



Institutionen för vattenbyggnad  
Chalmers Tekniska Högskola

Department of Hydraulics  
Chalmers University of Technology

**Hydrodynamiska krafter på en lång  
platta i oscillerande tvärströmning.  
En numerisk och experimentell studie**

**Anders Bryngelsson  
Anders Tenstam**

**Examensarbete 1995:2**

**Göteborg 1995**



## Sammanfattning

En anordning för utvinning av energi ur havsvågor har studerats. Arbetet har fokuserats på de hydrodynamiska krafter som uppkommer på bottenplattan som fungerar som mothåll i ett slangpumpskoncept, och därur beräkna de hydrodynamiska koefficienter som ingår i rörelseekvationen för plattan i tidsplanet. Som utgångspunkt för beräkningarna står Morisons ekvation. Problemet har förenklats till att innefatta de krafter, och därtill kopplade koefficienter  $C_D$  (släpkraftskoefficienten) och  $C_M$  (added mass-koefficienten), som uppkommer då en lång platta oscillerar harmoniskt, i en stillastående fluid.

För att bestämma de hydrodynamiska koefficienterna har numeriska, tvådimensionella simuleringar utförts i programmet FIDAP 7.0, baserat på diskretisering enligt Finita elementmetoden (FEM). Simuleringar har gjorts för olika värden på de för ett oscillerande strömningsförlopp karakteristiska dimensionslösa parametrarna  $KC$  (Keulegan-Carpenter-talet) samt  $\beta$  (frekvensparametern). Konvergenta lösningar presenteras för  $\beta = 1000$ ,  $KC = 2.5, 5, 10$  och  $15$ , samt  $\beta = 100000$ ,  $KC = 1$  och  $\beta = 200000$ ,  $KC = 0.5$ . I de fall där jämförelse med referenslitteratur varit möjlig, har koefficienterna tyvärr ej visat tillfredsställande överensstämmelse. Det relativa felet kan uppskattas till en faktor mindre än 2. Den numeriska modell som använts har erhållits genom en modellvalideringsfas, där enklare strömningsfall studerats.

För de oscillerande förloppen har genomgående högfrekventa svängningar i tiden hos trycket observerats. Orsaken till svängningarna har under arbetets gång ej funnits. Beräkningstiderna för de numeriska simuleringarna har varit betydande, vilket gett kraftiga begränsningar på resultatens omfattning.

En experimentell studie av hydrodynamiska krafter på en platta har även genomförts. En lång platta har bringats i periodisk rörelse under vatten, varvid en tidsutveckling av de krafter som uppkommit mätts, Fourier-analyserats (FFT) och räknats om till motsvarande hydrodynamiska koefficienter. Experimenten har gjorts för värden på de karakteristiska oscilleringsparametrarna som begränsas av laborationsutrustningen, nämligen  $0.8 < KC < 4$  samt  $5000 < \beta < 14500$ . Några jämförelser med referensmaterial har ej kunnat göras för experimenten.

## Summary

A device for energy take-out from ocean waves has been considered. Focus is made on studying the forces experienced by a submerged, fixed plate being a part of the hose pump concept. The hydrodynamic coefficients involved in the equation of motion in the time domain for the plate have been calculated. The equation is basically Morison's equation. The problem has been simplified to measuring the forces exerted on a long, flat plate, subject to sinusoidal oscillation - the plate being oriented normal to the direction of motion - in a stagnant ambient fluid. Then the associated hydrodynamic coefficients  $C_D$  (drag coefficient) and  $C_M$  (coefficient of added mass), have been calculated.

In order to determine the hydrodynamic coefficients, numerical two-dimensional simulations have been performed in FIDAP 7.0, which is a computer program using a discretization method based upon the Finite Element Method (FEM). Simulations were carried out for different combinations of the dimensionless parameters governing the characteristics of an oscillating fluid motion,  $KC$  (the Keulegan-Carpenter number) and  $\beta$  (the frequency parameter). Converged solutions are presented for parameter value combinations of  $\beta = 1000$ ,  $KC = 2.5, 5, 10$  and  $15$ ,  $\beta = 100000$ ,  $KC = 1$ , and  $\beta = 200000$ ,  $KC = 0.5$ , respectively. In cases where direct comparisons with values given by other authors were possible, the coefficients have unfortunately not shown satisfying agreement. The relative difference was estimated to be less than 2, where the values of the present study were the smaller ones. The numerical model used in analysing an oscillating flow was developed in a model validation phase, where simpler flow problems were considered.

High-frequency time-dependent disturbances on the pressure have been observed for simulations concerning oscillating flow. The cause of the disturbances has not been discovered. The processor time needed to perform the simulations has shown to be excessive, which in turn strongly has limited the number of calculations made.

An experimental study of the hydrodynamic forces exerted on a plate has also been carried out. A long, submerged plate has been forced into oscillating motion, whereby a time history of the forces acting on the plate is measured. The sampled values are transformed into the frequency domain using FFT, and the hydrodynamic coefficients are finally calculated. The experiments were made within the maximum possible limits, concerning  $\beta$  and  $KC$ , that the experimental equipment would allow, i.e.  $0.8 < KC < 4$  and  $5000 < \beta < 14500$ . The calculated values of  $C_D$  and  $C_M$ , from the experimental study have not been subject to any comparison, whereas such reference material could not be found.

## Förord

Forskning inom området vågenergi bedrivs för närvarande på institutionen för Vattenbyggnad, på Chalmers tekniska högskola. Vi har i detta examensarbete fått möjlighet att delta i detta, genom att utföra strömningsberäkningar på en del av ett vågenergisystem benämnt slangpumpskonceptet.

Vi skulle vilja tacka framförallt vår handledare tekn.lic. Larry Berggren, som gett oss fria händer att själva utveckla arbetet, samtidigt som han ställt krav på att det har lett någonstans. Vi skulle dessutom vilja tacka professor Lars Bergdahl, doktorand Martin Asztély och doktorand Jens-Uwe Pedersen, som hjälpt oss med värdefulla teoretiska såväl som praktiska kunskaper. För den experimentella studiens praktiska utformning och genomförande riktar vi ett speciellt tack till forskningsing. Bengt Carlsson samt tekniker Karl-Oskar Djärv. Generellt vill vi tacka alla på institutionen som varit oss behjälpliga, framförallt uppskattar vi att alla ställt upp och upplåtit sin tid närhelst vi behövt hjälp.

Speciellt uppskattar vi resan till Hanstholm i Danmark i juni 1994.

Dessutom vill vi tacka Bengt-Olov Sjöström, som gett oss värdefulla tips.

Göteborg, 1995

Anders Bryngelsson, Anders Tenstam

# Innehållsförteckning

<b>Sammanfattning</b>	<b>i</b>
<b>Summary</b>	<b>ii</b>
<b>Förord</b>	<b>iii</b>
<b>Innehållsförteckning</b>	<b>iv</b>
<b>Figurlista</b>	<b>vi</b>
<b>Tabellista</b>	<b>viii</b>
<b>Variabellista</b>	<b>ix</b>
<b>1 Inledning</b>	<b>1</b>
1.1 Bakgrund	1
1.2 Syfte med examensarbetet	2
<b>2 Problembeskrivning</b>	<b>3</b>
2.1 Slangpumpskonceptet	3
2.2 Hydrodynamiska koefficienter i tidsplanet	5
2.2.1 Inledning	5
2.2.2 Släpkraft	5
2.2.3 Medsvängande massa (added mass)	5
2.2.4 Morisons ekvation	6
2.3 Examensarbetets omfattning	6
2.3.1 Målsättning	6
2.3.2 Begränsningar	7
2.4 Litteraturstudier	8
2.5 Arbetets omfattning	9
2.5.1 Datorsimuleringar	9
2.5.2 Experimentell studie	9
<b>3 Grundläggande strömningslära</b>	<b>11</b>
3.1 Laminärt respektive turbulent flöde	11
3.2 Styrande ekvationer	11
3.3 Turbulens, Reynolds ekvationer	14
3.4 Rand- och initialvillkor	18
3.5 Dimensionslösa variabler	18
3.6 Gränsskikt	21
<b>4 Numerisk modell</b>	<b>23</b>
4.1 FEM-modell	23
4.1.1 Inledning	23
4.1.2 Finita elementmetoden	23
4.1.3 Finita elementmodell för strömningsproblem	23
4.2 Lösningmetoder	25
4.2.1 Inledning	25
4.2.2 Val av lösningsmetod	26
4.2.3 Quasi-Newton	26
4.2.4 Segregated solver	27
4.2.5 Adam-Bashford/trapetsregeln	28
4.2.6 Lösning av de linjära ekvationssystemen	28
4.2.7 Konvergenzkriterium	28
4.3 Instabiliteter	29
4.3.1 Inledning	29
4.3.2 Instabiliteter i rummet	29
4.3.3 Instabiliteter i tiden	31

<b>5</b>	<b>Försöksserier, modellvalidering</b>	<b>33</b>
5.1	Syftet med modellvalideringen	33
5.2	Stokeslösning	34
5.3	Laminär stationär friktionsbehäftad strömning, konstant flöde	36
5.4	Laminär transient friktionsbehäftad strömning, konstant flöde	40
5.5	Turbulent stationär friktionsbehäftad strömning, konstant flöde	45
5.6	Turbulent transient friktionsbehäftad strömning, konstant flöde	45
5.7	Turbulent transient friktionsbehäftad strömning, accelererande flöde	47
5.8	Sammanfattning modellvalidering	54
<b>6</b>	<b>Försöksserier, harmoniskt oscillerande strömning</b>	<b>56</b>
6.1	Inledning	56
6.2	Beräkningsresultat	57
<b>7</b>	<b>Experimentell studie av kraftpåkänning på en lång platta</b>	<b>65</b>
7.1	Syfte med mätningarna	65
7.2	Laborationsriggens uppställning	65
7.3	Mätning	66
7.4	Signalbehandling, utvärdering av mätdata	67
7.4.1	Bakgrund	67
7.4.2	Styrande ekvationer	67
7.4.3	Linearisering, Fourierutveckling	68
7.4.4	Diskret Fourier-analys av signalen, identifiering av termer	69
7.5	Resultat från experiment	72
<b>8</b>	<b>Slutsatser och förslag till fortsatt arbete</b>	<b>74</b>
<b>9</b>	<b>Referenser</b>	<b>75</b>
<b>Appendix A Kort introduktion till tensornotation</b>		
<b>Appendix B Härledning av dimensionslösa styrande ekvationer för turbulent flöde i 2D</b>		
<b>Appendix C FEM-uppställning av Reynolds ekvationer i 2D</b>		
<b>Appendix D Indatafil FIDAP 7.0</b>		

## Figurlista

Figur nr	Titel	sida
Figur 1.1	Vågmedeleffektens globala variation. Enhet: kW/m. (Törnkvist, 1976)	1
Figur 2.1	Skiss över slangpumpskonceptet	3
Figur 2.2	Matematisk modell för slangpumpskonceptet	4
Figur 2.3	I litteraturen funna parameterintervall ( $\beta$ , KC) där hydrodynamiska koefficienter beräknats	8
Figur 3.1	Fluidelement med de spänningar som verkar på dess ytor	12
Figur 3.2	Randvillkor som ansatts i den numeriska modellen ( <sup>1</sup> gäller endast transienta förlopp). Observera att $\sigma_i$ här representerar de totala spänningarna i riktning $i$ .	19
Figur 4.1	Beskrivning av Finita elementmetoden	24
Figur 4.2	Element med linjär hastighetsapproximation och konstant tryckapproximation	24
Figur 4.3	Jämförelse mellan Newton-Rhapson och Quasi-Newton för bara en frihetsgrad	27
Figur 5.1	FEM-modell för modellvalidering	34
Figur 5.2	Trycklinjer och strömlinjer för Stokeslösning	35
Figur 5.3	Tryckfördelning över plattans framsida (figuren till vänster) och baksida (figuren till höger)	36
Figur 5.4	principskiss över halvdomänsmodell	37
Figur 5.5	Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för $Re=40$	38
Figur 5.6	Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för $Re=100$	39
Figur 5.7	Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för $Re=126$ , $t^*=15.3$	41
Figur 5.8	Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för $Re=126$ , $t^*=119$	42
Figur 5.9	Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för $Re=126$ , $t^*=198$	43
Figur 5.10	Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för $Re=126$ , $t^*=242$	44
Figur 5.11	Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för $Re=10000$ , $t^*=7.73$	48
Figur 5.12	Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för $Re=10000$ , $t^*=57.9$	49
Figur 5.13	Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för $Re=10000$ , $t^*=97.9$	50
Figur 5.14	Strömlinjer för $Re=10000$ , $t^*=220-226$	51
Figur 5.15	Strömlinjer för $Re=10000$ , $t^*=220-226$	51
Figur 5.16	Strömlinjer för $Re=10000$ , $t^*=220-226$	51
Figur 5.17	Strömlinjer för $Re=10000$ , $t^*=220-226$	52
Figur 5.18	Strömlinjer för $Re=10000$ , $t^*=220-226$	52
Figur 5.19	Strömlinjer för $Re=10000$ , $t^*=220-226$	52
Figur 5.20	Vertikal hastighet i nod 2338, centralt belägen c:a 5 plathöjder nedströms plattan, $Re=500000$	53
Figur 5.21	Inloppshastighet, transient turbulent problem, $Re=500000$	54
Figur 5.22	$C_D$ som funktion av Reynolds tal (Hoerner, 1958)	55
Figur 6.1	FEM-modell för oscillerande flöde	56
Figur 6.2	Fas 1 i svängningsförloppet	59
Figur 6.3	Fas 2 i svängningsförloppet	60
Figur 6.4	Fas 3 i svängningsförloppet	61
Figur 6.5	Fas 4 i svängningsförloppet	62
Figur 6.6	Kraft på plattan samt randhastigheten för $KC=2.5$ , $\beta=1000$	63



Figur 6.7	Kraft på plattan samt randhastigheten för $KC=5$ , $\beta=1000$	63
Figur 6.8	Kraft på plattan samt randhastigheten för $KC=10$ , $\beta=1000$	64
Figur 6.9	Kraft på plattan samt randhastigheten för $KC=15$ , $\beta=1000$	64
Figur 7.1	Laborationsriggens principiella utseende. Tillvänster sedd uppifrån och till höger sedd från sidan	66
Figur 7.2	Illustration av platta använd vid experimentella studier. Mått i mm	66
Figur 7.3	Principiellt utseende av Fourier-transformen av en ren sinussignal	70
Figur 7.4	Principiellt utseende hos Fouriertransformen av den verkliga, uppmätta signalen från kraftgivaren. Signalen har en viss mängd energi representerad på udda multipler av grundtonen	70
Figur 7.5	Karakteristiskt utseende hos den verkliga, uppmätta signalen från lägesgivaren. Signalen har i princip all energi representerad på endast ett smalt frekvensavsnitt.	71
Figur D.1	Modell för oscillerande strömning, geometri och entiteter	

## Tabellista

Tabell nr	Titel	sida
Tabell 5.1	CD för Re 2-100, stationär laminär strömning	36
Tabell 5.2	CD för Re 10000 och 500000, turbulent transient strömning	47
Tabell 6.1	CD och CM, datorsimuleringar	58
Tabell 7.1	Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 12 mm, KC = 0.754	72
Tabell 7.2	Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 25 mm, KC = 1.571	72
Tabell 7.3	Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 36 mm, KC = 2.262	72
Tabell 7.4	Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 48 mm, KC = 3.016	73
Tabell 7.5	Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 55 mm, KC = 3.456	73
Tabell 7.6	Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 61 mm, KC = 3.833	73

## Variabellista

$\varepsilon$	viskös dissipation
$\chi$	penalty-parameter
$\Phi$	basfunktion för FEM-ekvationerna
$\Psi$	basfunktion för FEM-ekvationerna
$\phi$	turbulent genereringsterm
$\rho$	densitet
$\omega$	vinkelfrekvens
$\beta$	frekvensparameter
$\mu_0$	molekulär dynamisk viskositet
$\nu_0$	molekulär kinematisk viskositet
$\sigma_i$	totala spänningar i riktning $i$
$\sigma_{ij}$	total spänning i riktning $j$ verkande på en yta med normal i riktning $i$
$\tau_{ij}$	viskös spänning i riktning $j$ verkande på en yta med normal i riktning $i$
$\delta_{ij}$	Kronecker delta
$\mu_t$	turbulent dynamisk viskositet
$\nu_t$	turbulent kinematisk viskositet
$A$	tvärsnittsarea
$a$	added mass
$C_D$	släpkraftskoefficient
$C_d$	linjär släpkraftskoefficient
$C_M$	added mass koefficient
$D$	höjden på plattan
$F$	kraft
$f$	frekvens
$k$	turbulent kinetisk energi
$KC$	Kuelegan-Carpenter talet
$m$	massa
$p$	tryck
$Re$	Reynolds tal
$St$	Strouhals tal
$t$	tid
$T$	periodtid
$U_\infty$	friströmshastighet
$u_i$	hastighet i riktning $i$
$u_i$	medelhastighet i riktning $i$
$u_i$	fluktuerande hastighet i riktning $i$
$x_i$	rumsvariabel i riktning $i$
$z$	rörelseamplitud

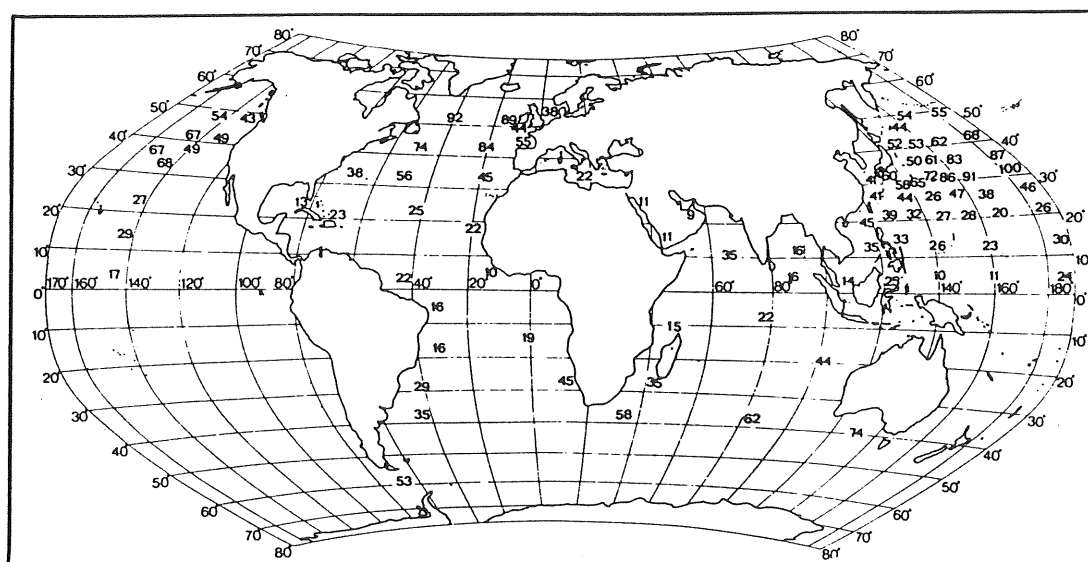


# 1. Inledning

## 1.1. Bakgrund

Tanken att på ett eller annat sätt tillgodogöra sig en del av den stora energimängd som finns samlad i världens oceaner har länge intresserat människan. Ett sätt att göra detta är att ta vara på den rörelseenergi som vågorna besitter. Andra varianter är att utvinna energi genom osmos av havsvatten med olika saltkoncentrationer, ta tillvara havsnivåskillnader pga tidvatten eller rörelseenergin i havsströmmar. Det förstnämnda konceptet ligger till grund för detta arbete.

Men hur mycket energi finns då i vågorna? För den oinvidde kan det vara svårt att ge en hygglig uppskattning. Energiinnehållet i en vågfront mäts oftast som årsmedelvärde av effekten per längdenhet och varierar från plats till plats. I figur 1.1. anges årsmedelvåg-effekten i kW/m för några olika platser på jordklotet. Uppskattningsvis finns totalt i världshaven i genomsnitt en effektreserv på 2.7 TW. Emellertid kan vågenergipotentialet öka väsentligt om energi tas från vågorna eftersom vinden tillför vågorna ny energi tills jämvikt mellan vind och vågor ånyo inträder (Nämnden för energiproduktionsforskning, 1981). Den totala genomsnittliga användningen av kommersiell energi per person i världen totalt var under 1993 mindre än 20 MWh och i Sverige 63 MWh (Svensk Energiförsörjning, 1993). Vågenergin motsvarar alltså ungefär  $1.2 \times 10^9$  personbehov globalt räknat och  $0.4 \times 10^9$  personbehov för ett industriland som Sverige. Naturligtvis är det inte möjligt att utvinna all energi i havsvågorna, men beräkningar visar att man tekniskt sett ur vågenergin skulle kunna utvinna en väsentlig del av elenergiebehovet i länder där situationen är särskilt gynnsam. Som exempel kan nämnas: Danmark (25 %), Portugal (70 %) och Irland (200 %) (An assessment of the state of art, technical perspectives and potential market for wave energy). Siffrorna skvallrar om att ett intresse för energiformen är motiverat. En översiktlig beräkning av kostnaden för elenergi utvunnen i en slangpumpsanläggning på 64 MW utanför norska kusten har gjorts av Gotaverken (1984), och en uppräknig av detta till 1990 års priser och räntenivåer (diskonto 10 %) ger ett elpris på 0.05 till 0.06 ECU/kWh (An assessment of the state of art, technical perspectives and potential market for wave energy). Kursen för ECU var i april 1995 c:a 9.9 kr.



