6	19.82	19.82	19.82	20.03	20.02	20.05	20.15	20.20	20.18	20.70	20.70
Svartlå	30.3	19.65	19.67	19.65	19.79	19.80	19.81	19.88	19.91	19.91	20.33	20.33
Bredåker	45.0	19.61	19.59	19.61	19.73	19.70	19.73	19.80	19.80	19.81	20.14	20.14
Hednoret	58.6	19.52	19.52	19.52	19.60	19.60	19.60	19.66	19.66	19.66	19.93	19.93
Vittjärvi	61.2	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.45	19.45

Tabell 8-1 Sträckan Laxede - Vittjärvi i Lule älv. Vattenstånd vid konstant vattenföring i prototyp (A), laboratiemodell (B) och matematisk modell (C). Några prototypsdata för vattenföringen 1000 m³/s finns ej. Den matematiska modellen har kalibrerats mot dels prototypsförhållanden vid 450 m³/s, dels i modellen uppmätta vattenstånd vid 1000 m³/s.

I den matematiska modellen utnyttjas 194 stycken H-punkter ($\Delta x \approx 150$ m) för vilka erforderliga sektionsparametrar tabellerats utifrån de geometriska data som använts vid konstruktionen av laboratiemodellen. Som framgår av fig 8-6 kompliceras älvens geoemtri av öar, vikar och avsnörda sjöar, vilka i modellen beaktats på det sätt som skisserats i kap 8.2. Även Kusån, strax uppströms Vittjärvi, har sålunda behandlats som en sido-sektion till huvudfåran. För Kusån anges ett flöde av ca 30 m³/s vid en tappning av 450 m³/s, varför dess effekt på flödesförloppet torde vara relativt ringa. Någon möjlighet att beakta in- och utströmningsförhållandena till sjön Hedavan finns tyvärr ej. Även denna sjö har approximerats som ett till älven direkt knutet magasin med samma vattenstånd som älven. Ej heller i laboratiemodellen har en inkalibrering kunnat ske av Kusån eller ut- och inströmningen till Hedavan.

Kalibreringen av den matematiska modellen tillgår så att man som första approximation antar att vattenståndet varierar linjärt mellan kalibreringspunkterna varvid ett Mannings tal kan lösas för varje sådan delsträcka. Denna procedur genomföres för varje kalibreringsvattenföring. De funna värdena på Mannings tal kopplas till



Skalförhållanden

Längd 1:400, Djup 1:80, Hastighet 1:9, Tid 1:44,7

Volym 1:286 000

Beteckningar

▨ Modelldel med artificiell krökning

● Mät punkt

Fig 8-6 Statens Vattenfallsverks vattenbyggnadslaboratorium. Fysikalisk modell av den 61 km långa älvsträckan mellan kraftstationerna Laxede och Vittjärv i Lule älv.

vattenytans medelnivå för resp delsträcka och vattenföring så att ett stegvis linjärt samband erhålles mellan Mannings tal och vattenståndet. De uppställda sambanden testas därefter med hjälp av en stegvis beräkning av vattenstånden från nedre till övre randen. I allmänhet erhålles då en liten differens mellan de beräknade och uppmätta kalibreringspunkterna på grund av att det tidigare gjorda antagandet om linjär variation av vattenståndet ej var uppfyllt. Viss mindre justering av de antagna värdena på Mannings tal kan därför bli erforderlig.

I det aktuella fallet har den matematiska modellen inkalibrerats mot dels de i prototypen uppmätta vattenstånden för vattenföringen $450 \text{ m}^3/\text{s}$, dels de i laboratiemodellen för $1000 \text{ m}^3/\text{s}$. Härvid erhöles för de sex delsträckorna de värden på Mannings tal som redovisas i tabell 8-2.

Delsträcka	$Q = 450 \text{ m}^3/\text{s}$		$Q = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$	
	Vattenytans medelnivå m ö h	M- värde	Vattenytans medelnivå m ö h	M- värde
Laxede-Åbacka	19.96	46	20.94	49
Åbacka-Harads	19.88	35	20.80	39
Harads-Svartlå	19.74	29	20.51	31
Svartlå-Bredåker	19.63	27	20.23	27
Bredåker-Hednoret	19.55	21	20.03	27
Hednoret-Vittjärv	19.46	14	19.69	14

Tabell 8-2 Vid kalibrering mot i prototyp ($450 \text{ m}^3/\text{s}$) och fysisk modell ($1000 \text{ m}^3/\text{s}$) uppmätta vattenstånd erhållna värden på Mannings tal M.

(Med hänsyn till de stora variationerna i värdena bör det kanske ännu en gång påpekas att M-värdet är en funktion av dels bottenens råhet, dels tilläggsförluster på grund av olikformig geometri). Utifrån de så erhållna värdena och under antagande av en rätlinjig variation i M-värdet med vattendjupet beräknades därefter vatten-

stånden vid flödena 595 resp 680 m³/s, tabell 8-1. Överensstämmelsen med i prototypen och laboratiemodellen uppmätta värden visade sig då vara så god att någon direkt kalibrering ej ansågs nödvändig för dessa flöden. Det kan tilläggas att fortvarighetstillstånd troligen ej erhållits i prototypen vid vattenföringen 680 m³/s. De angivna vattenstånden bedömes motsvara ett något lägre flöde.

Det är givetvis önskvärt att den mot stationära (eller kvasistationära) förhållanden m a p Mannings tal inkalibrerade modellen testas mot ett uppmätt icke stationärt förlopp i och för kontroll av att modellens dynamiska egenskaper överensstämmer med prototypens. Resultatet av en sådan test redovisas i fig 8-7. Tappningen i Laxede följde då den i figuren angivna kurvan medan nedströms randvillkor utgjordes av konstant vattenstånd (+ 19.40 m) i Vittjärv. Överensstämmelsen mellan de i prototypen uppmätta och de beräknade vattenstånden är som framgår mycket god. Den största avvikelser har erhållits i punkten Svartlå, vilket är förklarligt med hänsyn till att Svartlå är den enda kalibreringspunkten på det 30 km långa avsnittet Harads-Bredåker. Kalibreringen blir givetvis bättre ju fler kalibreringspunkter det finns att tillgå. Dessa bör dessutom vara så utplacerade att avsnitt med stora friktionsförluster kan separeras från sådana med små förluster, varigenom en mera nyanserad bild erhålles av friktionsförhållandena.

De i laboratiemodellen erhållna vattenstånden uppvisar något större avvikelse än de beräknade. Överensstämmelsen måste dock även i detta fall betecknas som mycket god med hänsyn till de rent mättekniska svårigheter som är förknippade med arbetet i en sådan liten geometrisk skala och tidsskala. Med höjdskalen 1:80 motsvarar ju 10 cm vattenståndsdifferens i prototypen endast 1.25 mm i modellen. Om hänsyn tas till inverkan av den menisk som måste erhållas kring en i vattnet stående nivågivare (för låg nivå vid stigande vattenstånd, för hög nivå vid fallande vattenstånd) blir överensstämmelsen i huvudsak som för den matematiska modellen.

Den redovisade beräkningen har genomförts med varierande tidssteg, 2 min under 20 min efter större tappningsändring, 10 till 20 min under resten av förloppet, innebärande Courant-tal (medelvärde för delsträckorna) av storleksordningen $6 < Cr < 50$.

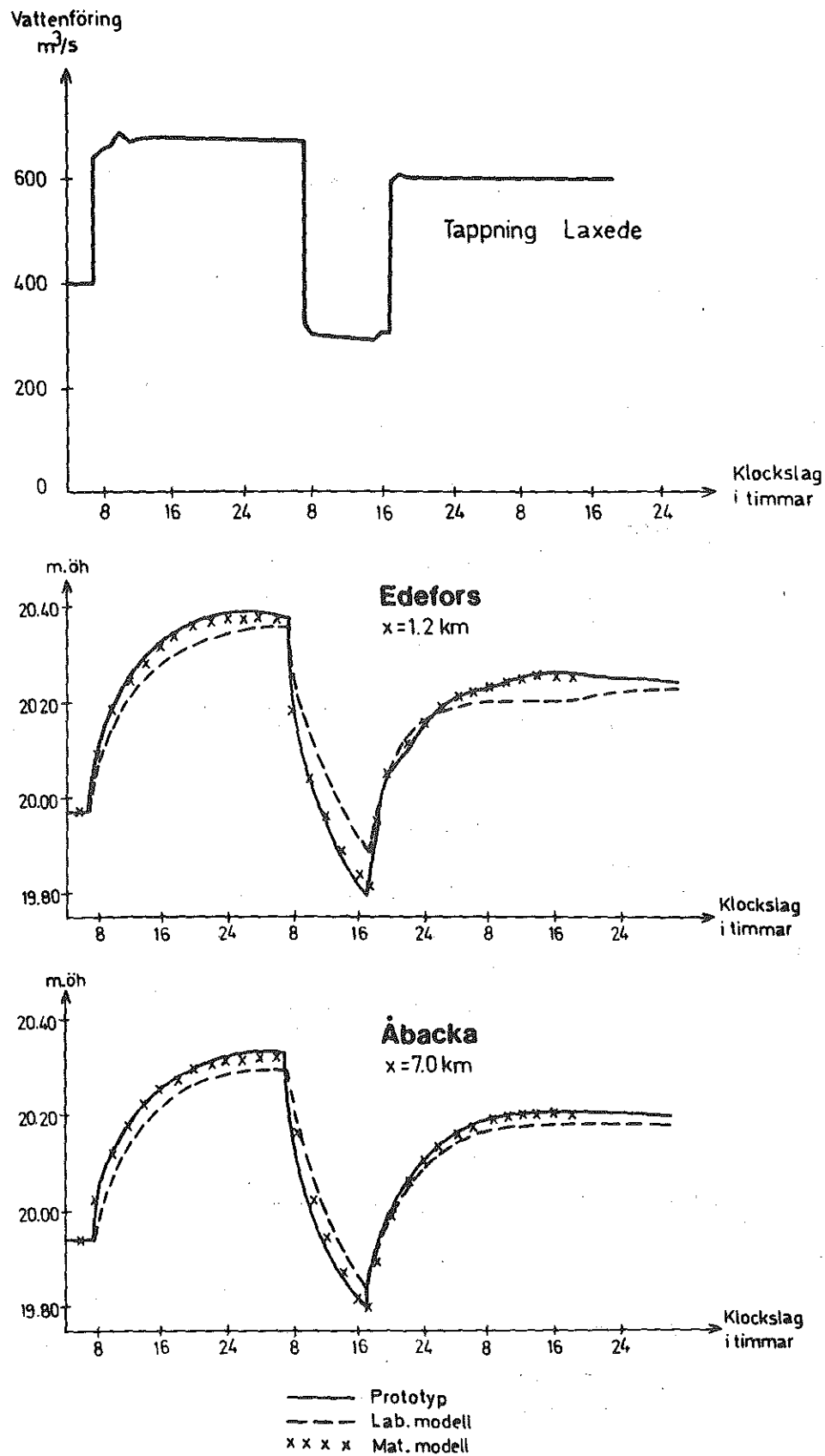


Fig 8-7 Älvsträckan Laxede - Vittjärv (61, 2 km) i Luleälv:
Beräknade och uppmätta vattenstånd för angiven tappning
i Laxede och konstant vattenstånd +19.40 m vid Vittjärv.

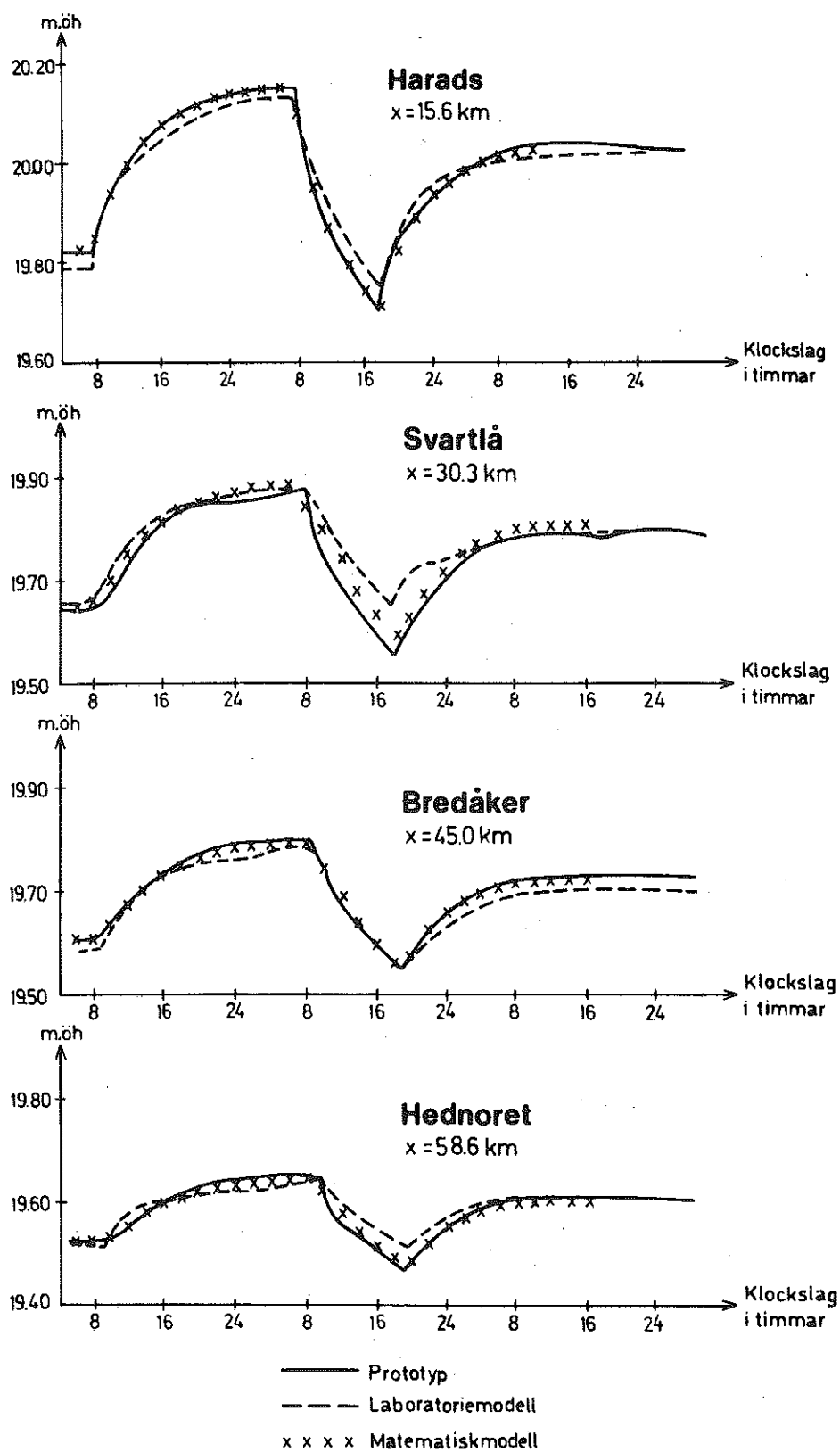


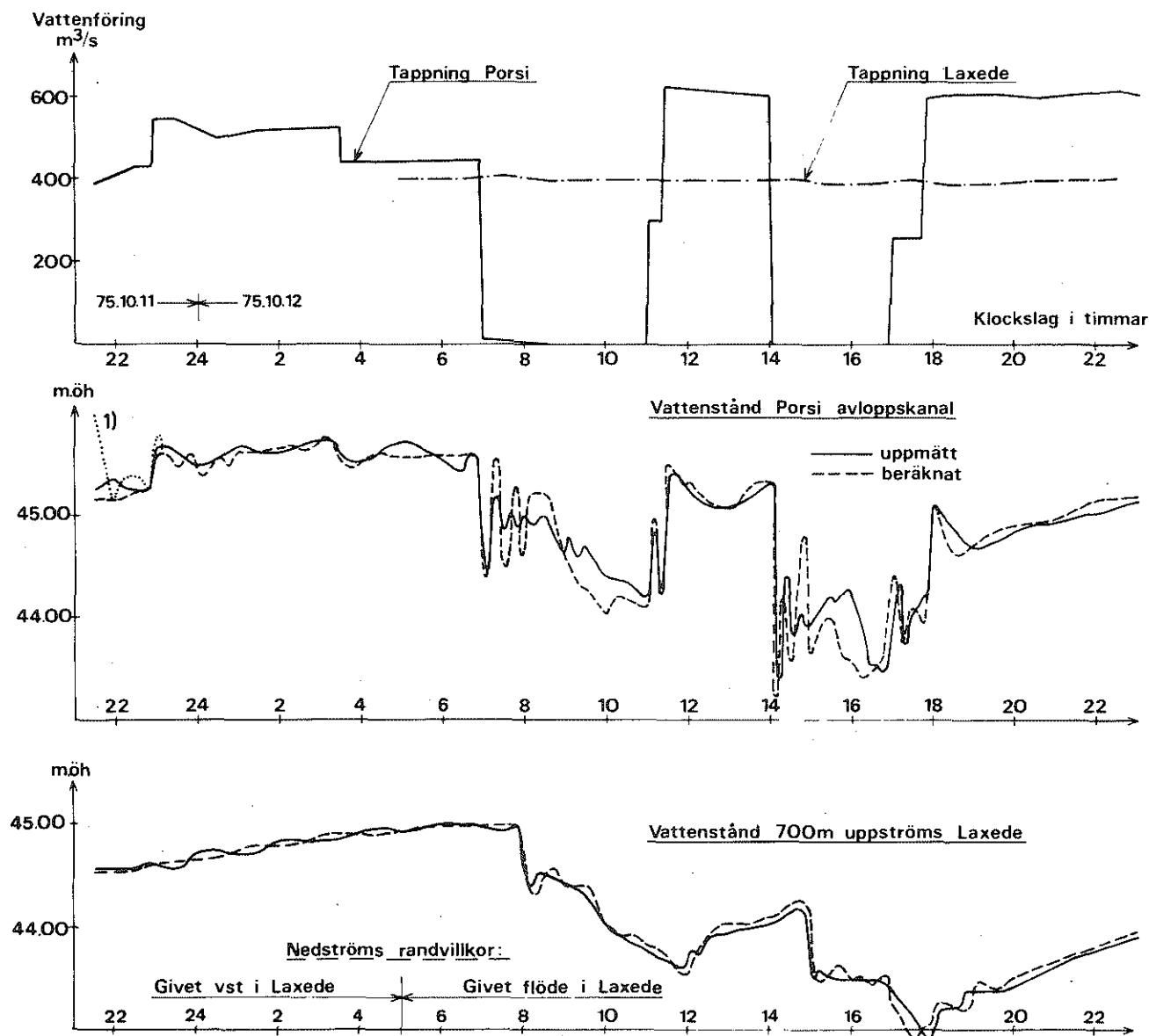
Fig 8-7 Älvsträckan Laxede - Vittjärv (61,2 km) i Lule älv:
 forts. Beräknade och uppmätta vattenstånd för angiven tappning
 i Laxede och konstant vattenstånd + 19.40 m vid Vittjärv:

Flödes hastigheterna (medelhastigheterna Q/A) var för $Q = 600 \text{ m}^3/\text{s}$ mindre än 0.5 m/s . Strömningsförhållandena är utpräglat subkritiska med värden på Froudes tal < 0.1 .

I avsikt att söka minska beräkningskostnaderna har även konstruerats en modell där rörelseekvationerna approximeras utifrån dubblerade längdsteg. Dock approximeras vattenlinjearean i kontinuitetsekvationen med utgångspunkt från alla givna H-punkter, för att uppskattningen av magasinerad vattenvolym, vilket är mycket väsentligt vid regleringsberäkningar, ej skulle bli behäftad med alltför stora fel. De med denna modell genomförda beräkningarna (beräkningskostnaderna reducerades med 40 % vid bibehållna tidssteg), gav vattenstånd som endast marginellt ($< 1 \text{ cm}$) avvek från de tidigare erhållna. Dessutom visade sig denna modell ge ett lägre magasineringsfel (nettotillrinning - per tidsenhet magasinerad volym). Det för sträckan Laxede-Vittjärv erhållna magasineringsfelet motsvarade en tillrinning (eller utflöde) $\approx 1 \text{ m}^3/\text{s}$. Vid de beräkningar som för Statens Vattenfalls räkning utförts på andra älvsträckor har därför denna modellversion utnyttjats.

I fig 8-8 redovisas resultatet från en testberäkning avseende älvsträckan mellan kraftstationerna Porsi och Laxede (26 km) utförd med den förenklade modellversionen med ett beräkningssteg av i medeltal 300 m. Modellen har först inkalibrerats mot ett vid ett annat tillfälle uppmätt flödesförlopp varefter de därvid erhållna värdena på Mannings tal utnyttjats för den redovisade beräkningen. Vid beräkningens start 75-10-11, kl. 21.30, var förhållandena kvastationära med en vattenföring på ca $400 \text{ m}^3/\text{s}$. Som begynnelsevillkor valdes därför en stationär vattenföring av $406 \text{ m}^3/\text{s}$. För att flöden och vattenstånd längs älven skulle få möjlighet att ställa in sig på korrekta värden utnyttjades fram till 75-10-12, kl. 05.00, det vid Laxede uppmätta vattenståndet som nedströms randvillkor medan övre randvillkoret under hela förloppet var den i Porsi angivna tappningen. Att vattenstånden efter en viss beräkningstid verkligen anpassar sig till de uppmätta, oavsett de antagna utgångsvärdena, framgår av den prickade linjen för Porsi avloppskanal erhållen vid en beräkning som utgått från en initiell vattenföring om $600 \text{ m}^3/\text{s}$. Det är således ej nödvändigt att för en kalibrering av modellen utnyttja stationära förhållanden, även om detta givet-

Fig 8-8 Älvsträckan Porsi - Laxede (26 km) i Lule älv: Jämförelse mellan beräknade och uppmätta vattenstånd 1975-10-12.



- 1) Vattenståndsutveckling vid beräkning utgående från en initieil vattenföring om $600 m^3/s$.

vis förenklar bestämningen av Mannings tal. Effekten av de initiaella värdena dör således snabbt ut.

Som framgår av fig 8-8 har en mycket god överensstämmelse erhållits mellan uppmätta och beräknade vattenstånd efter kl 05.00, 75-10-12, då nedströms randvillkor ändrades till given tappning i Laxede. Det är intressant att notera hur väl modellen återger den respons som en tappningsändring i Porsi ger 1 timme senare i Laxede. Till bilden hör att älven ca 2 km uppströms Laxede gör en mycket skarp krök innebärande att kalibreringen för dessa 2 km gav ett Mannings tal om endast $M = 13$ medan det för övriga delar av älven är $M = 25-30$.

För Porsi avloppskanal har beräkningen vid tappningsminskningar givet svängningsförlopp med större amplitud än de som uppmätts, medan överensstämmelsen vid tappningsökningar är mycket god. Det kan noteras att tillgängliga tappningsprotokoll och körorder i vissa fall endast tillåter en relativt schematisk rekonstruktion av tappningsförloppen utifrån angivna timmedelvärden.

Beräkningarna i fig 8-8 har genomförts med varierande tidssteg ($5 \text{ min} \leq \Delta t \leq 20 \text{ min}$) innebärande Couranttal av storleksordningen $5 < Cr < 30$.

8.7 Prognos av vattenståndsvariationer

I Lule älv planeras en effektutbyggnad vid de redan existerande kraftverken vilken, om den genomföres, kommer att innebära större och snabbare vattenstands- och vattenföringsvariationer än de som erhålles vid nuvarande tappningsförhållanden. Tyvärr medger ej av vattendomstolen fastställda föreskrifter att provtappningar enligt planerade tappningsschema genomföres. Prognoser måste därför utarbetas med hjälp av matematiska eller fysikaliska modeller.

Målsättningen med den tidigare beskrivna laboriemodellen var att med utgångspunkt från givna dämning- och sänkningsnivåer vid Vittjärv, $DG = +19.50 \text{ m}$, $SG = +19.00 \text{ m}$, undersöka möjligheten att genomföra olika planerade tappningsalternativ vid Laxede. Ett av dessa studerade alternativ redovisas i fig 8-9.

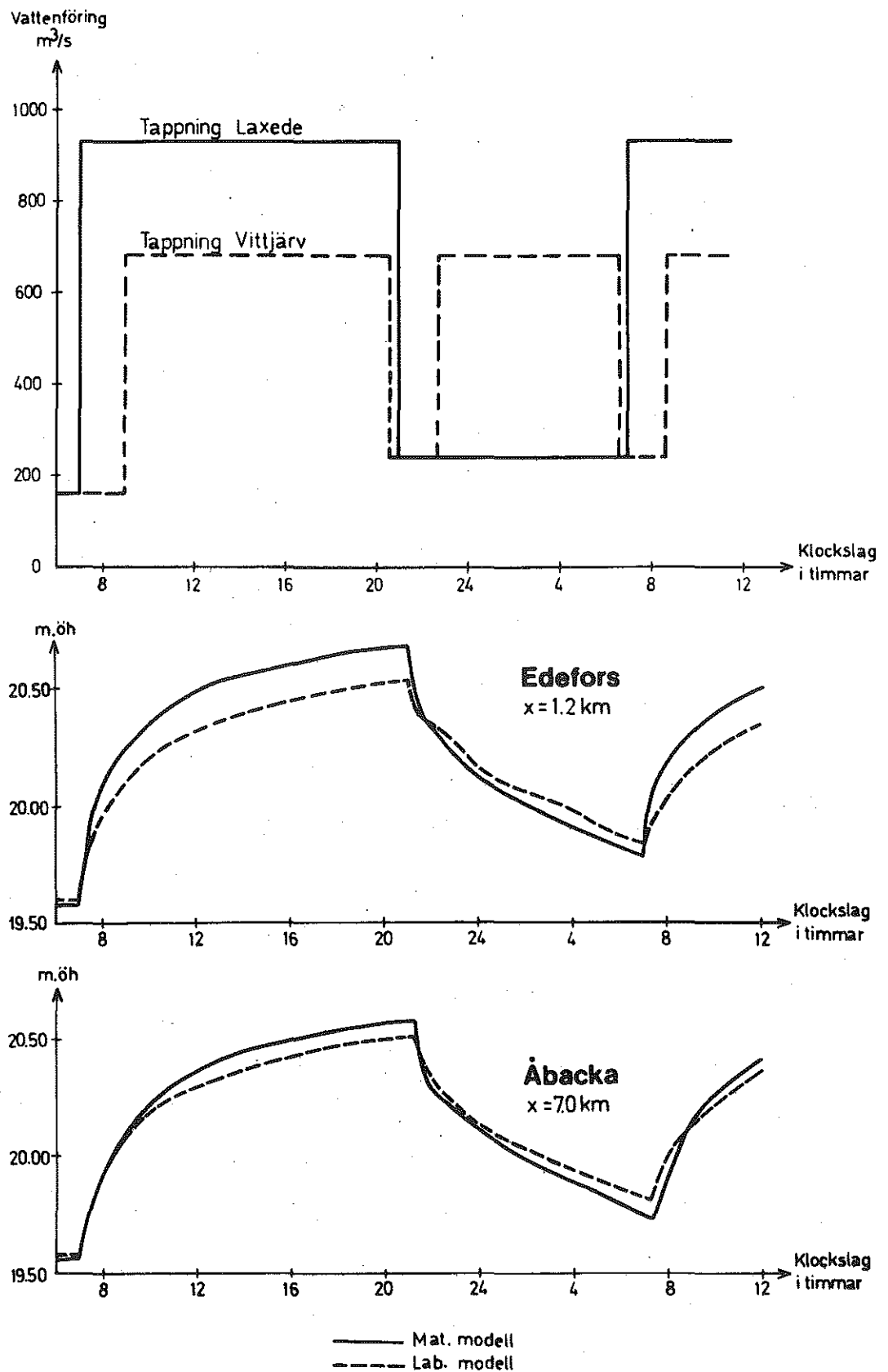


Fig 8-9 Älvsträckan Laxede - Vittjärvi (61,2 km) i Lule älv: Beräknade och i laboriemodell uppmätta vattenstånd för angivna tappningar i Laxede och Vittjärvi.