Figur 1.1 Vågmedeleffektens globala variation. Enhet: kW/m. (Törnkvist, 1976)

De senaste decenniernas ökade förståelse för jordens miljö och dess sårbarhet gör att allt större krav ställs på att finna nya förnybara energikällor som i minsta möjliga mån ger oönskade effekter på omgivningen. Sett ur detta perspektiv erbjuder vågenergi en gynnsam lösning. Traditionellt har dock förespråkare för vågenergi haft svårt att få gehör för sina ideer eftersom energiformen ej ansetts kommersiellt gångbar. I länder som Japan, Irland och Norge har man sedan mitten på 1970-talet bedrivit seriösa studier och anläggningar av varierande storlek för utvinning av vågenergi har konstruerats.

## **1.2 Syfte med examensarbetet**

Examensarbetet har utförts vid institutionen för Vattenbyggnad på Chalmers Tekniska Högskola, där man för närvarande forskar på bland annat energiuttag från vattenvågor. Olika tekniska lösningar för att utvinna energi ur vågor finns (Nordisk Ministerråd, 1984), och man har i en samarbetsplan för EU-länderna samt Norge beslutat att forskningsarbetet rörande de olika lösningarna skall delas upp mellan de inblandade parterna. Ett av systemen som studeras vid institutionen är slangpumpskonceptet. Man försöker här analytiskt lösa de differentialekvationer som beskriver kraft-rörelsesambanden mellan kraftaggregatets olika delar i frekvensplanet.

Examensarbetets syfte har varit att studera en nedsänkt platta, vilken ingår som en del i det så kallade slangpumpskonceptet och bestämma de hydrodynamiska krafter som verkar på denna del och därigenom kunna beräkna motsvarande koefficienter som ingår i rörelseekvationerna för vågenergisystemet.

## 2. Problembeskrivning

### 2.1. Slangpumpskonceptet

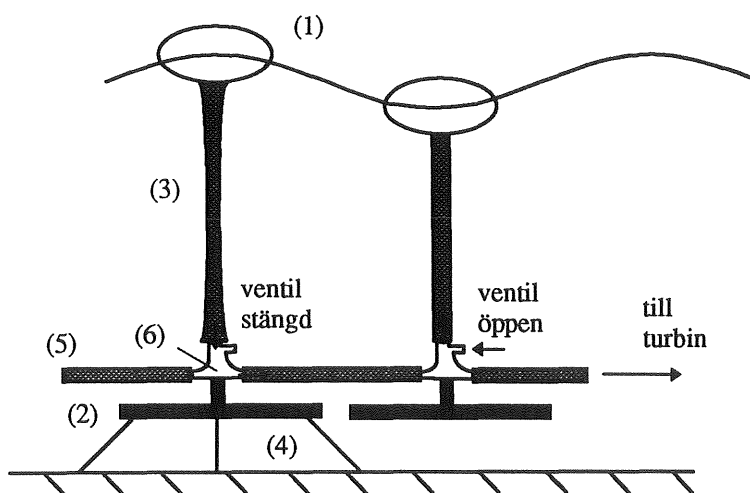
Slangpumpskonceptet består av fyra principiella delar (figur 2.1); bojen eller flytkroppen (1), bottenplattan (2), den elastiska slangpumpen (3) samt en förankringsanordning (4). Bojen följer vågens rörelser på ytan medan bottenplattan fungerar som mothåll och är förankrad i botten. Dessa två enheter förbinds med slangpumpen som är elastisk.

Principen för energiutvinning är som följer; då en våg faller in mot bojen höjs denna, bottenplattan motsätter sig genom sitt strömningsmotstånd vertikalrörelse varvid en relativrörelse mellan bojen och plattan äger rum. Den cylindriska ihåliga slangpumpen töjs därmed i vertikalled och dess speciella konstruktion ger upphov till att tvärsnittsarean och den inneslutna volymen då minskar. Detta medför att vatten pressas ut ur slangpumpen genom en backventil och via en högtrycksledning (5) iväg till en turbin. Trycket i ledningen som sammanbinder slangpump och turbin kan uppgå mot 20-40 bar. (Berggren, 1992). När sedan bojen följer med vågen ned i vågdalen drar slangpumpen ihop sig och dess inre volym vill återigen öka. Då öppnar en backventil (6) och vatten utifrån strömmar in i slangpumpen. Därefter repeteras förloppet. Flera vågbojar är seriekopplade via högtrycksledningen som figuren visar.

I den analytiska beräkningsmodellen (se figur 2.2) är slangpumpen idealiserad till att bestå av en linjär komplex fjäder. Bottenförankringen antas ha en karakteristik som kan översättas till en linjär reell fjäder. Ekvationerna för systemets vertikala rörelser kan tecknas enligt följande och gäller för regelbundna vågor:

$$(m_1 + a_1)\ddot{z}_1 + k_{12}(1 + j\gamma)(z_1 - z_2) + (C_{d1} + b_2)(\dot{z}_1 - \dot{\eta}_1) + C_g z_1 = F_1 \quad (2.1a)$$

$$(m_2 + a_2)\ddot{z}_2 + k_{12}(1 + j\gamma)(z_2 - z_1) + (C_{d2} + b_2)(\dot{z}_2 - \dot{\eta}_2) + k_2 z_2 = F_2 \quad (2.1b)$$



Figur 2.1 Skiss över slangpumpskonceptet

där:

- $m_i$  = massan hos kropp i
- $a_i$  = den till kropp i adderade massan
- $z_i$  = rörelsen hos kropp i
- $k_{12}$  = fjäderstyvheten hos slangpumpen
- $\gamma$  = imaginärdelen av komplexa fjäderstyvheten
- $C_{di}$  = linjärformulerad släpkraftskoefficient =  $C_{D,lin}\rho A/2$
- $b_i$  = strålningsdämpningen - den från kropp i förlorade energin pga utradierade vågor
- $F_i$  = den på kropp i verkande kraften pga infallande vågor
- $C_g$  = den hydrodynamiska styvheten =  $\rho g\pi D^2/4$
- $k_2$  = fjäderstyvheten hos förankringsanordningen

index: 1 = boj  
2 = platta

Rörelserna  $z_i$  hos kroppen och  $\eta_i$  hos fluiden kan skrivas med komplex notation, men har i detta arbete uttryckts i reella termer

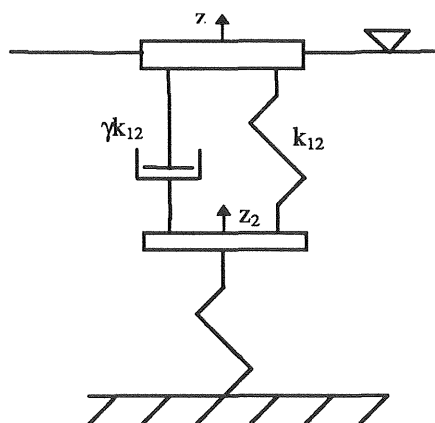
$$z_i = \hat{z}_i \sin(\omega t) \quad , \quad \dot{z}_i = \omega \hat{z}_i \cos(\omega t) \quad , \quad \ddot{z}_i = -\omega^2 \hat{z}_i \sin(\omega t) \quad (2.2)$$

$$\eta_i = \hat{\eta}_i \sin(\omega t) \quad , \quad \dot{\eta}_i = \omega \hat{\eta}_i \cos(\omega t) \quad , \quad \ddot{\eta}_i = -\omega^2 \hat{\eta}_i \sin(\omega t)$$

Ekvation (2.1) är något förenklad och hydrodynamiska kopplingseffekter mellan boj och platta har försumrats. Ekvation (2.1b) beskriver kraftsituationen för bottenplattan och har varit föremål för denna studie. Vid analysen har endast de hydrodynamiska krafterna analyserats och en förenklad modell av (2.1b) står till grund för studien

$$(m_2 + a_2)\ddot{z}_2 + C_{d2}(\dot{z}_2 - \dot{\eta}_2) = F \quad (2.3)$$

Koefficienterna  $a_2$  och  $C_{d2}$  är i ovanstående ekvationer definierade som konstanta storheter. Observera att kraften som uppkommer på grund av hastighetskillnaden är lineariserad i ekvation (2.1) och (2.3) (jmf ekvation (2.7)), vilket är nödvändigt för att ekvationssystemet ska vara lösbart.



Figur 2.2 Matematisk modell för slangpumpskonceptet



## 2.2. Hydrodynamiska koefficienter i tidsplanet

### 2.2.1. Inledning

Den totala kraften som verkar på en anströmd kropp kan i tidsplanet antas utgöras av två principiellt skilda delar. Ett bidrag är associerat med kroppens hastighet relativt omgivande vatten och ett bidrag är kopplat till accelerationen. Respektive bidrag kan härledas ur dimensionsanalys och ekvationerna antas gälla i varje ögonblick i ett flöde som varierar i tiden

### 2.2.2. Släpkraft

Det hastighetsassocierade kraftbidraget (den andra termen i vänsterledet av ekvation (2.3)) är kvadratisk beroende av relativhastigheten enligt (relativhastigheten mellan kropp och omgivande medium betecknas traditionellt  $u$  och kommer hädanefter i detta kapitel att användas)

$$F(t) = \frac{1}{2} C_D(t) \rho u(t) |u(t)| A \quad (2.4)$$

där

$F(t)$ : Den på kroppen verkande kraften (N)

$C_D(t)$ : Strömningssmotståndskoefficienten (dimensionslös)

$\rho$ : Omgivande mediums densitet ( $\text{kg/m}^3$ )

$u(t)$ : Kroppens hastighet relativt omgivande medium (m/s)

$A$ : Kroppens projicerade area på ett plan vinkelrätt mot huvudströmningens riktning ( $\text{m}^2$ )

Koefficienten  $C_D(t)$  definieras enligt ekvation (2.4) och kan alltså generellt anses ha ett tidsberoende. Koefficientens värde beror på vilken strömningssituation som föreligger, dvs hur  $u(t)$  ser ut. Den tidsberoende karakteristiken hos  $C_D$  är i realiteten emellertid opraktisk för exempelvis periodiskt varierande förlopp och man vill definiera ett tidskonstant  $C_D$

$$F_{\text{hast}}(t) = \frac{1}{2} C_D \rho u(t) |u(t)| A \quad (2.5)$$

För harmoniskt varierande rörelsesituationer kan man visa att  $C_D$  i själva verket blir oberoende av tiden, om vissa förenklingar och antaganden görs. Hur detta görs beskrivs i kapitel 7.4.

### 2.2.3. Medsvängande massa (added mass)

Den första termen i vänsterledet av ekvation (2.3) är det kraftbidrag som uppkommer pga kroppens acceleration. Massan består här av två olika delar. Dels den faktiska massa  $m_2$  som kroppen i sig har, dels en del som benämns medsvängande massa  $a_2$  (eng. added mass). Det senare bidraget uppkommer till följd av att en vattenmassa tenderar att följa med i kroppens acceleration och påverkar därmed kroppen med en korresponderande kraft. Koefficienten  $a_2$  definierad enligt (2.3) gäller för kraftekvationen i frekvensplanet och en motsvarande dimensionslös parameter kan härledas i tidsplanet med dimensionsanalys. Den definieras vanligen för tvådimensionella strukturer

$$F_{\text{acc}}(t) = C_M(t)\rho L \frac{\pi}{4} D^2 \frac{d}{dt}(u(t)) \quad (2.6)$$

där  $D$  är den omströmmade kroppens karakteristiska tvärsnittsdimension (t.ex. cylinderdiameter) och  $L$  kroppens utbredning i en riktning vinkelrätt snittytan. Den matematiska kopplingen mellan added-mass-termerna i frekvens- respektive tidsplanet fås genom variabeltransformation och de kommer att skilja sig åt med värdet på en faltningsintegral (Berggren, 1995). Precis som för släpkraftskoefficienten önskas ett tidskonstant  $C_M$  och denna kan för ett periodiskt förlopp på liknande sätt som  $C_D$  erhållas som ett tidskonstant värde, förutsatt vissa antaganden.

#### 2.2.4. Morisons ekvation

Den totala uppskattade kraften som kroppen utsätts för blir med de hydrodynamiska koefficienterna definierade enligt ovan i tidsplanet

$$F(t) = \frac{1}{2} A\rho C_D |u(t)|u(t) + C_M\rho L \frac{\pi}{4} D^2 \frac{d}{dt}(u(t)) \quad (2.7)$$

Detta är Morisons ekvation (Morison m.fl., 1950) och är ett samband som vanligen används för att uppskatta storleken på de krafter som verkar på omströmmade konstruktioner. Observera att kroppens egen massa ej ingår i ekvation (2.7). Ekvationens giltighet har sina begränsningar och kan antas gälla om  $u(\partial u/\partial x)/(\partial u/\partial t) \ll 1$  och  $v(\partial u/\partial y)/(\partial u/\partial t) \ll 1$  (Schlichting, 1955). Storleken på dessa kvoter har ej vid något tillfälle beräknats för de olika datorsimuleringarna.

### 2.3. Examensarbetets omfattning

#### 2.3.1. Målsättning

Syftet med arbetet var i inledningsskedet att beräkna de hydrodynamiska koefficienterna för den nedsänkta förankringsplattan, för att dessa skulle kunna användas för analytisk lösning av ekvationssystemet (2.1). Då bojen rör sig harmoniskt på vattenytan kommer dennas kraftpåverkan via slangpumpen att orsaka en periodisk svängning av bottenplattan. Man ville därför veta vilka strömningsbetingade krafter som verkade på denna platta, samt hur dessa kunde översättas till de periodmedelvärderade koefficienterna  $C_D$  och  $C_M$ . Beräkningarna skulle göras för i en vågenergiapplikation relevanta parameterintervall.

I ett slangpumpskraftverk är bottenplattan en cirkulär skiva med en tjocklek av en storleksordning som är mycket mindre än diametern. De parametrar som karakteriserar ett oscillerande strömningsförlopp är de dimensionslösa talen  $KC$  - Keulegan-Carpenter-talet och  $\beta$  - Frekvensparametern (Sarpkaya & Isacson, 1981).

$$KC = 2\pi \hat{z}/D \propto \text{amplituden } \hat{z} \quad (2.8)$$

$$\beta = D^2 / v_0 T \propto \text{frekvensen } f \quad (2.9)$$

Bakgrunden till dessa parametrar förklaras i kapitel 3.

Det är i sammanhanget intressant att studera inom vilka intervall dessa parametrar typiskt kommer att variera i en verklig vågenergiapplikation. Utgående från vågornas effektinnehåll ungefärligt givet av figur 1.1 samt att man kan räkna med att ett vågenergikraftverk av slangpumpsmodell har en genomsnittlig verkningsgrad på högst 25% (dvs bojen förmår absorbera en fjärdedel av energin som den infallande vågen besitter), kan man för att kunna ta ut tillräckligt mycket effekt i relation till investeringsbehovet räkna med att en bojdiameter på 10-15 meter är nödvändig (uppskattat vid konsultation med Bengt-Olov Sjöström, Technocean AB samt tekn.lic. Larry Berggren, Inst. för Vattenbyggnad). Bottenplattans dimensioner kommer att vara i samma storleksordning. Vidare befinner sig bottenplattan på ett avstånd under vattenytan som är relativt stort i förhållande till våghöjden. Detta innebär att oscillationsamplituderna kommer att bli förhållandevis små, överslagsmässigt kan amplituden antas vara maximalt 10-20% av plattdiametern. Periodtiderna ligger i området kring 3-4 sekunder och uppåt.

Resonemanget leder fram till följande riktvärden på frekvensparametern och Keulegan-Carpenter-talet beräknade enligt definitionen (2.8) och (2.9) (med kinematisk viskositet  $\nu_0=10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s för vatten av 10°C)

$$1 \times 10^6 \leq \beta \leq 1 \times 10^8$$
$$KC < 1 \tag{2.10}$$

Målsättningen har varit att beräkna de hydrodynamiska koefficienterna för olika värden på dessa parametrar inom ovanstående intervall. Beräkningarna skulle baseras på numeriska strömningssimuleringar utförda med hjälp av ett finita element-program.

### 2.3.2. Begränsningar

Strömningförloppet karakteriserat av ovan nämnda parameterintervall och det därtill kopplade Reynolds-talet antas vara helt i det turbulenta området (Reynoldstalet fås som produkten av  $\beta$  och KC) och är med största sannolikhet assymetriskt (Higuchi & Balligand, 1992). För att ge en numerisk simulering fullständig rättvisa skulle därför en tredimensionell datormodell behövas. Det höga Reynolds-talet kräver att en turbulensmodell måste användas, vilket som visas i kapitel 4 gör problemet stort och komplext med tillhörande långa exekveringstider. Redan i arbetets inledningsfas insågs att en sådan modell skulle bli alltför tidskrävande för att vara intressant.

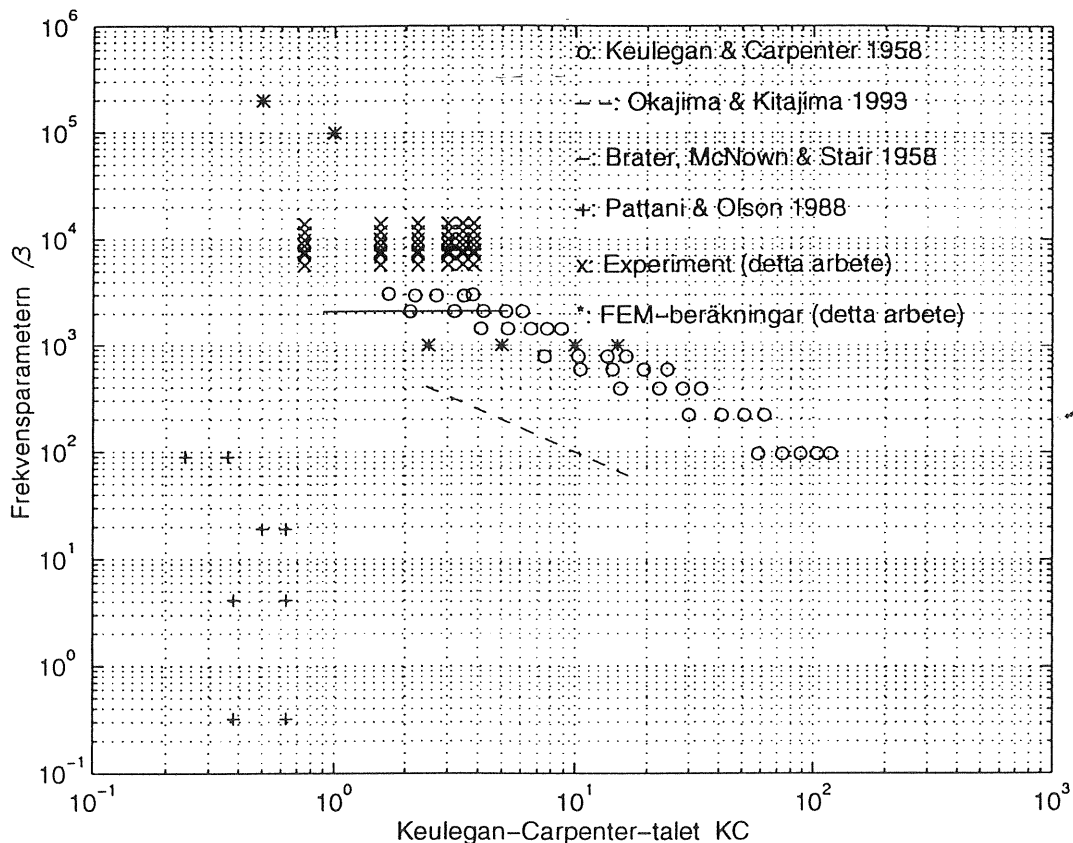
Nästa steg var därför att reducera problemet till att utföra simuleringen i två dimensioner. En variant är då att studera strömningen omkring ett snitt i plattan, dvs anta radialsymmetri (oberoende av  $\Theta$ ) och studera strömningsskilderna endast i r-z-planet (huvudströmningens riktning i z-riktningen). Med detta angreppssätt går man emellertid miste om när och på vilket sätt en eventuell assymetri introduceras. Den simuleringsmodell som valts är därför en tvådimensionell platta, placerad mitt i domänen, utsatt för oscillerande tvärströmning. De krafter (eg. spänningar) som härvid fås kan integreras fram över den tvådimensionella plattan i datormodellen och anger då totalkraften som skulle erhållas vid anströmningen av en oändligt lång platta i tre dimensioner. Den numeriska integrationen låter sig enkelt göras via en

beräkningsrutin i FEM-programmets grafiska användargränssnitt och har stått till grund för beräkningen av de hydrodynamiska koefficienterna för datorsimuleringen.

Om datorsimuleringarna visar att den assymmetri som uppkommer är av ringa betydelse, eller helt uteblir, vilket kan misstänkas vara fallet om  $KC < 4$  (Faltinsen, 1991), har man skäl att anta att kraften integrerad över halva plattan skulle kunna översättas till hydrodynamiska koefficienter för en cirkulär skiva, om man låter ett kraftbidrag till integralen nära plattans mitt ges mindre vikt än ett bidrag nära plattans ytterkant. Trots att denna hänsyn tas måste man vara medveten om att ekvationerna i det numeriska problem man löst ej helt motsvarar de ekvationer som skulle ha lösts i det radialsymmetriska fallet, däremot kan en uppskattning av krafterna på en cirkulär skiva göras. För att göra denna numeriska integration måste emellertid mycket stora datamängder hanteras manuellt, vilket resulterar i en alltför stor tidsåtgång. Arbetet har därför koncentrerats på att studera strömningen kring en tvådimensionell platta i ett cartesiskt koordinatsystem och beräkna de härtill kopplade hydrodynamiska koefficienter som definierats i kapitel 2.2.

## 2.4. Litteraturstudier

För att se vilket arbete som tidigare gjorts vad beträffar krafter på oscillativt tvärströmmade plattor har en litteraturstudie gjorts. Figur 2.3 visar vilka arbeten inom området som funnits vid sökningen, samt var i  $KC$ - $\beta$ -planet dessa placerar sig. De i en



Figur 2.3 I litteraturen funna parameterintervall ( $\beta$ ,  $KC$ ) där hydrodynamiska koefficienter beräknats

vågnergiapplikation relevanta intervallen beräknade enligt (2.10) är här också markerade. Studien visar att den referenslitteratur som funnits ej täcker in detta intervall. Syftet med examensarbetet var att studera strömningsförloppen och kraftpåverkan i detta område.

## **2.5. Arbetets omfattning**

### **2.5.1. Datorsimuleringar**

Inledningsvis har numeriska simuleringar gjorts för enklare strömningsfall än det oscillerande, i syfte att finna en lämplig och pålitlig numerisk modell (modellvalidering, kapitel 5). Därefter har simuleringar av oscillerande karaktär utförts.

Avsikten har varit att utföra datorsimuleringarna (Finita elementmetoden) för kombinationer av  $\beta$  och KC, i för vågnergiapplikationer relevanta intervall. Inledningsvis gjordes 4 simuleringar, då  $\beta$  hölls konstant (1000) och KC varierades (2.5, 5, 10, 15). Simuleringarna gjordes i detta område för att kunna jämföra med experimentella mätningar gjorda av Keulegan och Carpenter (Keulegan & Carpenter, 1958). Värden på de hydrodynamiska koefficienterna har i detta intervall visat hygglig överensstämmelse (se tabell 6.1)

Finita-element-simuleringarna visade sig ha stora problem att konvergera på ett önskat sätt. Konsekvensen blev att de diskreta tidsstegen i modellen blev väldigt små för att konvergens skulle uppnås, med mycket omfattande beräkningstider som följd. Simuleringar har därför ej kunnat göras ens i närheten av den omfattning som vore önskvärd. I arbetets slutfas har 2 konvergerade simuleringar gjorts för höga värden på frekvensparametern (100000 respektive 200000).

Simuleringarna har genomgående för de oscillerande förloppen uppvisat hastiga tryckvariationer i tiden, i hela fluiddomänen. Dessa ger upphov till stora svängningar i kraftpåverkan på plattan, vilket har gett anledning att iaktta viss försiktighet vad beträffar tolkning av beräkningsresultaten. Författarna har ej funnit någon rimlig förklaring till tryckvariationerna, och större satsningar på strömningssimuleringar för riktigt höga värden på frekvensparametern verkar ej relevant, då man i detta intervall ej har referenslitteratur att jämföra med. Det faktum att simuleringarna tog så stor tid i anspråk har också satt stopp för möjligheterna att göra jämförande simuleringar i de KC- $\beta$ -intervall som täckts in av egna experiment (se avsnitt 2.5.2).

Föreliggande arbete kan ses som en förstudie till fortsatta simuleringar, antingen i två eller tre dimensioner. Vid arbetets gång har en stor mängd för programmet relevanta styrparametrar testats och en relativt stabil uppsättning värden har funnits till hjälp för framtida simuleringar av liknande karaktär. En fullständig lista över nödvändiga indata till programmet FIDAP, för ett oscillerande strömningsförlopp, återfinns i appendix D.

### **2.5.2. Experimentell studie**

För att närma sig det diskuterade relevanta parameterintervallet har experimentella studier gjorts. En laborationsutrustning hade byggts tidigare av institutionen, och endast ett fåtal modifieringar krävdes för att passa behoven. En platta har härvid givits en påtvingad oscillerande rörelse under vatten med hjälp av en elmotor som effektkälla. Det visade sig dock

att utrustningen pga fysikaliska begränsningar ej förmådde arbeta i de parameterintervall som ansågs relevanta, ty eftersom modellskalan är i storleksordningen 100 gånger mindre än fullskalan, skulle enligt ekvation (2.9) behövas periodtider i modellen som är  $10^4$  gånger mindre än fullskalans, något som skulle ge mycket stora masskrafter och därtill associerade effektbehov. Kraftmätningar och beräkning av därtill associerade hydrodynamiska koefficienter har ändå gjorts inom apparaturens fulla begränsningsintervall. Mätningar, beräkningsmetod och resultat presenteras i kapitel 7.

### 3. Grundläggande strömningslära

#### 3.1. Laminärt respektive turbulent flöde

En av svårigheterna man har att övervinna vid studier av generella strömningsproblem, är att en fluids uppförande hastigt förändras då den dimensionslösa parametern Reynolds tal uppnår ett visst värde, olika för olika strömningsfall. Fullt utbildad turbulent rörströmning fås till exempel vid  $Re \approx 2300$  och gränsskiktet vid strömning längs en plan platta blir turbulent för  $Re \approx 3 \times 10^5 - 3 \times 10^6$  (Sundén, 1988). Reynolds tal kan tolkas som kvoten mellan masskrafterna och de viskösa krafterna i en fluid i rörelse och definieras

$$Re = \frac{U_{\infty} D \rho}{\mu} \quad (3.1)$$

De ingående parametrarna är en för strömningsfallet karaktäristisk referenshastighet (vanligen friströmshastigheten) respektive längdskala,  $U_{\infty}$  respektive  $D$ . Densiteten  $\rho$  och den molekylära viskositeten  $\mu$  är materialberoende konstanter. Vid låga  $Re$ -tal dominerar således de viskösa krafterna, vilket resulterar i en jämn och stabil *laminär* strömning emedan vid ett visst transitionsintervall strömningen istället börjar domineras av masskrafter. Strömningen får härvid en orolig karaktär och börjar uppföra sig instabilt, *turbulent*, med snabba hastighets- och tryckfluktuationer som följd. En plot av en hastighetskomponent som funktion av tiden ger sken av att de turbulenta fluktuationerna är helt slumpmässiga. I matematisk mening är de dock ej helt slumpmässiga utan uppvisar en karakteristisk koherent (rumslig) struktur i form av virvlar. En av egenskaperna hos ett turbulent flöde är ett brett spektrum av virvlar i olika storlekar, i regel spännande över flera tiopotenser.

Ett turbulent flöde är självuppehållande. Detta innebär i korta ordalag att de största turbulenta virvlarna tar sin energi från den ostörda friströmmen, distribuerar denna rörelseenergi ner igenom hela spektrat av virvlar varefter rörelsen hos de allra minsta virvlarna dör ut pga viskös dissipation och rörelseenergin övergår till värme. Det exakta händelseförloppet är ej känt, och kommer kanske aldrig att bli, varför man är hänvisad till att använda semiempiriska samband för att approximera verkligheten.

#### 3.2. Styrande ekvationer

När man analyserar kraftpåverkan i en fluid är det fördelaktigt att betrakta ett fludelement med dimensionerna  $dx_1$ ,  $dx_2$  och  $dx_3$ . Positionen hos elementet i rummet kan då ses som fludelementets tyngdpunkt. Med antagandet att en fluid är ett kontinuum (Panton, 1984), kan en isoterm strömning, dvs ej temperaturberoende, i tre dimensioner karakteriseras i varje punkt av hastighetsvektorn  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ , där  $u_1, u_2$  och  $u_3$  är komponenterna i  $x_1$ ,  $x_2$  respektive  $x_3$ -led, en vektor  $\mathbf{g}$  som innefattar yttre krafterns påverkan på fludelementet, t.ex. gravitations- eller magnetiska krafter, samt en symmetrisk spänningstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , representerande de ytkrafter ett fludelement utsätts för. Dessa ytkrafter delas upp i normalkrafter respektive tangential- (skjuv-) krafter längs fludelementets sidor (figur 3.1). Därtill kommer fluidens densitet  $\rho$ . Om man

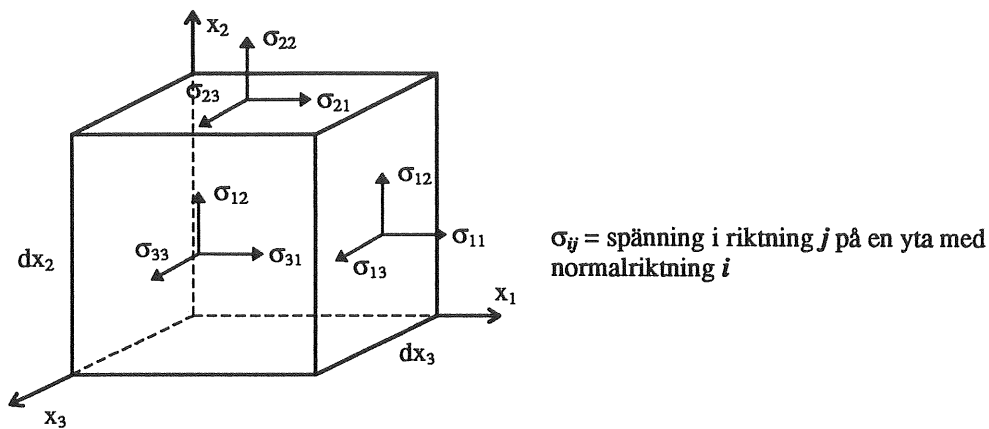


fig 3.1 Fluidelement med de spänningar som verkar på dess ytor

ställer upp för ett fluidelement ekvationer för konservering av massa respektive konservering av rörelsemängd (impuls) fås

Kontinuitetsekvationen: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (3.2)$$

Impulsekvationen: 
$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.3)$$

där 
$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U})$$

är den totala accelerationen hos fluidpartikeln. Ekvationerna är här skrivna med vektorbeteckningar och ovanstående uttryck beskriver ett generellt strömningsfall och anses korrekt beskriva underliggande fysikaliska fenomen. Ekvationerna kommer hädanefter i rapporten, för överskådlighetens skull, att anges på indexform. Ekvationerna (3.2) och (3.3) skrivs på indexform enligt

Kontinuitetsekvationen: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.4)$$

Impulsekvationen: 
$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji}) + \rho g_i \quad (3.5)$$

Observera att fullständiga accelerationen skrivits ut i ekvation (3.5). En kort introduktion till indexnotation ges i appendix A.

Impulsekvationen är i ekvation (3.5) skriven på en form benämnd *stress divergence model* vilket innebär att spänningarna på fluidelementets ytor anges direkt som element i spänningstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ . Spänningselementen  $\sigma_{ji}$  är dock okända variabler och det totala antalet obekanta i ekvationssystemet - i det tredimensionella fallet 3 hastighetskomponenter och 6 spänningar (symmetrisk  $3 \times 3$ -matris) - är större än antalet ekvationer som står till hands, 3 stycken. Spänningarna måste därför beskrivas eller modelleras på något sätt. Det är praktiskt att dela upp spänningstensor i en isotrop och en icke-isotrop del. Diagonalelementen ( $\sigma_{ji}$ ;  $j=i$ ) representerar normalspänningarna som verkar på fluidelementets ytor, och om man definierar



ett termodynamiskt tryck  $p_t$  (isotrop) som en funktion av det termodynamiska tillståndet så kan nu  $\sigma_{ji}$  skrivas

$$\sigma_{ji} = -p_t \delta_{ji} + \tau_{ji} \quad (3.6)$$

Här är  $\delta_{ji}$  Kroneckers deltaoperator vilken definieras i appendix A. Komponenten  $\tau_{ji}$  är den icke-isotropa delen av spänningarna och kan unikt sättas i samband med fluidens rörelse. Den kallas ofta *deviatoriska spänningstensorn*. I en stillastående fluid skulle alla element som inte ingår i huvuddiagonalen vara noll. I den fortsatta diskussionen försummas gravitationstermen i högerledet av impulsekvationen. Med uttryckssättet enligt ekvation (3.6) kan ekvation (3.5) nu skrivas

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p_t}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (3.7)$$

Normalspänningarna är generellt sammansatta av trycket och en viskös normalspänning. För plan orienterade i koordinatriktningarna blir normalspänningarna i det tredimensionella fallet

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p_t + \tau_{11} \\ \sigma_{22} &= -p_t + \tau_{22} \\ \sigma_{33} &= -p_t + \tau_{33} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Eftersom förestående arbete har utförts med antagandet att fluiden är inkompressibel fokuseras härnäst intresset på den form av ekvationerna som uppkommer som en följd härav.

En inkompressibel fluid har inget definierat termodynamiskt tryck. Därför definierar man ett mekaniskt (isotrop) tryck  $p_m$  som medelvärdet av normalspänningarna i samtliga koordinatriktningar. Trycket  $p$  (utan index) skall härnäst i rapporten tolkas som det mekaniska trycket.

$$p_m = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} = -\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (3.9)$$

Skillnaden mellan den totala normalspänningen i en riktning och det mekaniska trycket benämns viskös normalspänning. De viskösa spänningarna (normal- och tangential-) brukar modelleras enligt antagandet att fluiden är Newtonsk. Detaljerna bakom teorin redovisas ej här utan endast resultatet visas.

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} \mu_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu_0 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.10)$$

Den första termen i högerledet av ekvation (3.10) blir identiskt lika med noll för en inkompressibel fluid. Kontinuitetsekvationen reduceras nämligen i det fallet till

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.11)$$

Den grekiska bokstaven  $\mu_0$  betecknar den materialspecifika molekyllära, *dynamiska* viskositeten. En besläktad beteckning är  $\nu_0$ , som är den molekyllära, *kinematiska* viskositeten ( $\mu_0 = \nu_0 \times \rho$ ). Den modell som använts vid datorsimuleringarna har endast definierats i två dimensioner. De viskösa spänningskomponenterna  $\tau_{ij}$  blir med denna förenkling

$$\begin{aligned} \tau_{12} = \tau_{21} &= \mu_0 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \tau_{13} = \tau_{31} &= \mu_0 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \tau_{23} = \tau_{32} &= \mu_0 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \tau_{11} &= 2\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \tau_{22} &= 2\mu_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \tau_{33} &= 2\mu_0 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Om sambanden (3.12) sätts in i impulsekvationen, samt om inkompressibilitet förutsätts, kan dennas slutliga form för konstant viskositet tecknas

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.13)$$

Det slutliga ekvationssystemet blir härmed med (3.11) och (3.13) utvecklade för två dimensioner

$$\text{Kontinuitet:} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.14a)$$

$$\text{Impuls (x}_1\text{):} \quad \rho \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (3.14b)$$

$$\text{Impuls (x}_2\text{):} \quad \rho \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)$$

Detta är Navier-Stokes ekvationer, uppkallade efter C. L. M. H. Navier (1785-1836) och Sir George G. Stokes. De tre ekvationerna innehåller nu endast tre oberoende variabler  $u_1, u_2$  och  $p$  och systemet är därmed slutet. Ekvationssystemets olinjära karaktär gör emellertid att det inte är lösbart analytiskt i det generella fallet, utan bara i vissa förenklade specialfall. Vid mer komplicerade strömningsfall är man hänvisad till att numeriskt lösa ekvationerna med hjälp av datorer, vilket utgör en del av de arbeten som utförs inom Computational Fluid Dynamics (CFD)-fältet. Man arbetar då efter olika diskretiseringsalgoritmer för att överföra ekvationerna från kontinuerlig form till diskret. Exempel på de metoder som används inom strömningsläran är Finita elementmetoden (FEM), Finita volymmetoden och Finita differensmetoden. Detta arbete har utförts med hjälp av den förstnämnda.

### 3.3 Turbulens, Reynolds ekvationer

Liksom tidigare nämnts, anses än idag Navier-Stokes ekvationer (3.14) återspegla fysiken bakom ett generellt strömningsfall, laminärt eller turbulent, och skulle vara tillräckliga för att matematiskt beskriva hastighets- och tryckfält i en inkompressibel, newtonsk fluid, rent teoretiskt, t.ex med en numerisk diskretiseringsmodell som finita differenser eller finita element. På grund av de turbulenta flödesstorheternas stora interna skillnader i storlek skulle man dock bli tvungen att diskretisera fluiddomänen så noggrant att inte ens dagens mest avancerade superdatorer skulle kunna lösa mer komplicerade strömningsfält vid högre Reynolds-tal under en rimlig tidsperiod. På grund av detta blir man tvungen att modellera turbulensens fysikaliska karaktär med hjälp av semi-empiriska samband.

Eftersom man inte kan beräkna det turbulenta flödets verkliga hastighetskomponenter  $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$  kan man använda sig av metoden att dela upp flödesstorheten i en fluktuerande komponent som superponerats på ett tidsmedelvärderat värde. Detta är en metod som föreslogs av Reynolds i slutet av 1800-talet. Man har alltså i det tvådimensionella fallet

$$u_1 = \bar{u}_1 + u'_1 \quad u_2 = \bar{u}_2 + u'_2 \quad p = \bar{p} + p' \quad (3.15)$$

eller *verklig hastighetskomponent = medelhastighet + fluktuerande del*. Tidsmedelvärdet av tex en hastighetskomponent definieras som

$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_i dt \quad (3.16)$$

där integrationsintervallet  $T$  är valt så att det är tillräckligt mycket större än någon signifikant tidsskala för fluktuationerna i  $u_i$ , men tillräckligt litet för att behålla den medelvärdade strömningens tidsberoende karakteristik  $\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3, t)$ . Per definition är medelvärdet av fluktuationen noll, dvs  $\bar{u}'_i = 0$  och för att karakterisera den fluktuerande komponenten använder man dess RMS-värde (RMS = Root Mean Square) som definieras

$$u_{i,rms} = \left( \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_i'^2 dt \right)^{1/2} \quad (3.17)$$

Det finns två vägar att gå när turbulenta flöden skall analyseras. Antingen tillämpar man statistisk teori av turbulenta korrelationer eller så försöker man modellera de turbulenta storheterna med semi-empiriska samband (White, 1991). Den modell som använts bygger på den senare av dessa. Samtliga ingående flödesstorheter delas upp enligt ekvation (3.15). Om man nu sätter in dessa relationer i den inkompressibla kontinuitetsekvationen och medelvärdar enligt ekvation (3.16) och tillämpar medelvärdningsregler så erhålls kontinuitetsekvationen för medelhastigheten och efter subtraktion från den ursprungliga kontinuitetsekvationen även för de fluktuerande komponenterna (White, 1984)

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{respektive} \quad \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.18)$$

I en ingenjörsmässig applikation är de medelvärderade storheterna vanligen de mest intressanta för att karakterisera huvuddragen i strömningens natur, varför intresset i detta arbete helt riktats på den första ekvationen i (3.18). Om man nu sätter in ekvation(3.15) i Navier-Stokes ekvationer och tillämpar samma beräkningssteg som för kontinuitetsekvationen fås med indexnotation impulsekvationen för de medelvärdesbildade storheterna:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.19)$$

Vänsterledet har alltså komplicerats av en term som innehåller den okända turbulenta advektionen  $\overline{u'_i u'_j}$ , en s.k. Reynolds-spänning, en korrelationsterm som aldrig kan försummas i ett turbulent flöde. Man har alltså i det tvådimensionella fallet introducerat tre obekanta, nämligen  $\overline{u'_1 u'_1}$ ,  $\overline{u'_2 u'_2}$  och  $\overline{u'_1 u'_2} = \overline{u'_2 u'_1}$  (tensor är symmetrisk). Man kan ställa upp transportekvationer för de olika Reynoldsspänningarna utgående från den medelvärdesbildade Navier-Stokes ekvationen. Denna transportekvation kommer emellertid att innehålla nya okända korrelationstermer med upp till tre komponenter, varför ekvationssystemet ej kan slutas med denna metod (detta kallas allmänt *the turbulence closure problem*). Empiriska samband måste därför användas för att modellera korrelationstermerna. Först definieras den turbulenta fluktuerande kinetiska energin som

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'_1 u'_1} + \overline{u'_2 u'_2}) \quad (3.20)$$

Den turbulenta skjuvspänningen  $\overline{u'_i u'_j}$  ( $i \neq j$ ) antas vara linjärt beroende av medelhastighetsgradienterna, precis som de viskösa spänningarna som modellerats för laminära flöden, enligt

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.21)$$

där  $\nu_t$  kallas den turbulenta kinematiska viskositeten. Den sista termen i (3.21) ser till att uttrycket även kan tillämpas på normalspänningarna. Den första delen skulle ge för normalspänningarna

$$\overline{u'_1 u'_1} = -2\nu_t \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \quad \overline{u'_2 u'_2} = -2\nu_t \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \quad (3.22)$$

vars summa är noll pga kontinuitetsekvationen (3.18). För att definitionen (3.20) skall gälla måste därför denna term läggas till.