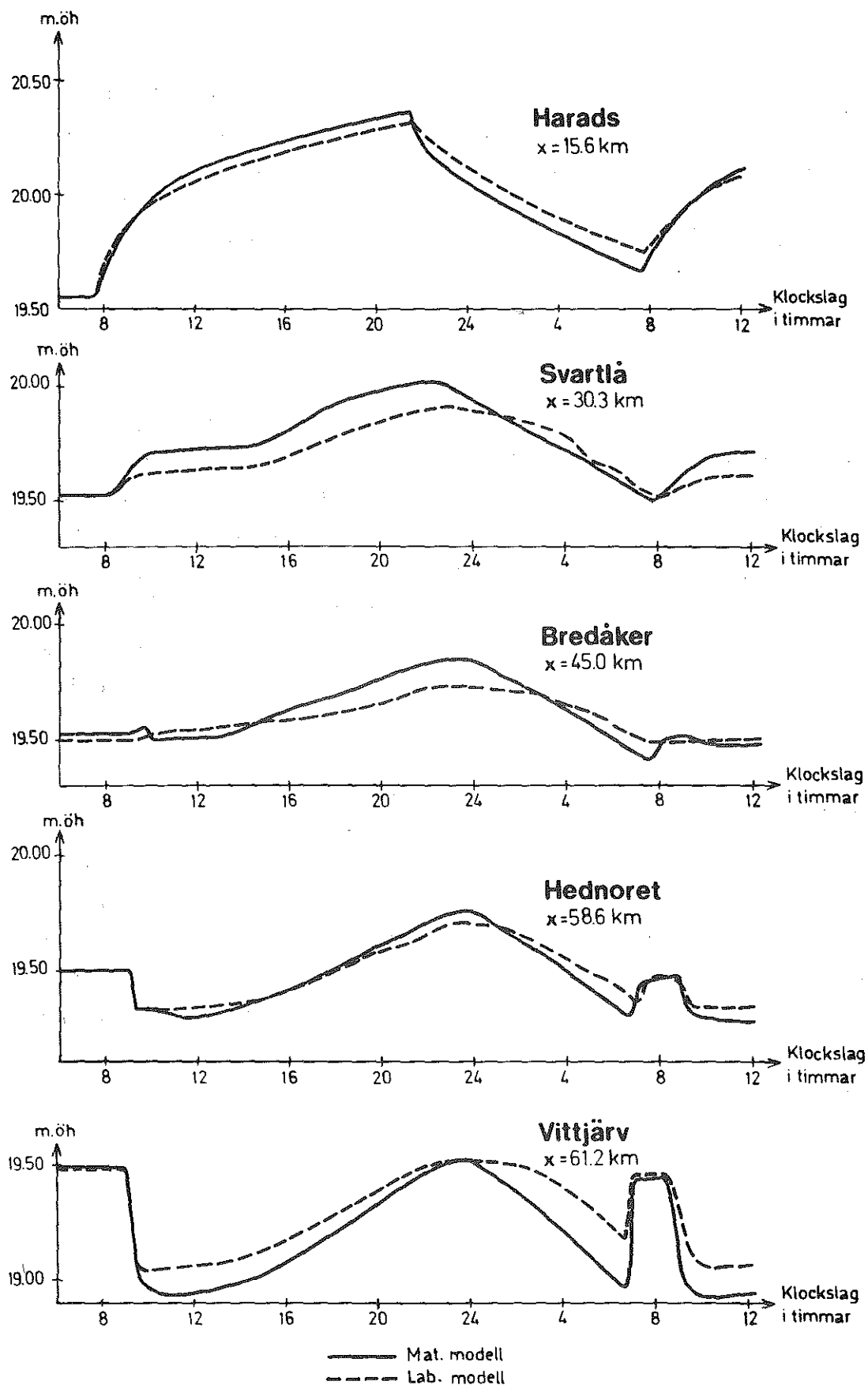


Fig 8-9 Älvsträckan Laxede - Vittjär (61.2 km) i Lule älv:
forts Beräknade och i laboriemodell uppmätta vattenstånd
för angivna tappningar i Laxede och Vittjär.

Som framgår av figurerna är vattenståndet vid Vittjärv mycket känsligt för tappningsändringar. Vidare fann man att en fasförskjutning erfordras mellan tappningsändringarna i Laxede och i Vittjärv för att vattenståndet vid Vittjärv ej skall över- eller underskrida de angivna gränserna. Till förutsättningarna hör dessutom att utbyggnadsvattenföringen $680 \text{ m}^3/\text{s}$ vid Vittjärv ej bör överskridas.

Den matematiska modellen ger för de angivna tappningarna något större vattenståndsvariationer än laboratiemodellen, fig 8-9. Överensstämmelsen måste dock sägas vara god med hänsyn till dels de mättekniska svårigheterna, dels svårigheten att helt korrekt kalibrera den matematiska modellen. Det studerade älvavsnittet har ju en mycket komplicerad geometri. Vidare har en kalibrering ej kunnat ske vid vattenstånd lägre än + 19.40 m vid Vittjärv. En viss osäkerhet kommer alltid att vidlåda beräkningsresultat avseende förlopp som går utanför de vattenförings- och vattenståndsintervall inom vilket modellen kunnat kalibreras.

8.8 Sammanfattning

Den konstruerade matematiska modellen har visat sig väl kunna simulera uppmätta flödesförlopp, även för geometriskt sett komplicerade älvfårar. För att modellen skall kunna ge en god prognos av vattenståndsutvecklingen för ett planerat tappningsförfarande krävs att modellen kalibreras (bestämning av Mannings tal för olika delsträckor) mot uppmätta vattenståndsvariationer.

9. BERÄKNING AV FLÖDESFÖRLOPP I DAGVATTENSYSTEM

9.1 Olika typer av modeller.

Flödesförloppet i ett system av dagvattenledningar under ett regntillfälle är mycket mera komplext än de förlopp vi studerat och beräknat i kap 8. En generell beräkningsmodell måste kunna behandla följande typer av icke-stationära flödessituationer:

- subkritiskt (strömmande) flöde
- superkritiskt (stråkande) flöde
- övergång från subkritiskt till superkritiskt flöde (kritisk sektion)
- övergång från superkritiskt till subkritiskt flöde (vattensprång)
- alternerande delvis fylld och helt fylld ledning

Med hänsyn till denna komplexitet är det inte anmärkningsvärt att det först under senare år gjorts försök att ta fram mera fullständiga flödesmodeller. Några modeller, som kan behandla alla ovan uppräknade flödessituationer och är generellt tillämpbara, finns dock ännu ej.

Existerande flödesmodeller applicerbara på dagvattensystem kan indelas i två grupper:

A-modeller, i vilka flödesförloppet beräknas under beaktande av eventuella dämningseffekter från nedströms liggande ledningar.

B-modeller, i vilka flödesförloppet beräknas utan beaktande av dämningseffekter.

A-modellerna bygger på en samtidig lösning vid varje tidssteg av kontinuitets- och rörelsemängdekvationerna för alla i systemet ingående ledningar. I knutpunkterna beskrivs flödes- och vattensståndsförhållandena av dels en kontinuitetsekvation, dels olika villkor som avgör om flöden och vattendjup i inkommande ledningar är beroende eller ej av vattennivån i knutpunkten. Flödesmodeller av denna typ är de ledningsnätrutiner som ingår i t ex

HVM-modellen, se Klym, Königer, Mevius och Vogel (1972) (Dorsch Consult, München)

WRE-modellen, se Shubinski och Roesner (1973) och Kibler, Mehler, Muhlbauer, Shubinski och Stoffman (1974)

De två angivna modellerna behandlar förutom flödesförloppet i ledningssystemet även de övriga momenten i dagvattnets avrinning under ett nederbördstillfälle (infiltration, ytmagasinering, ytavrinning m m)

B-modeller är de ledningsnätrutiner som ingår i avrinningsmodellerna

NIVA-modellen, se Lindholm (1974 och 1975)
EPA (SWMM), se Lager, Pyatt och Shubinski (1971)
UCUR, se Papadakis och Preul (1972), Arnell (1976)
RRL-metoden, se Terstriep och Stall (1969)

Vidare är den s k retardationsmetoden och den "kinematiska vågen" att hänföra till typ B-modellerna.

I typ B-modellerna beräknas flödesförloppet för varje ledning under antagande av fritt utlopp¹⁾ i ledningens nedre ändpunkt. Flödet i inkommande ledningar förutsättes alltså vara oberoende av vattennivån i knutpunkten. För knutpunkten erfordras enbart en kontinuitetsbetraktelse, (inkommande flöde = utgående flöde). Dämnings-effekten från en överbelastad nedströms liggande ledning beaktas således ej. Fördelen med typ B-modellerna är att de är mindre komplicerade och billigare att använda än typ A-modellerna och att de för givna tillflöden möjliggör en dimensionering av ledningssystemet med start med uppströms ledningar.

Inom ramen för det här aktuella forskningsprojektet "Dagvattenavledning - flödesmodeller" har utvecklats två modeller

DAGVL-A: typ A-modell (implicit differenslösning vid varje tidssteg av linjariserade rörelseekvationer och knutpunktsrelationer för alla i systemet ingående ledningar)

1) Ingen dämmande nedströmsvattenyta.

DAGVL-B: typ B-modell (implicit differenslösning vid varje tidsteg av linjariserade rörelseekvationer under antagande av fritt utlopp för varje lednings nedströmspunkt. Modellen skiljer sig från DAGVL-A enbart genom att dämningseffekter ej beaktas).

De två modellerna är för närvarande inbyggda i samma programpaket vilket innebär att godtyckligt valda delar av ett ledningsnät kan beräknas enligt typ B-modellens förutsättningar och resten av nätet enligt typ A-modellens.

Med ledningsnät förstås i det följande ett system av ledningar och brunnar (knutpunkter). En ledning sammanbinder två brunnar och förutsättes ha konstant diameter och konstant lutning.

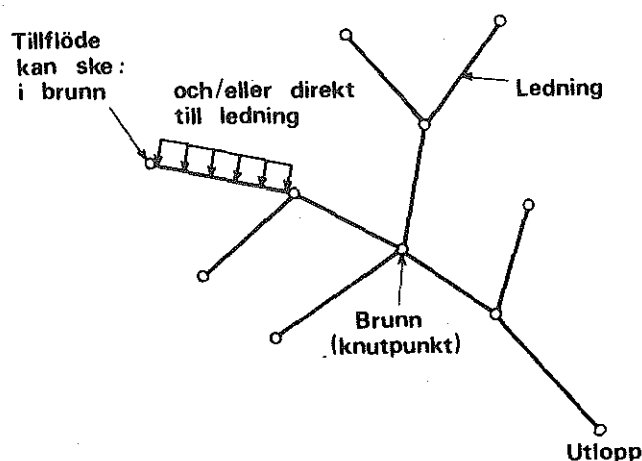


Fig 9-1 Konvergerande ledningsnät (ledningssystem)

Tillrinningen till ledningsnätet förutsättes kunna ske dels via brunnarna, dels via direkt på ledningarna (huvudledningarna) kopplade servisledningar.

Endast konvergerande ledningsnät behandlas.

Oavsett typen av beräkningsmodell erfordras kännedom om friktionslutningens I_f storlek, dvs friktionskrafternas storlek, se kap 2.5. Vid strömning i delvis fylld cirkulär sektion sker beräkningen av I_f med fördel med utgångspunkt från en s k fyllnadsgradfunktion, vilken definieras i kap 9.2.

I typ B-modellerna är ett kontinuitetsvillkor det enda erforderliga knutpunktssambandet. I typ A-modellerna krävs däremot knutpunktssamband som definierar de situationer under vilka vattenståndet i utgående ledning är så högt att det dämmer upp vattenytan i inkommande ledningar. Formuleringen av dessa samband diskuteras i kap 9.3.

På grund av att man i typ B-modellerna ej beaktar dämningseffekter kan dessa modeller byggas på starkt förenklade rörelseekvationer. Flera av de tidigare uppräknade modellerna bygger således på den kinematiska vågteorin. Eftersom typ B-modellerna är de som hitintills kommit mest till användning diskuteras dessa relativt utförligt i de följande kapitlen 9.4 - 9.8. Därefter genomföres i kap 9.9 jämförande beräkningar med de beskrivna typ B-modellerna. Beräkningarna avser flödesförlopp i en enkel rak ledning. Som referens utnyttjas DAGVL-B:s "exakta" lösning.¹⁾

Några beräkningar med HVM- och WRE-modellerna har ej kunnat genomföras på grund av att datorprogrammen ej finns tillgängliga. Modellernas uppbyggnad beskrivs emellertid kortfattat i kap 9.10.

Typ A-modellen DAGVL-A, vilken bygger på samma typ av implicit differenslösning som DAGVL-B, presenteras i kap 9.11.

Slutligen redovisas i kap 9.12 jämförande beräkningar mellan DAGVL-A och olika typ B-modeller för ett hypotetiskt ledningssystem.

9.2 Friktionslutningen I_f

Friktionslutningen I_f vid delvis fylld ledningssektion kan uppskattas med hjälp av Mannings formel

$$I_f = \frac{Q|Q|}{M^2 \cdot A^2 \cdot R^{4/3}} \quad (9.1)$$

1) Överensstämmer vid enkel rak ledning och fritt utlopp med DAGVL-A:s lösning.

där Q är flödet, M är Mannings tal, A är våta arean och R är hydrauliska radien. Ledningens kapacitet vid helt fylld ledning definieras av sambandet ¹⁾

$$Q_{\text{full}} = M_{\text{full}} \cdot A_{\text{full}} \cdot R_{\text{full}}^{2/3} \cdot I_o^{1/2}; \quad (9.2)$$

där index "full" hänför sig till helt fylld sektion och I_o är ledningens lutning.

Vid likformig strömning ($I_f = I_o$) och om M är en funktion av fyllnadsgraden Y/d enbart kan vi skriva relativa flödet Q/Q_{full} som en entydig funktion av Y/d ,

$$\frac{Q}{Q_{\text{full}}} = \frac{M \cdot A \cdot R^{2/3}}{M_{\text{full}} \cdot A_{\text{full}} \cdot R_{\text{full}}^{2/3}} = F(Y/d); \quad (I_f = I_o) \quad (9.3)$$

Funktionen $F(Y/d)$ benämner vi i det följande fyllnadsgradfunktion. Om vi inför denna funktion i ekv (9.1) erhålles

$$I_f = \frac{Q |Q|}{[M_{\text{full}} \cdot A_{\text{full}} \cdot R_{\text{full}}^{2/3} \cdot F(Y/d)]^2} = \frac{Q |Q|}{Q_{\text{full}}^2} \cdot \frac{I_o}{[F(Y/d)]^2}; \quad (9.4)$$

Q_{full} kan som ovan beräknas ur Mannings formel. I Sverige utnyttjas dock vanligen Darcy-Weisbach formel (allmänna friktionsformeln)

$$I_o = \frac{f}{4R_{\text{full}}} \cdot \frac{Q_{\text{full}}^2}{2g(A_{\text{full}})^2}; \quad (9.5)$$

Friktionskoefficienten f för helt fylld cirkulär sektion beräknas då enligt Colebrooks formel

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k_s}{3.71 d} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (9.6)$$

där d är sektionens diameter, k_s är ledningens ekvivalenta sandråhet och Re är Reynolds tal Vd/ν där V är vattnets medelhastighet och ν är dess kinematiska viskositet.

1) Vi förutsätter i det följande att $I_o > 0$. Diskussionen kan dock enkelt generaliseras till att gälla även för $I_o \leq 0$.

Den mot konstant M -värde svarande fyllnadsgradfunktionen för cirkulär sektion redovisas i fig 9-2 (betecknad "Teoretisk"). Enligt denna funktion har sektionen sitt kapacitetsmaximum vid relativa fyllnadshöjden $Y/D = 0.94$. Denna "överkapacitet" bör emellertid ej utnyttjas vid praktisk dimensionering emedan en dämning över motsvarande fyllnadsgrad leder till en kapacitetsminskning.

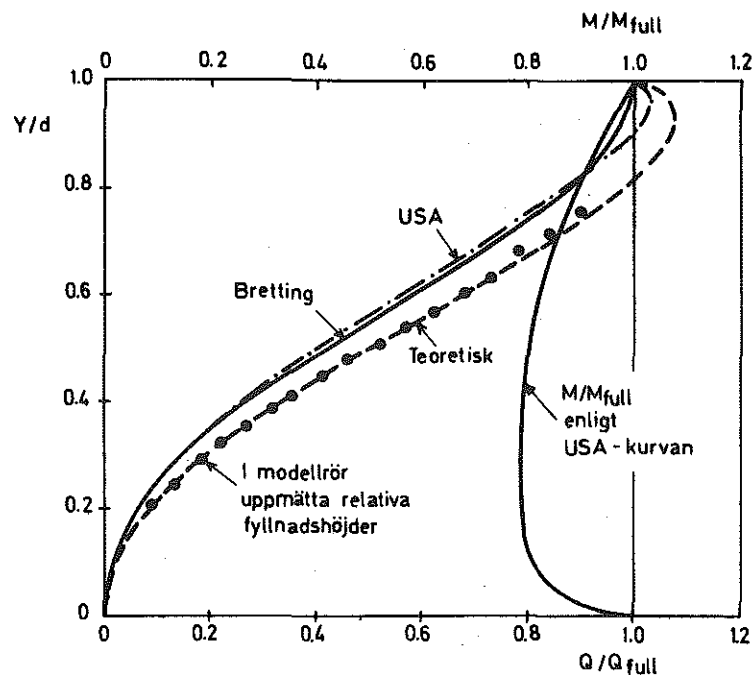


Fig 9-2. Alternativa fyllnadsgradfunktioner $Q/Q_{full} = F(Y/d)$ för cirkulär sektion med diametern d .

I USA rekommenderas på basis av experimentella undersökningar den i fig 9-2 med "USA" betecknade funktionen, se t ex Metcalf och Eddy, Inc. (1972). Som framgår motsvarar USA-kurvan en relativt stor variation i M -värdet med Y/d .

I Sverige rekommenderas den av Bretting (1960) föreslagna funktionen

$$\frac{Q}{Q_{full}} = 0.46 - 0.5 \cos(\pi Y/d) + 0.04 \cos(2\pi Y/d); \quad (9.7)$$

vilken ej har någon maximipunkt men som för övrigt avviker mycket litet från "USA"-kurvan.

I figuren har även inlagts i ett modellrör uppmätta relativa vattendjup (85 m långt plaströr med diametern $d = 0,105$ m, lutningen $I_0 = 5\text{‰}$ och fulla kapaciteten $Q_{\text{full}} = 6.3$ l/s motsvarande en ekvivalent sandråhet av 0.1 mm). Det förhållandet att de för den experimentella anordningen erhållna värdena faller på kurvan "Teoretisk" bör ej tas som intäkt för att denna kurva skulle vara generellt sett mera tillämplig än övriga redovisade kurvor. Med hänsyn till den osäkerhet som alltid måste vidlåda bedömningen av en dagvattenlednings friktionsegenskaper torde det ur praktisk synpunkt vara likgiltigt vilken av de angivna kurvorna som utnyttjas.

9.3 Knutpunktssamband

I typ B-modellerna beräknas flödesförloppet i varje ledning utifrån antagandet att fri utströmning råder i ledningens nedströmsände. Det enda erforderliga knutpunktssambandet är således ett kontinuitetsvillkor. Om vi begränsar oss till två inkommande och en utgående ledning med flödena Q_1 , Q_2 resp Q_u , se fig 9-3 och 9-4, och förutsätter ett externt tillflöde Q_t men försummar magasineringen i knutpunkten, erhålles villkoret

$$Q_1 + Q_2 + Q_t = Q_u ; \quad (9.8)$$

Typ A-modellerna kräver, förutom att kontinuiteten är uppfylld i knutpunkten, samband som relaterar flödessituationen i anslutna ledningar till varandra.

Låt oss förutsätta att vattennivån i den utgående ledningen är så hög att den påverkar vattennivån i de två inkommande ledningarna. Oavsett numerisk beräkningsmetod och oavsett om flödet är stationärt eller ej erfordras då, förutom kontinuitetsvillkoret, två samband som relaterar vattennivåerna i ledning 1 och 2 till vattennivån i utgående ledning.¹⁾ I avsikt att belysa problemställningen kommer

1) Om t ex sektion 1 är bestämmande sektion eller om det råder superkritisk strömning kan Q_1 och Y_1 beräknas oberoende av nedströmsförhållandena. Endast ett samband, som relaterar förhållandena i sektion 2 till de i sektion u, är då erforderligt utöver kontinuitetsvillkoret.

vi först att formulera dessa två samband utifrån en energibetraktelse. I de framtagna datorprogrammen utnyttjas dock en mera schematisk ansats.

Vi förutsätter att de två flödena kan separeras genom en tänkt skiljeyta S . För vart och ett av de två strömrör vi därvid erhåller ger en energibetraktelse följande samband om $Q_t = 0$ (be-teckningarna framgår av fig 9-3).

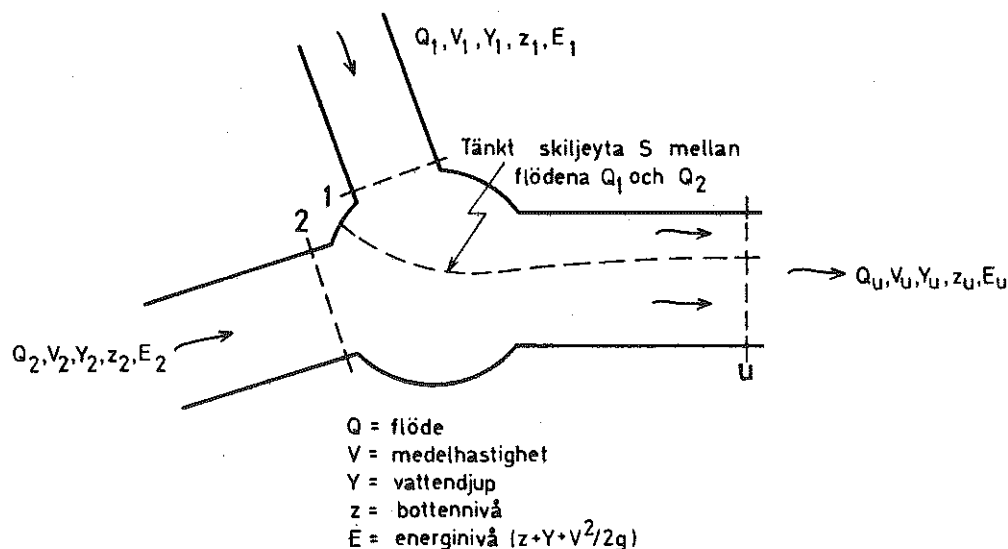


Fig 9-3 Knutpunkt med två inkommande och en utgående ledning.

$$z_1 + Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_u + Y_u + \frac{V_u^2}{2g} + \Delta E_1 + \Delta J_1, \quad (9.9)$$

$$z_2 + Y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = z_u + Y_u + \frac{V_u^2}{2g} + \Delta E_2 + \Delta J_2 ;$$

eller

$$E_1 = E_u + \Delta E_1 + \Delta J_1 \text{ och } E_2 = E_u + \Delta E_2 + \Delta J_2 ; \quad (9.10)$$

där ΔE och ΔJ representerar den inre energidissipationen i flödet resp det yttre arbete som skjuvkrafterna uträttar i skiljeytan S , allt räknat per massflödesenhet ρQ . Det totala arbete som uträttas i skiljeytan måste emellertid vara lika med noll, dvs

$$Q_1 \Delta J_1 + Q_2 \Delta J_2 = 0 ; \quad (9.11)$$

ΔJ_1 och ΔJ_2 har alltså motsatta tecken varför någon av differenserna $E_1 - E_u$ och $E_2 - E_u$ kan vara negativ, t ex om $V_1 \gg V_2$ (ejektorverkan).

Multiplikation av de två sambanden (9.9) med Q_1 resp Q_2 , summering av de två sambanden, insättning av ekv (9.11) ger med $Q_u = Q_1 + Q_2$

$$\sum_{i=1}^2 Q_i (z_i + Y_i + \frac{V_i^2}{2g}) = Q_u (z_u + Y_u + \frac{V_u^2}{2g}) + \sum_{i=1}^2 Q_i \Delta E_i ; \quad (9.12)$$

Den genomförda operationen har medfört en eliminering av de obekanta storheterna ΔJ_1 och ΔJ_2 och vi har erhållit ett energisamband beskrivande de totala energiförlusterna i knutpunkten. Detta enda samband är dock icke tillräckligt. Vi måste utnyttja oss av bägge sambanden (9.9) vilket innebär att vi måste kunna uppskatta bägge energinivåskillnaderna $E_1 - E_u$ och $E_2 - E_u$.

Den enda mera omfattande experimentella undersökning, vilken kan ligga till grund för bedömning av knutpunktsförlusterna, synes vara den som utförts vid Missouri-universitetet av Sangster, Wood, Smerdon och Bossy (1959). Undersökningen, vilken dock enbart avsåg strömning genom brunnar med helt fyllda tillopps- och utloppsledningar, resulterade i semi-empiriska relationer mellan tryckförlustkoefficienten k och förhållandet sidotillflöde/huvudflöde för olika typer av knutpunkter. Förlustkoefficienten k definieras för ledningen "i" av sambandet

$$z_i + Y_i = z_u + Y_u + k_i \frac{V_u^2}{2g} \quad (9.13)$$

Tryckförlusterna kan ofta bli mycket stora. I en knutpunkt med 90° -riktningsändring och samma diameter på ingående och utgående ledning är k_i av storleksordningen 1.0. En strömningshastighet av 4.5 m/s ger då tryckförlusten 1 m.

Under enkla geometriska förhållanden och flödesbetingelser kan de erforderliga ekvationerna formuleras även med hjälp av rörelsemängdbetraktelser i två riktningar. Knutpunkterna i ett ledningssystem är dock alltför komplicerade för att tillåta uppställandet av praktiskt användbara samband. De experimentella studier som ge-

nomförts, se t ex Taylor (1944) och Lorah (1966), behandlar enbart förenklade geometriska förhållanden och ger inget underlag för generella bedömningar.

Även om vi skulle ha tillgång till underlag för ansättandet av energinivåskillnaderna $E_i - E_u$ - vilket vi tyvärr saknar helt för strömning med fri vattenyta - så kan knutpunktsvillkoren ej baseras enbart på energisambanden (9.9). Dessa samband måste kompletteras med tilläggs villkor som gör det möjligt att ta hänsyn till dels externt tillflöde i själva knutpunkten, dels flödessituationen i inkommande ledning (utbildande av bestämmande sektion, superkritisk strömning). Detta visade sig emellertid ej vara möjligt att genomföra varför nedan skisserade mera schematiska betraktelsesätt har utnyttjats i flödesmodellen DAGVL-A.

Vattennivån $z_b + Y_b$ i knutpunkten relateras till vattennivån $z_u + Y_u$ i utgående ledning, se fig 9-4, genom energiekvationen

$$z_b + Y_b + \frac{V_b^2}{2g} = z_u + Y_u + (1 + k_{ut}) \frac{V_u^2}{2g} \quad (9.14a)$$

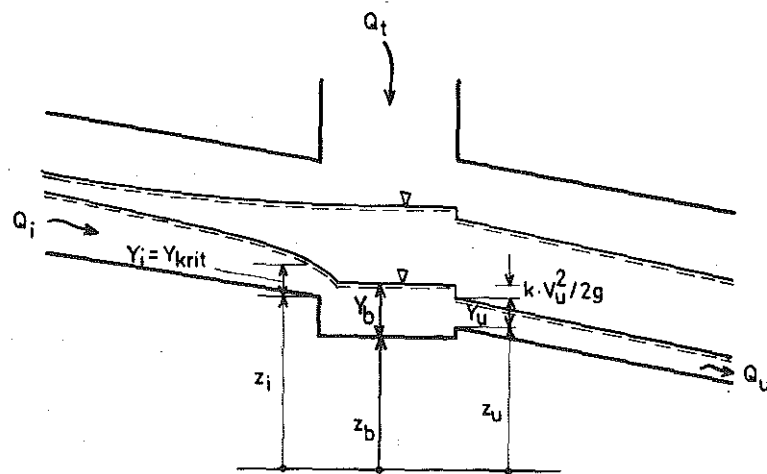
där k_{ut} är en utströmningsförlustkoefficient. Detta samband kan skrivas på formen

$$z_b + Y_b = z_u + Y_u + k \frac{V_u^2}{2g}; \quad (9.14b)$$

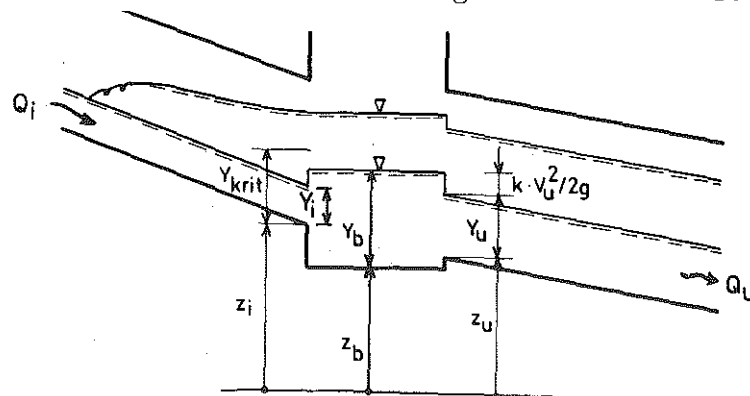
där $k = 1 + k_{ut} - V_b^2 / V_u^2$. Eftersom ekv (9.14b) beskriver differensen i trycknivå benämnes k tryckförlustkoefficient.