Impulsekvationen för medelströmningen kan skrivas på formen

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\mu_0 + \mu_t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.23)$$

där den totala viskositeten tänks sammansatt av en molekyllär och en turbulent del men med den väsentliga skillnaden att den turbulenta viskositeten ej är en fluid-specifik konstant utan en ny fluidstorhet som varierar med turbulenstillståndet i tiden och i rummet. Modellen kallas Eddy-viscosity-konceptet och föreslogs första gången 1877 av Boussinesq. Modelleringsproblematiken har härvid fokuserats på att ge en beskrivning av den turbulenta viskositetens fördelning i flödet. Vi har i detta arbete använt en två-ekvationsmodell, k-ε-modellen, för detta modelleringsssyfte. Bokstäverna står för turbulent kinetisk energi (k) respektive turbulent dissipation (ε).

Utgående från transportekvationerna för normal-Reynoldsspänningarna samt definitionen (3.20), kan man ställa upp en transportekvation för den turbulenta kinetiska energin ( i härledningen har alla masskraftstermer försumrats, liksom de termer som uppkommer pga tryckets inverkan samt de viskösa spänningarnas diffusion av kinetisk energi).

$$\rho \left[ \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu_0 + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \mu_t \phi - \rho \epsilon \quad (3.24)$$

Det sista antagandet ovan kan göras om man har fullt utbildad turbulens. Då innehåller de största fluktuationerna den mesta energin samtidigt som denna storskaliga turbulens i princip uppför sig invisköst. Detta gör modellen till en hög-Reynolds-modell.

Den sista termen ε i denna ekvation är dissipationen (förstörelsen) av turbulent kinetisk energi. Den representerar de viskösa spänningarnas nedbrytande av de minsta virvlarna och ersätter en term innehållande produkter av hastighetsgradienter som ursprungligen erhålls vid härledningen, man får en energisänka för den turbulenta kinetiska energin.

En halvempirisk transportekvation för dissipationen kan härledas och lyder

$$\rho \left[ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu_0 + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + c_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t \phi - \rho c_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.25)$$

Funktionen φ som uppträder i båda transportekvationerna är en term som representerar produktion av turbulent energi pga skjuvspänningar och definieras

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \quad (3.26)$$

där D är en spänningstensor med elementen

$$D_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.27)$$

och pricken representerar skalärprodukten av tensorerna. En skalärprodukt mellan två tensorer med a och b elementen a<sub>ij</sub> och b<sub>ij</sub> definieras

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{ji} \quad (3.28)$$

I ekvationerna ingår ett antal konstanter som empiriskt funnits anta följande värden

$\sigma_t=1,00$	$\sigma_t=1,30$	$c_1=1.44$	$c_2=1.92$	$c_\mu=0,09$
-----------------	-----------------	------------	------------	--------------

Konstanternas numeriska värden och deras inflytande på ekvationerna har studerats av många (t.ex. Chen & Kim, 1987, Launder & Spalding, 1974), och de har visat sig ha stor betydelse för beräkningarnas validitet, speciellt gäller detta  $c_1$  och  $c_2$  (Rodi, 1984). De värden som presenteras ovan, och som genomgående använts vid simuleringarna, är de föreslagna av Launder och Spalding.

De fem ekvationerna kopplas samman genom sambandet  $v_t = c_\mu k^2/\epsilon$  där  $c_\mu$  är en empiriskt funnen konstant. Vi har alltså fem obekanta flödesstorheter  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $p$ ,  $k$  och  $\epsilon$  samt fem partiella differentialekvationer för att koppla samman dessa. Därmed är ekvationssystemet teoretiskt sett lösbart. De ingående ekvationerna är dock starkt kopplade och olinjära, vilket försvårar möjligheten att få en konvergent lösning.

### 3.4. Rand- och initialvillkor

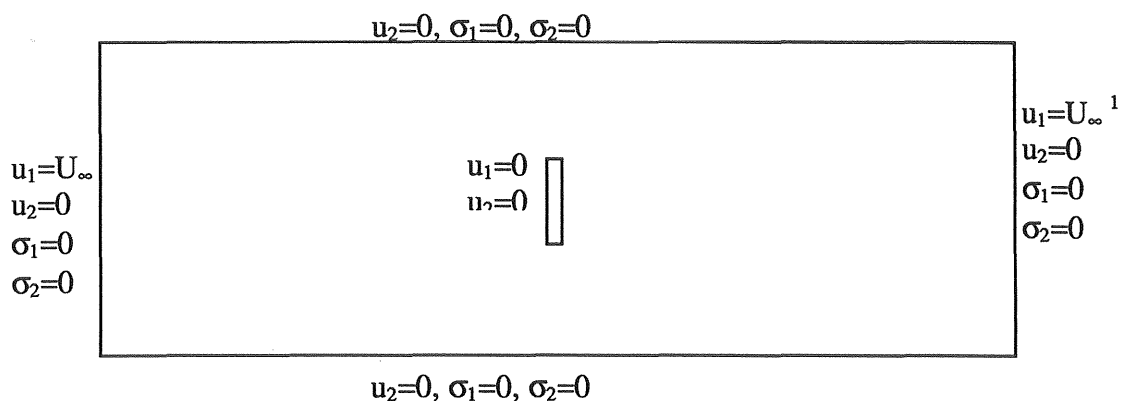
För att Reynolds ekvationer skall kunna lösas måste rand- och initialvillkor specificeras. För ett stationärt problem krävs inget initialvillkor. Olika typer av differentialekvationssystem kräver olika randvillkor. Dessa kan vara av tre sorter (Hoffman & Chiang, 1993):

- Dirichlet-villkor. Variabelvärdet specificeras direkt på ränderna.
- Neumann-villkor. Rumsgradienter av variabeln specificeras.
- En linjärkombination av de båda ovanstående

De randvillkor som använts i arbetet visas i figur 3.2. Som initialvillkor för de transienta problemen har hastighetsfältet satts till noll och  $k$  och  $\epsilon$  har i hela domänen satts till samma värde som randvillkoren.

### 3.5. Dimensionslösa variabler

Ekvationssystemet (3.18), (3.19), (3.24), (3.25) kan lösas numeriskt förutsatt att tillräckliga rand- och initialvillkor specificeras. Lösningen erhålls då i de primitiva variablerna  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $p$ ,  $k$  och  $\epsilon$  som funktion av läget  $x_1$ ,  $x_2$ , och tiden  $t$ . Det finns dock skäl att skala om dessa variabler (med dimensioner) till motsvarande dimensionslösa dito. Dels gör man rent fysikaliskt en vinning med detta eftersom man kan reducera problemets antal beroendeparametrar, dels kommer de flesta dimensionslösa variabler att anta värden runt 1, vilket minimerar de numeriska avrundningsfelen då styvheten i de i ekvationssystemet ingående matriserna reduceras. Principen är den att man relaterar de ingående variablerna till varandra och bildar dimensionslösa grupper av dessa, som sedan utgör problemets specifika parametrar. I det studerade problemet skall de hydrodynamiska koefficienterna  $C_D$  och  $C_M$  beräknas för ett oscillerande flöde. På dimensionsanalytisk grund kan man göra antagandet att kraften  $F$  på en omströmmad kropp är beroende av följande parametrar för det stationära fallet (ej oscillerande flöde,  $du/dt = 0$ ).



Figur 3.2 Randvillkor som ansatts i den numeriska modellen (<sup>1</sup> gäller endast transienta förlopp). Observera att  $\sigma_i$  här representerar de totala spänningarna i riktning  $i$ .

$$F = f(\rho, \mu_0, D, U_\infty) \quad (3.29)$$

Här är  $D$  och  $U_\infty$  en för problemet karaktäristisk längd (vanligen det omströmmade föremålets största dimension, t.ex. plathöjden) respektive hastighet (som ofta är friströmshastigheten). Det omströmmade föremålets projicerade area i huvudströmningsriktningen är proportionellt mot  $D^2$ . Dimensionsanalys med  $\Pi$ -teoremet ger

$$C_D = f(\text{Re}) \quad (3.30)$$

där  $C_D$  är den (dimensionslösa) strömningsmotståndskoefficienten. Problemets komplexitet har härigenom kraftigt reducerats. I en oscillerande strömningssituation är kraftens parameterberoende något annorlunda. Oscillationens karakteristik kan beskrivas med en sinusformad funktion. Denna bestäms av tre parametrar, nämligen oscillationsamplituden  $\hat{z}$ , vinkelhastigheten  $\omega$  samt tiden  $t$  eftersom rörelseekvationen lyder  $z(t) = \hat{z} \sin(\omega t)$ . Härav följer också att den karaktäristiska hastigheten kan väljas till hastighetsamplitudens storlek, vilken är given ur rörelseekvationen, alltså  $U_\infty = \hat{z} \omega$ . Följande situation borde således föreligga

$$F = f(\rho, \mu, D, \hat{z}, t) \quad (3.31)$$

Här ser man dock att det finns två karaktäristiska längder,  $\hat{z}$  och  $D$ . Detta är inte särskilt fördelaktigt ur dimensionsanalyssynpunkt och därför låter man istället den karaktäristiska hastighetsamplituden  $U_\infty$  ingå som parameter;  $U_\infty = \hat{z} \omega$ . Det finns en mängd sätt att skala ingående variabler och följande relationer föreslås av flera som undersökt liknande problem (Hoffman & Chiang, 1991, Lankhorst, 1991). De dimensionslösa variablerna markeras med asterisk.

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{x_1}{D}, & x_2^* &= \frac{x_2}{D}, & u_1^* &= \frac{u_1}{U_\infty}, & u_2^* &= \frac{u_2}{U_\infty}, & p^* &= \frac{p}{\rho U_\infty^2}, & t^* &= \frac{t}{T} \\ k^* &= \frac{k}{U_\infty}, & \epsilon^* &= \frac{D}{U_\infty^3} \epsilon, & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{\mu_t}{\mu_0}, & \mu_t^* &= \frac{\mu_t}{\rho U_\infty D}, & \phi^* &= \frac{D^2}{U_\infty^2} \phi \end{aligned} \quad (3.32)$$

De ingående variablerna  $u$ ,  $v$  och  $p$  skall ses som de tidsmedelvärderade värdena.  $T$  är oscillationens periodtid  $T = 2\pi/\omega$ . Sätter man in ovanstående relationer i ekvationssystemet erhålls motsvarande ekvationssystem för de dimensionslösa variablerna. Det visar sig dock att det inte ter sig lämpligt att skala tiden med periodtiden för den studerade FEM-modellen. Impulsekvationen får följande utseende

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + \frac{1}{KC} \left( u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} \right) &= -\frac{1}{KC} \frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \\ + \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1^*} \left( \mu^* \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left( \mu^* \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

De styrande parametrarna är de dimensionslösa talen  $KC$  och  $\beta$ . Dessa definieras enligt

$$\begin{aligned} KC &= 2\pi \frac{\hat{z}}{D} = \frac{U_\infty T}{D} && \text{Keulegan – Carpenter – talet} \\ \beta &= \frac{D^2}{\nu T} = \frac{Re}{KC} && \text{Frekvensparametern} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Det program som använts för att lösa finita-element-ekvationerna tillåter dock inte att man specificerar konstanter att multiplicera med endast de advektiva termerna. Det är alltså inte möjligt att använda detta skalningsförhållande vilket av skäl som inte närmare förklaras här hade underlättat definitionen av de transienta problemens tidsberoende randvillkor. Problemet avhjälps genom att ändra skalningen av tiden så att den relateras till en friströmsberoende tidsskala. Man sätter

$$t^* = \frac{U_\infty t}{D} \quad (3.35)$$

Det dimensionslösa ekvationssystemet får det slutliga utseendet (fullständig härledning finns i appendix B)

Impuls i  $x_1$ -led:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \\ + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1^*} \left( \mu^* \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left( \mu^* \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Analogt gäller för ekvationen i  $x_2$ -led. I FEM-programmet FIDAP förväntas ekvationerna anges på dimensionsform. Lösningen som erhålls blir då också i de dimensionella variablerna  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $p$ ,  $k$  och  $\epsilon$ . En jämförelse mellan (3.19) och (3.36) visar dock att svaret fås i de dimensionslösa variablerna om densiteten specificeras till 1 och den molekylära viskositeten sätts till Reynoldstalets inverterade värde. Vidare gäller för  $k$ -transport-ekvationen i dimensionslös form:



$$\begin{aligned} \frac{\partial k^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial k^*}{\partial x_1^*} + v^* \frac{\partial k^*}{\partial x_2^*} &= \frac{\partial}{\partial x_1^*} \left( \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \left( \frac{\partial k^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial k^*}{\partial x_2^*} \right) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left( \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \left( \frac{\partial k^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial k^*}{\partial x_2^*} \right) \right) + \mu_t^* \Phi^* - \varepsilon^* \end{aligned} \quad (3.37)$$

Transportekvationen för dissipationen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_2^*} &= \frac{\partial}{\partial x_1^*} \left( \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \left( \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_2^*} \right) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left( \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \left( \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_2^*} \right) \right) + c_1 \left( \frac{\varepsilon^*}{k^*} \right) \mu_t^* \Phi^* - c_2 \frac{\varepsilon^{*2}}{k^*} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Då de styrande ekvationerna icke-dimensionaliserats, måste naturligtvis även detsamma göras med randvillkoren. Hur den kinetiska energin  $k$  och dissipationen  $\varepsilon$  skalas visas i kapitel 5.6.

För det oscillerande randvillkoret  $u_{\text{rand}} = U_{\infty} \sin(\omega t)$  fås i det dim.lösa fallet

$$u_{\text{rand}}^* = \frac{u_{\text{rand}}}{U_{\infty}} = 1 \cdot \sin(\omega t) = \sin\left(\frac{t^* D}{z \omega} \omega\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{KC} t^*\right) \quad (3.39)$$

Vinkelhastigheten är ju  $\omega = 2\pi/T$ . Man ser då att den dimensionslösa periodtiden blir  $KC$ , dvs om periodtiden (den verkliga) är exempelvis 10 måste den dimensionslösa tiden vara 10 då en hel period har genomlöpts. Detta hade ej varit fallet om tiden kunde skalas direkt mot periodtiden.

### 3.6. Gränsskikt

I ett turbulent flöde förekommer stora hastighets- och, i ett värmeberoende problem, även temperaturgradienter. Speciellt påtagligt är detta i de visköst dominerade delarna av gränsskikten alldeles i närheten av en fast yta, det viskösa underskiktet. No-slip-villkoret tvingar alla hastighetskomponenter att vara noll på ytan och för t.ex. fullt utbildad turbulent rörströmning är 90% av kärnhastigheten uppnådd på bara en bråkdel av radien från väggen räknat. För att numeriskt kunna lösa upp de skarpa flödesvariabelprofilerna i dessa regioner, skulle opropotionerligt många noder behöva definieras, med kraftigt ökad beräkningstidsåtgång som följd. En ytterligare orsak till att inte lösa upp det turbulenta flödesfältet ända in till väggen med  $k$ - $\varepsilon$ -modellen är att denna är en hög-Reynolds-modell och bygger på antagandet att strömningen vid höga Reynolds-tal ej är utpräglat friktionsbehäftad, något som inte alls stämmer i de starkt friktionsdominerade inre delarna av gränsskikten.

För att komma förbi problemet specificerar man i FIDAP speciella WALL-element närmast en vägg. Inom dessa element beräknas flödesstorheterna med hjälp av empiriskt funna algebraiska samband som gäller i turbulenta gränsskikt, kallad "law of the wall" - vägglagen. Denna bygger på dimensionsanalys och ger hastighetsprofilen på dimensionslös form enligt

$$u^+ = f(y^+, \varepsilon^+) \quad (3.40)$$

där

$$u^+ = \frac{U}{u^*} \quad , \quad y^+ = \frac{yu^*}{\nu} \quad , \quad \varepsilon^+ = \frac{\varepsilon u^*}{\nu} \quad (3.41)$$

De ingående variablerna är tidsmedelvärderade hastigheten  $U$ , avstånd från väggen  $y$ , ytskrovligheten  $\varepsilon$ , kinematiska viskositeten  $\nu$  och den s.k. friktionshastigheten  $u^*$  som definieras

$$u^* \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.42)$$

där  $\tau_w$  är väggskjuvspänningen. Friktionshastigheten betecknas allmänt på detta sätt och den skall inte blandas ihop med den dimensionslösa hastigheten. De turbulenta skjuvspänningarna  $\overline{\rho u'_1 u'_2}$  modelleras i gränsskiktet med hjälp av van Driest's blandningslängdsteori (FIDAP theory manual, 1993). Randvillkor på turbulenta kinetiska energin och dissipationen behöver ej ges på väggränder utan nödvändiga kriterier ges av FIDAP. Flödesfältet antas sedan fullt turbulent i elementlagret närmast utanför de speciella WALL-elementen, och dessa antas innehålla hela gränsskiktets fysiska utbredning. Beräkningsproceduren inom WALL-elementen blir osynlig för användaren och har i föreliggande arbete ej varit ett ämne för undersökning. Användaren måste dock tillse att hela gränsskiktapproximationen "får plats" i väggelementen genom kontroll av att det lokala Reynolds-talet, baserat på elementstorleken, i alla element närmast väggen är minst 30.

## 4. Numerisk modell

### 4.1. FEM-modell

#### 4.1.1. Inledning

De numeriska beräkningarna har utförts med Finita elementmetoden, ett komersiellt program, FIDAP 7.0, har använts. I finita elementmetoden diskretiseras det kontinuerliga problemet med avseende på rummet, men inte på tiden. För tidsdiskretiseringen används sedan någon form av tidsintegrator och lösningen erhålls i diskreta tidssteg. Två modeller har framtagits, en till de problem där flödet endast går i en riktning (se figur 5.1) och en till de problem som innehåller ett oscillerande randflöde (se figur 6.1).

#### 4.1.2. Finita elementmetoden

Finita elementmetoden är ett verktyg för att lösa problem som varierar i rummet. En exakt kontinuerlig funktion approximeras till lösningen i  $n$  stycken diskreta punkter, så kallade noder så att

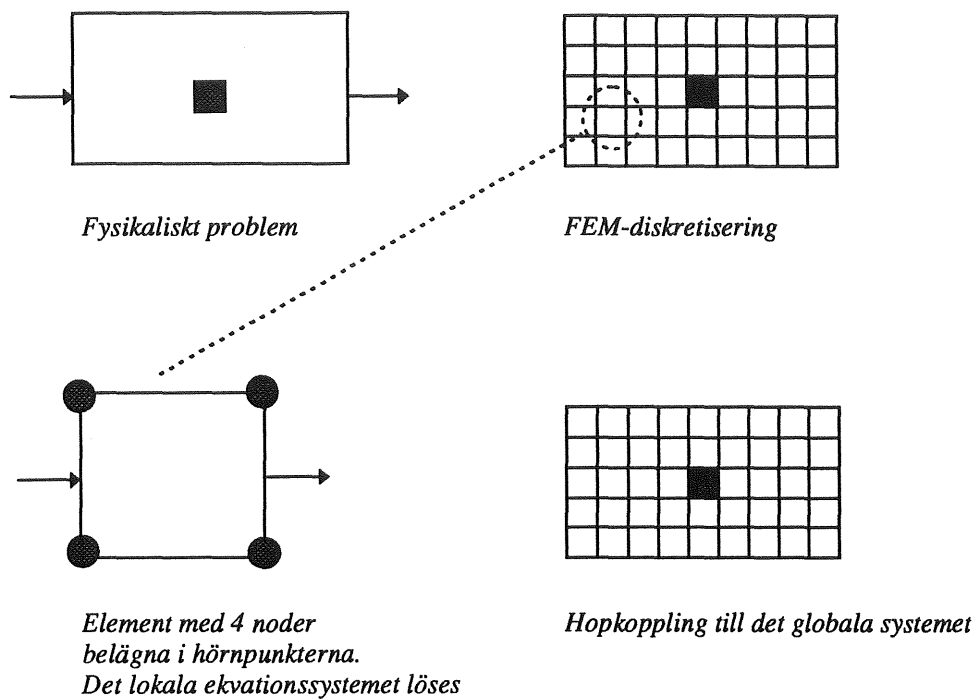
$$f = \Phi \tilde{f} \quad (4.1)$$

där  $\Phi$  är en radmatris innehållande interpolationsfunktioner (basfunktioner) och  $\tilde{f}$  är en kolumnmatris med de obekanta nodvärdena, som båda har dimension  $n$ ,  $f$  är den kontinuerliga funktionen.