Om knutpunkten är av magasinystyp ($V_b \approx 0$) erhålles således $k = 1 + k_{ut} \geq 1$. Normala knutpunkts- och ledningsbrunnar har emellertid små areor (oftast cirkulär sektion med en diameter något större än utgående lednings) varför V_b är av samma storleksordning som V_u . Som en första approximation kan vi sätta $V_b/V_u \approx 1$ vilket ger $k \approx k_{ut} \geq 0$. I avsaknad av experimentellt bedömningsunderlag måste dock valet av k-värde bli relativt godtyckligt.

Vattennivån i knutpunkten är avgörande för om flödet i en inkommande ledning dämms eller ej. Om vi vid dämt flöde förutsätter samma vattennivå i ledningen som i knutpunkten erhålles följande villkor och samband ($Y_{krit, i}$ är kritiska djupet svarande mot det aktuella flödet $Q_i(t)$, dW/dt är i knutpunkten per tidsenhet magasinerad volym, $W=W(Y_b)$):



a) Subkritisk strömning i inkommande ledning



b) Superkritisk strömning i inkommande ledning

Fig 9-4 I DAGVL-A utnyttjade knutpunktsvillkor. Vid superkritisk strömning i utgående ledning sättes $Y_u = Y_{krit, u}$.

Subkritiskt flöde i inkommande ledning (fig 9-4a)

1) $Y_i = Y_{krit, i}$ om $z_b + Y_b < z_i + Y_{krit, i}$; (9.15a)

i annat fall $z_i + Y_i = z_b + Y_b$

Superkritiskt flöde i inkommande ledning (fig 9-4b)

2) Q_i och Y_i kända om $z_b + Y_b < z_i + Y_{krit, i}$ (9.15b)

i annat fall $z_i + Y_i = z_b + Y_b$ (vattensprång)

Kontinuitetsvillkor

$\sum Q_i + Q_t = \frac{dW}{dt} + Q_u$; (9.15c)

1) Q_i och Y_i kända.

2) Inget villkor behöver specificeras. Jfr kap 4.5, fig 4-9.

Villkoret (9.15a) för subkritisk strömning innebär att dämning av flödet i inkommande ledning ej erhålles så länge vattennivån i knutpunkten ej står högre än den vattennivå som motsvarar kritiskt djup i denna ledning, fig 9-4a.

Vid superkritisk strömning erhålles någon av de i fig 9-4b skisserade vattenståndsprofilerna. Om $z_b + Y_b < z_1 + Y_{krit}$ förutsättes sålunda att vattensprånget pressats ut i själva knutpunktsbrunnen.

För en knutpunkt med stor magasinsvolym och små strömningshastigheter, t ex ett fördröjningsmagasin, utgör ekv (9.15) en fullgod approximation. Det inkommande flödets rörelseenergi kan då förutsättas gå helt förlorad. För knutpunkter med stora strömningshastigheter ger emellertid den utnyttjade ansatsen endast en approximativ beskrivning av flödesförhållandena. Antagandet om gemensam vattenyta vid dämnda inkommande flöden, dvs $z_1 + Y_1 = z_2 + Y_2$, behöver således ej vara satisfierat. Som tidigare påpekats saknar vi emellertid möjlighet att formulera praktiskt användbara dynamiska samband.

Det bör påpekas att den genomförda ansatsen i vissa fall kan leda till orimligheter ur energisynpunkt. Låt oss förutsätta enbart en inkommande ledning och att $Q_1 = Q_u$. Under förutsättning av att det inkommande flödet är dämt ger då ekv (9.9) och ekv (9.14b),

$$\Delta E_1 = \frac{V_1^2}{2g} + (k-1) \frac{V_u^2}{2g} ; \quad (9.16)$$

Med $k = 0$ och $V_u > V_1$ (accelererat flöde) skulle således ett energitillskott erhållas i knutpunkten. Detta är givetvis orimligt. Koefficienten k borde därför i detta fall väljas så att $\Delta E_1 > 0$.

Det har i datorprogrammet ej inlagts någon rutin för automatiskt val av k -värdet. Detta ges som indata och förutsättes vara konstant och oberoende av variationer i flödesförhållandena. I avsaknad av experimentellt bedömningsunderlag synes detta för närvarande vara den enda praktiska utvägen. ¹⁾

Sammanfattningsvis kan konstateras att visst experimentellt underlag föreligger för bedömning av energiförluster i knutpunkter vid helt fyllda ledningar medan det för delvis fyllda ledningar helt sak-

1) De i DAGVL-A utnyttjade knutpunktsambanden visade sig överensstämma med de som utnyttjas i den sk ISS-modellen, se ref sid 175. I denna modell sättes $k = 0$ vid små knutpunktsareor och $k = 1$ vid knutpunkter av magasinstyp.

nas sådant material. Förhållandena är i allmänhet alltför komplicerade för att enbart teoretiska betraktelser skall kunna utnyttjas. Med hänsyn till att energiförlusterna, speciellt vid helt fyllda ledningar, kan bli av den storleksordningen att de kan påverka bedömningen av ledningsnätets kapacitet, är det önskvärt att riktlinjer rörande ansättandet av knutpunktsförlusterna utarbetas. I praktiken ansätts relativt godtyckliga knutpunktsförluster eller inga förluster alls. Ibland försöker man kompensera knutpunktsförlusterna genom en ökning av ledningarnas råhet eller en minskning av värdet på Mannings tal.

Lyckligtvis har de dämningseffekter som knutpunktsförlusterna ger upphov till vid strömning med fri vattenyta relativt begränsad effekt på vattenstånden ett stycke uppströms knutpunkten. Man torde därför kunna tillåta sig relativt schematiska ansatser utan att alltför stora felaktigheter erhålles i det beräknade flödesförloppet.

Om däremot vattennivån (trycknivån) ligger i närheten av eller över ledningarnas hjässor inom en större del av ledningssystemet får knutpunktsförlusterna en mycket större genomslagskraft. En höjning av trycknivån med 1 m i en helt fylld lednings nedströmsände medför en omedelbar motsvarande höjning i dess uppströmsände, ett förhållande som kanske inte alltid uppmärksammas. Å andra sidan torde det sällan förekomma att ett ledningssystemets funktion vid flöden större än det dimensionerande flödet studeras. Ledningarna dimensioneras ju i allmänhet så att de vid det s k dimensionerande flödet ej skall gå helt fyllda.

9.4 Retardationsmetoden (Typ B)

De enklaste beräkningsmetoderna och hitintills även de mest utnyttjade är de metoder som bygger på en ren translation av vågen (inloppshydrografen) längs ledningen. Gemensamt för dessa metoder är att man förutsätter att flödet i varje sektion är en entydig funktion av vattendjupet i ledningen, dvs att

$$Q/Q_{\text{full}} = F(Y/d) ; \quad (9.17)$$

Denna förutsättning är endast uppfylld vid stationär likformig strömning. $F(Y/d)$ är någon av fyllnadsgradfunktionerna i fig 9-2.

Translationshastigheten (våghastigheten) antages oftast vara lika med den hastighet som erhålles ur ekv (9.17) för flödestoppen,

$$V_{\text{våg}} = Q_{\text{topp}}/A_{\text{topp}} = Q_{\text{full}} \cdot F(Y_{\text{topp}}/d) / A_{\text{topp}} \quad (9.18)$$

Ibland utnyttjas hastigheten $V_{\text{våg}} = Q_{\text{full}}/A_{\text{full}}$.

Förfarandet innebär en ren translation av vågen med den för den aktuella ledningen beräknade hastigheten $V_{\text{våg}}$ utan att vågens form ändras. Dämpningseffekter kan ej beaktas och för knutpunkterna gäller enbart villkoret att inkommande flöde är lika med utgående flöde enligt ekv (9.8).

Som redan framgått av kap 5.6 innebär denna metod, som i Sverige närmast kan sägas gå under beteckningen retardationsmetoden, en underskattning av vågens hastighet, vilket i sin tur medför en överskattning av ledningssystemets koncentrationstid (genomloppstid). Detta fel är på osäkra sidan och medför att den beräkningsmässiga sannolikheten för överlagring av flödestoppar från olika delar av ledningssystemet reduceras jämfört med den verkliga, vilket kan resultera i att överlagringseffekter i ledningssystemet underskattas. Å andra sidan tar metoden ej hänsyn till vågens eventuella dämpning och utflackning, vilket ur dimensioneringssynpunkt är ett fel på säkra sidan. Den möjligheten föreligger givetvis att dessa fel, vad avser dimensionerande flödestoppar, tar ut varandra och att beräkningen således ger ett korrekt flödesmaximum. De beräknade flödestopparna kommer dock att inträffa senare än de verkliga. Se vidare kap 9.9.

Det är en allmän uppfattning bland praktiserande ingenjörer att retardationsmetoden leder till för höga flöden. Att så alltid skulle vara fallet är dock ingen självklarhet.

Retardationsmetoden utnyttjas i bl a UCUR-modellens ledningsnätrutin, se Papadakis och Preul (1972).

9.5 Kinematisk våg (Typ B)

Förutsättningarna för den kinematiska teorins tillämplighet har tidigare redovisats i kap 5.4. Vid stora bottenlutningar kan de sekundära gradienttermerna normalt försummas i rörelsemängd-ekvationen i vilket fall flödet Q blir en entydig funktion av vattendjupet. Rörelseekvationerna kan då skrivas

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 ; \quad (9.19a)$$

$$Q = Q_{\text{full}} \cdot F(Y/d) ; \quad (9.19b)$$

Dessa två samband beskriver en odämpad vågrörelse, benämnd kinematisk våg, där varje punkt på vågprofilen förflyttar sig med den mot det aktuella djupet svarande kinematiska hastigheten

$$c_k = \frac{dQ}{dA} = \frac{1}{B} \frac{dQ}{dY} ; \quad (9.20)$$

Ett okritiskt utnyttjande av ekv (9.20) kan leda till fysikaliskt orimliga flödesprofiler, se kap 5.6. Vid numeriska beräkningar återspeglas detta förhållande i form av parasitisk vågbildning, se fig 9-5.

Låt oss nu betrakta en ledningssträcka med längden Δx . Uppströms randsektion betecknas med "1" och nedströms randsektion med "2". Om vi överför kontinuitetsekvationen (9.19a) till differensform enligt box-schemat, se fig 6-5, erhålles differensekvationen

$$\frac{Q_2^{m+1} + Q_2^m - Q_1^{m+1} - Q_1^m}{2\Delta x} + \frac{A_2^{m+1} - A_2^m + A_1^{m+1} - A_1^m}{2\Delta t} = 0 \quad (9.21)$$

där t ex Q_2^{m+1} är flödet i sektion 2 vid tidpunkten $t_{m+1} = t_m + \Delta t$.

I detta samband känner vi Q och A i punkterna (1, m) och (1, $m+1$) eftersom Q_1 är det givna tillflödet. Motsvarande area A_1 ges av ekv (9.19b). Vi känner dessutom Q_2^m och A_2^m från föregående beräkningssteg varför Q_2^{m+1} och A_2^{m+1} är de enda obekanta storheterna. Dessa kan lösas på iterativ väg med hjälp av ekv (9.19b).

En Taylor-utveckling av ekv (9.21) kring punkten $(1+1/2, m+1/2)$ visar att differensekvationen approximerar kontinuitetsekvationen med ett trunkeringsfel av $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$. Schemat är ovillkorligt stabilt och icke diffusivt applicerat på linjariserade rörelseekvationer, se kap 6.4.

I fig 9-5 redovisas en beräkning av ett flödesförlopp i en 600 m lång ledning. Beräkningen har genomförts dels enligt ekv (9.20) (analytisk lösning), dels enligt ekv (9.21) (numerisk lösning).

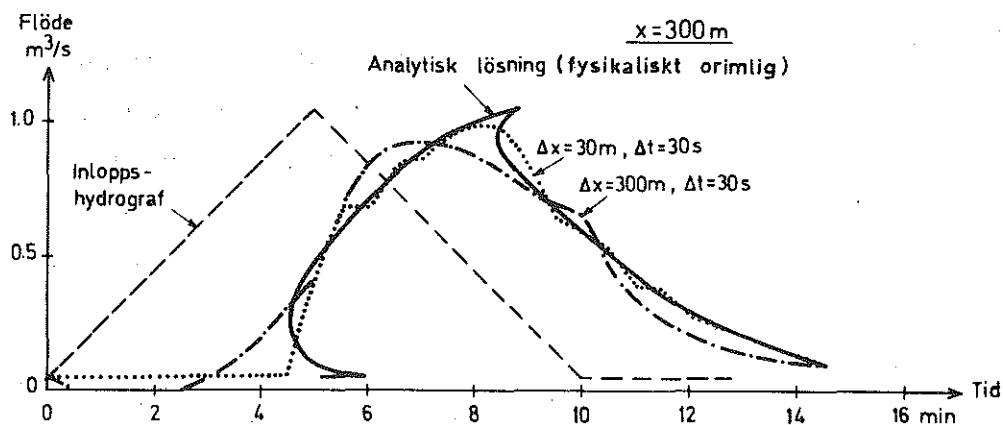
Den analytiska lösningen visar sig redan 300 m från inloppet vara fysikaliskt orimlig i områdena kring flödesfronten och kring flödestoppen, dvs inom de djupintervall där vi återfinner de största variationerna i den kinematiska hastigheten c_k , se kap 5.6, fig 5-10.

De numeriska lösningarna uppvisar - bortsett från den parasitiska vågbildningen - inga fysikaliska orimligheter. Den för $\Delta x = 30$ m, $\Delta t = 30$ s, erhållna lösningen uppvisar en med avståndet från inloppet växande parasitisk vågbildning.

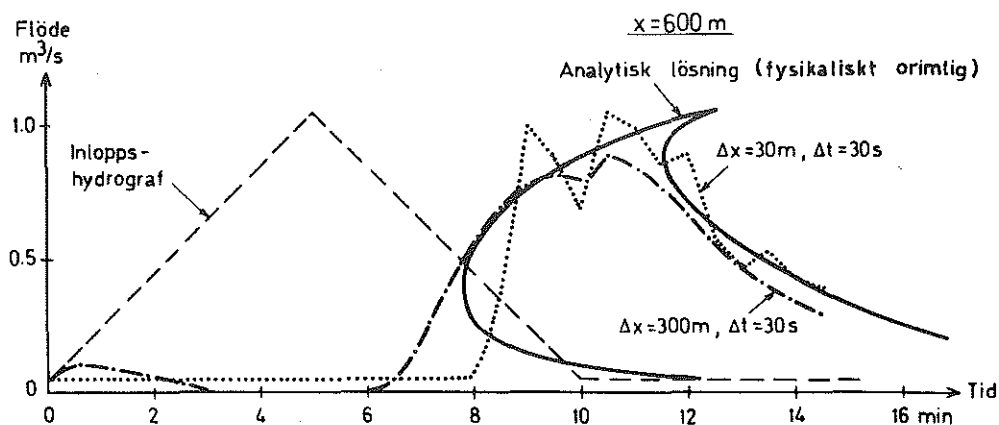
För $\Delta x = 300$ m, $\Delta t = 30$ s, är de parasitiska vågorna i huvudsak utdämpade. Dessutom har en utfläckning av flödesvågen erhållits, vilket medverkar till att göra beräkningsresultatet mera realistiskt, se kap 9.9. Denna utfläckning är en effekt av det stora trunkeringsfel som värdet $\Delta x = 300$ m introducerar.

En beräkning genomförd med tidsteget $\Delta t = 60$ s gav hydrografer med i huvudsak samma form som de som erhållits för $\Delta t = 30$ s, dock med något avvikande parasitisk vågbildning för $\Delta x = 30$ m.

Såvitt författaren känt har någon flödesmodell ej baserats direkt på differensschemat (9.21). Anledningen till detta torde vara de numeriska problem som kan uppstå på grund av den parasitiska vågbildningen. Istället utnyttjas schema med trunkeringsfel av $O(\Delta x, \Delta t^2)$ eller $O(\Delta x, \Delta t)$ som även för små värden på Δx och Δt introducerar en artificiell dämpning. Ett exempel på ett sådant differensschema är RRL-metoden.



a) Beräknade hydrografer 300 m från ledningens inlopp.



b) Beräknade utloppshydrografer.

Fig 9-5 Jämförelse mellan analytisk och numerisk lösning enligt kinematisk vågteori av flödesförlopp i en 600 m lång ledning med cirkulär sektion:

$$d = 1.0\text{ m}, \quad I_0 = 2\text{ ‰}, \quad Q_{\text{full}} = 1.11\text{ m}^3/\text{s}.$$

Delfyllnadsfunktion = Bretting.

Differensschema = ekv (9.21).

9.6 RRL-metoden (Road Research Laboratory model) (Typ B)

RRL-metodens ledningsrutin, se Watkins (1962) och Terstriep och Stall (1969) utvecklades med målsättningen att flödesvågens dämpning skulle kunna beaktas. Metoden inbegriper även beräkning av tillflödet till ledningssystemet som funktion av nederbördens variation i tiden men vi behandlar här enbart ledningsberäkningsrutinen. Denna rutin kan beskrivas som följer:

Låt tillflödet till ledningen ges av kurvan Q_1 , och utflödet av kurvan Q_2 i fig 9-6. Om den i ledningen magasinerade volymen vid tidpunkterna t_m och t_{m+1} är W^m resp W^{m+1} , erhålles med $\Delta t = t_{m+1} - t_m$,

$$W^{m+1} - W^m = \frac{\Delta t}{2} (Q_1^{m+1} + Q_1^m - Q_2^{m+1} - Q_2^m); \quad (9.22)$$

I detta samband känner vi alla storheter vid tidpunkten t_m samt tillflödet Q_1^{m+1} .

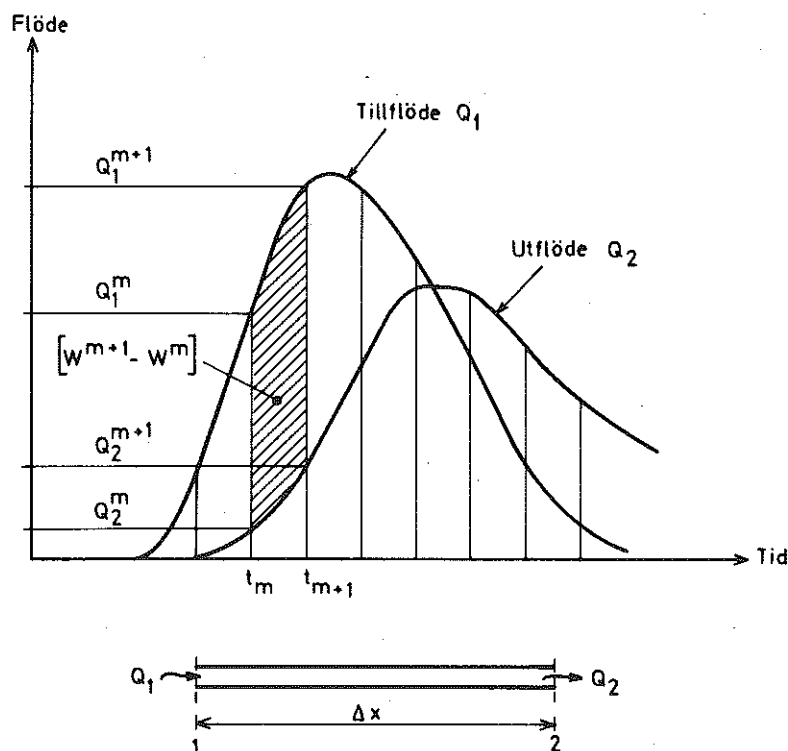


Fig 9-6 RRL-metodens beräkningsmetodik för en ledning med längden Δx .

För att kunna lösa Q_2^{m+1} och W^{m+1} erfordras ytterligare ett samband. Det förutsättes därför att vattendjupet är det samma längs hela ledningen och lika med naturliga vattendjupet Y_2 och att följaktligen Q_2 är en entydig funktion enligt ekv (9.17) av detta vattendjup. Om ledningens längd är Δx erhålles då

$$W^{m+1} = A_2^{m+1} \cdot \Delta x \quad (9.23)$$

$$Q_2^{m+1} = Q_{\text{full}} \cdot F(Y_2^{m+1}/d)$$

där A_2^{m+1} är den mot vattendjupet Y_2^{m+1} svarande våta arean vid utloppet vid tidpunkten t_{m+1} . Både Q_2^{m+1} och W^{m+1} (eller A_2^{m+1}) kan nu lösas ur ekv (9.22) och (9.23). Genom en fortsatt stegvis beräkning erhålles slutligen hela utloppshydrografen. Vid helt fylld ledning sättes utflödet Q_2^{m+1} lika med inflödet Q_1^{m+1} .

I den ursprungliga versionen behandlades hela ledningssystemet i en operation. Numera appliceras dock tekniken ovan successivt på delsträcka efter delsträcka (ledning mellan två brunnar) med början i uppströms randpunkter. Långa ledningar delas beräkningsmässigt upp i flera kortare delledningar.

RRL-metoden användes allmänt i England. Dess ledningsmodell har även byggts in i NIVA-modellen, Lindholm (1974).

Med hänsyn till RRL-metodens relativt stora användning kan det här vara på sin plats att närmare analysera dess egenskaper. Någon sådan analys synes ej tidigare ha gjorts.

Av ekv (9.23) framgår att RRL-metoden i princip utgår från en kinematisk ansats.¹⁾ Om vi inför sambanden $W^{m+1} = A_2^{m+1} \Delta x$, $W^m = A_2^m \Delta x$, kan ekv (9.22) skrivas

$$\frac{Q_2^{m+1} + Q_2^m - Q_1^{m+1} - Q_1^m}{2\Delta x} + \frac{A_2^{m+1} - A_2^m}{\Delta t} = 0 ; \quad (9.24)$$

1) Flöde och vattenstånd entydigt relaterade till varandra.

RRL-metodens ansats skiljer sig således från det kinematiska schemat (9.21) endast genom en "sämre" approximation av tidsderivatan $\partial A / \partial t$. Denna approximation har emellertid den fördelen att den medger simulering av en dämpad vågrörelse. En stabilitetstest visar att schemat applicerat på linjära ekvationer är ovillkorligt stabilt och diffusivt.

En Taylor utveckling kring punkten $(1+1/2, m+1/2)$ ger för schemat (9.24), jfr kap 6.3, ekv (6.7),

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t} + R(\Delta x, \Delta t); \quad (9.25)$$

där termen $R(\Delta x, \Delta t)$ representerar termer av högre ordning. Schemat (9.24) approximerar således ekv (9.19a) med ett trunke-ringsfel av $O(\Delta x, \Delta t^2)$. Vi kan emellertid även se schemat (9.24) som en approximation av differentialekvationen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t}; \quad (9.26)$$

Trunkeringsfelet är då av $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ vilket innebär att differensschemat utgör en bättre approximation av ekv (9.26) än av ekv (9.19a).

Med hjälp av ekv (9.19a) och (9.20) kan vi för det linjära fallet $c_k = \text{konstant}$ överföra ekv (9.26) till formen

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c_k \frac{\partial Q}{\partial x} = K_{\text{diff}} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}; \quad \text{där } K_{\text{diff}} = \frac{\Delta x}{2} c_k \quad (9.27)$$

Detta samband beskriver en kombinerad konvektiv och diffusiv transport karakteriserad av diffusionskoefficienten K_{diff} . Differensschemat (9.24) har således infört en artificiell dämpning vars storlek beror av värdet på diffusionskoefficienten, dvs på Δx . Om alltför stora värden väljes på Δx kan en större dämpning än den verkliga erhållas. RRL-metoden borde därför kompletteras med sådana kriterier för valet av Δx att en underskattning av resulterande flödesmaxima undviks.

Beräkningar genomförda med RRL-metoden kommer att redovisas i kap. 9.9.

Under vissa förutsättningar är det möjligt att ur rörelseekvationerna härleda ett lämpligt värde på Δx . Låt oss förutsätta att den betraktade vågprofilen i huvudsak har kinematisk karaktär. Med utgångspunkt från de i kap 5.5 framtagna relationerna kan vi då för en kanal med rektangulär sektion skriva rörelseekvationerna

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 ; \quad (9.28)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} \left(1 - \frac{4}{9} Fr^2 \right) = I_0 - \frac{Q^2}{K^2} ;$$

där K är transportfaktorn $MAR^{2/3}$ och Fr är Froudes tal. Derivering av den första ekvationen m a p x och den andra ekvationen m a p t ger efter eliminering av termen $\partial^2 Y / \partial x \partial t$ (vi förutsätter att $Fr = \text{konstant}$)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{KB} \frac{dK}{dY} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\left(1 - \frac{4}{9} Fr^2 \right)}{\frac{2Q^2}{K^3} \frac{dK}{dY}} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} ; \quad (9.29)$$

Om vi vidare sätter $Q = Q_n = K \cdot I_0^{1/2}$ i koefficienterna framför derivatorna och inför sambandet $c_k = dQ_n/dA = (1/B) \cdot I_0^{1/2} dK/dY$ erhålles

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c_k \frac{\partial Q}{\partial x} = K_{\text{diff}} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} ; \quad (9.30)$$

där

$$K_{\text{diff}} = \frac{K^3 \left(1 - \frac{4}{9} Fr^2 \right)}{2 Q_n^2 \frac{dK}{dY}} c_k ;$$

Hayami (1955) formulerade ekv (9.30) i den beroende variabeln Y och benämnde detta samband "dämpad kinematisk våg", (diffusing kinematic wave).

Ekv (9.30) har för små värden på Froudes tal, $Fr^2 \ll 1$, visat sig kunna beskriva ett dämpat flödesförlopp i ett naturligt vattendrag, se Hayami (1951), Henderson (1966) och Miller och Cunge (1975). För detta fall utgör således ekv (9.30) en möjlighet för bestämning av Δx i ekv (9.27) så att en realistisk dämpning av vågen erhålles.

Vid icke försumbara värden på Froudes tal är ekv (9.30) mera approximativ. Det är emellertid intressant att notera att $K_{diff} < 0$ om $Fr > 1.5$, dvs om Vedernikovs tal $Ve > 1$. Ett negativt värde på diffusionskoefficienten innebär en "hoptryckning" av vågprofilen och således en tillväxt hos flödestoppen, vilket är i överensstämmelse med den i kap 5.2 framförda tolkningen av Vedernikovs stabilitetskriterium.

Flödesförloppet i en ledning med cirkulär sektion är i högsta grad icke linjärt varför resultatet av den ovan redovisade linjära teorin ej är direkt utnyttjbart. Kriterier för val av Δx , dvs övre gränser för beräkningsstegets längd, måste därför baseras på numeriska experiment med hjälp av en "exakt" beräkningsmodell, t ex DAGVL-B. Fysikaliska laborieexperiment bedömes som varande alltför tids- och kostnadskrävande.

RRL-metoden bygger alltså på en kinematisk ansats som strikt tillämpad skulle lett till en simulering av en odämpad vågrörelse. Det utnyttjade differensschemat visar sig emellertid medföra en av det valda värdet på Δx beroende artificiell dämpning. Motsvarande är fallet även med det "kinematiska schema" som föreslagits av Schaake (1971) och Li, Simons och Stevens (1975)

$$\frac{Q_2^{m+1} - Q_1^{m+1}}{\Delta x} + \frac{A_2^{m+1} - A_2^m}{\Delta t} = 0 ; \quad (9.31)$$

På motsvarande sätt som för RRL-metoden finner man att detta schema approximerar differentialekvationen

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c_k \frac{\partial Q}{\partial x} = c_k \left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{c_k \Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} ; \quad (9.32)$$

med trunkeringsfelet $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$, varför det ger en större dämpning än RRL-metoden. Även om den artificiella dämpningen avtar med värdet på diffusionskoefficienten, dvs med Δx och Δt , synes det oegentligt att benämna schemat (9.31) "kinematisk våg". En adekvat beteckning på såväl detta schema som RRL-metoden är istället "dämpad kinematisk våg".