Vid användning av finita element metoden delas beräkningsdomänen in i ett ändligt antal mindre områden, element, på vilka noderna är belägna. Iden med finita element-metoden är att istället för att lösa ett ekvationssystem för ett mycket stort område lösa ekvationerna på elementnivå (den lokala lösningen). Efter att ekvationssystemet är löst assembleras de lokala lösningarna och lösningen för hela domänen erhålles (den globala lösningen). Förloppet illustreras i figur 6.1. Hur väl den diskreta lösningen beskriver den exakta beror av ett flertal parametrar, till exempel elementtäthet och val av interpolationsfunktioner.

#### 4.1.3. Finita elementmodell för strömningsproblem

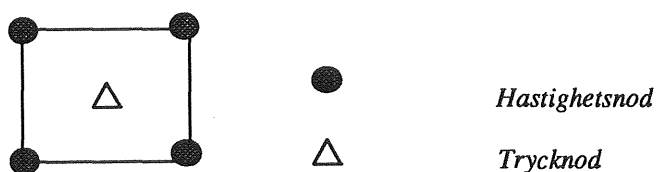
Vid strömningsproblem finns primärt två typer av frihetsgrader; hastigheter och tryck. För laminära problem räcker det med dessa frihetsgrader, men för turbulenta problem måste ytterligare frihetsgrader införas för att modellera turbulensen. De minsta virvlarna i ett turbulent förlopp kan vara i storleksordningen  $50 \times 10^{-6}$ , och det skulle ställa orimliga krav på elementtätheten för att kunna lösa upp ett sådant förlopp. Ett flertal olika turbulensmodeller finns framtagna, i det här arbetet har använts  $k$ - $\epsilon$  modellen, som är den mest sofistikerade i



Figur 4.1 Beskrivning av Finita elementmetoden

FIDAP 7.0 (k- $\epsilon$  modellen beskrivs utförligt i kapitel 3). De simuleringar som utförts har samtliga varit i 2-D; således har de laminära problemen innehållit tre frihetsgrader ( $u_1$ ,  $u_2$  och  $p$ ) och de turbulenta fem ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $p$ ,  $k$  och  $\epsilon$ ).

Att problemen innehåller upp till fem frihetsgrader och det faktum att ett tätt elementnät behövs för att kunna lösa ekvationerna har medfört att författarna valt att använda så enkla interpolationsfunktioner som möjligt för att hålla nere kravet på datorkapacitet. Hastigheterna, den turbulenta kinetiska energin samt dissipationen har antagits ha en linjär fördelning, medan trycket har modellerats på två olika sätt, *penalty pressure model* (se ekvation (5.5)) och *mixed formulation*. Det minsta ekvationssystemet erhålls om trycket modelleras enligt ekvation (5.5), enär trycket då löses ut i efterhand ur hastighetsfältet. Vid användning av *mixed formulation* ingår även trycket i FEM-formuleringen av problemet (se appendix C). Endast vissa kombinationer av interpolationsfunktioner för hastigheter och tryck är möjliga, annars uppträder oscillationer i tryckfältet. I detta arbete har trycket modellerats som diskontinuerligt med elementvis konstant värde. Vidare har ett strikt rektangulärt elementnät med minskande elementstorlek in mot plattan gett de bästa resultaten i förhållande till beräkningstid.



Figur 4.2 Element med linjär hastighetsapproximation och konstant tryckapproximation

## 4.2. Lösningsmetoder

### 4.2.1. Inledning

I detta avsnitt beskrivs lösningsalgoritmer och metoder för transienta beräkningar men de gäller även för stationära problem med skillnaden att de tidsberoende termerna sätts till noll i matrisekvationerna. Ekvationerna löses annars på samma sätt i det stationära fallet som för varje tidssteg i de transienta.

Efter FEM-diskretiseringen är problemet diskret med avseende på rummet men är för transienta problem fortfarande kontinuerligt med avseende på tiden. Ekvationssystemet kan skrivas som:

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + (\mathbf{K}_c(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_p) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4.2)$$

där  $\mathbf{K}_c(\mathbf{u})$  representerar den olinjära delen av ekvationssystemet,  $\mathbf{K}_p$  den linjära och  $\mathbf{M}$  tröghetstermerna (jfr appendix A, matrisuppställning av det transient turbulenta problemet). Detta löses genom att ersätta den kontinuerliga tidsderivatan med en diskret uppdelning och lösa ekvationssystemet iterativt i diskreta tidssteg. Det finns ett flertal olika tidsintegrationsscheman men i botten bara två typer; implicit och explicit tidsintegration. Explicita scheman är den enklaste typen och skrivs på formen:

$$y_{n+1} = f(y_n) \quad (4.3)$$

till skillnad från de implicita som även innehåller en funktion av  $y_{n+1}$  i högerledet.

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n+1}) \quad (4.4)$$

De implicita tidsintegratorerna ger en snabbare konvergens men kräver mer datorkapacitet per iteration på grund av sin högre komplexitet, varför även de enklare explicita formlerna kan komma till användning för särskilt stora och minneskrävande problem. Ett problem för en explicit tidsintegrator är att den har en gräns över vilken problemet blir numeriskt instabilt och alltid divergerar vilket kan medföra krav på så små tidssteg att den inte är kostnadseffektiv, en implicit tidsintegrator har dock inga sådana krav utan är numeriskt stabil för alla tidsstegsstorlekar.

För transienta problem är det en fördel att ha ett variabelt tidssteg enär det under vissa perioder kan krävas mycket små tidssteg för att lösningen skall konvergera medan under andra perioder ett större tidssteg kan tillåtas. Ett sådant variabelt tidssteg erbjuds i FIDAP för de implicita lösarna *backward Euler* och *trapetzoid* (FIDAP 7.0 theory manual).

I varje tidssteg skall sedan ett olinjärt ekvationssystem lineariseras och lösas med någon numerisk metod. Det finns två olika typer av lösare, den ena assemblerar och löser hela ekvationssystemet på en gång till skillnad från den andra som plockar ner ekvationssystemet i mindre matriser där den löser kontinuitetsekvationen, impulsekvationerna och transportekvationerna för  $k$  och  $\epsilon$  var för sig. I den första typen ingår *olika varianter av Newton-Rhapson* samt *successive substituton*, den andra typen av lösare kallas *segregated*

*solver*. De olika lösarna har olika fördelar; Newton-metoderna uppvisar en mycket snabb konvergens och kräver få iterationer per tidssteg, men kräver också en bra initialgissning på grund av sin begränsade konvergensradie, vilket kan leda till att mycket små tidssteg måste användas för problem med stora fluktuationer i tiden. Successive substitution är en robust lösare som har god konvergensradie men kräver många iterationer per tidssteg. Segregated solver har sin styrka i att den kräver avsevärt mindre minne än de övriga lösarna, detta på grund av att den styckar upp problemet i ett flertal mindre bitar, samt att den har en stor konvergensradie. Nackdelen är att den liksom successive substituton kräver många iterationer per tidssteg för att nå en konvergent lösning.

Valet av numerisk metod alltså beror av flera parametrar, varav några av de viktigaste är;

- Datorkapacitet; tillgängligt minnesutrymme och processortid
- Stabilitet hos problemet
- Storlek av problemet; totalt antal frihetsgrader

#### 4.2.2. Val av lösningsmetod

I det här arbetet har för de transient turbulenta problemen *segregated solver* använts, tillsammans med ett andra ordningens implicit tidsintegrationschema, *Adam Bashford/trapetsmetoden*. För de laminära körningarna samt turbulent stationära har företrädesvis *Quasi-Newton* använts. Beträffande val av lösningsalgoritm har segregated solver för de transienta turbulenta problemen visat sig vara överlägsen alla andra lösare. Den generella rekommendationen för ett problem av den här typen är att använda en Newtonlösare tillsammans med en implicit tidsintegrator, men den kombinationen har inte visat sig framgångsrik. Två orsaker som bidragit till detta är Newtonlösarnas alltför begränsade konvergensradie och den begränsade tillgången till processortid; segregated solver krävde för de transienta turbulenta beräkningarna endast cirka en tiondel så mycket minneskapacitet som de övriga lösarna vilket snabbade upp beräkningstiden avsevärt.

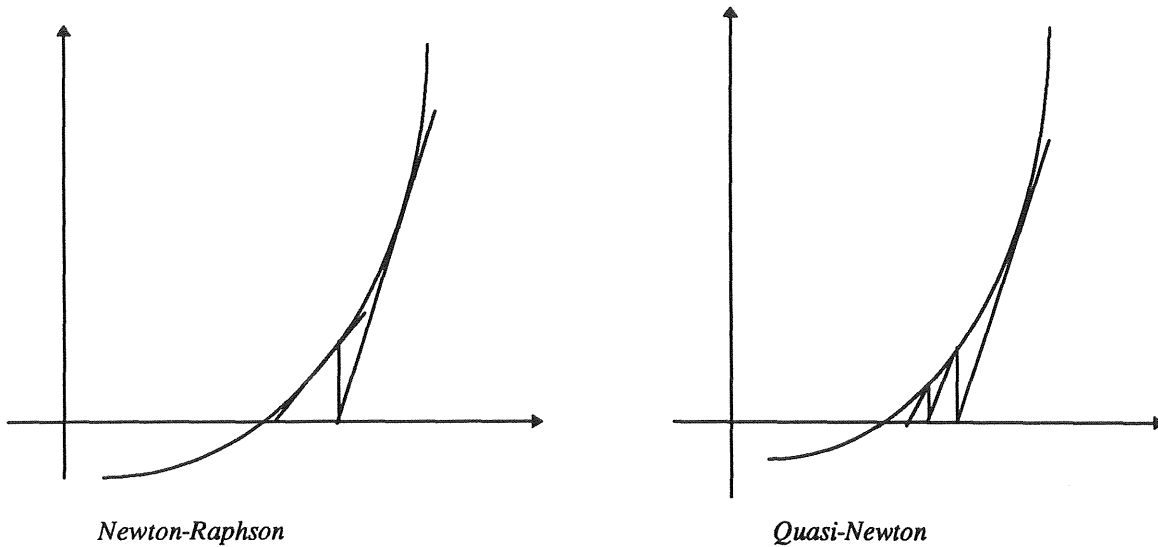
Adam Bashfort/trapetsmetoden är i FIDAP den mest sofistikerade implicita tidsalgoritmen och har använts genomgående. För transienta problem där man antar fullständig inkompressibilitet är en implicit metod det enda praktiska alternativet ty de explicita algoritmerna kräver mycket små tidssteg (Zienkiewics and Taylor, 1991).

#### 4.2.3. Quasi-Newton

Newton-Raphson är en numerisk metod för ekvationslösning där man utifrån ett initialvärde itererar sig fram till en lösning. Metoden kan skrivas som:

<p>En variabel</p> $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	<p>Flera variabler</p> $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{J}$ <p>där <math>x_n</math> är en vektor innehållande de obekanta variablerna</p>
---	---

(4.5)



Figur 4.3. Jämförelse mellan Newton-Raphson och Quasi-Newton för en frihetsgrad

Quasi-Newton är en variant av Newton-Raphson som löser problemet på samma sätt. Skillnaden ligger i uppdateringen av Jacobianen; i Newton-Raphson uppdateras Jacobianen i varje iteration medan i Quasi-Newton behålls den ett valt antal iterationer innan den uppdateras. Quasi-Newton kräver följaktligen fler iterationer per tidssteg än Newton-Raphson, men då stor del av processortiden går åt till att uppdatera och ställa upp Jacobianen är den oftast snabbare än Newton-Raphson. En illustration av skillnaden mellan de båda metoderna med bara en variabel ges i figur 4.3, i Newton-Raphson ändras riktningderivatan för varje iteration men i Quasi-Newton används samma derivata ett flertal iterationer i följd.

Skillnaden i ett problem med flera variabler är bara att derivatan byts ut mot Jacobianen för problemet.

#### 4.2.4. Segregated solver

Segregated solver som använts till de turbulenta transienta beräkningarna delar upp de globala matriserna i ett antal mindre matrisystem som sedan löses efter varandra. Uppdelningen går till så att det skapas ett ekvationssystem per variabel, för ett turbulent problem med  $k$ - $\epsilon$  modell styckas således problemet upp i fem delproblem, och i tur och ordning löses impulekvationerna associerade med hastigheterna, tryckekvationen associerad med trycket och transportekvationerna för  $k$  och  $\epsilon$ . I Reynolds ekvationer finns det ingen ekvation som explicit behandlar trycket, men detta åstadkommes genom att ersätta kontinuitetsekvationen med en Poissonekvation som kan härledas ur de diskretiserade kontinuitets- och impulekvationerna (FIDAP 7.0 theory manual, 1993).

Eftersom turbulent transienta problem är högst olinjära så behöver segregated solver relativt många iterationer för att konvergera men kräver på grund av de mindre ekvationssystemen avsevärt mindre minne än de lösare som löser hela problemet simultant. Detta har varit väldigt värdefullt i det här arbetet då problemet haft många frihetsgrader (c:a 30.000) och därmed

krävt väldigt stort minnesutrymme. Dessutom har dess stora konvergensradie medfört att ett stort tidssteg tillåts utan att lösningen divergerar.

#### 4.2.5. Adam-Bashford/trapetsregeln

Adam-Bashford/trapetsregeln är ett andra ordningens tidstintegrationsschema där Adams-Bashfords formel används för att åstadkomma initialvärdet för varje tidssteg utgående från det föregående, och trapetsregeln används därefter för att iterera fram en lösning, det vill säga en så kallat predictor-corrector metod. Adams-Bashford är ett explicit integrationsschema och beror således bara av gamla värden medan trapetsregeln är implicit.

$$\text{Adams-Bashfords formel} \quad \mathbf{U}_{n+1}^p = \mathbf{U}_n + \frac{dt_n}{2} \left[ \left( 2 + \frac{dt_n}{dt_{n-1}} \right) \dot{\mathbf{U}}_n - \frac{dt_n}{dt_{n-1}} \dot{\mathbf{U}}_{n-1} \right] \quad (4.6)$$

$$\text{Trapetsregeln} \quad \mathbf{M} \frac{\mathbf{U}_{n+1}^{c+1} - \mathbf{U}_n}{dt_n} + \frac{1}{2} [\mathbf{K}(\mathbf{U}_{n+1}^c) \mathbf{U}_{n+1} + \mathbf{K}(\mathbf{U}_n) \mathbf{U}_n] = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}_n] \quad (4.7)$$

$c=p, 2, 3, \dots$

Eftersom AB/tr-schemat kräver två accelerationsvektorer kan det inte användas förrän efter tidigast 1 tidssteg. Dessförinnan används det implicita schemat backward Euler i FIDAP (FIDAP 7.0 theory manual, 1993).

#### 4.2.6. Lösning av de linjära ekvationssystemen

Efter att ekvationssystemen ställts upp, lineariseras de, för segregated solver så att olineariteterna evalueras för föregående iteration, det vill säga en känd vektor  $\mathbf{u}_i$ .

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}_{i+1}) \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{F} \quad \text{lineariseras till} \quad \mathbf{K}(\mathbf{u}_i) \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{F} \quad (4.8)$$

Därefter löses matrisekvationerna. I FIDAP kan man välja mellan en iterativ lösare eller direkt Gausselimination, direkt Gausselimination används om inget annat anges (FIDAP 7.0 theory manual, 1993).

#### 4.2.7. Konvergenzkriterium

För att lösningen skall konvergera krävs att residualen är mindre än en högsta tillåten felmarginal  $\epsilon_F$ , samt att det lokala trunkationsfelet underskrider tillåtet värde  $\epsilon_u$ .

$$\text{konvergensvillkor} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \epsilon_u \\ \frac{\|\mathbf{R}(\mathbf{u}_i)\|}{\|\mathbf{R}\|} \leq \epsilon_F \end{array} \right. \quad (4.9)$$



### 4.3. Instabiliteter

#### 4.3.1. Inledning

Vid beräkning med finita elementmetoden omvandlas ett kontinuerligt problem till ett diskret med ändligt antal frihetsgrader. När ekvationssystemen skall lösas kan det uppstå instabiliteter som inte kan hänföras till fysiken utan snarare till numeriken. Dessa instabiliteter kan hittas såväl i rummet som i tiden för ett transient simulering.

#### 4.3.2. Instabiliteter i rummet

Ett välkänt instabilitetsfenomen uppträder vid beräkningar av advektions/diffusionsproblem i samband med Galerkins FEM-formulering (det vill säga att viktsfunktionerna sätts lika som basfunktionerna). Problemen uppstår då advektionen är starkt dominerande i ekvationen. I lösningen börjar då variablerna att oscillera kraftigt från nod till nod vilket leder till konvergensproblem och ofysikaliska lösningar. Det korrekta sättet att komma till rätta med problemet är att omformulera viktsfunktionerna för de advektiva termerna enligt en metod kallad Petrov-Galerkin. Detta förhindrar de numeriska oscillationerna. Det finns dock andra sätt; man kan visa att för en ekvation (stationärt problem i en dimension), som består av advektionstermer och diffusiva termer och har ett principiellt utseende

$$A \frac{dU}{dx} - k \frac{d^2U}{dx^2} + Q = 0 \quad (4.10)$$

så fås en identisk formulering jämfört med Petrov-Galerkin om det införs en artificiell diffusion  $k_b$  i ekv (4.10) så att

$$A \frac{dU}{dx} - (k + k_b) \frac{d^2U}{dx^2} + Q = 0$$
$$k_b = \frac{1}{2} \alpha Ah \quad (4.11)$$

$$\alpha = f(A, h, k)$$

där  $h$  är ett mått på elementstorleken (Zienkiewicz & Taylor, 1991). I det transienta flerdimensionella fallet blir det mer komplicerat men på samma sätt kan en artificiell diffusion införas som en tensor

$$\frac{A_i A_j \Delta t}{2} \quad (4.12)$$

som har ett värde skilt från noll endast i strömlinjeriktningen.

I strömningsekvationerna uppträder dessa instabiliteter för höga Reynolds tal och ger oscillationer främst i hastighetsfältet. Den artificiella diffusionen kan i FIDAP aktiveras och bestämmas i storlek via kommandot för UPWINDING (FIDAP 7.0 theory manual, 1993). För en korrekt användning av artificiell diffusion bör en systematisk studie utföras där man bestämmer magnituden på den artificiella diffusionen så att den precis undertrycker instabiliteterna i hastighetsfältet och inte resulterar i att problemet görs alltför diffusivt. Denna typ av analys har gjorts mycket enkelt i detta arbete; ett antal kombinationer för upwinding testades och det visade ingen signifikant skillnad på trycket, som är vår primärvariabel då vi söker  $C_D$  och  $C_M$ . Därför har upwinding=1 använts genomgående för hastighetskomponenterna, trycket, kinetisk energi och dissipationen.

Vid användning av k-ε modellen uppträder huvudsakligen tre typer av numeriska instabiliteter med olika orsak och verkan. Transportekvationerna för den kinetiska energin och dissipationen innehåller i vänsterledet advektiva transporttermer och i högerledet en diffusionsterm, en genereringsterm samt en destruktionssterm.

$$\begin{array}{c}
 \text{Advektiva transporttermer} \quad \text{Diffusionsterm} \\
 \text{Genereringsterm} \quad \text{Destruktionsterm} \\
 \left( \frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_0 + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \phi_k - \epsilon
 \end{array} \quad (4.13)$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Advektiva transporttermer} \quad \text{Diffusionsterm} \\
 \text{Genereringsterm} \quad \text{Destruktionsterm} \\
 \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_0 + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + c_1 \frac{\epsilon}{k} \nu_t \phi - c_2 \frac{\epsilon^2}{k}
 \end{array} \quad (4.14)$$

En typ av instabilitet hänför sig till de advektiva termerna av orsaker som redogjorts för i förra stycket. Oscillationerna kan, om de är stora i förhållande till absolutvärdena på k och ε medföra negativa värden på k och ε, vilket är ofysikaliskt. Precis som för hastighetsvariablerna kan detta avhjälpas genom att införa en balanserande diffusion med hjälp av upwinding.