9.7 EPA-modellen SWMM (Typ B)

EPA (U. S. Environmental Protection Agency) storm water management model (SWMM) är en matematisk modell för beräkning av hela avrinningsförloppet inom ett urbant område, se Lager, Pyatt och Shubinski (1971). I denna modell utnyttjas för beräkning av flödesförloppet i ledningarna en något mera sofistikerad ansats än i de tidigare redovisade modellerna.

För varje delsträcka Δx (i allmänhet ledning mellan två brunnar) utnyttjas en kontinuitetsekvation formulerad på differensform enligt box-schemat, se kap 6.5, fig 6-4b,

$$\frac{(1-\theta_x) \cdot (Q_2^m - Q_1^m) + \theta_x (Q_2^{m+1} - Q_1^{m+1})}{\Delta x} + \frac{\theta_t \cdot (A_2^{m+1} - A_2^m) + (1-\theta_t) (A_1^{m+1} - A_1^m)}{\Delta t} = 0 ; \quad (9.33)$$

där θ_x och θ_t är viktningskoefficienter som för erhållande av numerisk stabilitet måste väljas ≥ 0.5 .

I rörelsemängdekvationen har tidsderivatan försumrats vilket ger följande samband i variablerna V och Y , jfr kap 2.3, ekv (2.16)

$$\frac{1}{2g} \frac{\partial V^2}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x} = I_o - I_f \quad (9.34)$$

Med hjälp av ekv (9.4) kan detta samband skrivas

$$Q = Q_{\text{full}} F(Y/d) \left[\frac{1}{I_0} \left(I_0 - \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{1}{2g} \frac{\partial V^2}{\partial x} \right) \right]^{1/2} \quad (9.35)$$

och överfört på differensform

$$Q_2^{m+1} = Q_{\text{full}} F(Y_2^{m+1}/d) \left(\frac{I}{I_0} \right)^{1/2} \quad (9.36)$$

$$Q_1^{m+1} = Q_{\text{full}} F(Y_1^{m+1}/d) \left(\frac{I}{I_0} \right)^{1/2}$$

där

$$I = I_0 - \frac{Y_2^{m+1} - Y_1^{m+1}}{\Delta x} - \frac{(V_2^{m+1})^2 - (V_1^{m+1})^2}{2g \Delta x};$$

De obekanta storheterna Y_1^{m+1} , Q_2^{m+1} och Y_2^{m+1} i ekv (9.33) och (9.36) kan lösas via ett iterativt förfarande. Flödena Q_1^{m+1} och Q_1^m är givna som randvillkor. Y_1^m , Q_2^m och Y_2^m är kända från föregående beräkningssteg. En stegvis beräkning i tiden ger som för övriga typ B-metoder hela utloppshydrografen för den betraktade ledningssträckan.

Enligt det redovisade datorprogrammet tillåtes ej värden på $I < I_0$. Värden på $I > I_0$ erhålles i allmänhet endast på flödesvågens frontsida där $\partial Y / \partial x < 0$ och $\partial V^2 / \partial x < 0$ och således $Q > Q_{\text{full}} \cdot F(Y/d)$. På vågens baksida har de två derivatorna positiva värden varför I sättes lika med I_0 och $Q = Q_{\text{full}} F(Y/d)$. EPA-modellen bygger alltså på en kinematisk ansats som vid växande flöde modifierats enligt ekv (9.36). Denna modifiering möjliggör tillsammans med värden på θ_x och $\theta_t > 0.5$ en simulering av en dämpad vågrörelse. Enligt den angivna referensen har testberäkningar visat att viktningskoefficienterna ur dämpningssynpunkt bör ges värdet $\theta_x = \theta_t = 0.55$. För $\theta_x = \theta_t = 1.0$ erhålles differensschemat (9.31) medan $\theta_x = 0.5$, $\theta_t = 1.0$ ger RRL-metoden, ekv (9.24).

Något motiv för inskränkningen $I \geq I_0$ har ej angivits. Ett naturligare villkor hade varit $I \geq 0$ i och för undvikande av ett negativt tal under rottecknet i ekv (9.36). Testberäkningar som författaren genomfört tyder emellertid på att villkoret $I \geq I_0$ är

nödvändigt ur stabilitetssynpunkt. Vid flacka ledningslutningar kunde i annat fall helt orimlig vågbildning uppstå på flödesvågens baksida. Vidare visade sig beaktande av termen $(1/g) \partial V / \partial t$ i rörelseekvationen leda till en minskning av schemats dämpande egenskaper vilket är helt naturligt med hänsyn till det förhållandet att termen $\partial V / \partial t$ i huvudsak har motsatt tecken mot termerna $\partial Y / \partial x$ och $\partial V^2 / \partial x$.

EPA-modellen kan ses som ett försök att så modifiera den kinematiska ansatsen att en simulering av en dämpad vågrörelse möjliggörs. Som kommer att framgå av de beräkningsresultat som senare redovisas ger EPA-ansatsen en beräkningsmodell som är mindre känslig för valet av Δx än RRL-metoden. EPA-modellen medför å andra sidan högre beräkningskostnader. Vidare kvarstår risken för besvärande parasitisk vågbildning på speciellt flödesvågens läsida.

9.8 Typ B-modellen DAGVL-B

De tidigare redovisade typ B-modellerna bygger på starkt förenklade ansatser. Skälet till detta är främst att man vill hålla beräkningskostnaderna så låga som möjligt. Det har emellertid bedömts angeläget att komplettera dessa modeller med en "exakt" modell baserad på de fullständiga rörelseekvationerna med en fin geometrisk indelning av ledningssystemet (små Δx). Denna modell skulle utnyttjas i första hand för test av de approximativa modellernas egenskaper, i andra hand för praktiska beräkningar i fall då hög beräkningsnoggrannhet erfordras.

Den utvecklade typ B-modellen DAGVL-B bygger på en numerisk lösning av de fullständiga rörelseekvationerna baserad på det differensschema (nod-segment schemat) som skisserats i kap 7.5. Varje ledning indelas i $N-1$ delsträckor vilket ger $2N-3$ differensekvationer i $2N$ obekanta (Q , Y). Förutom två randvillkor krävs en kompletterande ekvation. Som sådan utnyttjas en kontinuitetsekvation (box-schema) vid uppströms rand för subkritisk strömning och vid nedströms rand för superkritisk ström-

ning. För varje ledning erhålles ett ekvationssystem om $2N$ obekanta vilket löses vid varje tidssteg med hjälp av en dubbelsveps-algoritm. Differensschemats uppbyggnad och egenskaper har tidigare diskuterats i kap 7.5 och vissa beräkningsresultat även redovisats i kap 7.6, fig 7-5 till fig 7-7.

Uppströms- och nedströms randvillkor har utformats enligt de regler som gäller för gradvis varierande strömning och vilka följer av en analys av rörelseekvationerna, se kap 4.5.

Vid subkritisk strömning (Froudes tal $Fr = V / \sqrt{gA/B} < 1$) krävs ett villkor vid övre rand (sektion 1 i fig 9-7) och ett vid nedre rand (sektion N). Övre randvillkoret har alltid formen $Q_1 = Q_1(t)$, dvs flödet är givet som funktion av tiden. Vid nedre randen (fritt utlopp) gäller villkoret $Y_N = Y_{krit}$, där det kritiska djupet Y_{krit} definieras av sambandet $Fr_N = 1$;

Superkritisk strömning ($Fr > 1$) är oberoende av förhållandena vid nedströms rand och vi måste vid uppströms rand ge två villkor, $Q_1 = Q_1(t)$ och $Y_1 = Y_{krit}$.

DAGVL-B genomför vid varje tidssteg en detektering av flödes-situationen och anger därefter vilka randvillkor som skall gälla vid efterföljande tidssteg enligt det schema som redovisas i fig 9-7.

Under ett icke stationärt förlopp kan samtidigt uppnås att $Fr_2 > 1$ och $Fr_{N-1} > 1$, innebärande kritiskt djup som både övre och nedre randvillkor. I ett sådant fall utesluts den kompletterande kontinuitetsekvationen för att ett överbestämt ekvationssystem ej skall erhållas.

För att beräkningen skall kunna startas krävs som begynnelsevillkor att vattenstånd och vattenföring är givna i varje beräkningssektion. Sålunda förutsättes alltid ett stationärt basflöde. Beräkningen av motsvarande vattenstånd sker stegvis sektion för sektion, i uppströms riktning vid subkritisk strömning och i nedströms riktning vid superkritisk strömning, genom iterering baserad på rörel-

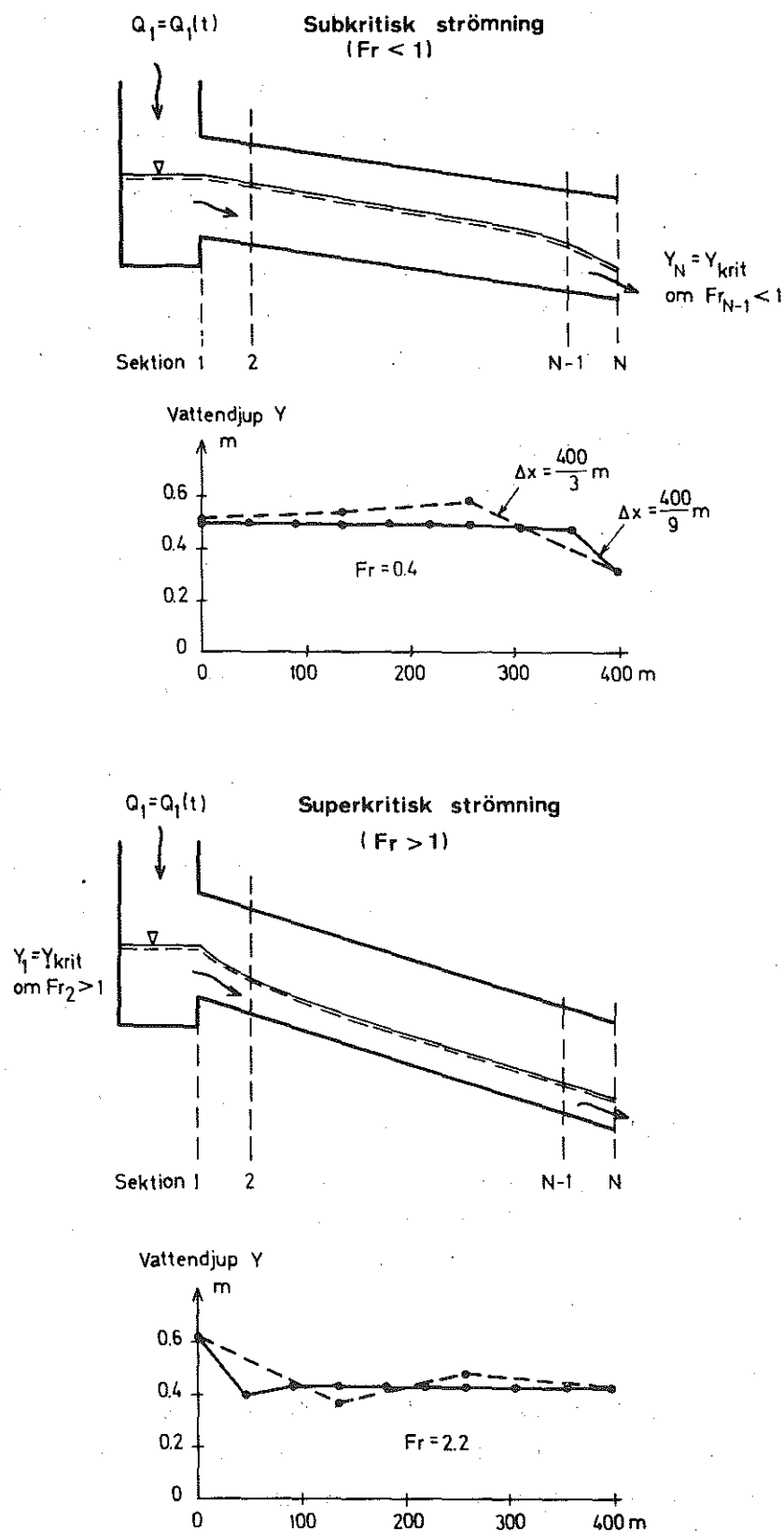
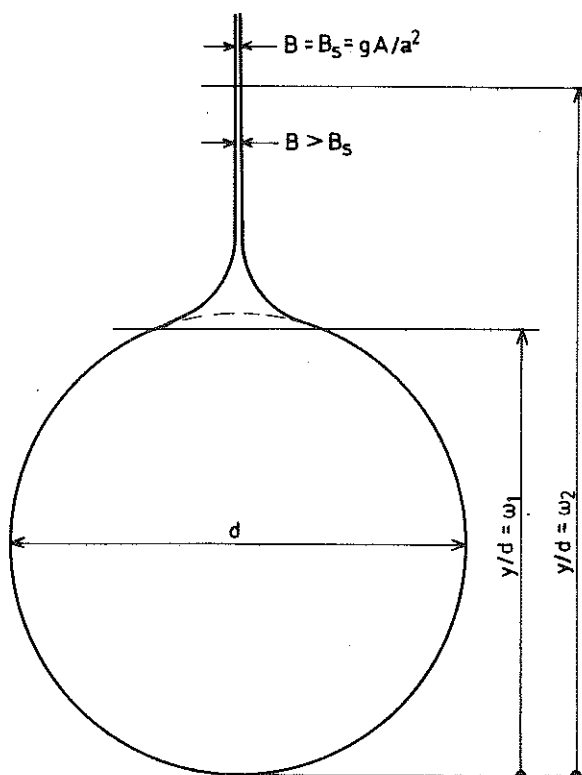


Fig 9-7

Randvillkorens utformning för DAGVL-B. Exempel på vid stationär strömning beräknade vattenytteprofiler. Fritt utlopp vid ledningens nedre ändpunkt.

seekvationerna för stationär gradvis varierande strömning, kap 8.5, ekv (8.7).

Om tillflödet överskrider ledningens kapacitet erhålles strömning i helt fylld sektion. I enlighet med den analogi mellan strömning med fri vattenyta och i helt fylld sektion som härletts i kap 3. har en smal spalt införts i rörets hjässa. Spalten har utformats som en kontinuerlig övergång från rörsektionen enligt fig 9-8. Dess bredd B_s bestäms av sambandet



Alt. 1: ljudhast. $a = 1000 \text{ m/s}$
 $w_1 = 0.9999$
 $w_2 = 1.5$

Alt. 2: ljudhast. $a = 50 \text{ m/s}$
 $w_1 = 0.98$
 $w_2 = 1.5$

($d = 700 \text{ mm}$)

y/d	Spaltbredd B i meter enligt	
	Alt. 1	Alt. 2
0.98	0.20	0.20
1.00	0.01	0.12
1.10	$0.38 \cdot 10^{-5}$	$0.82 \cdot 10^{-2}$
1.20	$0.38 \cdot 10^{-5}$	$0.17 \cdot 10^{-2}$
1.50	$0.38 \cdot 10^{-5}$	$0.15 \cdot 10^{-2}$
> 1.50	$0.38 \cdot 10^{-5}$	$0.15 \cdot 10^{-2}$

Fig 9-8 Spalt införd i rörets hjässa enligt analogin mellan strömning med fri vattenyta och i helt fylld sektion.

$$B_s = gA/a^2$$

(9.37)

där a är ljudets hastighet i vattnet i den helt fyllda sektionen och av storleksordningen 1000 m/s . Ur praktisk synpunkt är vi emellertid knappast intresserade av förlopp med denna tidskala. Vidare försvårar en hög ljudhastighet genomförandet av den numeriska beräkningen, speciellt vid övergång från helt fylld till delvis fylld sektion. Även om den utnyttjade metoden är impli-

cit måste vissa begränsningar läggas på tidsstegets storlek för att numerisk instabilitet ej skall erhållas till följd av alltför stora nivåförändringar per tidsenhet. Denna typ av instabilitet är att hänföra till linjariseringen av kontinuitetsekvationen, dvs förutsättningen att bredden B kan anses vara konstant under det aktuella beräkningssteget.

I fig 9-8 redovisas två alternativa spaltutformningar, dels för ljudhastigheten $A = 1000$ m/s, dels för $A = 50$ m/s. Beräkningsresultat avseende strömning i helt fylld sektion för dessa två alternativ, se fig 9-9, visar att man ur praktisk synpunkt mycket väl kan utnyttja sig av en spaltbredd motsvarande ljudhastigheten 50 m/s. Den ringa eftersläpning som erhålles vid flödesändringens start för $a = 50$ m/s är helt försumbar jämförd med tidsskalan på de aktuella avrinningsförloppen.

En jämförelse mellan med DAGVL-B beräknade och experimentellt uppmätta flödesförlopp i ett 85 m långt plaströr med diametern $d = 0.105$ m, lutningen $I_0 = 5$ ‰ och fulla kapaciteten $Q_{full} = 6,3$ l/s har tidigare redovisats i kap 7.6, fig 7-6. I fig 9-10 görs motsvarande jämförelse för en mera flack inflödeshydrograf. Överensstämmelsen mellan beräknade och uppmätta vattenstånd är som framgår mycket god.

Vilka tidssteg Δt och längdsteg Δx som bör utnyttjas vid beräkningen beror av flödesförloppets karaktär. Som riktvärden för triangulära inflödeshydrografer där flödet varierar från $Q \approx 0$ till $Q \approx Q_{full}$ kan utnyttjas relationerna $T_{bas}/\Delta t > 15$ á 20, $L/\Delta x > 15$ á 20. T_{bas} är inflödeshydrografens varaktighet och L är flödesvågens längd. Dock förutsätter datorprogrammets nuvarande uppbyggnad att varje ledning delas upp i minst tre delsträckor dvs (ledningens längd)/ $\Delta x \geq 3$.

Lager, Pyatt och Shubinski (1971) presenterar en "exakt" lösning med hjälp av karakteristikmetoden av ett flödesförlopp i en mycket lång och flack ledning, se fig 9-11. Den med hjälp av DAGVL-B erhållna lösningen avviker mycket litet från den "exakta".

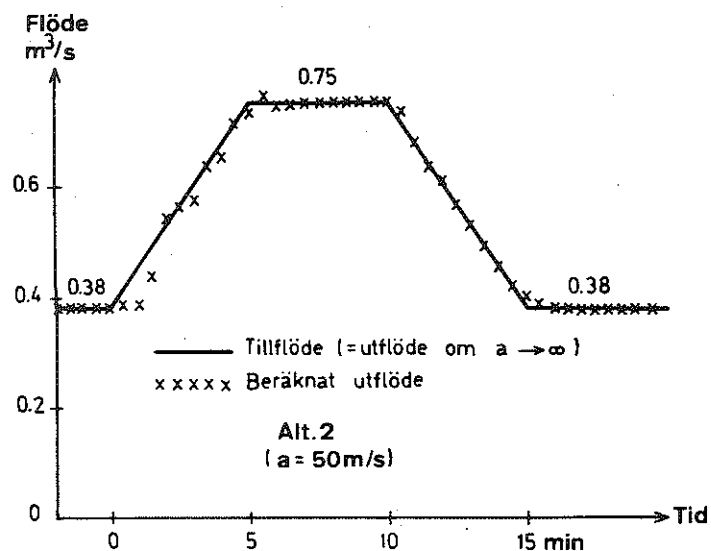
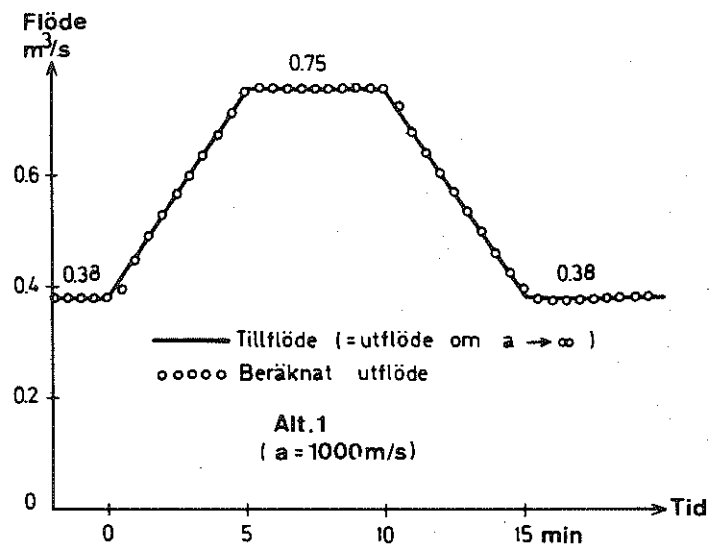
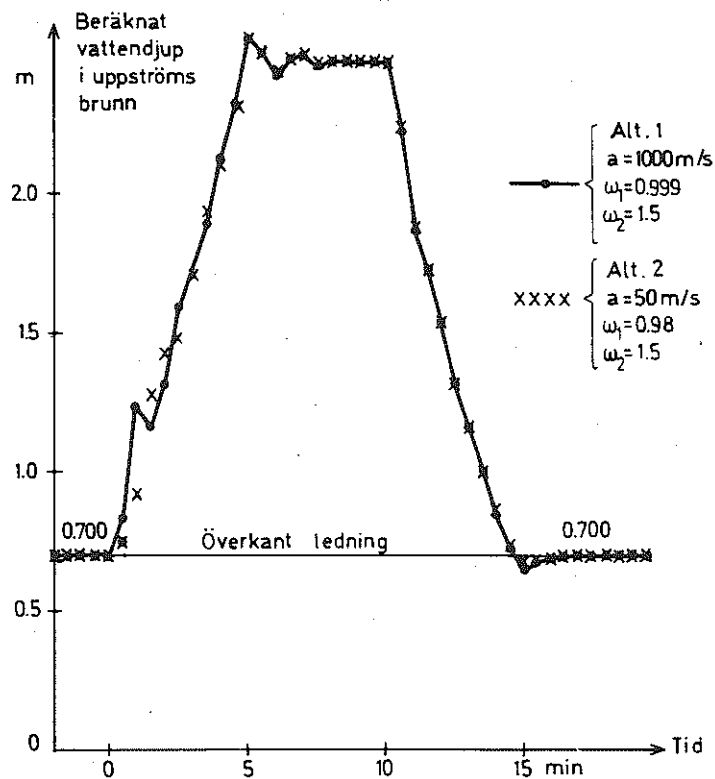
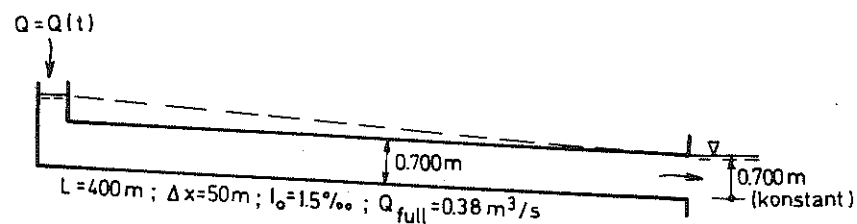


Fig 9-9 Beräkning av icke stationärt flödesförlopp i helt fylld sektion. Tidssteg $\Delta t = 30\text{ s}$. $\theta = 0.5$. Courants tal uppgår i Alt. 1 till $Cr = 600$, i Alt. 2 till $Cr = 30$. Se även fig 9-5.

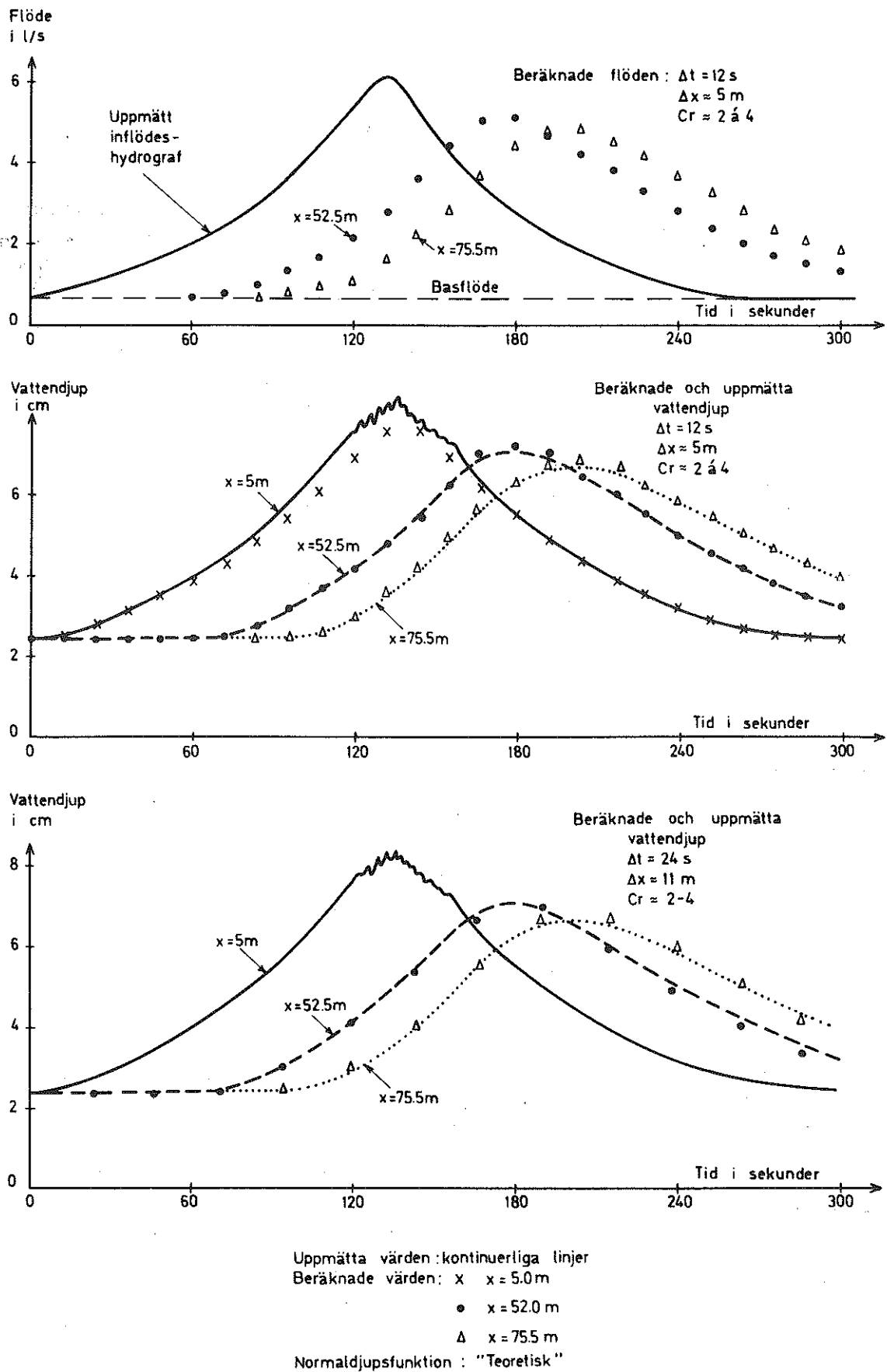


Fig 9-10 Laboratorieförsök CTH. Jämförelse mellan uppmätta och med DAGVL-B beräknade vattendjup.

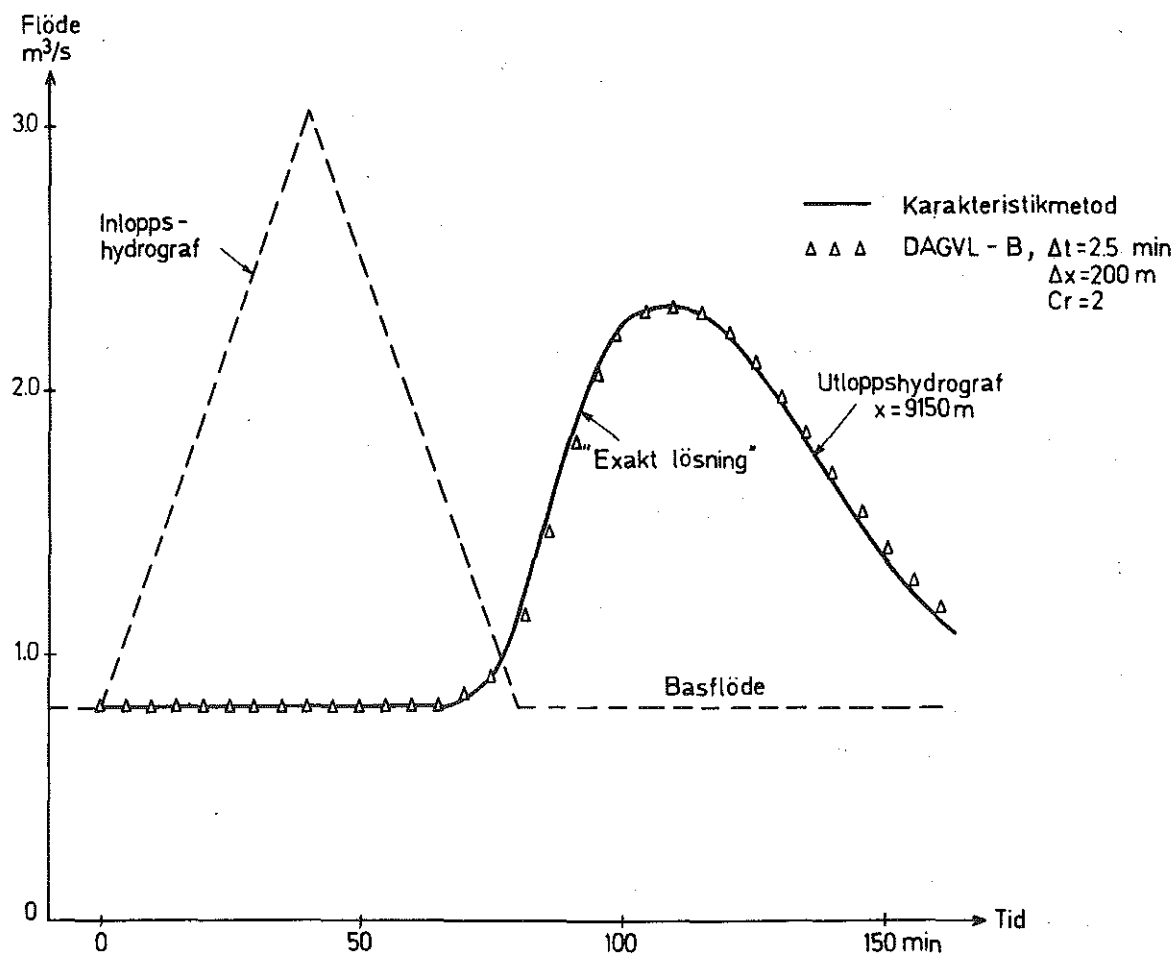


Fig 9-11 Jämförelse mellan utloppshydrograf beräknad med karakteristikmetoden (Lager, Pyatt och Shubinski (1971)) och med DAGVL-B. $d = 1.82 \text{ m}$, $I_0 = 10^{-3}$, $Q_{\text{full}} = 4.11 \text{ m}^3/\text{s}$. Fyllnadsgradfunktion = Teoretisk.

Med utgångspunkt från här redovisade beräkningsresultat och övriga genomförda testberäkningar har typ B-modellen DAGVL-B bedömts vara tillräckligt noggrann för att kunna utnyttjas som referensmodell vid test av de approximativa typ B-modellernas egenskaper vad avser beräkning av flödesförlopp i en rak ledning med fritt utlopp. Sådana jämförande beräkningar kommer att redovisas i följande kapitel.

9.9 Jämförande beräkningar mellan olika typ B-modeller

Den jämförelse som nedan kommer att göras mellan med olika metoder beräknade utloppshydrografer för en enkel rak ledning är av principiell karaktär. Avsikten är att med hjälp av de genomförda beräkningarna demonstrera de olika approximativa modellernas egenskaper. Kvalitativa bedömningar av t ex effekten av det valda beräkningsstegets Δx längd kräver omfattande beräkningar för olika typer av ledningar och inloppshydrografer, lämpligen då med utgångspunkt från en dimensionslös parameterframställning av utnyttjade samband. Härigenom kan beräkningsområdet avsevärt minskas.

Som utgångspunkt för de jämförande beräkningarna har valts två 300 m långa ledningar båda med diametern 1000 mm men med lutningarna 2 ‰ (subkritisk strömning, $Q_{full} = 1.11 \text{ m}^3/\text{s}$) resp. 10 ‰ (superkritisk strömning, $Q_{full} = 2.48 \text{ m}^3/\text{s}$). Utloppshydrografer har för dessa ledningar beräknats för triangulära inloppshydrografer med 10 och 20 min varaktighet (T_{bas}). Tidsteget har för de approximativa modellerna valts så att $T_{bas}/\Delta t = 20$. I samtliga redovisade fall har delfyllnadsfunktionen "Bretting" utnyttjats, se fig 9-2.

De approximativa modellernas (kinematisk våg, RRL-metoden, EPA-modellen) möjlighet att beskriva ett dämpat flödesförlopp bygger i större eller mindre grad på införandet av ett lämpligt stort trunkeringsfel, dvs i huvudsak på ett lämpligt val av beräkningsstegets Δx längd. I avsikt att demonstrera detta har beräkningar genomförts dels för $\Delta x = 300 \text{ m}$ (hela ledningen i ett steg), dels för $\Delta x = 30 \text{ m}$ (ledningen uppdelad i tio beräkningssteg). "Exakta" lösningar har erhållits med hjälp av DAGVL-B för $\Delta t = 0.15 \text{ min}$, $\Delta x = 20 \text{ m}$.

De för "kinematisk våg", RRL-metoden och EPA-metoden utnyttjade datorprogrammen har konstruerats av författaren med utgångspunkt från tidigare redovisade differensschema. I EPA-metoden har de rekommenderade värdena $\theta_x = \theta_t = 0.55$ utnyttjats.

Retardationsmetoden (fig 9-12)

Denna metod medför för flacka ledningar en betydande överskattning av utloppshydrografens toppvärde. Å andra sidan underskattas flödesvågens hastighet vilket, som tidigare påpekats, medför en överskattning av ett ledningssystems genomloppstid. Detta fel är på osäkra sidan eftersom det medför en lägre sannolikhet för överlagring av flödestoppar från olika delar av systemet. Det är således inte självklart att retardationsmetoden applicerad på ett ledningssystem alltid skulle leda till en överskattning av de resulterande flödestopparna.

Differensen mellan de med retardationsmetoden och DAGVL-B erhållna lösningarna är mindre för flacka hydrografer än för branta. Skillnaderna avtar dessutom med växande ledningslutning. Dessa senare slutsatser gäller även för övriga approximativa modeller.

RRL-metoden (dämpad kinematisk våg) (fig 9-13).

RRL-metoden möjliggör en god beskrivning av såväl utloppshydrografens form som hastighet. Flödesvågens dämpning är dock beroende av det valda värdet på Δx . Om alltför stora värden väljes på Δx kan en större dämpning än den verkliga erhållas. Metoden bör därför kompletteras med kriterier för valet av Δx så att en underskattning av flödestoppen undviks. Sådana kriterier skulle kunna utarbetas med hjälp av jämförande beräkningar enligt fig 9-13 genomförda för olika typer av inloppshydrografer och ledningar.

RRL-metoden har ur beräkningspraktisk synpunkt flera fördelar: den är billig och enkel att programmera och den torde knappast ge några beräkningsstörningar i form av parasitisk vågbildning vid strömning i delvis fyllda ledningar.

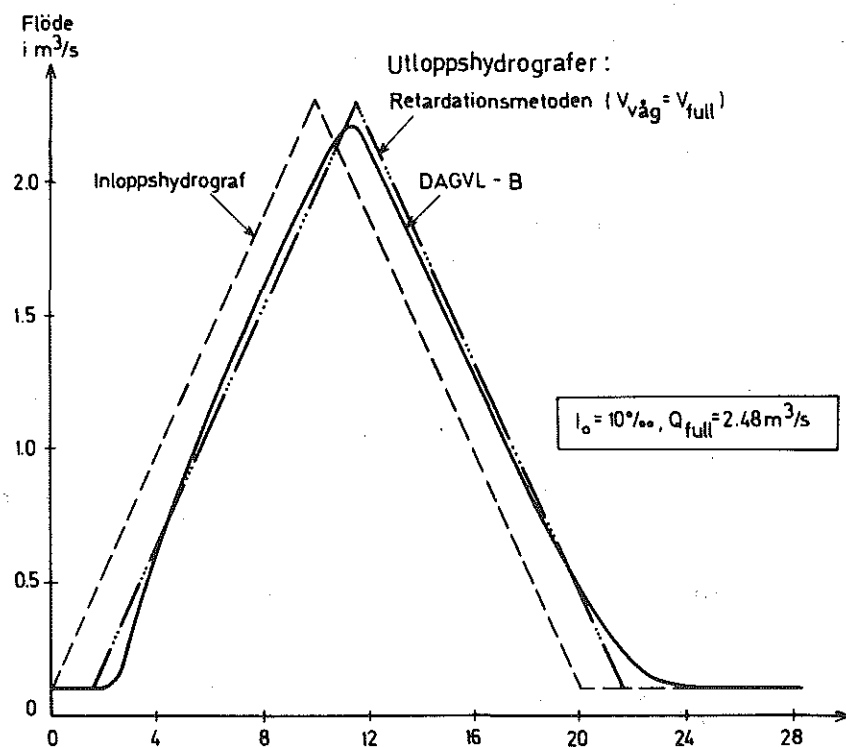
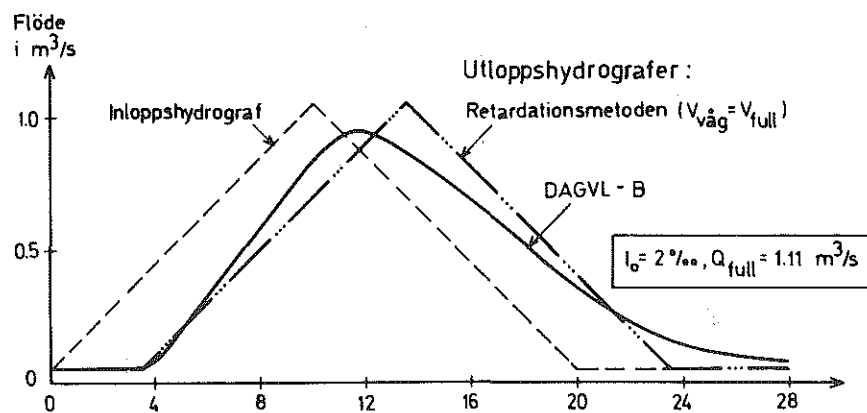
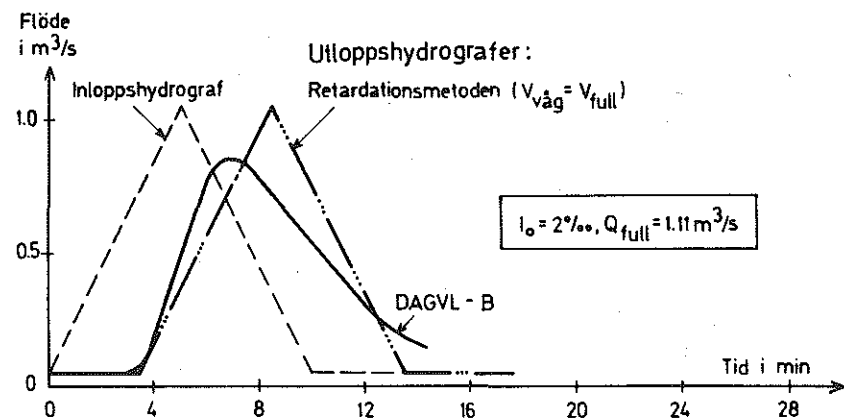


Fig. 9-12. Jämförelse mellan "exakt" utloppshydrograf (DAGVL - B) och utloppshydrograf beräknad enligt retardationsmetoden. Ledningarnas längd är 300 m och deras diameter 1000 mm. Ledningarnas lutning I_0 är angiven i figuren.

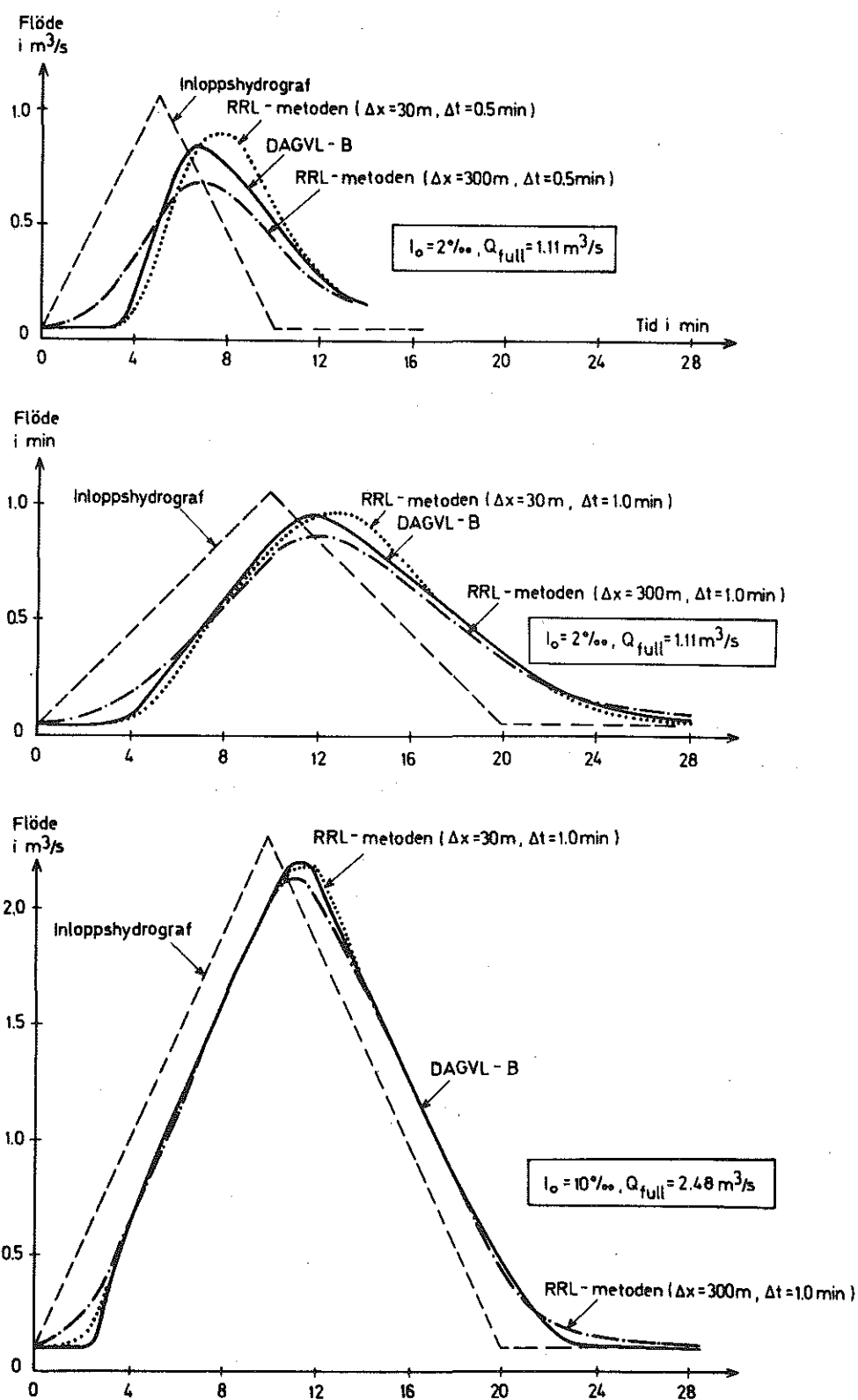


Fig. 9-13

Jämförelse mellan "exakt" utloppshydrograf (DAGVL-B) och utloppshydrograf beräknad enligt RRL-metoden. Ledningarnas längd är 300 m och deras diameter 1000 mm. Ledningarnas lutning I_0 är angiven i figuren.

Kinematisk våg (fig 9-14)

Den "kinematiska vågens" egenskaper har tidigare diskuterats relativt utförligt. Metoden ger i det aktuella fallet en god bild av flödesförloppet och torde för rimliga värden på Δx alltid medföra en viss överskattning av flödestoppen. Nackdelarna med metoden är den stora risken för utbildandet av parasitiska vågor vilka kan medföra icke kontrollerbara beräkningsstörningar.

Metoden är ur beräkningsekonomisk synpunkt jämförbar med RRL-metoden räknat per beräkningssteg Δx .

EPA-modellen (fig 9-15)

EPA-modellen är den beräkningsmodell vars lösningar visar bäst överensstämmelse med DAGVL-B-modellens "exakta" lösning. Den synes vidare vara relativt sett mera okänslig för valet av Δx än övriga metoder. Viss risk för parasitisk vågbildning föreligger, speciellt på flödesvågens läsida.

Metoden är räknat per beräkningssteg Δx avsevärt dyrare än RRL-metoden. För det fall att antalet iterationer m a p "I" i ekv (9.36) begränsas till fem är den 3 á 4 ggr dyrare. Kostnadsdifferensen mellan de båda metoderna minskar givetvis om man i RRL-metoden tvingas arbeta med ett större antal beräkningssteg för att undvika underskattning av flödestoppen.

Några begränsningar av beräkningsstegets Δx längd finns ej inbyggt i EPA-modellen. Emellertid anges att ledningslängder (Δx) större än 900 m bör undvikas.

De givna beräkningsexemplen redovisar de olika approximativa typ B-modellernas egenskaper för det fall att en enkel flödesvåg passerar genom en rörledning. Hur avgörande dessa egenskaper är ur praktisk dimensioneringssynpunkt är svårt att säga utan en jämförelse mellan beräkningar utförda på olika typer av ledningsnät. Det förefaller emellertid rimligt anta att man för ett ledningsnät med många tillflöden kommer att få en avse-

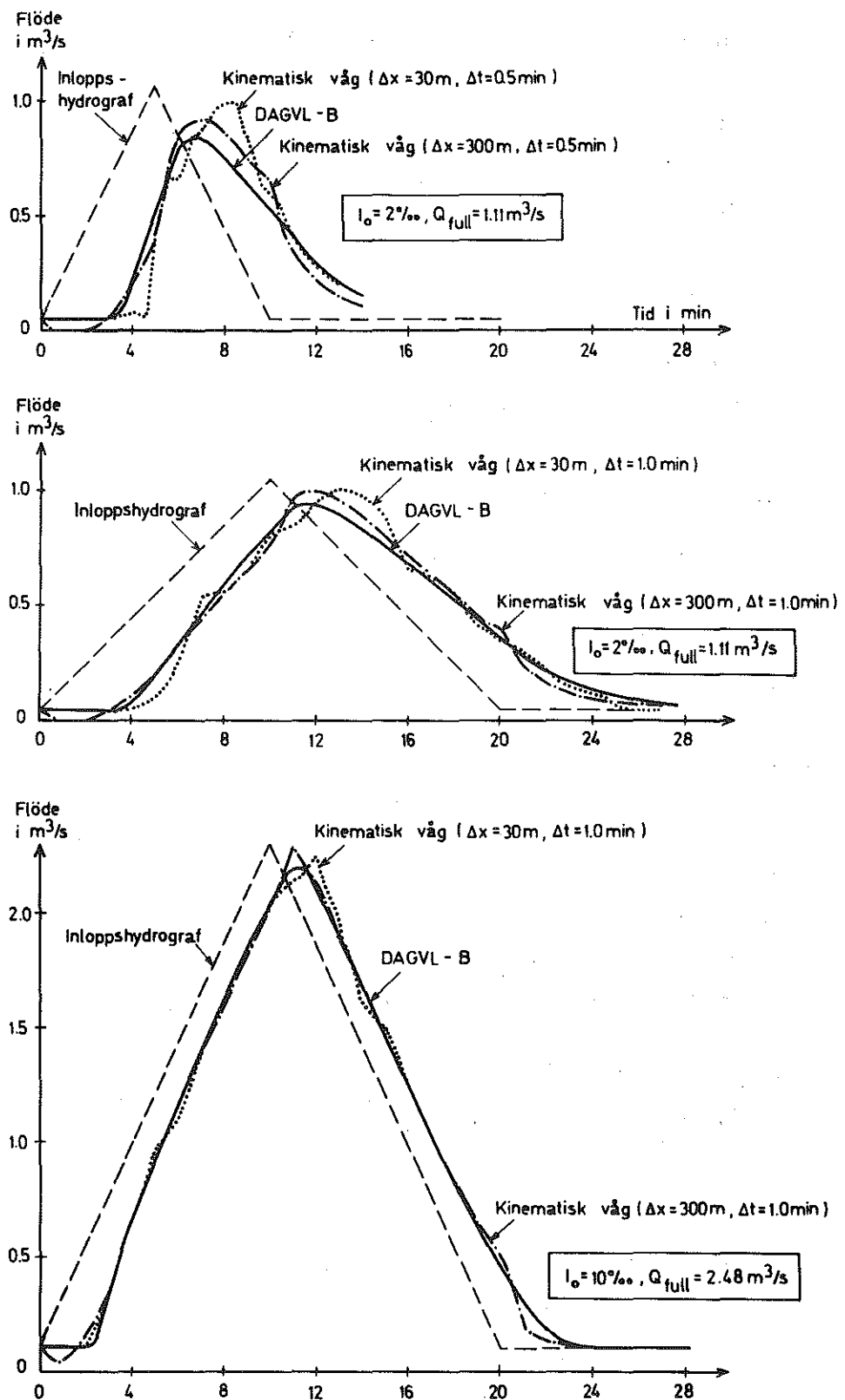


Fig 9-14 Jämförelse mellan "exakt" utloppshydrograf (DAGVL-B) och utloppshydrograf beräknad enligt kinematisk vågteori. Ledningarnas längd är 300 m och deras diameter 1000 mm. Ledningarnas lutning I_0 är angiven i figuren.

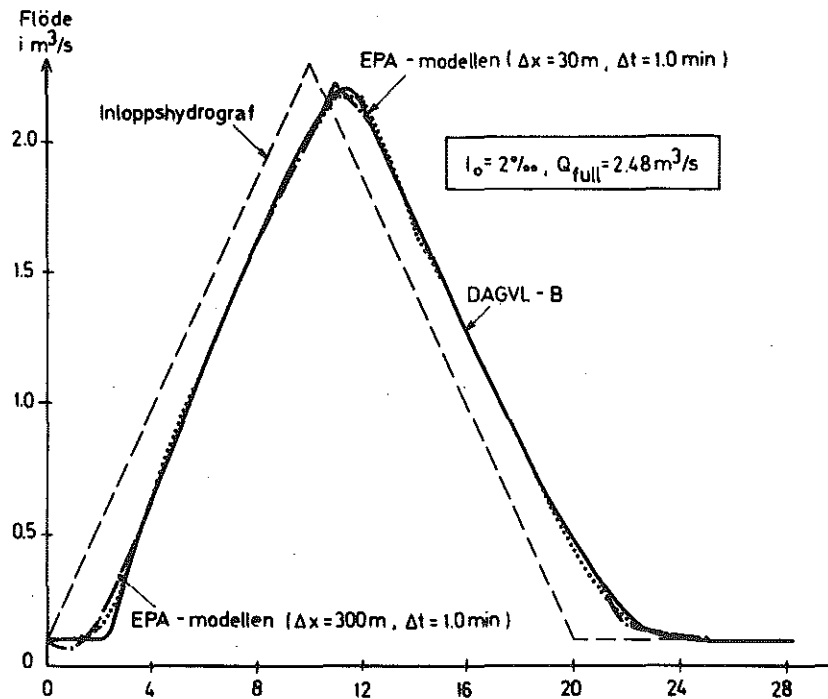
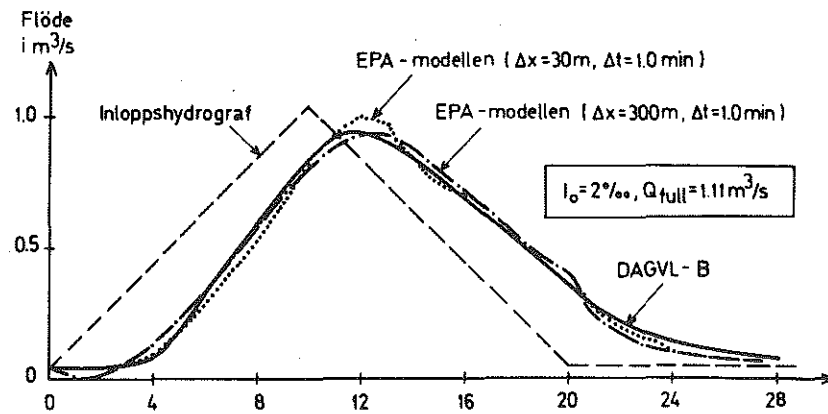
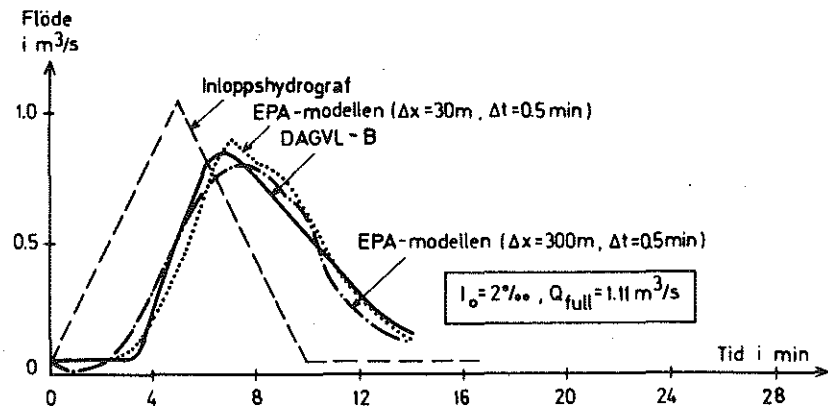


Fig 9-15 Jämförelse mellan "exakt" utloppshydrograf (DAGVL-B) och utloppshydrograf beräknad enligt EPA-modellen. Ledningarnas längd är 300 m och deras diameter 1000 mm. Ledningarnas lutning I_0 är angiven i figuren.

värt mindre differens mellan med olika metoder beräknade utflödeshydrografer än vad som erhöles i det redovisade extremfallet med en enkel ledning med endast ett tillflöde.

Typ B-modellerna förutsätter att man helt kan bortse från dämningseffekten från t ex en nedströms liggande överbelastad ledning. Av stort intresse är givetvis att man söker skaffa sig en uppfattning om dämningseffekternas betydelse ur flödes- och vattenståndssynpunkt. Då det är i det närmaste omöjligt att praktiskt genomföra mätningar av alla tillflöden på ett existerande ledningssystem blir man tvungen att relatera bedömningen av olika metoders tillämplighet till den lösning som så noggrant som möjligt återger flödeshydrauliken, alltså i detta fall en lösning erhållen med hjälp av en typ A-modell.

9.10 Beskrivning av typ A-modellerna HVM och WRE.

På grund av den i vissa avseenden knappa redovisningen i tillgängliga referenser kan endast schematiska beskrivningar ges av flödesmodellernas uppbyggnad och funktion. Eftersom modellerna genomgår successiva revideringar är det dessutom möjligt att de aktuella versionerna i vissa detaljer kan avvika från nedan givna beskrivningar.

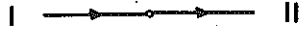
HVM-modellen

Den ledningsnätrutin som ingår i den av ingenjörsfirman Dorsch-Consult utvecklade avrinningsmodellen HVM (Hydrograph-Volume-Method) bygger enligt Klym, Königer, Mevius och Vogel (1972) på de fullständiga rörelseekvationerna med hastigheten och vattendjupet som beroende variabler, jfr ekv (2.16). Överförda till differensform och applicerade på en ledning med längden Δx mellan två brunnar får ekvationerna den form som anges i fig 9-16. Tillflödet till ledningssystemet förutsättes således ske jämnt fördelat längs respektive ledning och ej i knutpunkterna.

Enligt senare uppgifter försummar man numera av beräkningsekonomiska skäl termerna $\partial V / \partial t$ och $\partial V^2 / \partial x$ i rörelseekvationerna.