En annan typ av instabilitet är associerad med destruktionstermerna, vars uppgift är att absorbera turbulent kinetisk energi och hindra  $k$  och  $\epsilon$  att växa obehindrat. Under lösningens gång då hastighets- och tryckfält skiljer sig från den konvergerade lösningens så kan dessa termer vara mycket större än genereringstermerna vilket kan medföra tillfälliga negativa värden på  $k$  och  $\epsilon$ , samt att transportekvationerna tillför energi till friströmningen istället för tvärtom, något som är fysikaliskt omöjligt. Detta verkar kraftigt destabiliserande på beräkningarna eftersom exempelvis den turbulenta viskositeten, som är positiv per definition, kan anta ett negativt värde.

Ett tredje problem uppkommer om flödesfältet har stora variationer i Reynolds tal, speciellt om det innehåller både laminära och turbulenta regioner. I laminära delar existerar ingen turbulens och följaktligen inte heller någon turbulent kinetisk energi eller viskös dissipation;  $k$  och  $\epsilon$  går mot noll och termer som innehåller kvoter såsom  $\frac{k^2}{\epsilon}$  och  $\frac{\epsilon}{k}$  blir matematiskt obestämda.

Detta kan medföra stora svängningar i  $k$  och  $\epsilon$  från en nod till en annan. En sådan lokal instabilitet kan sedan fortplanta sig från ett litet område till hela domänen på några få iterationer vilket får till följd att beräkningen spårar ur fullständigt.

Dessa två sistnämnda instabiliteter kan undvikas genom att ett tröskelvärde under vilket  $k$  och  $\epsilon$  inte får gå definieras. I FIDAP införs det via clipping under kommandot VISCOSITY. Om  $k$  eller  $\epsilon$  i någon nod underskrider detta så tilldelas de automatiskt det lägsta tillåtna värdet.

Hittills har behandlats instabiliteter som kan hänföras till hastighetsfältet men även i tryckfältet kan det uppstå numeriska instabiliteter. Som tidigare beskrivits används ofta olika basfunktioner för tryck respektive hastighetsvariablerna. Vid vissa kombinationer av basfunktioner uppstår instabiliteter och kraftiga oscillationer även i tryckfältet. Lämpliga kombinationer av basfunktioner för hastighets- och tryckvariabler finns i Zienkiewicz & Taylor 1991 och FIDAP 7.0 theory manual, 1993.

### 4.3.3. Instabiliteter i tiden

Problemen med de numeriska instabiliteterna i tiden har visat sig vara värre än de i rummet. Det stora problemet har uppträtt i tryckfältets variation i tiden. Denna har stundtals varit av sådan magnitud att  $C_D$ -beräkningar omöjliggjorts. Tryckoscillationerna har avspeglat sig på kraften som också fått ett oscillerande utseende (se figur 6.6-6.9). Ett flertal hypoteser har ställts upp och prövats för att komma till rätta med problemet

- 1 Alla tre algoritmer för att beräkna trycket i segregated solver har använts
- 2 Olika kombinationer av basfunktioner mellan hastighets- och tryckvariabeln har provats
- 3 En horisontell kraft, bodyforce i samma riktning som accelerationen, har införts med samma storlek som den horisontella "flytkraften", Froude-Krylov-kraften. Detta gjordes för att försöka fixera trycket på ränderna.

Ingen av dessa åtgärder har dock gett önskat resultat. Ett stort svårighet i det oscillerande problemet är att hastigheter och tryck varierar kraftigt i tiden - och ligger ibland mycket nära

noll - vilket gör att för ett elementnät som inte är adaptivt blir det svårt att hitta en optimal struktur.

## 5. Försöksserier, modellvalidering

### 5.1. Syftet med modellvalideringen

I avsikt att få fram en tillförlitlig modell för simulering av det transienta turbulenta förloppet då plattan utsätts för oscillerande strömning, gjordes inledande försök med enklare strömningssfall vars egenskaper finns väl dokumenterade i litteraturen. För att samtidigt få känsla för hur olika parametrar påverkade konvergenskaraktistiken, gjordes valideringen i flera steg, där strömningssförloppets komplexitet successivt ökades. De modellvalideringsförsök som gjorts är följande.

- Stokeslösning
- Laminär stationär friktionsbehäftad strömning, konstant flöde
- Laminär transient friktionsbehäftad strömning, konstant flöde
- Turbulent stationär friktionsbehäftad strömning, konstant flöde
- Turbulent transient friktionsbehäftad strömning, konstant flöde
- Turbulent transient friktionsbehäftad strömning, accelererande flöde

Vid samtliga valideringar som gjorts har förutsatts inkompressibel fluid, då detta var ett antagande som låg till grund för hela studien.

Den diskretiserade strömningssmodellen har ett utseende enligt figur 5.1. Fluidomänen är indelad i ett rutnät med 4334 element och 4182 noder. Innan denna modell togs fram, hade andra varianter också prövats. Den i figur 5.1 visade modellen visade dock upp de bästa konvergensenskaperna och har genomgående blivit ämne för valideringen.

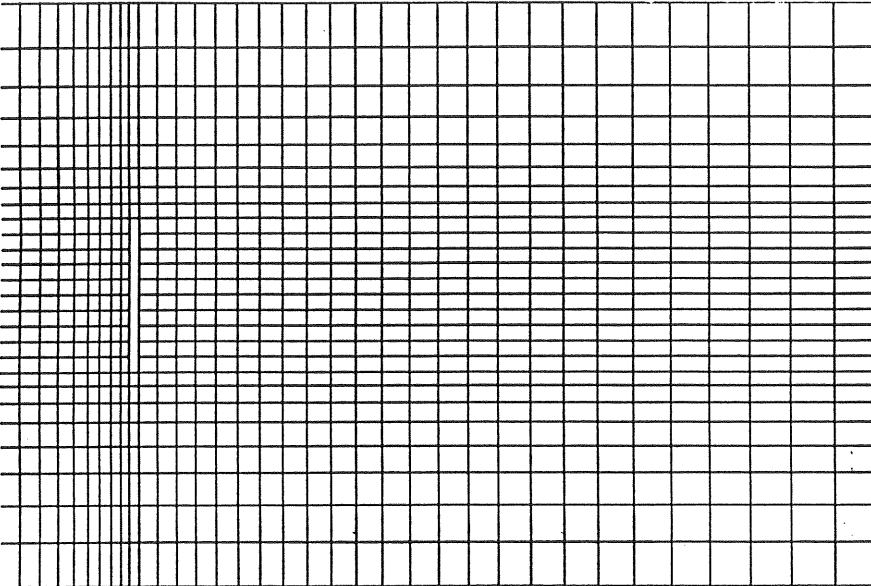
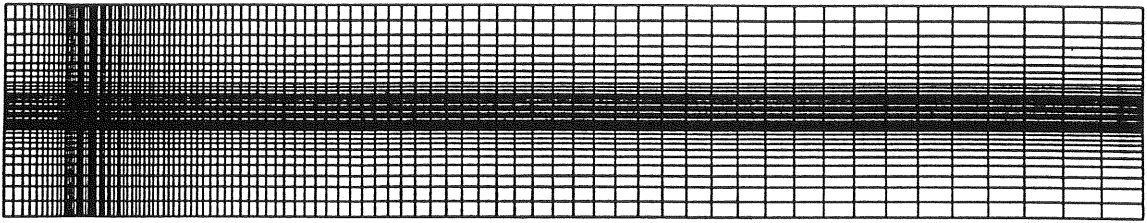
Plattan har i dessa försök utsatts för ett parallellt inflöde på den vänstra randen.

I de fem första försöksserierna har inflödets parallellkomponent modellerats med en stegformad tidsfunktion:

$$\begin{cases} u^* = 0 & ; \quad t^* < 0 \\ u^* = 1,0 & ; \quad t^* \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

I det accelererade flödesförloppet har en linjär hastighetsökning m.a.p. tiden anbringats på vänsterranden (inlet) upp till tiden  $t^*=250$ , varefter hastigheten hållits konstant.

$$\begin{cases} u^* = \frac{1}{50}t^* & ; \quad 0 \leq t^* \leq 250 \\ u^* = 5.0 & ; \quad t^* \geq 250 \end{cases} \quad (5.2)$$



Figur 5.1 FEM-modell för modellvalidering; hela domänen (ovan) och detalj kring plattan (nedan).

Hädanefter har i detta kapitel asterisken slopats på alla dimensionslösa variabler. Alla variabler skall därmed anses dimensionslösa om ej annat anges.

Normalhastigheten har på inflödesranden i samtliga fall varit noll, dvs parallell inströmning har antagits. På infinity-ränderna har hastighetens normalkomponent satts till noll, dvs ingen fluid kan strömma ut ur domänen längs dessa ränder. I övrigt har på dessa ränder inga explicita randvillkor getts på ingående variabler. På utflödesranden (outlet) har inga Dirichlet-villkor satts på variablerna.

## 5.2. Stokeslösning

Den första körningen som gjordes var det enklast tänkbara linjära fallet, det vill säga utan advektiva termer.

I princip är ekvationssystemet man vill lösa:

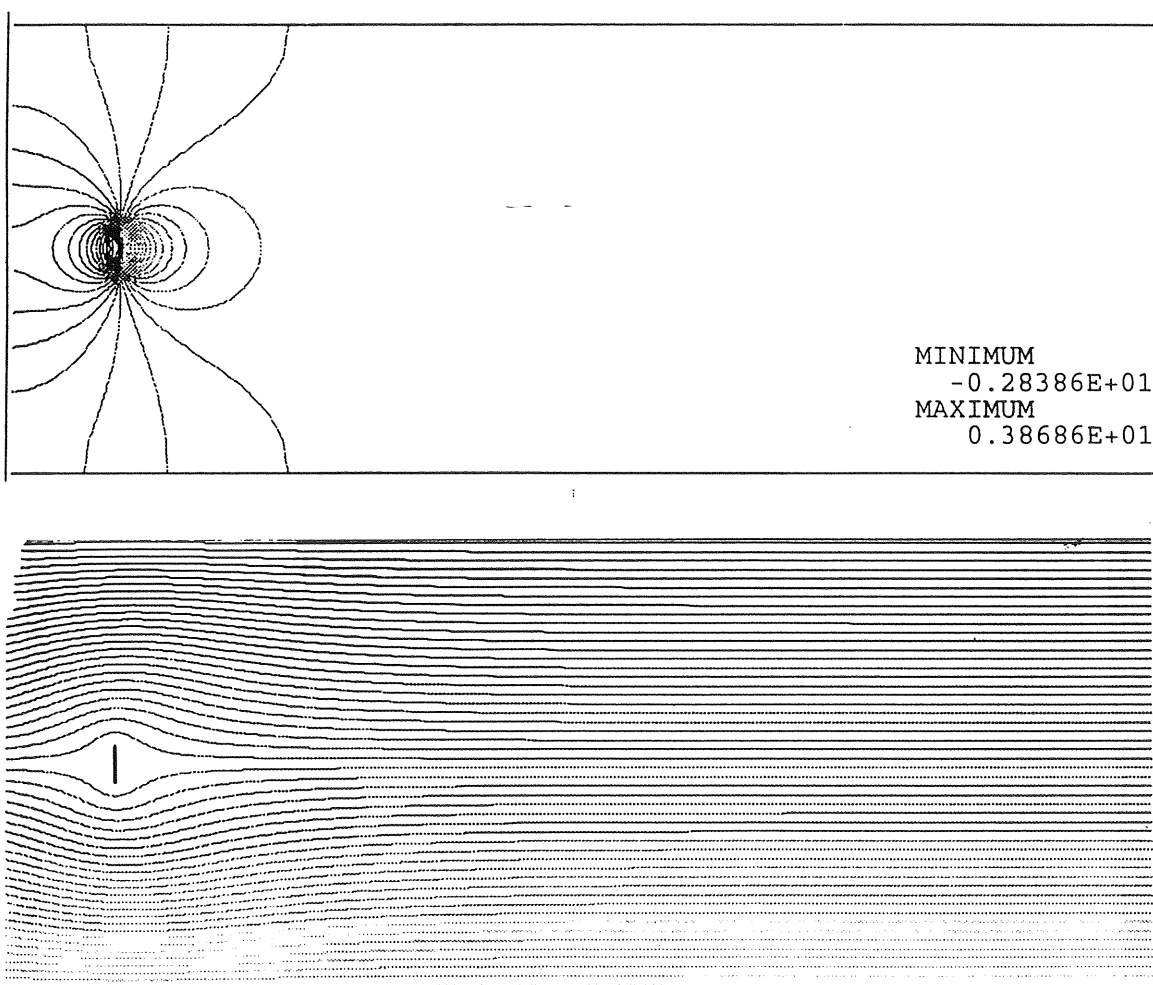
$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (5.4)$$

Trycktermen har sedan eliminerats ur ekvationerna genom att tillämpa en tryckmodell som kallas *Penalty pressure model*. Denna bygger på antagandet att trycket är linjärt beroende av hastighetsgradienterna; i det tvådimensionella fallet fås

$$p = -\chi \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \quad (5.5)$$

Trycket är således ej en obekant storhet i ekvationssystemet, utan problemet löses för enbart hastighetskomponenterna  $u$  och  $v$ , direkt ur impulsekvationerna, samtidigt som kontinuitetsekvationen elimineras, varefter trycket explicit löses ut. Då penalty-modellen appliceras i systemet kan man se det som om en artificiell kompressibilitet hos fluiden introduceras. Denna representeras av faktorn  $\chi$  som sätts till ett värde mellan  $10^{-5}$  till  $10^{-9}$ , default-värde i FIDAP är  $10^{-6}$ . Likheten mellan modellen i fråga och den inkompressibla kontinuitetsekvationen är uppenbar, med den väsentliga skillnaden att summan av gradienterna i penalty-fallet ej sätts identiskt lika med noll över hela domänen utan får ett tryckrelaterat värde. I figur 5.2 redovisas plottar av strömlinjer och tryckkonturlinjer för den konvergenta lösningen.



Figur 5.2 Trycklinjer och strömlinjer för Stokeslösning

### 5.3. Laminär stationär friktionsbehäftad strömning, konstant flöde

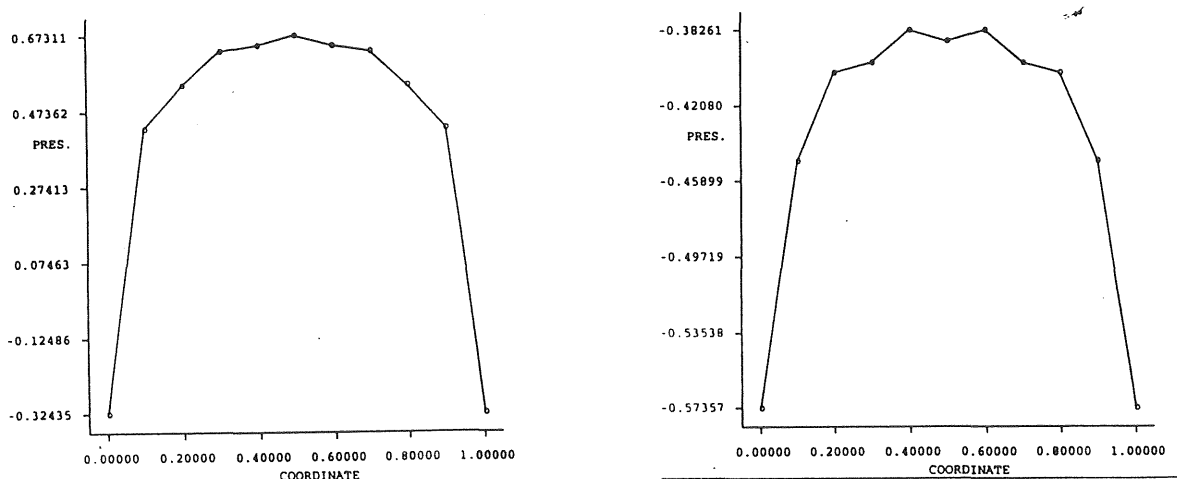
De advektiva termerna, förutom den tidsberoende, introduceras här i strömningen. Alltftersom Reynolds tal ökar tilltar vorticiteten och man kan härigenom anta att flödet får virvelkaraktär någonstans i domänen. Hittills har ingen turbulensmodell införts varför man av konvergensskäl i huvudsak torde hänvisas till simuleringar i låg- och mellanregionen ( $Re < 150$ ).

Störst hastighetsgradienter förekommer i plattans närhet, varför även vorticiteten bör vara störst där. Den konvergenta stationära lösningen som erhållits visar mycket god överensstämmelse med såväl de numeriska simuleringar som experimentella studier som förekommer i litteraturen vad beträffar strömningskaraktistiken (Ingham, Tang & Morton, 1991, Dennis, Qiang, Coutanceau & Launay, 1993). Stationära virvlar, nedströms plattan, som växer linjärt i längd och höjd med Reynoldstalet kunde observeras (se figur 5.5 och 5.6). Lösningar har erhållits för Reynolds-tal 2, 4, 10, 20, 40 och 100. Trycket på plattans fram- och -baksida har utseende enligt figur 5.3, vilket stämmer till formen men inte riktigt storleksmässigt;  $p_{\text{framsida}} \approx 0.5$  och  $p_{\text{baksida}} \approx -1$  (Hoerner, 1965).  $C_D$  har beräknats genom att integrera normalspänningarna över plattan.

Intressant att notera är att konvergenta lösningar erhållits för en halvdomänsmodell, med principiellt utseende enligt figur 5.4, för höga Reynolds-tal ( $Re = 500, 1000, 1500, 2000, 4000$ ). Det bör dock påpekas, att de lösningar som erhållits för dessa höga Reynolds-tal ej finner någon direkt motsvarighet i verkligheten. Man våldför sig på underliggande fysik genom att eliminera tidstermen, strömningen kan i sådana fall på goda grunder antas starkt tidsberoende (De simulerade Reynoldstalen är ju klart i det turbulenta området). Vidare stabiliseras simuleringen kraftigt genom att påtvinga modellen en symmetrilinje parallellt med strömningen. Med dessa förutsättningar får problemet ses som en studie av rent akademisk karaktär. Detsamma kan antas gälla för simuleringen vid Reynolds-talet 100 i föregående stycke (Regnström, 1988).