NODAL POINT EQUATIONS

simplest case



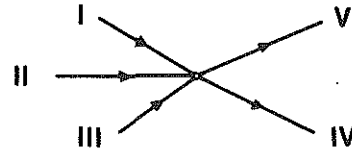
1 INFLOW 1 OUTFLOW

$$Q_{Ii} = Q_{Uii}$$

$$Y_{Ii} + H_{Ii} + \frac{V_{Ii}^2}{2g} \geq Y_{Uii} + H_{Uii} + \frac{V_{Uii}^2}{2g}$$

$$Y_{Ii} + H_{Ii} \geq Y_{Uii} + H_{Uii}$$

most complex case



3 INFLOWS 2 OUTFLOWS

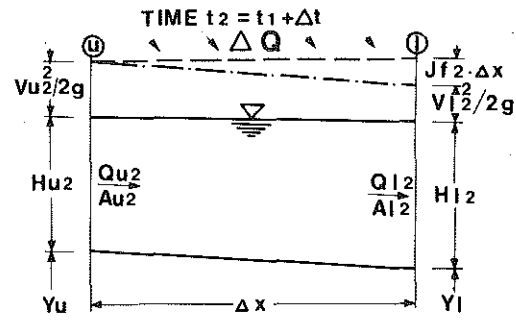
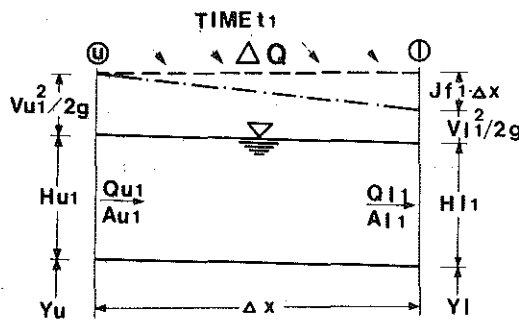
$$\sum_{i=I}^{III} Q_{Ii} = \sum_{i=IV}^{V} Q_{Uii}$$

$$\sum_{i=I}^{III} \left(Y_{Ii} + H_{Ii} + \frac{V_{Ii}^2}{2g} \right) Q_{Ii} \geq \sum_{i=IV}^{V} \left(Y_{Uii} + H_{Uii} + \frac{V_{Uii}^2}{2g} \right) Q_{Uii}$$

$$\min (Y_{Ii} + H_{Ii}) \geq \max (Y_{Uii} + H_{Uii})$$

DORSCH CONSULT

DIFFERENCE EQUATIONS



ENERGY EQUATION:

$$Y_u + \frac{H_{u1} + H_{u2}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{V_{u1}^2}{2g} + \frac{V_{u2}^2}{2g} \right) = Y_l + \frac{H_{l1} + H_{l2}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{V_{l1}^2}{2g} + \frac{V_{l2}^2}{2g} \right) + \frac{\Delta x}{g} \frac{V_{u2} - V_{u1} + V_{l2} - V_{l1}}{2\Delta t} + \frac{\Delta Q}{g \sum A} (\sum V - 4V_{\Delta Q} \cos \alpha) + \frac{Jf_1 + Jf_2}{2} \Delta x$$

CONTINUITY EQUATION:

$$(Q_{l1} - Q_{u1} + Q_{l2} - Q_{u2}) \Delta t + (A_{u2} - A_{u1} + A_{l2} - A_{l1}) \Delta x = 2\Delta Q \Delta t$$

DORSCH CONSULT

Fig 9-16

I HVM-modellen (tyska ingenjörfirman Dorsch-Consult) utnyttjade differensekvationer och knutpunktsrelationer. Efter Klym, Königer, Mevius och Vogel (1972).

Även knutpunktrelationernas formulering framgår av fig 9-16. Det påpekas att olikhetstecknet i knutpunktsrelationerna endast är aktuellt i samband med nivåskillnader mellan inkommande och utgående ledningar. Tyvärr ges inga exempel på relationernas funktion vid olika typer av flödestillstånd. Knutpunktsförluster och övriga tilläggsförluster förutsättes vara beaktade vid valet av ledningarnas friktionskoefficient.

Applicerade på ett ledningsnät ger differensekvationerna ett icke linjärt ekvationssystem vilket skall lösas vid varje tidssteg (implicit icke-linjär metod). Ekvationssystemet löses med hjälp av en iterativ metod, vilken utifrån uppskattade flödesdjup beräknar de okända flödena i nedströms riktning och sedan beräknar motsvarande vattendjup i uppströms riktning. Proceduren upprepas intill dess givna konvergenskriterier är uppfyllda. Enligt tidigare angiven referens utnyttjas normalt ca 30 iterationer.

Enligt uppgift behöver några speciella arrangemang ej vidtagas vid strömning i helt fylld ledning.

Några speciella tester av ledningsnätrutinen redovisas ej. Där- emot har beräkningar genomförda med den totala avrinningsmodellen jämförts med uppmätta avrinningsförlopp.

WRE-modellen

Den tidigare redovisade EPA-modellen har av Water Resources Engineers, Inc. (WRE) vidareutvecklats vad avser dels avrinningen på mark, dels rutinen för flödesberäkning i ledningar, se Shubinski och Roesner (1973). I WRE-modellen har således EPA-modellens B-rutin ersatts med en flödesmodell av typ A.

I WRE-modellen reduceras ledningsnätet till en serie av länkar (ledningar) vilka är sammankopplade i noder (knutpunkter), se fig 9-17. För varje ledning formuleras med utgångspunkt från rörelsemängdekvationen skriven på formen (H är vattennivån

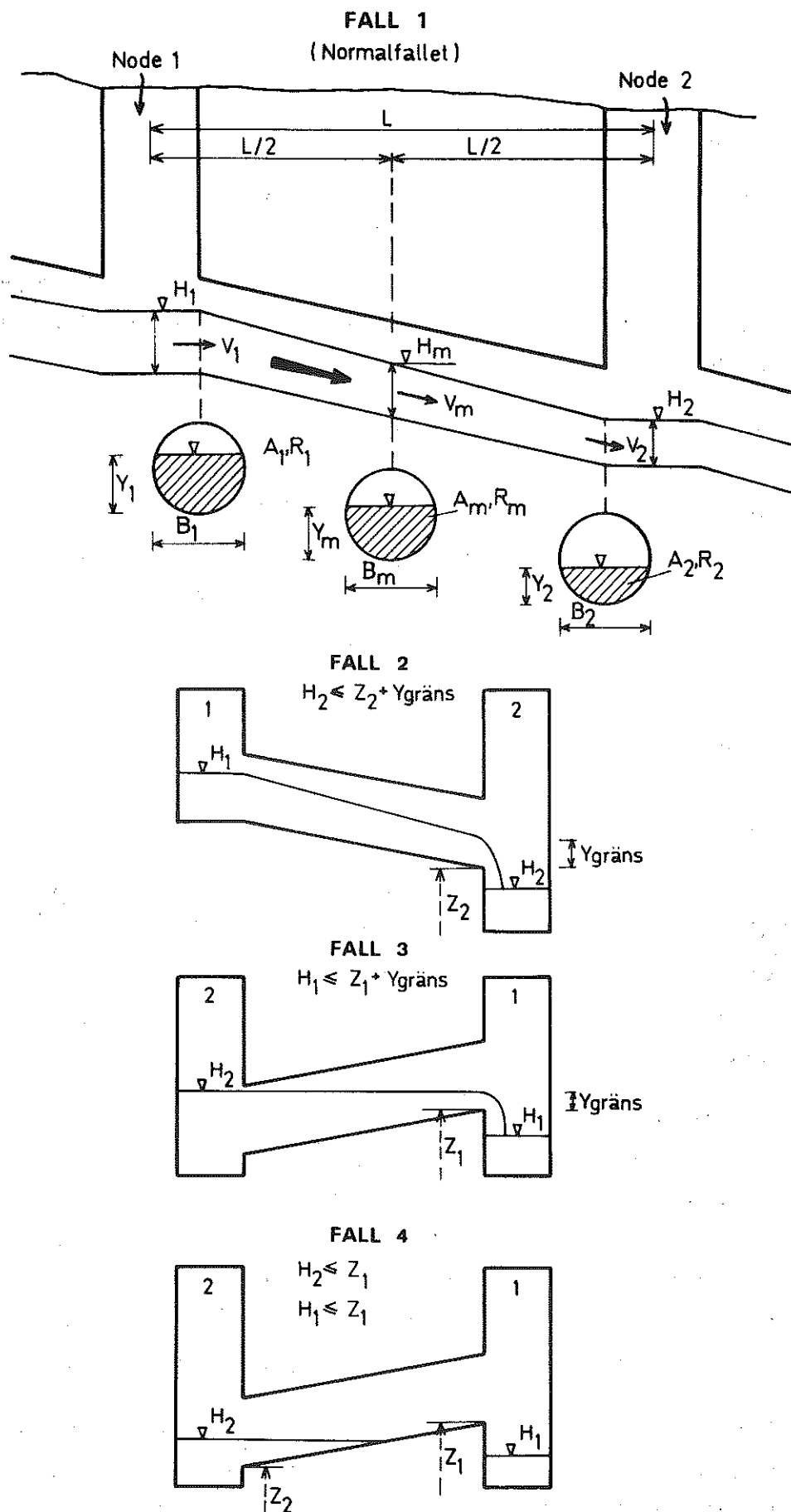


Fig 9-17.

WRE-modellen. Definitioner och randvillkor.
Efter Kibler, Mehler, Muhlbauer, Shubinski
och Stottman (1974). $Y_{\text{gräns}} = Y_{\text{krit}}$

i aktuellt höjdsystem)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -gAI_f + 2V \frac{\partial A}{\partial t} + V^2 \frac{\partial A}{\partial x} - gA \frac{\partial H}{\partial x}; \quad (9.38)$$

ett explicit uttryck för flödet $Q_{t+\Delta t}$ i ledningen vid tidpunkten $t+\Delta t$ (Q förutsättes vid varje tidpunkt vara konstant längs ledningen)

$$Q_{t+\Delta t} = f(Q_t, V, A, R, H, L) \quad (9.39)$$

där V , A , R och H är viktade medelvärden på hastighet, area, hydraulisk radie och vattennivå vid den gamla tidpunkten t (vad avser arean A även vid tidpunkten $t-\Delta t$) enligt schemat

$$V = \frac{1}{4} (V_1 + 2V_m + V_2) \quad (9.40)$$

Kontinuitetsekvationen för en knutpunkt skrivs

$$H_{t+\Delta t} - H_t = \Delta t \frac{\sum Q}{\sum S}; \quad (9.41)$$

där $\sum Q$ är nettoinflödet, inklusive externt tillflöde till knutpunkten, under tiden Δt . $\sum S$ är summan av brunnens area och vattenlinjearean i anslutna ledningar, den senare i normalfallet beräknad som halva ledningslängden gånger vattenlinjeareans medelbredd.

En rörelsemängdekvation är således applicerad på varje ledning och en kontinuitetsekvation på varje knutpunkt utan implicit koppling. $Q_{t+\Delta t}$ beräknas först ur ekv (9.39) varefter $H_{t+\Delta t}$ erhålles ur ekv (9.41). I själva verket utnyttjas en sk halvstegsintegration innebärande att man först beräknar $\partial Q/\partial t$ och $\partial H/\partial t$ vid tidpunkten $t+\Delta t/2$ och därefter förutsätter att dessa värden gäller under hela intervallet Δt .

När alla ledningar till en knutpunkt går fulla finns ingen annan magasineringsvolym tillgänglig än den i själva knutpunkten. För att få en jämn övergång till helt fylld ledning förutsättes en linjärt avtagande vattenlinjearea S enligt (beteckningar se fig 9-18),

det är motiverat dels av det förhållandet att den explicita beräkningsmetoden i och för numerisk stabilitet kräver att tidssteget Δt uppfyller Courant villkoret

$$\Delta t \leq \frac{L}{|V \pm \sqrt{gA/B}|} ; \quad (9.43)$$

dels för att minska riskerna för den typ av instabilitet som är att hänföra till linjariseringen av kontinuitetsekvationen och som tidigare redovisats för DAGVL-B.

De randvillkor som utnyttjas i WRE-modellen återges i fig 9-17. Modellen undersöker alltså förekomsten av kritiskt djup i ledningarnas nedströmssektion. Enligt Shubinski och Roesner (1973) detekteras även superkritisk strömning. Vattensprång diskuteras ej.

De två beskrivna modellerna är konstruerade för beräkning av flöden och vattenstånd i komplicerade ledningsnät med både konvergerande och divergerande flöden och under beaktande av dämningseffekter. De karakteriseras av en grov geometrisk indelning av ledningssystemet vilket måste leda till en schematisk simulering av dämningseffekterna vilka ofta kan vara begränsade till en kort sträcka uppströms knutpunkten. Med hänsyn till de relativt goda resultat som tidigare redovisats för de approximativa typ B-modellerna förefaller det emellertid rimligt förmoda att man trots den grova geometriska beskrivningen kan uppnå en tillfredsställande simulering av i varje fall flödets variation i tid och rum. Mera diskutabelt är givetvis om HVM- och WRE-modellerna kan beskriva vattenståndsutvecklingen med samma noggrannhet.

WRE-modellens knutpunktsrelationer synes bygga på samma grundprincip som de som utnyttjas i DAGVL-A, se kap 9.3, fig 9-4. HVM-modellen utgår från energirelationen ekv (9.12) kombinerat med ett "backwater condition". Tyvärr anges ej hur det är möjligt att genomföra denna ansats utan att beakta flödessituationen (subkritiskt eller superkritiskt flöde) i inkommande ledningar.

Några speciella tester av ledningsnätrutinerna redovisas ej. Där-
emot har beräkningar genomförda med de totala avrinningsmodeller-
na jämförts med uppmätta avrinningsförlopp. De antaganden som
måste göras beträffande avrinningsförloppet på markytan är emeller-
tid så förhållandevis grova att en sådan jämförelse mellan observerad
och beräknad avrinning mera blir en test av ansatt ytavrinning än av
ledningsnätrutinens egenskaper.

Här ej beskrivna typ A-modeller är den ledningsnätrutin som in-
går i den av SOGREAH, Grenoble, utvecklade avrinningsmodel-
len Caredas, se Rousset och Lorgere (1974), samt i Illinois Storm
Sewer System Simulation (ISS) Model,¹⁾ se Yen och Sevuk (1975).
Tillgängliga referenser över dessa modeller är emellertid alltför
knapphändiga för att möjliggöra en meningsfull beskrivning.

9.11 Typ A-modellen DAGVL-A

Ledningsnätmodellen DAGVL-A är en vidareutveckling av typ B-
modellen DAGVL-B, se kap 9.8. Denna senare modell har såle-
des kompletterats med dels knutpunktsvillkor som beaktar dämningss-
effekter, dels en dubbelsvepsalgoritm för lösningen av det av hela
ledningsnätet definierade ekvationssystemet. Den numeriska
lösningen av rörelseekvationerna är densamma som för DAGVL-B.
DAGVL-A kan i likhet med DAGVL-B endast behandla konverge-
rande ledningssystem.

Knutpunktsvillkorens utformning har tidigare redovisats och dis-
kuterats i kap 9.3, ekv (9.14), (9.15) och fig 9-4. I avsaknad av
experimentellt bedömningsunderlag måste valet av tryckförlust-
koefficientens k -värde bli relativt godtyckligt. Av denna anled-
ning förutsättes att k -värdet är konstant och oberoende av flö-
desfördelningen i knutpunkten.

Då dämning av inkommande flöden ej erhålles överensstämmer
DAGVL-A:s randvillkor med de som givits för DAGVL-B, se
fig 9-7.

- 1) Bygger på karakteristikmetod med specificerade intervall.
Viss hänsyn tas till dämningseffekter. Strömning i helt fylld
sektion kan ej behandlas.
Ref: Sevuk, A.S., Yen, B.C. och Peterson, G.E. (1973):
Illinois storm sewer system simulation model: Users manual -
Research report No 73, Water Resources Center, University
of Illinois, Urbana, Illinois, October 1973.

Efter varje genomfört beräkningssteg i tiden utförs en kontroll av flödesförhållandena i alla i ledningsnätet ingående ledningar. Utifrån resultatet av denna kontroll väljes sedan de för nästa beräkningssteg gällande knutpunktsvillkoren.

I de fall uppträdande vattensprång ger icke kontrollerbara beräkningsstörningar (se kap 7.7) kan de delar av ledningsnätet där störningarna uppträder beräknas enligt typ B-modellens DAGVL-B:s förutsättningar, dvs under antagande av fri utströmning till nedströms liggande brunn. Även andra åtgärder kan dock vidtagas. Sålunda har i programmet inbyggts randvillkor vilka tillåter dämning endast vid subkritiska förhållanden. Effekten på beräknade flöden och vattenstånd av sådana approximativa förfaranden får bedömas från fall till fall.

Tillflödet till ledningssystemet kan ske i knutpunkterna och/eller jämnt fördelat längs respektive ledning. Det alternativ väljes som bäst svarar mot de aktuella förhållandena.

Genom att beräkningarna bygger på en linjariserad kontinuitets-ekvation utan iterationer kan ett icke försumbart kontinuitetsfel erhållas vid alltför stora beräkningssteg i tiden. Detta förhållande gäller i högre grad för DAGVL-A än för DAGVL-B, vilket sammanhänger med en något oroligare vattenståndsutveckling, speciellt då vid förekomst av vattensprång. En kontinuitetskontroll har därför byggts in i programmet.

9.12 Beräkning av ledningssystem: Jämförelse mellan utloppshydrografer beräknade med DAGVL-A och olika typ B-modeller.

Som utgångspunkt för de jämförande beräkningarna har tagits det i fig 9-19 skisserade hypotetiska ledningssystemet om 26 ledningar. Detta system har tidigare utnyttjats av Lindholm (1975) och Sjöberg (1976). Jämförelsen avser enbart beräknade flöden.

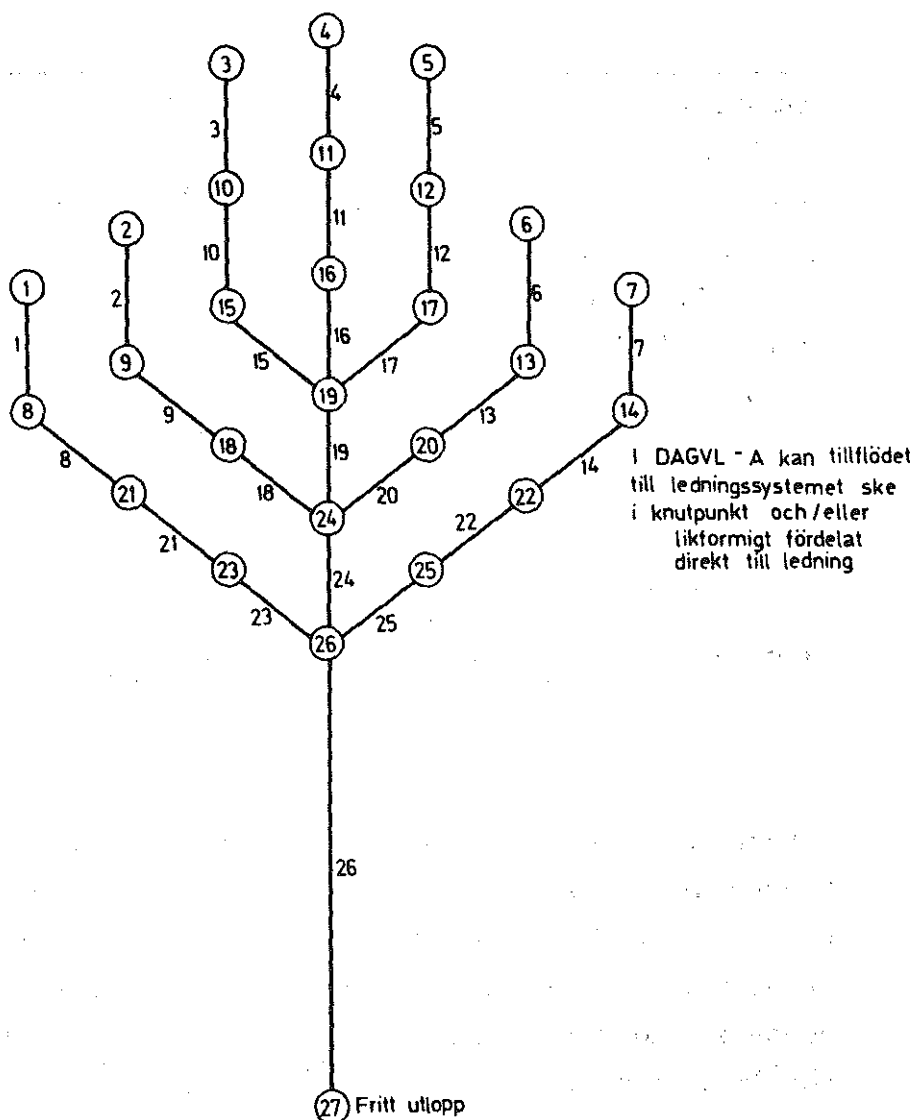


Fig 9-19

Hypotetiskt ledningssystem om 26 ledningar.
 Ledningarnas karakteristika framgår av tabell 9-1.
 I redovisade beräkningar förutsättes tillflödet ske i knutpunkterna.

Varje ledning har antagits vara 300 m lång, utom själva utloppsledningen, som givits längden 1200 m. Ledningarnas ekvivalenta sandråhet har satts till 1 mm. I knutpunkterna har, enligt Göteborgs VA-verks praxis, utgående och inkommande ledningars centrumlinjer förutsatts sammanfalla. Ledningarnas diametrar och längd anges i tabell 9-1, tillsammans med ledningarnas fulla kapacitet för två alternativa lutningar I_0 .

Ledningens nummer (se fig 9-19)	Diam. i mm	Längd i m	Q_{full} i m^3/s	
			$I_o = 6 ‰$	$I_o = 1.5 ‰$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	700	300	0.75	0.38
8, 9, 10, 11, 12, 13, 14	900	"	1.5	0.73
15, 16, 17, 18, 20, 21, 22	1000	"	1.9	0.96
23, 25	1100	"	2.5	1.2
19	1750	"	8.3	4.2
24	2000	"	12.8	5.9
26	2250	1200	16.1	8.0

Tabell 9-1. Ledningarnas diameter och längd samt ledningarnas fulla kapacitet Q_{full} vid lutningarna $I_o = 1.5$ resp $6 ‰$.

Tillrinningen till systemet sker direkt i knutpunkterna. Inloppshydrograferna har förutsatts ha triangulär form med en varaktighet av 20 minuter. De valda tillflödena motsvarar i huvudsak de dimensionerande tillflödena vid resp. ledningslutningar. I fig 9-23 redovisas dock en beräkning för ett tillflöde som avsevärt överstiger det dimensionerande. Utnyttjade värden på toppflöde och basflöde redovisas i respektive figurer tillsammans med beräknade utloppshydrografer.

Vid de med DAGVL-A och DAGVL-B genomförda beräkningarna har för erhållande av så noggrann lösning som möjligt varje ledning uppdelats i 8 delsträckor, dvs $\Delta x = 37.5$ m. Värdet på Δt har varit 0.25, 0.5 eller 1.0 min allt efter flödesförloppets branthet. Delfyllnadsfunktionen enligt "Bretting" har utnyttjats.

Beräkningarna enligt EPA-modellen och enligt kinematisk vågteori har utförts med $\Delta x = 300$ m och $\Delta t = 1.0$ min. I RRL-metoden har använts dels $\Delta x = 300$ m, dels $\Delta x = 150$ m i kombination med tidsteget 1.0 min.

Beräkningarna enligt retardationsmetoden har på författarens uppdrag genomförts av två konsulterande ingenjörsfirmor vilka presenterade i huvudsak överensstämmande lösningar. Här presenteras de lösningar som erhållits med våghastigheten $V_{våg} = V_{full}$.

Fig 9-20:

I avsikt att studera effekten av knutpunkternas tryckförlustkoefficient k har beräkningar genomförts med DAGVL-A för värdena $k = 0$, 0.5 och 1.0 (samma värde för alla knutpunkterna). Differenserna mellan för $k = 0$ och $k = 0.5$ erhållna utloppshydrografer är små. Värdet $k = 1.0$ ger en signifikant sänkning av toppflödet i det brantare ledningssystemet ($I_0 = 6 \text{ ‰}$). De små strömningshastigheterna i det flacka systemet ($I_0 = 1.5 \text{ ‰}$) medför att tryckförlusterna får en relativt sett mindre effekt på flödestoppens värde.

De genomförda beräkningarna tyder på att knutpunktsförlusterna får en signifikant effekt på de beräknade utloppshydrograferna först vid stora värden på tryckförlustkoefficienten k . En bidragande orsak till detta förhållande är knutpunkternas utformning, dvs att inkommande ledning ligger högre än utgående ledning. Innan mera generella slutsatser kan dras bör därför beräkningar av den typ som redovisas i fig 9-20 genomföras för olika existerande ledningssystem.

Som utgångspunkt för jämförelser med utloppshydrografer beräknade med olika typ B-modeller har tagits den för $k = 0$ erhållna hydrografen, vilken alltså är på "säkra sidan" vad avser toppflödet.

Fig 9-21:

Ett ledningssystem med lutningen 6 ‰ är att betrakta som ett relativt brant system. Flödesförloppet är i huvudsak superkritiskt med värden på Froudes tal i intervallet $0.8 - 1.3$.

Med hänsyn till de resultat som tidigare redovisats i kap 9.9 för ledning med brant lutning skulle man kunna förvänta sig relativt små skillnader mellan de erhållna lösningarna. Så visar sig även vara fallet.

De med DAGVL-A ($k = 0$) och DAGVL-B erhållna hydrograferna är praktiskt taget identiska varför endast den förra angivits. Även EPA-modellen och RRL-metoden ($\Delta x = 150 \text{ m}$) visar god överensstämmelse med DAGVL-A:s lösning.

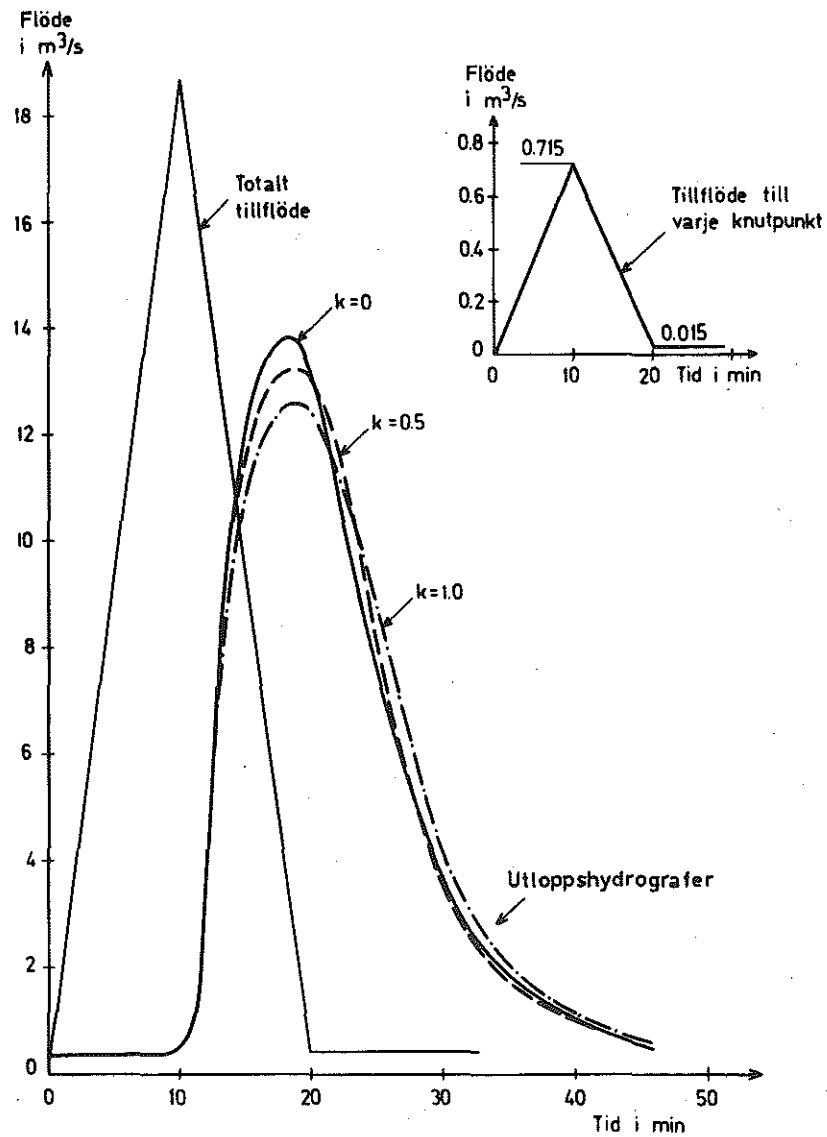
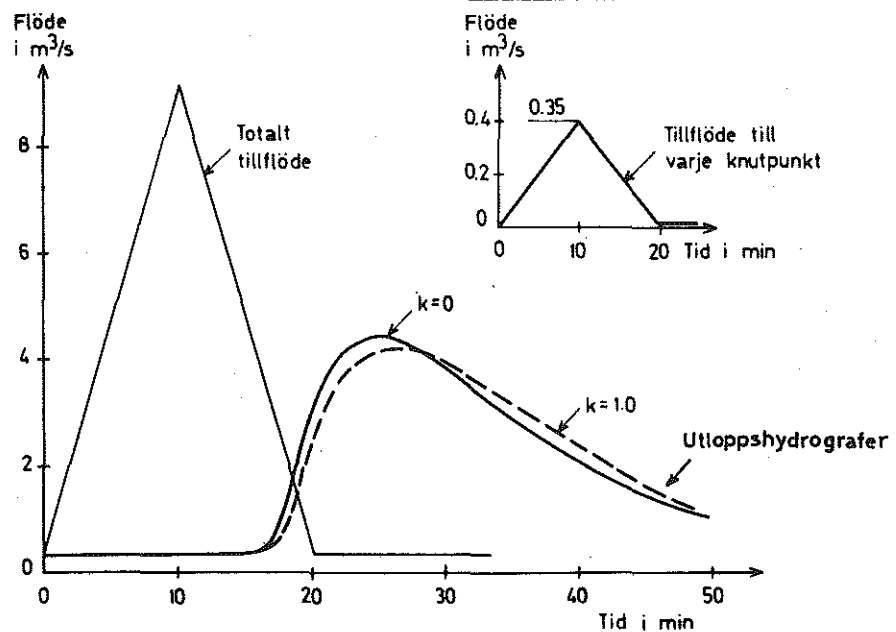
a) Ledningarnas lutning $I_0 = 6 \text{ ‰}$ b) Ledningarnas lutning $I_0 = 1.5 \text{ ‰}$

Fig 9-20

Inverkan av valt värde på tryckförlustkoefficienten k i ekv (9.15) på med DAGVL-A beräknad utloppshydrograf för ledningssystemet i fig 9-19.