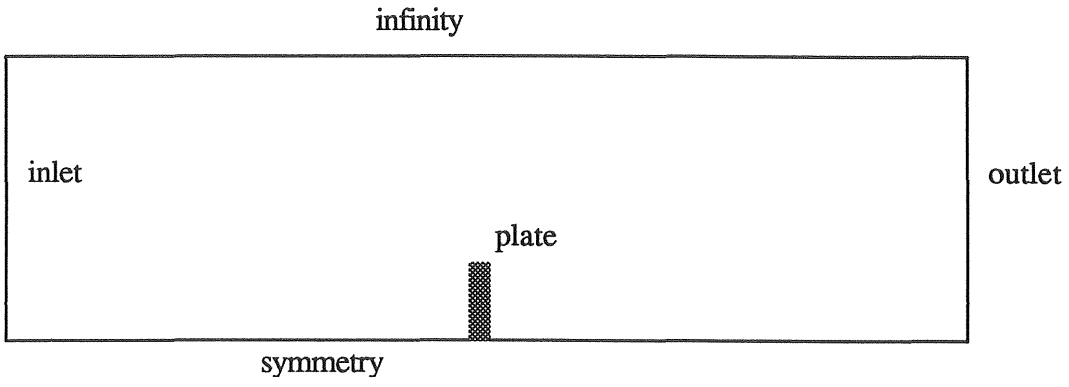
Re	2	4	10	20	40	100
$C_D$	6.4176	4.1480	2.6992	2.1687	1.8429	1.6074

Tabell 5.1  $C_D$  för  $Re$  2-100, stationär laminär strömning

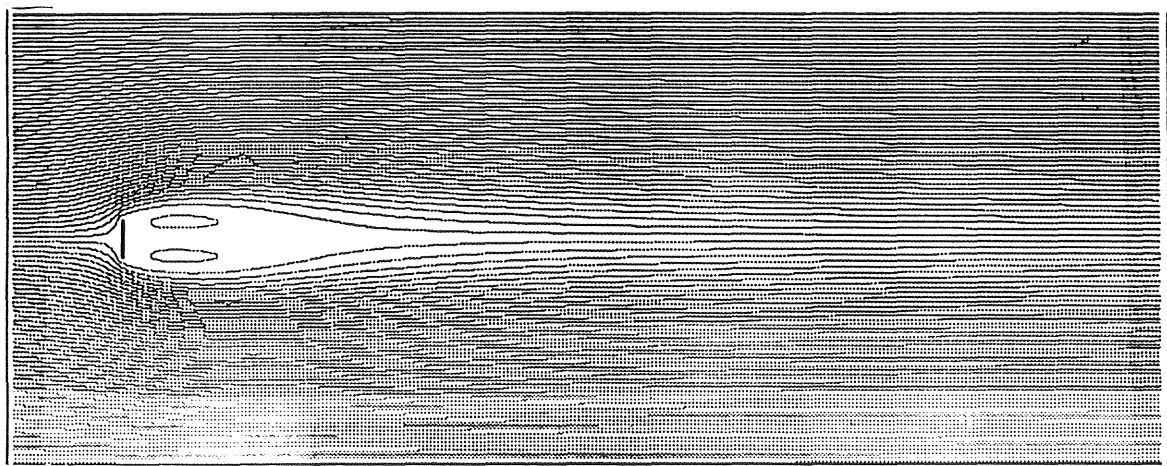
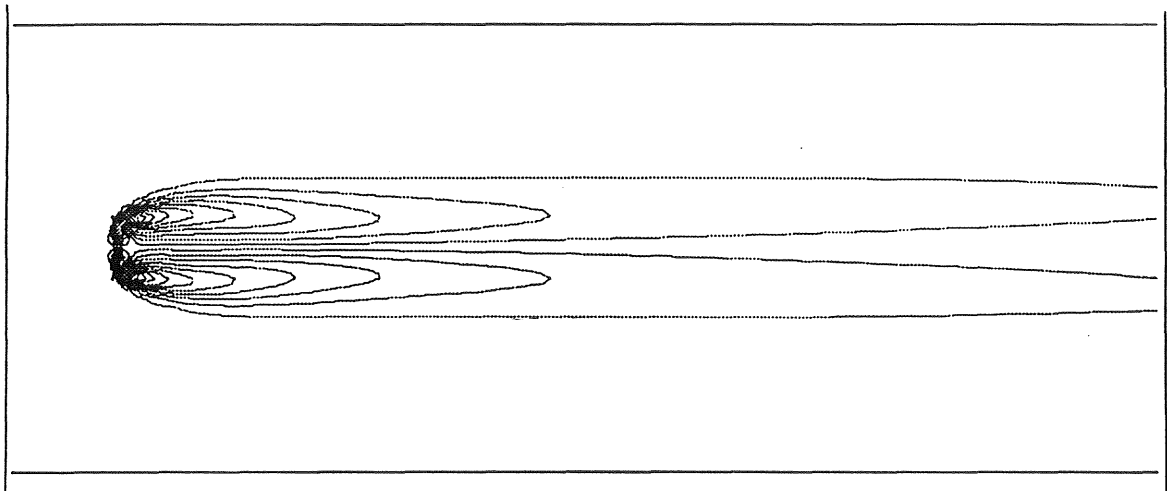
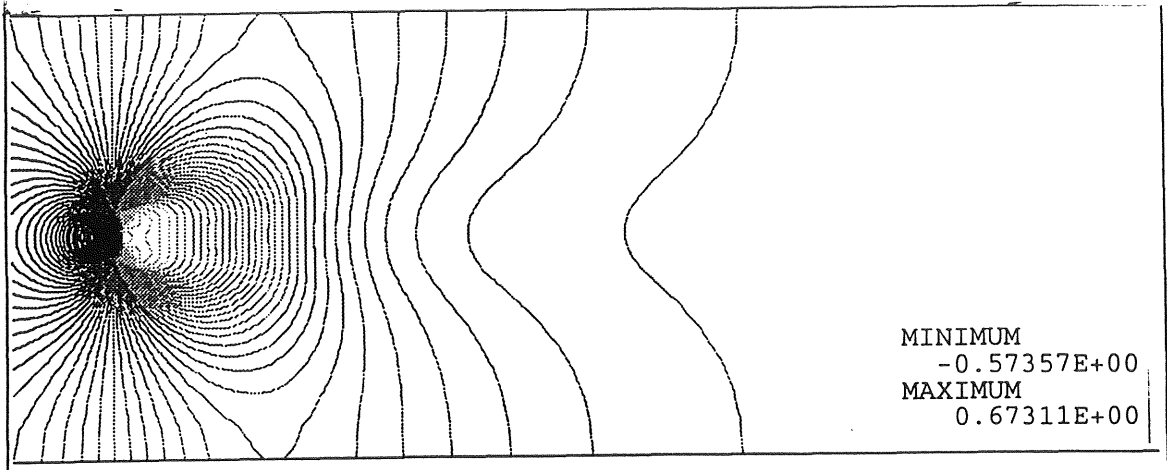


Figur 5.3 Tryckfördelning över plattans framsida (figuren till vänster) och baksida (figuren till höger) för  $Re=40$

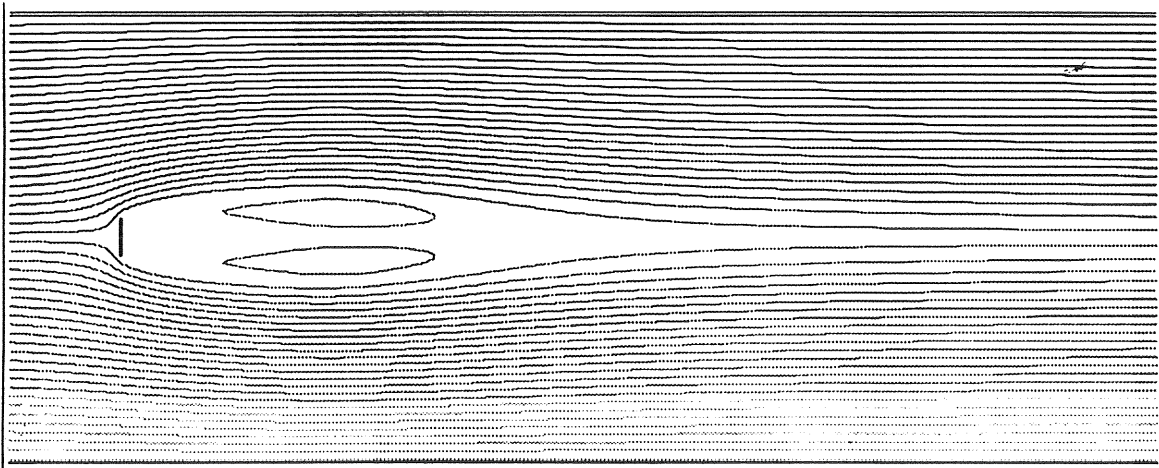
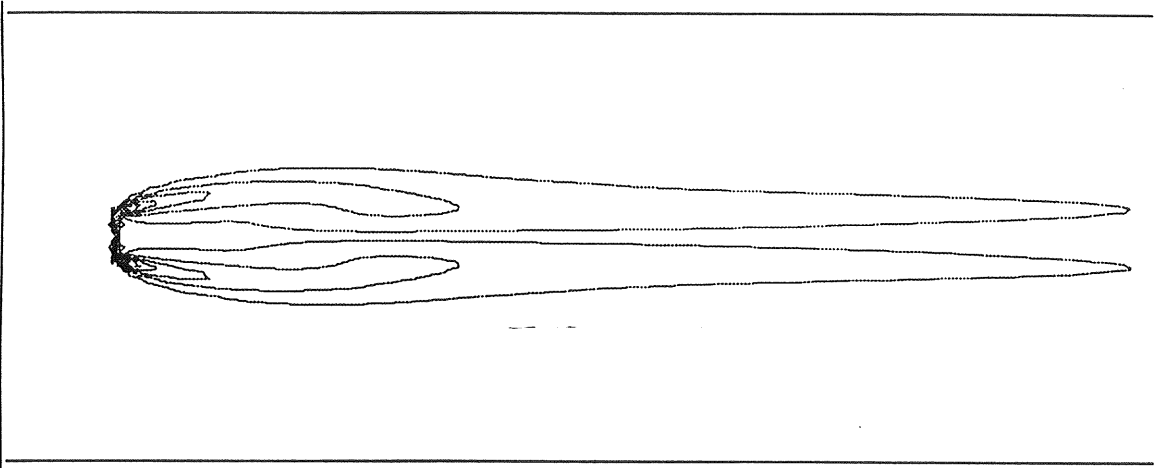
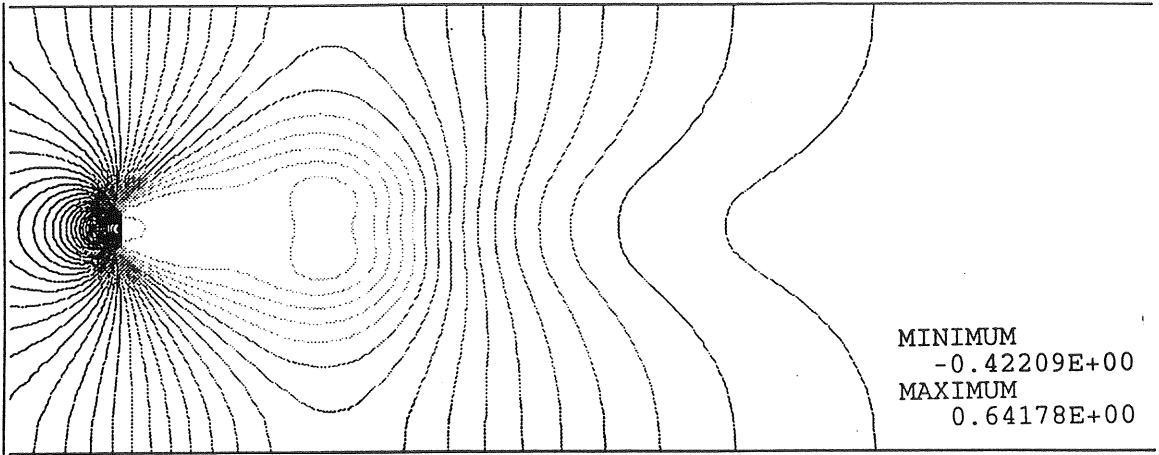




*Figur 5.4 Principskiss över halvdomänsmodell*



Figur 5.5 Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för  $Re=40$



Figur 5.6 Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för  $Re=100$

#### 5.4. Laminär transient friktionsbehäftad strömning, konstant flöde

I nästa steg skall den friktionsbehäftade strömningens tidsberoende undersökas. I impulsekvationerna adderas härmed ytterligare en term och simuleringen omfattar nu Navier-Stokes fulla ekvationer. I och med att tidstermen involveras, tillåts flödet innefatta instabiliteter på ett annat sätt än i det stationära fallet. Litteraturstudier visade att efter en tidsutveckling kan man visa att strömningen varierar i tiden och detta på ett sätt som inte är horisontalsymmetriskt, dvs en stationär lösning saknas (Tamaddon-Jahromi Townsend & Webster, 1994, Rengström, 1988).

Det tidsberoende förloppet kan förklaras enligt följande. En konstant inströmning ger i ett tidigt skede en strömning som påminner om en rotationsfri potentiallösning till problemet. Allteftersom tiden fortskrider börjar ett symmetriskt virvelpar att växa till bakom plattan, avlösning uppstår. När virvlarna växt till en viss storlek uppstår en s.k. von Karmans virvelgata, vortex shedding; virvlarna släpper omväxlande från objektets - här plattans - övre och undre del av bakkanten i ett periodiskt mönster. Nedströms plattan dissiperar virvlarna och ett svängande strömningsmönster uppstår. Virvelavlösningens frekvensen kan beskrivas med det dimensionslösa Strouhal-talet. Det definieras som

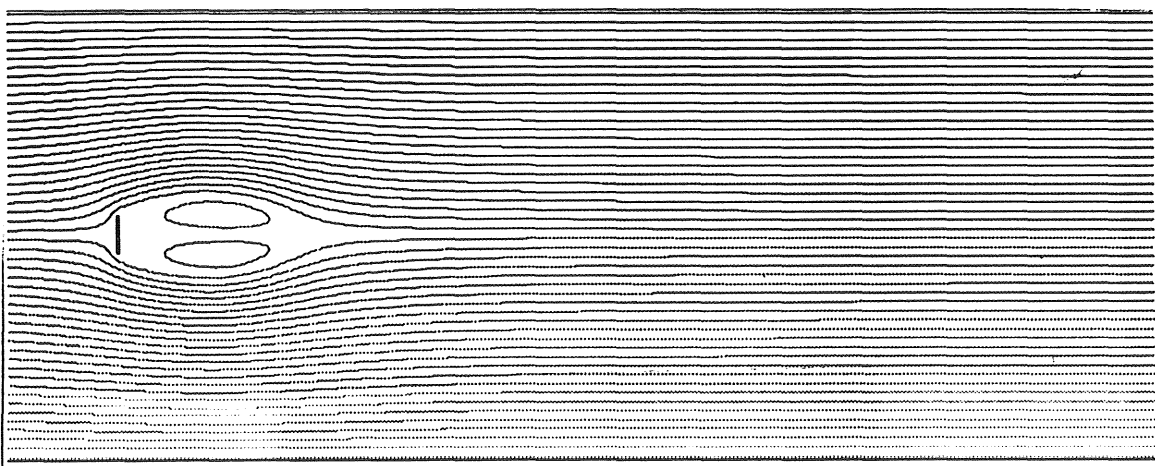
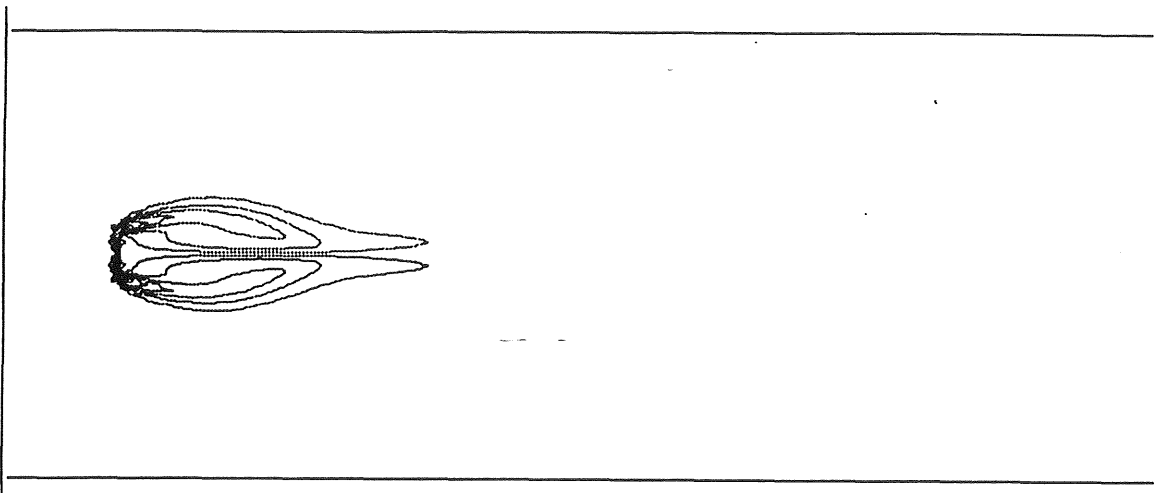
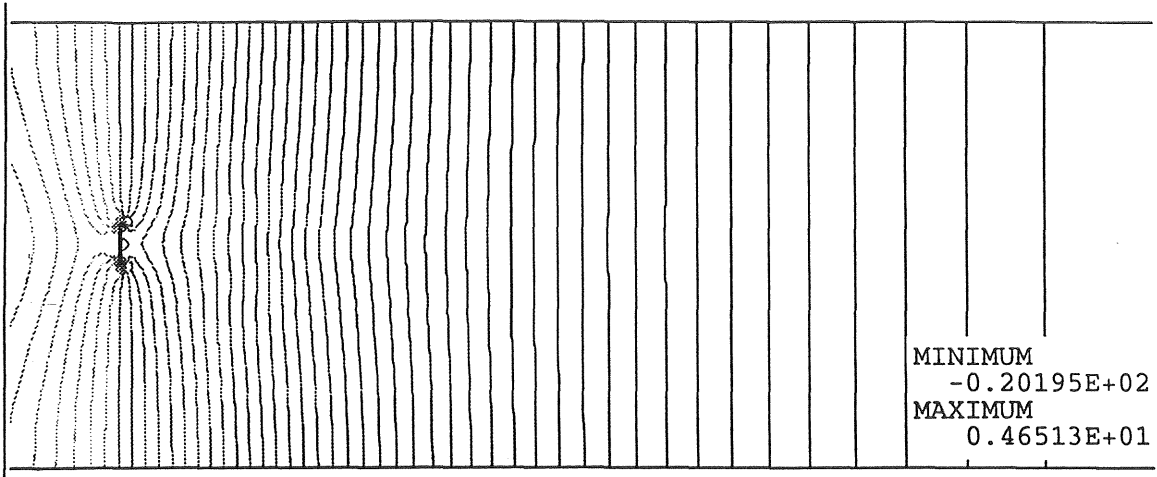
$$St = \frac{Df}{U_\infty} \quad \text{där } f \text{ är virvelavlösningens frekvensen.} \quad (5.6)$$

För den här simuleringen beräknades  $St$  genom mätning av virvelfrekvensen direkt ur strömlinjeplottar; detta gjordes på grund av att utdata var så glest representerat i tidsdomänen.  $C_D$  beräknades som ett aritmetiskt medelvärde av de momentana  $C_D$ -värdena från de diskreta tidsstegen och erhöles som  $C_D=14.8359$ .

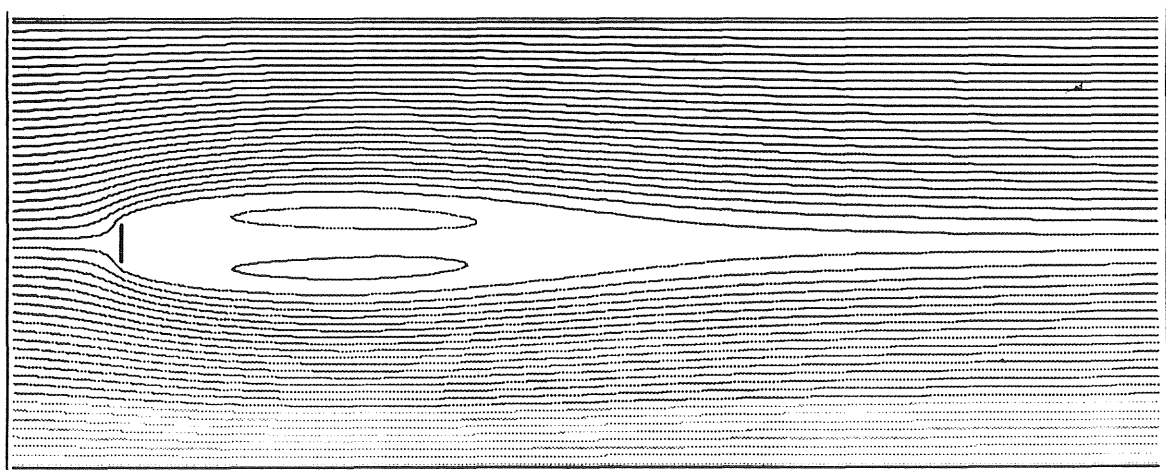
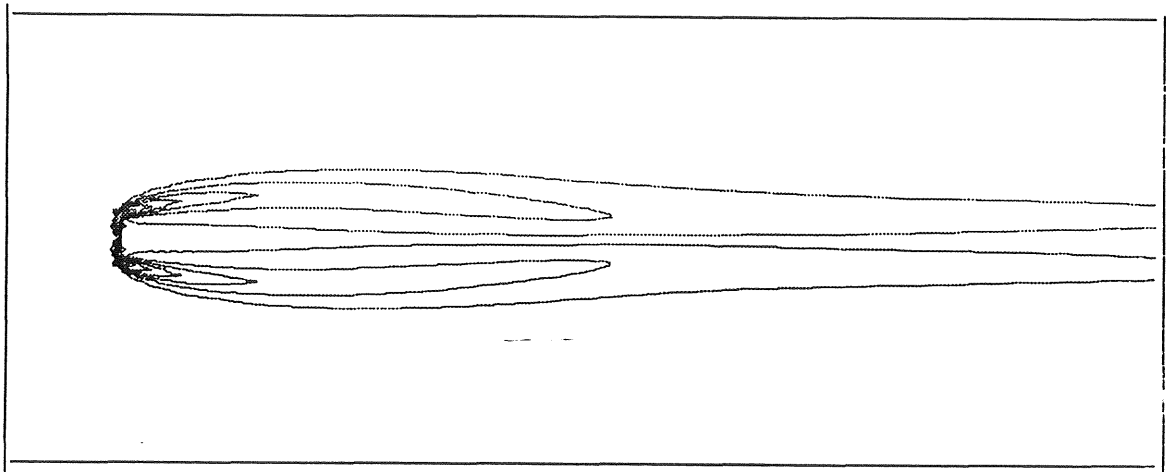
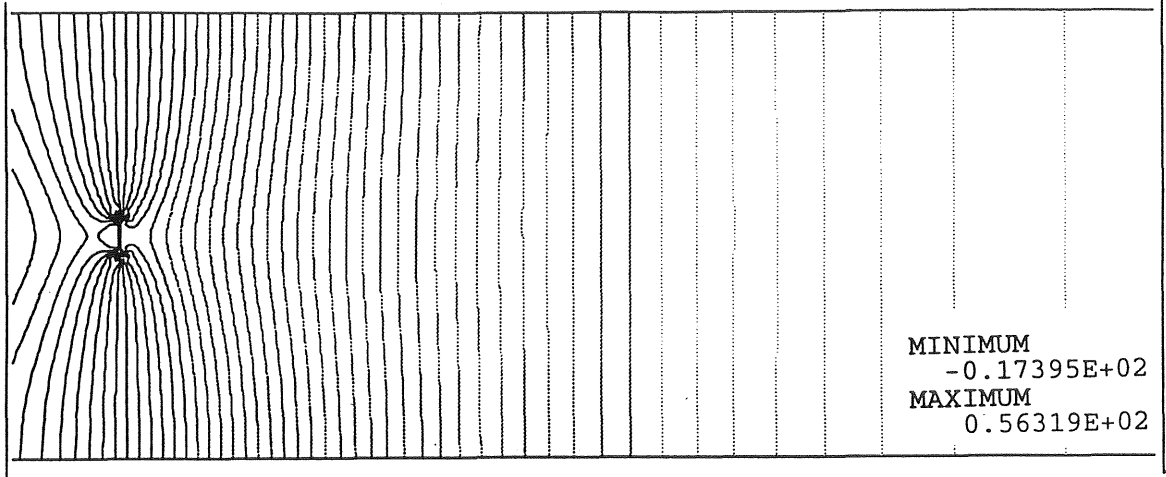
Simuleringen utfördes för  $Re=126$ ,  $0 < t^* < 323$  och  $St$  beräknades till 0.179 vilket visar god överensstämmelse med litteraturen;  $St=0.171$  (Tamaddon-Jahromi, Townsend & Webster, 1994). Även det simulerade förloppets allmänna visuella karaktär visar även god överensstämmelse med resultaten hos ovan nämnda referens. Resultaten för olika tidssteg visas i figur 5.7-5.10.