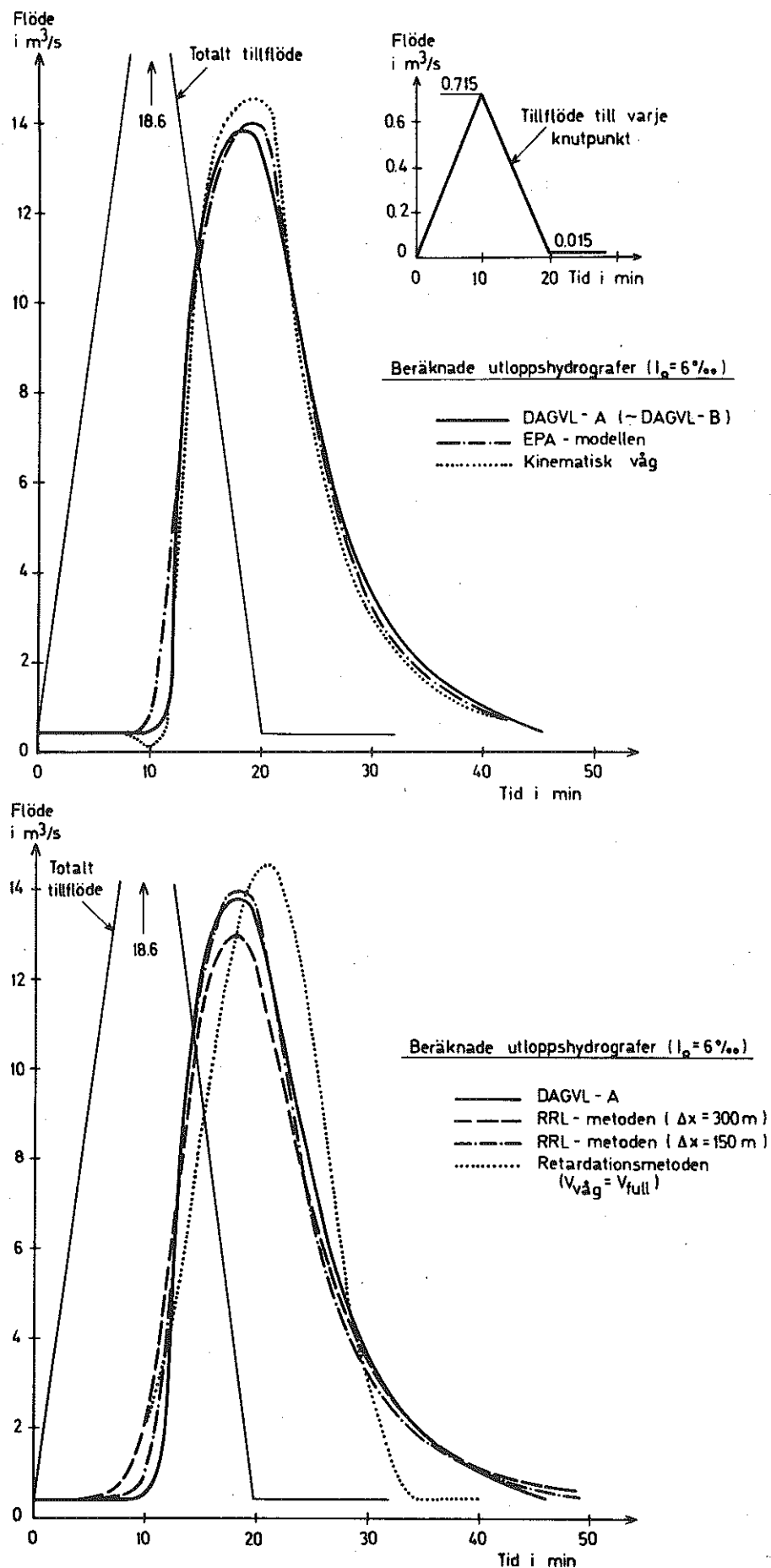


Fig 9-21 Med olika modeller beräknade utloppshydrografer för ledningssystemet i fig 9-19.
 Ledningarnas lutning $I_0 = 6\text{‰}$

Den "kinematiska vågen" överskattar toppflödet men ger en god bild av hydrografens utseende. Beräkningen kunde genomföras utan att störande parasitisk vågbildning erhöles.

Retardationsmetoden slutligen, ger en för sen utloppshydrograf med något för högt toppflöde.

Fig 9-22:

Flödesförhållandena är vid denna lutning (1.5 ‰) hela tiden subkritiska med värden på Froudes tal i intervallet 0.4 - 0.7.

Liksom tidigare ger DAGVL-A, DAGVL-B, EPA-modellen och RRL-metoden ($\Delta x = 150$ m) i huvudsak motsvarande utloppshydrografer. Både "kinematiska vågen" och retardationsmetoden överskattar klart toppflödets storlek. Retardationsmetodens utloppshydrograf är dessutom starkt försenad.

Den långa utloppsledningen (nr 26) bidrar givetvis till en kraftig dämpning av flödesvågen. Att så är fallet framgår av tabell 9-2. Tabellen visar även att retardationsmetoden ej ger någon överskattning av utflödet från knutpunkt 26 sett relativt övriga beräkningsmodeller.

Beräkningsmodell	(a)		(b)	
	Max. utflöde (m^3/s) från knutpunkt nr		Max. utflöde (m^3/s) från knutpunkt nr	
	26	27	26	27
DAGVL-A ($k = 0$)	14.5	13.8	5.2	4.4
DAGVL-B	14.6	13.9	5.5	4.6
EPA- modellen	14.6	14.1	5.1	4.5
RRL-metoden ($\Delta x = 300$ m)	13.8	13.0	4.7	3.9
($\Delta x = 150$ m)	14.5	13.9	5.1	4.6
Kinematisk våg	15.0	15.0	6.1	5.9
Retardationsmetoden	14.5	14.5	5.2	5.2

Tabell 9-2 Med olika modeller beräknade maximala utflöden från knutpunkterna nr 26 och 27.

(a): Tillflöde och ledningslutning enl fig 9-21.

(b): "- "- 9-22.

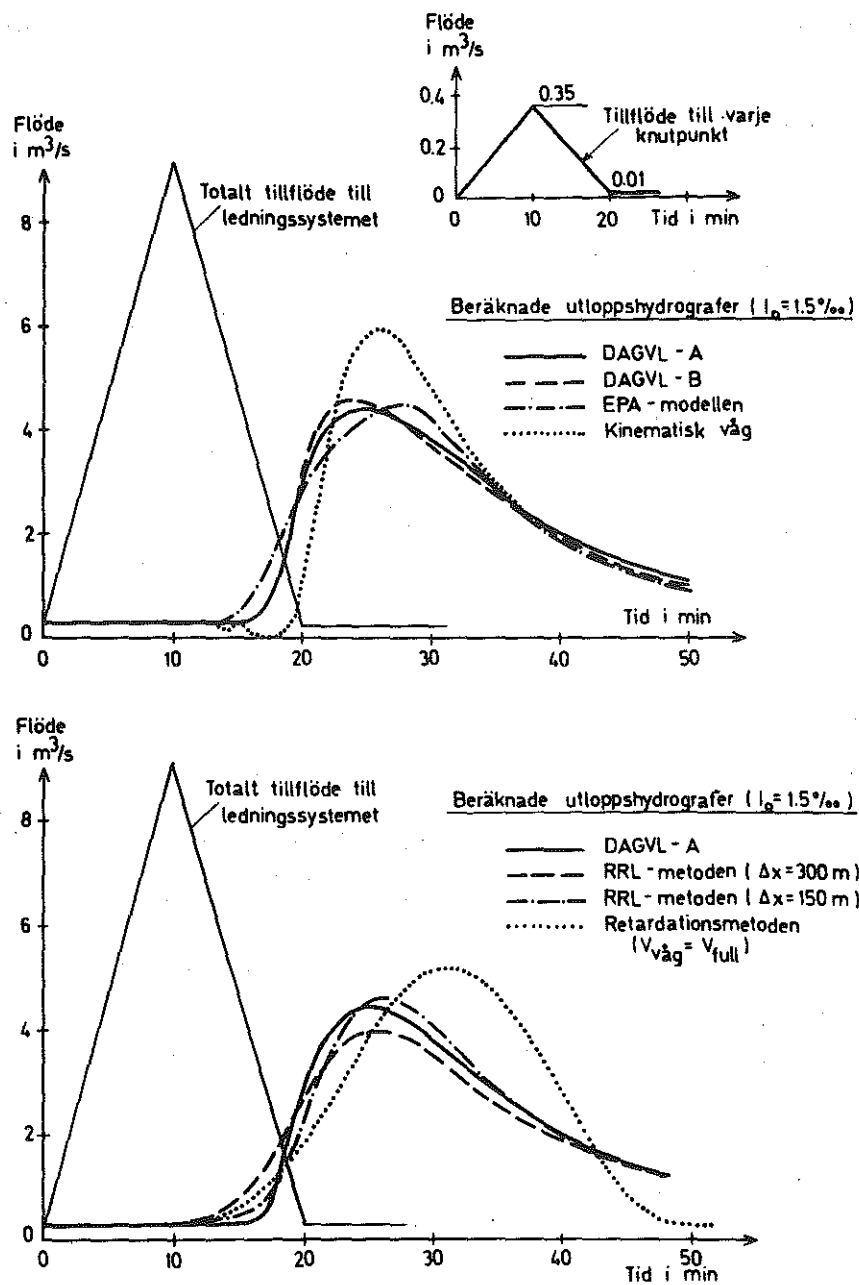


Fig 9-22 Med olika modeller beräknade utloppshydrografer för ledningssystemet i fig 9-19.

Ledningarnas lutning $I_0 = 1.5 ‰$

Fig 9-23:

Det givna tillflödet överskrider i detta fall det dimensionerande. 12 minuter efter tillrinningens start är således alla ledningar uppströms knutpunkt 26 helt fyllda innebärande en mycket snabb flödesökning i utloppsledningen. Den i DAGVL-A utnyttjade ljudhastigheten är $a = 50 \text{ m/s}$ vilket ger en viss fördröjning av flödesfronten, jfr fig 9-9. Efter 14 minuter uppgick emellertid utflödet från punkt 26 till $11.7 \text{ m}^3/\text{s}$ vilket värde väl rimmar med den totala tillrinningen $11.3 \text{ m}^3/\text{s}$ vid denna tidpunkt. Efter 15 minuter gick de mest uppströms liggande ledningarna åter delvis fyllda.

De mycket branta flödesfronterna ledde till helt orimlig parasitisk vågbildning för dels "kinematiska vågen", dels RRL-metoden med $\Delta x = 150 \text{ m}$. Som framgår av figuren uppvisar även EPA-modellens lösning sådana störningar. Det bör dock påpekas att författarens version av EPA-modellen förutsätter att utflödet från en helt fylld ledning är lika med inflödet. Originalversionen förutsätter däremot att det tillflöde som överstiger ledningens kapacitet Q_{full} lagras i knutpunkten intill dess överskottskapacitet finnes tillgänglig. Detta senare förfarande skulle i det aktuella fallet innebära att utflödet från knutpunkt 26 ej skulle kunna överstiga $8 \text{ m}^3/\text{s}$ (se tabell 9-1), vilket skulle medfört en kraftig underskattning av flödestoppen i denna punkt. Det av DAGVL-A beräknade maximala utflödet från punkt 26 är $11.7 \text{ m}^3/\text{s}$.

Bortsett från den parasitiska störningen överensstämmer EPA-modellens och DAGVL-B:s lösningar i stort. Båda modellerna överskattar flödestoppen i punkt 27.

Även RRL-metodens ($\Delta x = 300 \text{ m}$) lösning uppvisar parasitisk vågbildning i området kring knutpunkt 26. Dessa störningar har dock helt dämpats ut när flödet når utloppspunkten. I den aktuella programversionen förutsättes att utflödet från en helt fylld ledning är lika med inflödet.

En möjlighet att undvika parasitisk vågbildning vid helt fylld ledning är att liksom i EPA-modellens originalversion lagra det tillflöde som överstiger ledningens kapacitet i uppströms knutpunkt.

En annan möjlighet, som enligt uppgift utnyttjas i engelska versioner av RRL-metoden, är att vid beräkningen "byta ut" den befintliga ledningen mot en grövre ledning med en kapacitet svarande mot det aktuella toppflödet. Detta senare förfarande begränsar ej flödestoppens storlek och bör därför vara att föredraga framför EPA-modellens lagringsförfarande.

Retardationsmetoden ger en grovt felaktig bild av flödesförloppet. Flödets toppvärde överskattas i utloppspunkten men underskattas i knutpunkt 26, allt sett i relation till DAGVL-A:s lösning.

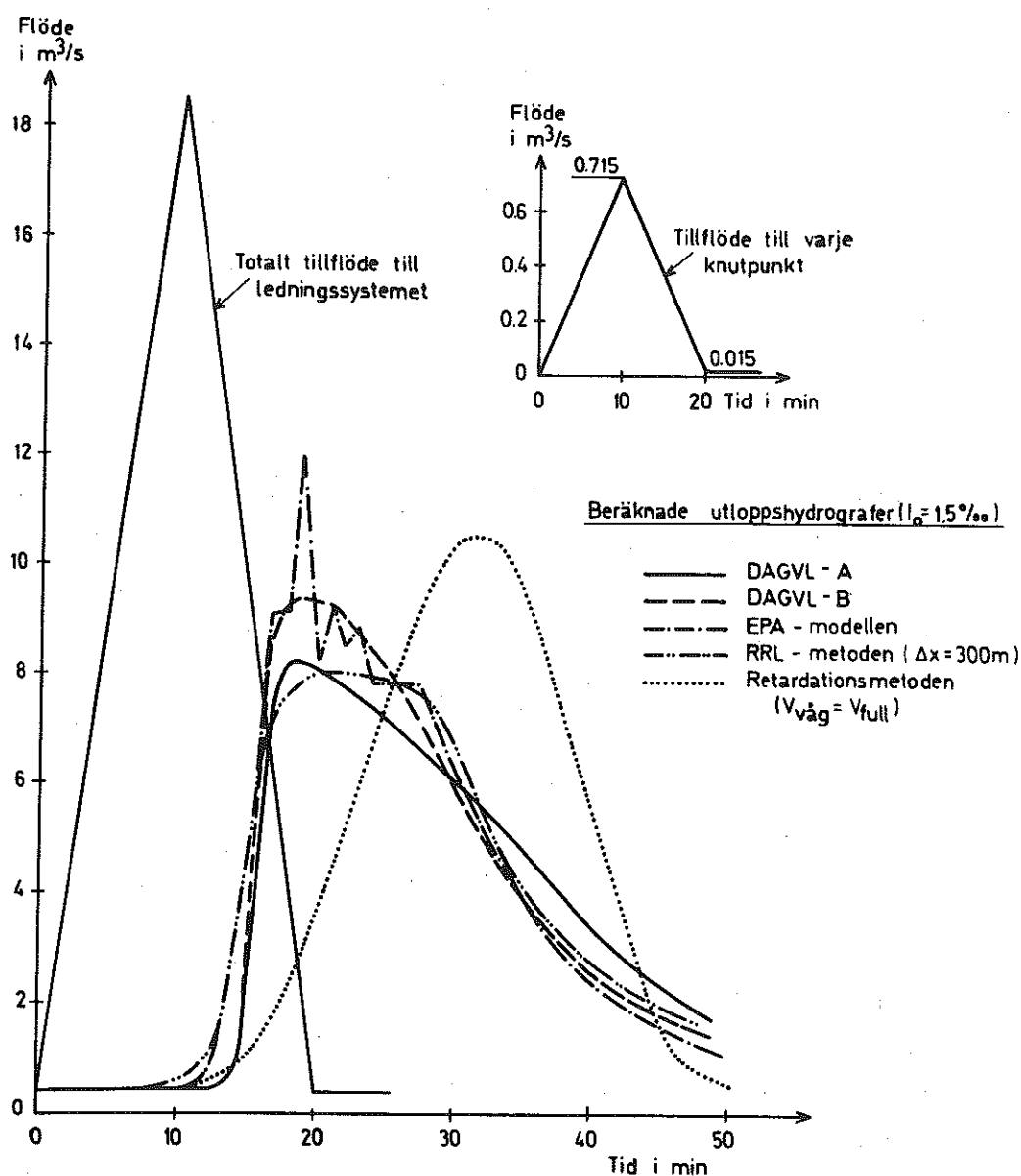


Fig 9-23 Med olika modeller beräknade utloppshydrografer för ledningssystemet i fig 9-19.

Ledningarnas lutning $I_0 = 1.5\text{‰}$

9.13 Sammanfattande synpunkter.

I detta kapitel har en redogörelse lämnats för olika modeller för beräkning av flödesförlopp i system av dagvattenledningar. Modellerna har indelats i två grupper:

A-modeller, i vilka flödesförloppet beräknas under beaktande av eventuella dämningseffekter från nedströms liggande ledningar

B-modeller, i vilka dämningseffekter ej beaktas

Typ B-modellerna är beräkningstekniskt sett mindre komplicerade än typ A-modellerna och bygger dessutom i de flesta fall på starkt förenklade rörelseekvationer.¹⁾

Av författaren har utvecklats en typ A och en typ B-modell benämnda DAGVL-A resp. DAGVL-B. Båda dessa modeller bygger på en implicit differenslösning av linjariserade rörelseekvationer.

Ledningsnätmodellen DAGVL-A beräknar för givna tillflöden vattenstånd och flöden i valda beräkningssektioner för ett konvergerande ledningssystem under beaktande av dämningseffekter. Flöde i helt fylld ledningssektion överföres till strömning med fri vattenyta genom införande av en mycket smal fiktiv spalt i ledningens hjässa. Modellens uppbyggnad möjliggör en tät geometrisk indelning av ledningsnätet.

I de fall uppträdande vattensprång medför icke kontrollerbara beräkningsstörningar kan ledningsnätmodellen DAGVL-B utnyttjas. Denna modell skiljer sig från DAGVL-A enbart genom att dämningseffekter från nedströmsliggande ledningar ej beaktas. De två modellerna är för närvarande inbyggda i samma programpaket vilket innebär att godtyckligt valda delar av ett ledningsnät kan beräknas enligt typ B-modellens förutsättningar och resten av nätet enligt typ A-modellens.

1) Typ B-modeller är EPA-modellen SWMM, RRL-metoden, "kinematisk våg" och retardationsmetoden.

DAGVL-A bedömes ge så noggranna lösningar att den kan utnyttjas som referensmodell vid test av mera approximativa modellers egenskaper vad avser beräknat flödesförlopp. Detta sagt med reservation för de osäkerheter som vidlåter karakteriseringen av tryckförlusterna i ledningssystemets knutpunkter.

Jämförande beräkningar mellan DAGVL-A och olika mera approximativa modeller för ett hypotetiskt ledningssystem visar, allt sett i relation till med DAGVL-A beräknade utloppshydrografer, ¹⁾

- att DAGVL-B medför en överskattning av flödestoppen men att förloppet i övrigt återges väl
- att EPA-modellen SWMM:s ledningsnätrutin ger en sämre bild av flödesförloppet än DAGVL-B
- att RRL-metoden medför en underskattning av flödestoppen om alltför långa delsträckor utnyttjas vid beräkningen
- att den i Sverige uteslutande använda retardationsmetoden ger en försenad utloppshydrograf med felaktig form. Flödestoppens värde kan överskattas eller underskattas beroende på ledningssystemets utformning
- att den "kinematiska vågen" ger en överskattning av flödestoppen och att denna metod kan medföra icke kontrollerbara beräkningsstörningar. Detta gäller även i viss mån EPA-modellen
- att både EPA-modellen och RRL-metoden vid strömning i helt fylld ledning kan medföra beräkningsstörningar ledande till helt orimliga flödes- och vattenståndsvariationer.

De resultat som tidigare redovisats visar att det är möjligt att med mycket god noggrannhet beräkna flödesförlopp i en rak ledning med fritt utlopp. Beräkningar av flödesförlopp i ledningssystem måste däremot alltid bli behäftade med vissa osäkerheter. Till detta bidrar bl a följande faktorer:

- svårigheter att beskriva de komplexa flödesförhållandena i en knutpunkt
- sekundär vågbildning genererad i knutpunkter, krökar m m

1) En generell kvantitativ jämförelse kräver ett orimligt stort beräkningsarbete. Även för en rak ledning med fritt utlopp krävs mycket omfattande beräkningar om effekten av variationer i inloppshydrografens utseende och ledningarnas egenskaper skall kunna kvantifieras. En dimensionslös problemformulering kan något reducera beräkningsarbetet.

- inblandning av luft och bildandet av luftfickor
- transport av fast material med flödet
- bristande precision vid ledningsläggning, sättningar m m

Det kan därför ej vara realistiskt att ha som generell målsättning att alla beräkningar skall genomföras med en typ A-modell. De redovisade beräkningarna tyder istället på att tillräcklig nöjaktighet i de flesta fall kan uppnås med B-modeller av typen EPA-modellen och RRL-metoden vilka är programmeringstekniskt sett enkla och vilka drar låga beräkningskostnader, speciellt då RRL-metoden. Denna senare metod bör dock kompletteras med kriterier för valet av beräkningslängder Δx så att en underskattning av resulterande flödestoppar undviks. Sådana kriterier kan utarbetas med hjälp av de "exakta" modellerna DAGVL-A och DAGVL-B. Ett längsta tillåtna beräkningssteg bör givetvis anges även för EPA-modellen.

Både EPA-modellen och RRL-metoden kan vid strömning i helt fyllda ledningar ge besvärande beräkningsstörningar. För att undvika att detta inträffar föreslås att man som en första approximation "byter ut" den befintliga ledningen mot en grövre fiktiv ledning med en kapacitet svarande mot det aktuella toppflödet.

De speciellt framtagna modellerna DAGVL-A och DAGVL-B är i sin nuvarande utformning ca 1.5 á 2 ggr dyrare att utnyttja per tidsteg än EPA-modellen. Eftersom de i motsats till EPA-modellen och RRL-metoden¹⁾ bygger på linjariserade rörelseekvationer tvingas man av kontinuitetsskäl utnyttja ca dubbelt så många tidsteg varför den totala kostnaden i de flesta fall torde bli 3 á 4 ggr högre. Det är möjligt att beräkningskostnaderna kan reduceras samtidigt som kontinuiteten förbättras genom införandet av en halvstegsintegration enligt WRE-modellen.

De absoluta kostnaderna för utnyttjandet av typ A-modellen DAGVL-A är emellertid ej högre än att modellen är praktiskt användbar. Datorkostnaderna måste givetvis ställas i relation till övriga kostnader som

1) Av dessa båda metoder är RRL-metoden billigast att använda. Se även Lindholm (1974).

anskaffandet av indata m m. Dessa senare kostnader är desamma för alla beskrivna modeller. I samarbete med Göteborgs-VA-verk kommer således beräkningar avseende befintliga ledningssystem att genomföras med såväl DAGVL-A som DAGVL-B. Avsikten är bl a att studera möjligheten att utnyttja det befintliga ledningsnätet som fördröjningsmagasin med hjälp av speciella artificiellt dämmande arrangemang. Denna typ av studier kräver utnyttjandet av en typ A-modell.

REFERENSER

- Abbot, M.B. (1966): An introduction to the method of characteristics - American Elsevier Publishing Company, Inc., New York
- Abbot, M.B. och Ionescu, F. (1967): On the numerical computation of nearly horizontal flows - Journal of Hydraulic Research, Vol. 5, 1967, No. 2
- Abbot, M.B. och Rodenhuis, G.S. (1972): A numerical simulation of the undular hydraulic jump - Journal of Hydraulic Research, Vol. 10, 1972, No. 3.
- Abbot, M.B. (1974): Continuous flows, discontinuous flows and numerical analysis - Journal of Hydraulic Research, Vol. 12, 1974, No. 4
- Abbot, M.B. (1975): Weak solutions of the equations of open channel flow - Chapter 7, Vol. I, Mahmood och Yevjevich (1975)
- Ackers, P. och Harrison, A.J.M. (1964): Attenuation of flood waves in part-full pipes - Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 28, Paper No. 6777, July 1964.
- Amein, M. och Chu, H.L. (1975): Implicit numerical modeling of unsteady flows - Journal of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 101, No. HY6, June 1975.
- Arnell, V. (1976): Beräkningsmetod för analys av dagvattenflödet inom ett urbant område - Uppsats presenterad vid konferens om urban hydrologi i Sarpsborg, Norge 1975. Medd. nr 15, Geohydrologiska forskningsgruppen, Chalmers Tekniska Högskola, 1976.
- Bretting, A.E. (1960): Hydraulik - Köpenhamn 1960.
- Brock, R.R. (1969): Development of roll-wave trains in open channels - Journal of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 95, No. HY4, Proc. Paper 6704, July 1969.
- Chow, V.T. (1959): Open-channel hydraulics - McGraw - Hill Book, Company, Inc. New York.
- Cunge, J.A. och Wegner, M. (1964): Intégration numériques des équations d'écoulement de Barré de Saint-Venant par un schéma implicite de différences finies - La Houille Blanche, No. 1, 1964.
- Cunge, J.A. (1969): Au sujet d'une méthode de calcul de propagation de crues (Méthode Muskingum) - Journal of Hydraulic Research, Vol. 7, 1969, No. 2.

- Cunge, J.A. (1975): Rapidly varying flow in power and pumping canals - Chapter 14, Vol. II, Mahmood och Yevjevich (1975).
- Daily, J.W. och Harleman, D.R.F. (1966): Fluid dynamics - Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts.
- Engelund, F. (1964): Flow resistance and hydraulic radius - Bulletin No. 7, Hydraulic Laboratory, Technical University of Denmark. Reprinted from Acta Polytechnica Scandinavica, 1964.
- Engelund, F.A. (1965): Lærebog i hydraulik - Den private Ingeniørfond, Danmarks Tekniske Højskole, København.
- Escoffier, F.F. och Boyd, M.B. (1962): Stability aspects of flow in open channels - Journal of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 88, No. HY6, November 1962.
- Faure, J. och Nahas, N. (1961): Etude numérique et expérimentale d'intumescences à forte courbure du front - La Houille Blanche, No. 5, Octobre 1961.
- Hansen, A.J. (1966): Numerical analysis of unsteady open-channel flow - Bulletin No. 10, Hydraulic Laboratory, Technical University of Denmark, Copenhagen.
- Hayami, S. (1951): On the propagation of flood waves - Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Bulletin No. 1, December 1951.
- Henderson, F.M. (1963): Flood waves in prismatic channels - Journal of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 89, No HY4, July 1963.
- Henderson, F.M. (1966): Open Channel flow - Macmillan Company, New York
- Hildebrand, F.B. (1962): Advanced calculus for applications - Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Jolly, J.P. och Yevjevich, V. (1974): Stability of single-peaked waves - Journal of Hydraulic Research, Vol. 12, 1974, No. 3.
- Kibler, D.F., Mehler, H., Mühlbauer, J., Shubinski, R.P. och Stottmann, W. (1974): Berechnung von städtischen Kanalisationsnetzen mit Hilfe von Simulationsmodellen, Teil I, Abflussmengen - F.H.Kocks KG, Ingenieure, Düsseldorf, in Zusammenarbeit mit Water Resources Engineers Inc, Walnut Creek, California, USA.
- Klym, H., Königer, W., Mevius, F. and Vogel, G. (1972): Urban hydrological processes. Computer simulation - Dorsch Consult Ingenieurgesellschaft, Elsenheimerstrasse 63, Postfach 21 02 43, 8 München 21.

- Lager, J.A., Pyatt, E.E. och Shubinski, R.P. (1971): Storm Water Management Model. Volume I. Final Report - Environmental Protection Agency (EPA). Water Quality Office. Water Pollution Control Research Series. Report No 11024, DOC 07/71. Washington, July 1971.
- Lax, P.D. (1957): Hyperbolic systems of conservation laws II - Communications on pure and applied mathematics, Vol. X, 1957.
- Li, R.M., Simons, D.B. och Stevens, M.A. (1975): Nonlinear kinematic wave approximation for water routing - Water Resources Research, No. 2, April 1975.
- Liggett, J.A. (1975): Basic equations of unsteady flow - Chapter 2, Vol. I, Mahmood och Yevjevich (1975).
- Liggett, J.A. och Cunge, J.A. (1975): Numerical methods of solution of the unsteady flow equations - Chapter 4, Vol. 1, Mahmood och Yevjevich (1975).
- Lighthill, M.J. och Whitham, G.B. (1955): On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers - Proceedings of the Royal Society of London. Vol. 229, No. 1178, May 1955.
- Lindholm, O.G. (1974): A pollutional analysis of the combined sewer system - Institutt for vassbygging, Norges tekniske høgskole, Trondheim.
- Lindholm, O.G. (1975): Systemanalyse av avløpsanlegg - Prosjekt-komiteen for rensing av avløpsvann, Statens forurensnings-tilsyn, Postboks 8100 - Oslo.
- Lindholm, O.G. (1975): Parameteranalyse av hydrogrammer fra ledningsnett - Nordisk symposium om kvantitativ urban hydrologi, Sarpsborg, Norge, 11-13 juni 1975. Den norske IHD-kommittéen.
- Lorah, W.L. (1966): Free-surface flow energy losses in a 90° junction box - M.S. thesis, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, June 1966.
- Mahmood, K. och Yevjevich, V. (1975): Unsteady flow in open channels, Vol. I och II, 1975 (Lectures for the Institute on unsteady flow in open channels, held at Colorado State University, June 17-28, 1974) - Water Resources Publications, Box 303, Fort Collins, Colorado, USA.
- Metcalf and Eddy, Inc. (1972): Wastewater engineering - McGraw - Hill Company, New York 1972.
- Miller, W.A. och Cunge, J.A. (1975): Simplified equations of unsteady flow - Chapter 5, Vol. I, Mahmood och Yevjevich (1975).
- Miller, W.A. och Yevjevich, V. (1975): Unsteady flow in open channels, Vol. III - Bibliography - Water Resources Publications, Box 303, Fort Collins, Colorado, USA.

- Montuori, C. (1963): Discussion to "Stability aspects of flow in open channels" by Escoffier, F.F. and Boyd, M.B. - Journal of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 89, No. HY4, July 1963.
- O'Brien, G.G., Hyman, M.A. och Kaplan, S.: A study of the numerical solution of partial differential equations - Journal of Mathematics and Physics. Vol. 29, 1951.
- Papadakis, C. och Preul, H.C. (1972): University of Cincinnati Urban runoff model (UCUR) - Journal of the Hydraulic Division, Vol. 98, No HY10, October 1972.
- Parmakian, J. (1963): Water hammer analysis - Dover Publications, Inc. New York.
- Preissmann, A. och Cunge, J.A. (1961): Calcul des intumescences sur machines électronique. - IAHR, Ninth Convention, Dubrovnik, 1961.
- Richtmeyer, R.D. och Morton, K.W. (1967): Difference methods for initial - value problems - John Wiley and Sons, Inc.
- Rousset, M. och Lorigère, M. (1974): Modèle mathématique de simulation des écoulements dans un réseau d'assainissement - La Houille Blanche No. 4/5, 1974.
- Rundgren, L. (1969): A mathematical model of unsteady flow in a natural or artificial water course - Proceedings Vol. I, XIIIth Congress of the IAHR, Kyoto 1969.
- Sangster, W.M., Wood, H.W., Smerdon, E.T. och Bossy, H.G. (1959): Pressure changes at open junctions in conduits - Journal of the Hydraulic Division, Vol. 85, No. HY6, June 1959.
- Schaake, J.C. (1971): Deterministic urban runoff model - Chapter VIC in Treatise on Urban water systems edited by Albertson, Tucker and Taylor. Colorado State University, Fort Collins, Colorado, July 1971.
- Shubinski, R.P. och Roesner, L.A. (1973): Linked process routing models - Symposium on models for urban hydrology, Spring Meeting, American Geophysical Union, April 16-20, 1973, Washington, D.C.
- Sjöberg, A (1974): Mathematical models for gradually varied unsteady free surface flow. Medd.nr. 8 från Geohydrologiska Forskningsgruppen, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg 1974.
- Sjöberg, A (1976): CTH - Ledningsnätmodell DAGVL-A - Uppsats presenterad vid konferens om urban hydrologi i Sarpsborg, Norge 1975. Medd.nr. 15, Geohydrologiska Forskningsgruppen, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg 1976.

- Streeter, V.L. och Wylie, E.B. (1967): Hydraulic transients - McGraw-Hill Book Company, Inc. New York.
- Strelkoff, T. (1969): The one-dimensional equations of open channel flow - Journal of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 95, No. HY3, Proc. Paper 6557, May, 1969.
- Strelkoff, T. (1970): Numerical solution of Saint-Venant equations - Journal of the Hydraulic Division, ASCE, Vol. 96, No. HY1, January 1970.
- Stoker, J.J. (1957): Water waves - John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Taylor, E.H. (1944): Flow characteristics at rectangular open-channel junctions - Transactions of the ASCE, Vol. 109, 1944.
- Terstriep, J.B. och Stall, J.B. (1969): Urban runoff by the Road Research Laboratory method - Journal of the Hydraulic Division, Vol. 95, No. HY6, November 1969.
- Watkins, L.H. (1962): The design of urban sewer systems - Road Research Technical Paper No 55, Dept. of Scientific and Industrial Research, London, Her Majesty's Stationery Office.
- Whitaker, S. (1968): Introduction to fluid mechanics - Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J.
- Yen, B.C. och Sevuk, A.S. (1975): Design of storm sewer networks - Journal of the Environmental Engineering Division, ASCE, Vol. 101, No. EE4, Aug. 1975.
- Yevjevich, V. och Barnes, A.H. (1970): Flood routing through storm drains. Part I. Solution of problems of unsteady free surface flow in storm drains - Hydrology Paper No 43, Nov. 1970. Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- Yevjevich, V. och Barnes, A.H. (1970): Flood routing through storm drains, Part III, Evaluation of geometric and hydraulic parameters - Hydrology Paper No. 45, Nov. 1970. Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- Yevjevich, V. (1975): Storm - drain networks - Chapter 16, Vol. II, Mahmood och Yevjevich (1975).

BETECKNINGAR

A	sektionsarea
A_{full} , A_o	cirkulär tvärsnittsarea
a	ljudhastigheten i vatten
B	sektionsbredd i vattenlinjen
B_s	bredd definierad av ljudhastigheten i vatten (gA/a^2)
b	sektionsbredd på viss nivå. I kap 5.1 även parameter definierad av ekv (5.11)
C	Chezy's koefficient
CC1, CC2, CC3 CR1, CR2, CR3	koefficienter, kap. 7.2
Cr	Courants tal $(\Delta t \cdot V + \sqrt{gA/B} / \Delta x)$
CTH	Chalmers Tekniska Högskola
c	våghastighet
c_d	dynamisk våghastighet $(V + \sqrt{gA/B})$
c_f	vågfronts hastighet
c_k	kinematisk våghastighet (dQ/dA)
D	medeldjup (A/B)
d	diameter
E	elasticitetsmodul. I kap 9 även energinivå.
ΔE	energidissipation per tids- och massenhet
EC, ER	koefficienter, kap 7.4
e	vägg tjocklek
F	kraft även funktion
$F(Y/d)$	fyllnadsgradfunktion (Q/Q_{full})
Fr	Froudes tal $(V / \sqrt{gA/B})$
FC, FR	koefficienter, kap 7.4
full	index angivande fylld cirkulär sektion
f	friktionskoefficient
G	funktion

g	jordaccelerationen
H	absolut vattenyttnivå
I_o	bottenlutning
I_e	energilinjens lutning
I_f	friktionslutning
ΔJ	skjuvarbete per tids- och massenhet
K	flödessektions transportfaktor ($MAR^{2/3}$)
K_{diff}	diffusionskoefficient
k	förlustkoefficient
k_s	ekvivalent sandråhet
L	våglängd I kap 9 även ledningslängd
M	Mannings tal
M_1, M_2	matriser
N_1, N_2	matriser
N_3, N_4	matriser
n	Mannings råhetskoefficient även index angivande normaldjupsförhållanden (likformig strömning)
P	våta perimetern (för rektangulär sektion $B + 2Y$)
p	hydrostatiskt tryck
Δp	tryckdifferens
Q	flöde
Q_{full}	avbördningskapacitet vid nätt och jämnt fylld ledning och likformig strömning
q	lateralt tillflöde per längdenhet
R	hydrauliska radien (A/P)
R_*	motståndsradie def. av ekv (8.5)
Re	Reynolds tal ($V \cdot 4R/\nu$)
RC, RR	koefficienter, kap. 7.2

S	yta. I kap. 9.6 även vattenlinjearea
t	tidskoordinat
Δt	beräkningssteg i tiden
u	koordinat. I kap 9 även index.
u_x	hastighetskomponent i huvudströmriktningen
V	medelhastighet (Q/A)
Ve	Vedernikovs tal ($\sqrt{A/gB} dV_n/dY$)
V_{full}	Q_{full}/A_{full}
$\vec{v}$	hastighetsvektor
v_x	hastighetskomponent i huvudströmriktningen
v_1, v_2	koefficienter i Taylorutveckling, kap 5.1
W	volym
w	koordinat definierad av ekv (5.15)
X	vektor
x	longitudinell koordinat i huvudströmriktningen
Δx	beräkningssteg i x-led
Y	vattendjup
Y_{krit}	kritiskt djup
y	vertikal koordinat
y_1, y_2	koefficienter i Taylorutveckling, kap 5.1
y_0	en störnings initiella branthet, kap 5.1
z	vertikal koordinat
α	hastighetsfördelningskoefficient def. av ekv (2.17)
β	hastighetsfördelningskoefficient def. av ekv (2.8) i kap 6.4 även vågtal
γ	dissipativ faktor
θ	viktningkoefficient, även bottenens lutningsvinkel
ν	kinematisk viskositetskoefficient
ρ	densitet

ξ	koordinat
η	koefficient
σ	vågtal i kap 6.4
τ	skärspänning
φ	centrumvinkel
ϵ	parameter i ekv (5.16)

Definitioner i samband med differensapproximationer

x_j	sektionens "j" lägeskoordinat
Δx_j	$x_j - x_{j-1}$
$\Delta^2 x_j$	$x_{j+1} - x_{j-1}$
Δt	$t_{m+1} - t_m$
Q_j^m	flödet genom sektion "j" vid tidpunkten t_m

APPENDIX

Schemaberoende fel i våghastighet och amplitud

Den i kap 6.3 beskrivna Fourierserieanalysen kan endast genomföras för linjära differentialekvationer. För att förfarandet skall bli mera överskådligt utföres analysen med utgångspunkt från följande enkla differentialekvationer, de s.k vågekvationerna,

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0; \quad (1a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 0; \quad (1b)$$

1. Analytisk lösning

Om vi förutsätter dels periodiska randvillkor, dels initialvillkor av formen $V(x, 0) = V_0$, $Y(x, 0) = Y_0$ kan lösningen till differentialekvationen (1) skrivas som Fourierserier (vi är endast intresserade av dessa seriers realdel, men det är av beräkningstekniska skäl lämpligt att utnyttja en komplex formulering)

$$V(x, t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{*n} e^{i(\sigma_n x - \beta_n t)} \quad (2)$$

$$Y(x, t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{*n} e^{i(\sigma_n x - \beta_n t)}$$

där V_{*n} och Y_{*n} är reella eller komplexa konstanter. Eftersom differentialekvationerna är linjära behöver vi endast betrakta den n :te komponenten vilken vi för enkelhetens skull skriver

$$\begin{aligned} V_n(x, t) &= V_* e^{i(\sigma x - \beta t)} \\ Y_n(x, t) &= Y_* e^{i(\sigma x - \beta t)} \end{aligned} \quad (3)$$

Dessa två samband representerar sinusformade vågor med våglängden $L = 2\pi/\sigma$, perioden $T = 2\pi/\beta$ och våghastigheten $c = \beta/\sigma$. L förutsättes vara ett reellt tal varför även σ är reellt.

A2.

Insättning av ekv (3) i ekv (1) ger ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} \tau & -\beta \\ -\beta & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_* \\ Y_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

vars koefficientdeterminant måste vara lika med noll för att vi skall ha någon icke trivial lösning, dvs

$$\begin{vmatrix} \tau & -\beta \\ -\beta & \tau \end{vmatrix} = 0; \Rightarrow \beta = \pm \tau \Rightarrow c = \pm 1; \quad (5)$$

Alla Fourierkomponenterna har alltså samma våghastighet oberoende av våglängden L , ty c är oberoende av τ .

Låt oss betrakta kvoten mellan lösningarna vid tidpunkten t resp $t + m \cdot \Delta t$ (motsvarande för $Y_n(x, t)$) där m är ett heltal,

$$\frac{V_n(x, t + m\Delta t)}{V_n(x, t)} = \frac{V_* e^{i\tau x} e^{-i\beta(t+m\Delta t)}}{V_* e^{i\tau x} e^{-i\beta t}} = e^{-i\beta m\Delta t}; \quad (6)$$

Vi definierar nu amplitudfaktorn k_a enligt

$$k_a = \left| \frac{V_n(x, t + m\Delta t)}{V_n(x, t)} \right| = \left| e^{-i\beta m\Delta t} \right|; \quad (7)$$

Eftersom τ är ett reellt tal måste även β i detta fall vara ett reellt tal. Kvoten (6) kan då skrivas

$$e^{-i\beta m\Delta t} = \cos(-\beta m\Delta t) + i \sin(-\beta m\Delta t) \quad (8)$$

varför

$$k_a = 1; \quad (9)$$

vilket innebär att lösningens amplitud varken dämpas eller växer med tiden.

2. Numerisk lösning

Vi skall nu undersöka om den av nod-segment schemat (se kap 6.5, fig 6-4a) genererade lösningen har motsvarande egenskaper. Detta schema applicerat på ekv (1) ger med utnyttjande av viktningskoefficienten θ och med centrerat schema för ekv (1a) och boxschema för ekv (1b),

$$\frac{\theta(V_{j+1}^{m+1} - V_{j-1}^{m+1}) + (1-\theta)(V_{j+1}^m - V_{j-1}^m)}{2\Delta x} + \frac{Y_j^{m+1} - Y_j^m}{\Delta t} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{V_{j+1}^{m+1} - V_{j+1}^m + V_j^{m+1} - V_j^m}{2\Delta t} + \frac{\theta(Y_{j+1}^{m+1} - Y_j^{m+1}) + (1-\theta)(Y_{j+1}^m - Y_j^m)}{\Delta x} = 0;$$

där V_{j+1}^{m+1} är hastigheten i punkten $x = (j+1)\Delta x$ vid tidpunkten $t = (m+1)\Delta t$.

Insättning av ekv (3) i ekv (10) ger efter division med $e^{i(\sigma_j \Delta x - \beta m \Delta t)}$ och utnyttjande av sambandet $i \sin \sqrt{\Delta x} = \frac{1}{2}(e^{i\sqrt{\Delta x}} - e^{-i\sqrt{\Delta x}})$ ekvationssystemet ($\lambda = \Delta t / \Delta x$)

$$Y_* \left[e^{-i\beta \Delta t} - 1 \right] + V_* \left[i\lambda(\theta e^{-i\beta \Delta t} + 1 - \theta) \sin \sqrt{\Delta x} \right] = 0; \quad (11)$$

$$Y_* \left[\lambda(1 - e^{-i\sqrt{\Delta x}})(\theta e^{-i\beta \Delta t} + 1 - \theta) \right] + V_* \left[\frac{1}{2}(e^{-i\beta \Delta t} - 1)(e^{-i\sqrt{\Delta x}} + 1) \right] = 0;$$

vars koefficientdeterminant måste vara lika med noll för att vi skall ha värden på Y_* och $V_* \neq 0$. Efter utbrytning av faktorn $(1 - e^{-i\sqrt{\Delta x}})$ erhålles då

$$\begin{vmatrix} e^{-i\beta \Delta t} - 1 & i\lambda(\theta e^{-i\beta \Delta t} + 1 - \theta) \sin \sqrt{\Delta x} \\ \lambda(\theta e^{-i\beta \Delta t} + 1 - \theta) & -\frac{1}{2}(e^{-i\beta \Delta t} - 1) \cot \frac{\sqrt{\Delta x}}{2} \end{vmatrix} = 0; \quad (12)$$

där vi utnyttjat sambandet

$$\frac{e^{-i\sqrt{\Delta x}} + 1}{e^{-i\sqrt{\Delta x}} - 1} = i \cot \frac{\sqrt{\Delta x}}{2}; \quad (13)$$

Utveckling av determinanten ger

$$e^{-i\beta \Delta t} = \frac{1 - \alpha^2 \theta (1 - \theta) \pm i\alpha}{1 + \alpha^2 \theta^2}; \quad (14)$$

där $\alpha = 2\lambda \sin(\sqrt{\Delta x}/2)$ ¹⁾. Förutsätt att β i detta fall har ett komplext värde, dvs att $\beta = \text{Re } \beta + i \text{Im } \beta$. Vi erhåller då amplitudfaktorn $k_{a, \text{num}}$ för den numeriska lösningen till

$$k_{a, \text{num}} = |e^{-i\beta \Delta t}| = |e^{\text{Im } \beta \Delta t}| |\cos(-\text{Re } \beta \Delta t) + i \sin(-\text{Re } \beta \Delta t)| = |e^{\text{Im } \beta \Delta t}|; \quad (15)$$

Imaginärdelen $\text{Im } \beta$ bestämmer således amplitudfaktorns storlek medan realdelen $\text{Re } \beta$ avgör Fourierkomponentens hastighet $c_{\text{num}} = \text{Re } \beta / \sqrt{\Delta x}$

Identifiering av real- resp imaginärdelen i ekv (14) ger

$$e^{\text{Im } \beta \Delta t} \cos(-\text{Re } \beta \Delta t) = \frac{1 - \alpha^2 \theta (1 - \theta)}{1 + \alpha^2 \theta^2} \quad (16)$$

$$e^{\text{Im } \beta \Delta t} \sin(-\text{Re } \beta \Delta t) = \frac{\pm \alpha}{1 + \alpha^2 \theta^2}$$

ur vilka samband vi slutligen erhåller

$$k_{a, \text{num}} = |e^{\text{Im } \beta \Delta t}| = \sqrt{1 - \frac{4(\theta - 1)(\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{\sqrt{\Delta x}}{2})^2}{1 + 4(\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{\sqrt{\Delta x}}{2})^2}}; \quad (17)$$

$$c_{\text{num}} = \frac{\text{Re } \beta}{\sqrt{\Delta x}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \arctan \left[\frac{2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{\sqrt{\Delta x}}{2}}{1 - 4\theta(1 - \theta)(\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{\sqrt{\Delta x}}{2})^2} \right]; \quad (18)$$

Av ekv (17) framgår att amplitudfaktorn $k_{a, \text{num}} > 1$ om $\theta < 1/2$, vilket innebär att Fourierkomponentens amplitud växer utan gräns i tiden varför schemat är instabilt. För att differens-

1) $\sqrt{\Delta x}$ är även i detta fall ett reellt tal

schemat skall leda till stabila beräkningar krävs att $1/2 \leq \theta \leq 1$.

I fig A1 och A2-a redovisas enligt ekv (17) och (18) beräknade värden på relativa amplitudfaktorn R_1 resp dispersionsfaktorn R_2 definierade enligt

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{k_{a, \text{ num}}}{k_a}; \\ R_2 &= \frac{c_{\text{ num}}}{c}; \end{aligned} \quad (19)$$

vilka är funktioner av θ , $\Delta t/\Delta x$ och antalet delsträckor $N = L/\Delta x$ per våglängd $L = 2\pi/\sigma$. Kvoten $\Delta t/\Delta x$ motsvarar i det aktuella fallet Courants tal $Cr = \Delta t \cdot |c|/\Delta x$.

För $\theta = 1/2$ är $R_1 = 1$ oberoende av värdet på Cr och N varför vi inte får någon dämpning av Fourierkomponenterna med tiden. Om $\theta > 1/2$ är $R_1 < 1$ och differensschemat introducerar en av θ , Cr och N beroende artificiell dämpning.

Som framgår av fig A2-a är den av nod-segment schemat genererade våghastigheten $c_{\text{ num}}$ alltid mindre än den analytiska våghastigheten c . Vid grov geometrisk indelning (små värden på N) och stora värden på Cr blir hastighetsskillnaden stor mellan vågor av olika våglängd (kraftig dispersion) vilket ökar riskerna för uppkomsten av parasitisk vågbildning. En så grov indelning som $N = 4$ bör naturligtvis aldrig användas.

Amplitudfaktorn $k_{a, \text{ num}}$ och våghastigheten $c_{\text{ num}}$ har även beräknats för boxschemat (Preissmanns schema) och för Abbots schema:

Boxschemat (kap 6.5, fig 6-4b).

$$k_{a, \text{ num}} = \sqrt{1 - \frac{4(2\theta-1)\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \tan \frac{\sqrt{\Delta x}}{2}\right)^2}{1 + 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \tan \frac{\sqrt{\Delta x}}{2}}} \quad (20)$$

$$c_{\text{ num}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \arctan \left[\frac{2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \tan \frac{\sqrt{\Delta x}}{2}}{1 - 4\theta(1-\theta) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \tan \frac{\sqrt{\Delta x}}{2} \right)^2} \right]$$

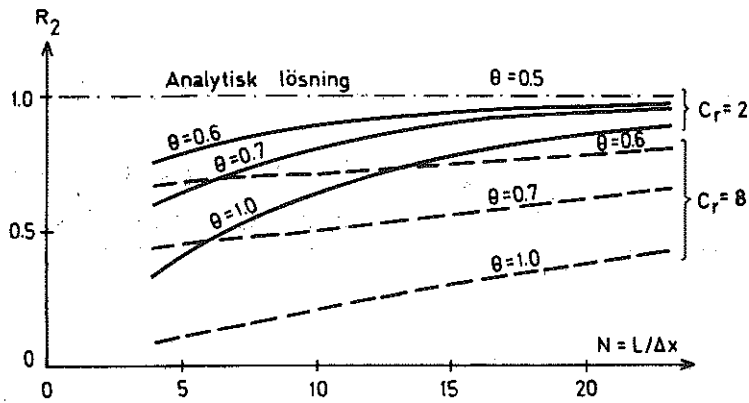
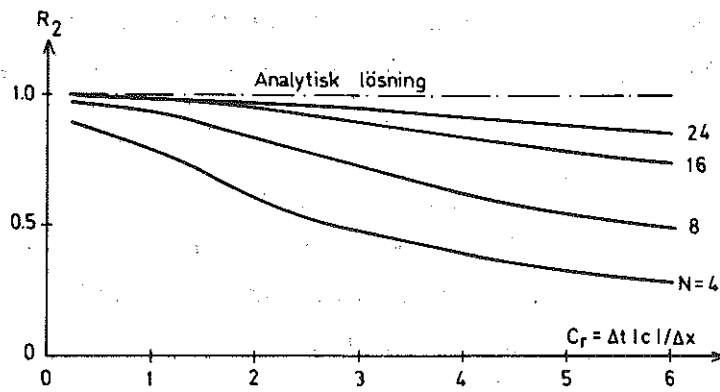
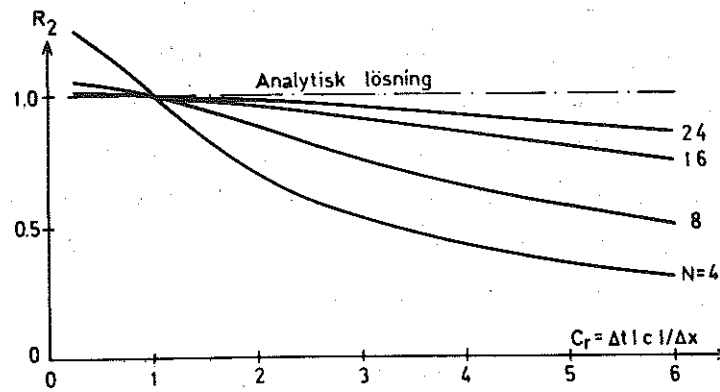


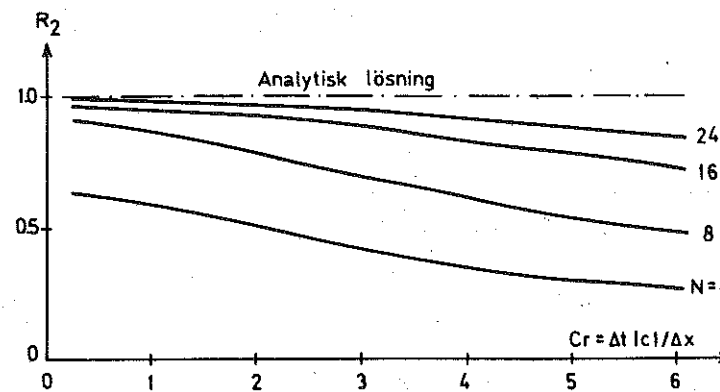
Fig A1. Relativa amplitudfaktorn R_2 för nod-segment schemat. $Cr = \Delta t |c| / \Delta x$. $c = \pm 1$.



a) Nod-segment
schemat
 $\theta = 1/2$



b) Boxschemat
(Preissmanns
schema)
 $\theta = 1/2$



c) Abbots schema

Fig A2. Dispersionsfaktorn R_2 för olika differensschema.

Abbots schema (kap 7.2, fig 7-1)

$$k_{a,num} = 1;$$

$$c_{num} = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \arctan \left[\frac{\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \sqrt{\Delta x}}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \sqrt{\Delta x} \right)^2} \right] \quad (21)$$

Boxschemat är artificiellt dämpande om $\theta > 1/2$. I Abbots schema har viktningskoefficientens värde fixerats till $\theta = 0.5$.

Av fig A2 framgår att boxschemat är det ur dispersiv synpunkt fördelaktigaste schemat. För $Cr = 1$ är schemat icke dispersivt, dvs den genererade våghastigheten är oberoende av våglängden L och lika med den analytiska våghastigheten. Detta är icke möjligt att uppnå med något av de andra schemana. Vid inte alltför grov geometrisk indelning är emellertid den absoluta skillnaden liten mellan deras dispersiva egenskaper.

De kvalitativa slutsatser vi kommit fram till är tillämpliga även för de fullständiga linjariserade rörelseekvationerna applicerade på icke-linjära problem under förutsättning av att vi utnyttjar små tidssteg. Alltför stor vikt får däremot ej läggas vid härledda faktors absoluta variation med olika parametrar.