De dimensionslösa tiderna för inträdet av olika händelser stämmer ej exakt med jämförande studier, men detta är ej heller att vänta, eftersom den alternerande virvelavlösningen på ett eller annat sätt måste initieras av en instabilitet. I experimentella studier kan denna instabilitet utgöras av en mängd olika mikro- eller makroskopiska faktorer. Vid datorsimuleringar initieras störningen av någon form av numerisk instabilitet, tex trunkationsfel på grund av datorns diskreta metodik att representera siffror. När denna instabilitet inträffar och hur fort den växer, blir beroende av den lösningsalgoritm och den sifferprecision som används och torde därför variera från fall till fall.

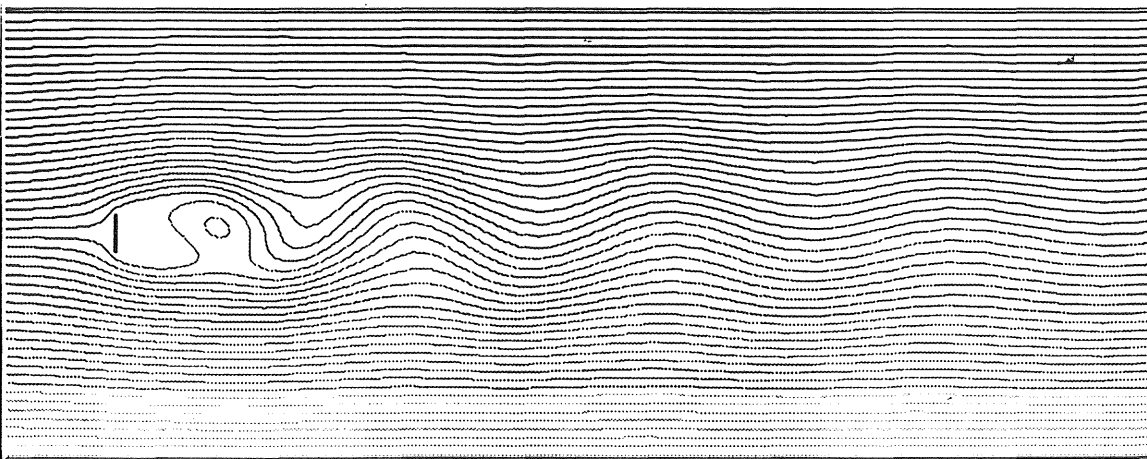
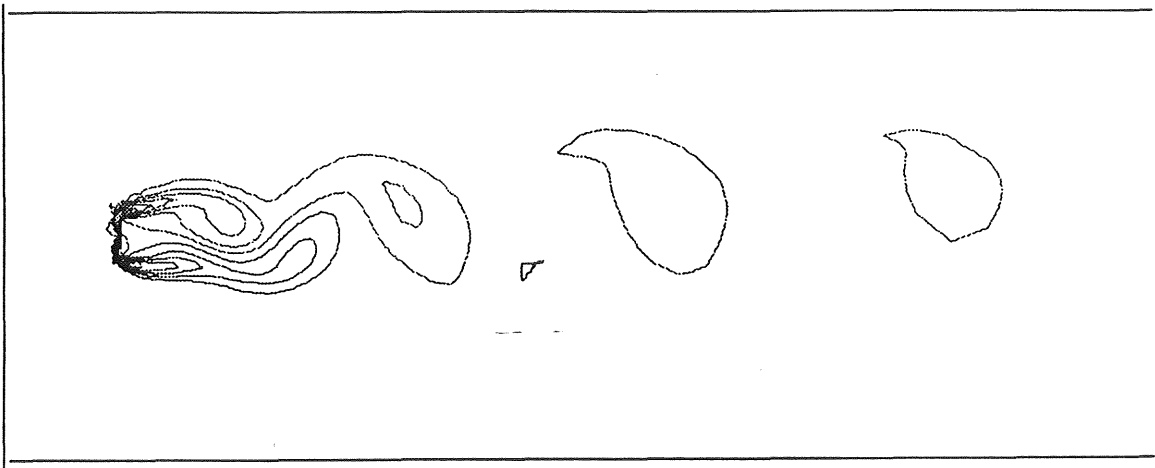
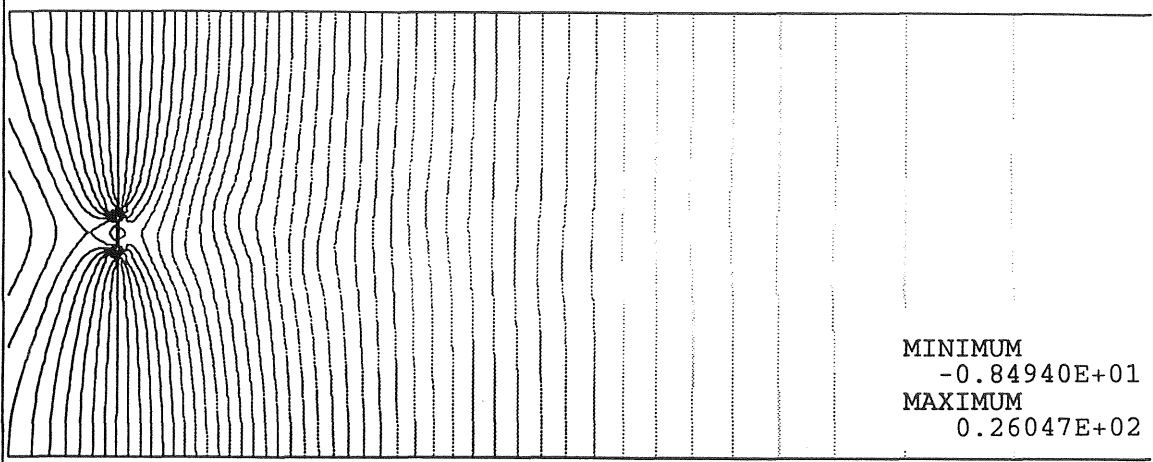
Hittills har Penalty-modellen använts för att eliminera trycket ur ekvationerna. Den i FIDAP alternativa tryckmodellen *mixed pressure model* har ej använts för de laminära fallen, eftersom vi vid denna tidpunkt getts rådet av mer erfarna FIDAP-användare att pga dess snabbhet i största möjliga mån använda Penalty-modellen. Av konvergensskäl skulle det dock senare visa sig att Penalty-modellen måste överges i de turbulenta transienta simuleringarna.



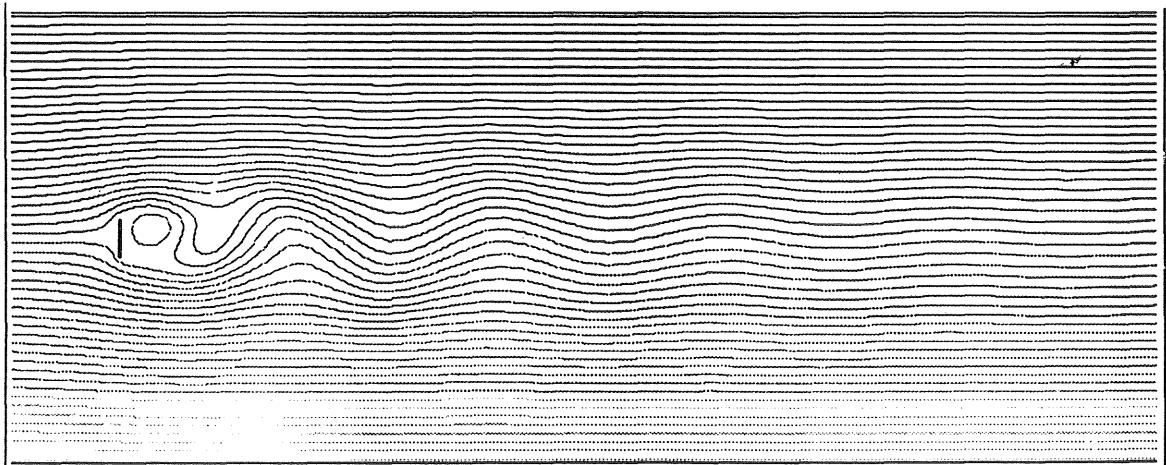
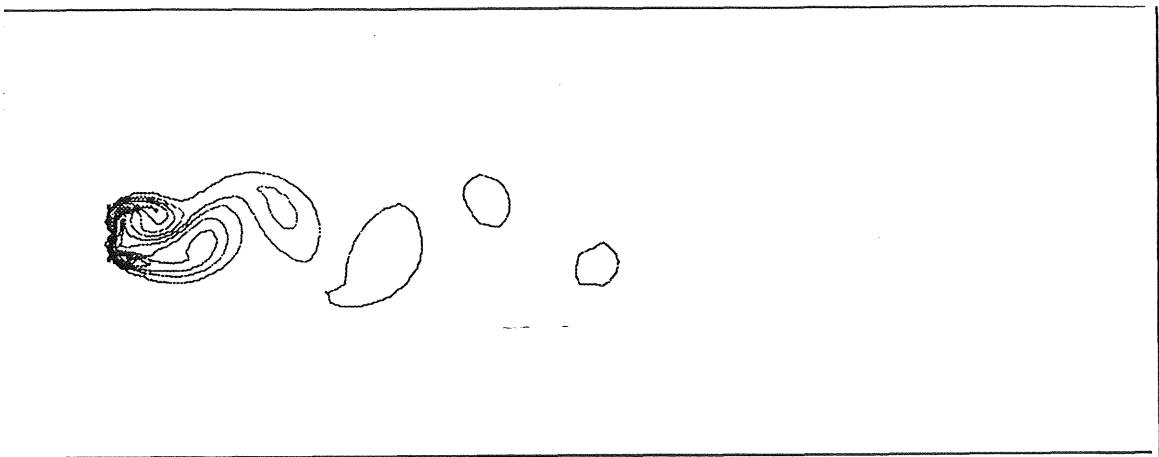
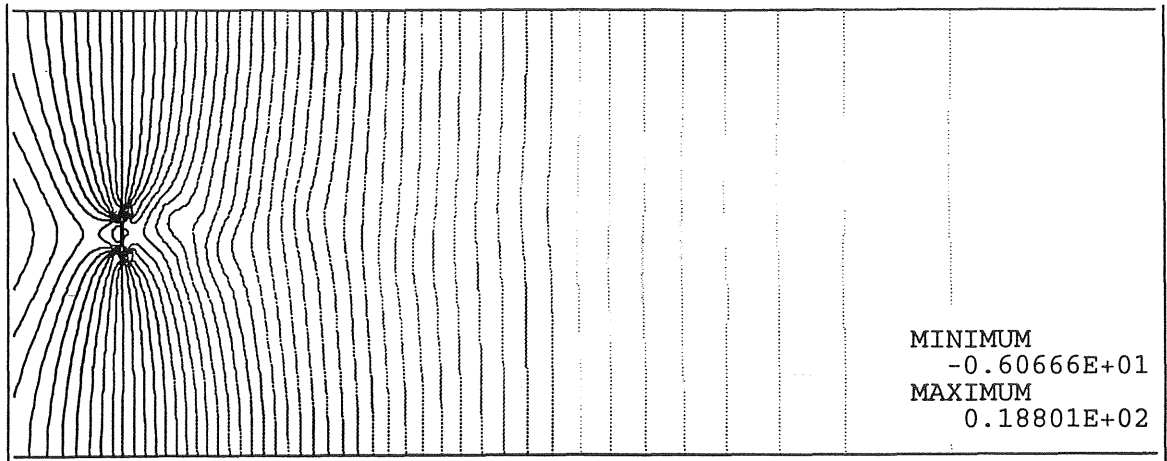
Figur 5.7 Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer  $Re=126$ ,  $t^*=15.3$



Figur 5.8 Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för  $Re=126$ ,  $t^*=119$



Figur 5.9 Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för  $Re=126$ ,  $t^*=198$



Figur 5.10 Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för  $Re=126$ ,  $t^*=242$



### **5.5. Turbulent stationär friktionsbehäftad strömning, konstant flöde**

Nästa steg var att undersöka turbulensmodellens uppförande vid högre Reynolds-tal. Den enda modell som överhuvudtaget prövats är tvåekvationens k-ε-modellen eftersom denna redan i arbetets initialskede ansågs vara den bästa kompromissen vad avser noggrannhet i förhållande till beräkningskomplexitet.

Några stationära turbulenta simuleringar utfördes. Detta torde strida mot turbulensens klart fundamentala tidsberoende karaktär. Anledningen till förfarandet var helt enkelt att utröna turbulensmodellens uppförande (de stationära lösningarna ger allmänt en kortare konvergenstid än ett relevant antal tidssteg i en transient simulering). Det är den använda turbulensmodellen som ger möjlighet att studera stationära lösningar eftersom fluktuationstermerna därmed försvinner.

Simuleringarna utfördes genomgående för höga Reynolds tal,  $10^5$ - $10^6$ . Datorberäkningarna avbröts innan fullständig konvergens hade uppnåtts (lösningen var dock på god väg mot konvergens), för att spara tid. För samtliga fall utbildades ett symmetriskt virvelpar - precis som för de laminära stationära simuleringarna samt inledningsfasen av den transienta laminära simuleringen - vars storlek ökade med Reynolds tal.

### **5.6. Turbulent transient friktionsbehäftad strömning, konstant flöde**

För att studera FEM-modellens tidsegenskaper gjordes ett antal transienta försök. Dels skulle rand- och initialvillkorens inverkan på konvergenskaraktistiken utrönas, dels de olika lösningsalgoritmernas egenskaper. Eftersom k-ε-modellen är en utpräglad hög-Reynolds-modell gjordes simuleringarna i enlighet med detta.

Modellen visade sig ha stora svårigheter att konvergera. Införandet av k-ε-modellen gör att systemet av differentialekvationer blir kraftigt olinjärt och starkt kopplat. Därmed får problemet en mycket liten konvergensradie och blir ytterst känsligt för störningar. De parametrar som visade sig ha störst betydelse var valet av lösningsalgoritm samt randvillkoren på kinetisk energi och viskös dissipation.

Samtliga i FIDAP 7.0 tillgängliga lösningsalgoritmer prövades; tre olika Newton-lösare, Successive substitution samt Segregated solver, vilka beskrivs i kapitel 4. Genomgående för de turbulenta transienta simuleringarna var att den enda lösare som klarade av att lösa problemet inom en rimlig tid var den sistnämnda. Valet av tidsintegrator gjordes på ett tidigt stadium och valet föll på Adams-Bashford/Trapetsmetod som är en andra ordningens algoritm (se vidare kapitel 4).

Valet av randvillkor för den turbulenta kinetiska energin samt dissipationen gav stora effekter på konvergensradien. Flera olika sätt användes för att försöka specificera dessa så att de hamnade inom konvergensradien. Den mest framgångsrika modellen var en av de metoder som presenteras i FIDAP-manualen (FIDAP 7.0 theory manual, 1993). Den bygger på följande antaganden.

Den kinetiska turbulenta energin  $k$  beräknas överslagsmässigt ur sambandet

$$k = a U_{\infty}^2 \quad (5.7)$$

Då vi önskar uttrycka detta dimensionslöst fås

$$k^* = \frac{k}{U_\infty^2} = a \quad (5.8)$$

där parametern  $a$  är en konstant som antagits vara 0.00001 eller 0.0001 (FIDAP 7.0 theory manual, 1993). Alltså fås den dimensionslösa turbulenta kinetiska energin

$$k^* = 0.00001 \quad \text{eller} \quad k^* = 0.00001.$$

Då det gäller dissipationen  $\epsilon$  kan man om man ej har någon dominerande turbulent längdskala i flödesmönstret använda sig av sambandet

$$\epsilon = \rho c_\mu \frac{k^2}{R_\mu \mu_0} \quad (5.9)$$

Då vi önskar uttrycka detta dimensionslöst fås

$$\epsilon^* = \frac{L}{U_\infty^3} \epsilon = \frac{L U_\infty \rho}{\mu_0} \frac{c_\mu}{R_\mu} k^{*2} = Re \frac{c_\mu}{R_\mu} k^{*2} \quad (5.10)$$

Reynoldstalet är som vanligt baserat på friströmshastigheten. Konstanterna  $c_\mu$  och  $R_\mu$  antar för strömningsfall liknande det studerade följande värden (FIDAP 7.0 theory manual, 1993).

$$c_\mu = 0.09$$

$$R_\mu = 10 - 100$$

För ett Reynoldstal på 10000 fås med  $R_\mu = 10$  en dimensionslös dissipation på inflödesranden

$$\epsilon^* = 9 \cdot 10^{-6}$$

De ovan angivna randvillkoren på  $k$  och  $\epsilon$  har visat sig ge god konvergens för de flesta simuleringar. Dissipationsrandvillkoret har ej ändrats för olika Reynoldstal i denna del av analysen då det visat sig ge rimliga resultat på de konvergenta lösningarna ändå. I en del fall av de oscillerande körningarna har det dock visat sig att värdet på  $k$  längs inloppsranden antagits för hög.

Då det gäller initialvillkoren har erfarenheten visat att man erhåller avsevärt bättre konvergenssegenskaper om en initialgissning på  $k$  och  $\epsilon$  skild från noll ansätts i hela flödesdomänen, (detta gäller även vid stationära simuleringar, men det har ej testats i detta arbete). Vanligast är att man sätter dessa initialvillkor till samma numeriska värde som man ansatt som randvillkoren på inloppet, vilket även har gjorts i detta arbete.

De lösningar som erhållits för turbulenta transienta förlopp med konstant inflöde är en längre tidssimulering av en anströmning med ett ekvivalent Reynolds-tal på 10 000 och 100000.

Dessutom har en lösning erhållits för ett förlopp där inflödet ökats gradvis för att sedan bli konstant med ett ekvivalent Reynolds-tal om 500000.

För Reynolds tal 10000 erhöles liksom i det laminära transienta förloppet ett karakteristiskt strömningsmönster i form av ett virvelpar som övergår i en von Karman-gata (fig 5.11-5.19). Strouhallet har beräknats till,  $St=0.256$ ; virvelavlösningens frekvensen bestämdes genom att plotta hastigheten tvärs huvudströmningsriktningen i en centralt belägen nod cirka 5 plathöjder nedströms plattan. Totalt utfördes simuleringen under en dimensionslös tid om 236. Simuleringen för  $Re=100000$  har ej körts så långt att numeriska assymetrier eller andra instabiliteter har initierat ett svängande strömningsförlopp,  $0 < t^* < 72.4$ , men den uppvisade samma tendenser som för  $Re=10000$ ; ett virvelpar bakom plattan samt en ökande hastighetsamplitud vinkelrät inströmningsriktningen. Beräkningen för  $Re=500000$  resulterade även den i ett växande virvelpar varpå följde en von Karman-gata. Här beräknades  $St$  till 0.28 - på samma sätt som för  $Re=10000$  - med viss reservation eftersom svängningsamplituden inte uppnått konstant storlek (se fig 5.20) och tillståndet därmed inte kan betecknas som stabilt.  $C_D$  har beräknats på samma sätt som för det laminära transienta fallet för  $Re=10000$  och 500000. Samma reservation för  $Re=500000$  som för Strohallet gäller dock, något  $C_D$  för  $Re=100000$  har inte beräknats när någon virvelavlösning inte har utbildats.

Re	10000	500000
$C_D$	1.6749	1.4363

Tabell 5.2  $C_D$  för  $Re$  10000 och 500000, turbulent, transient strömning

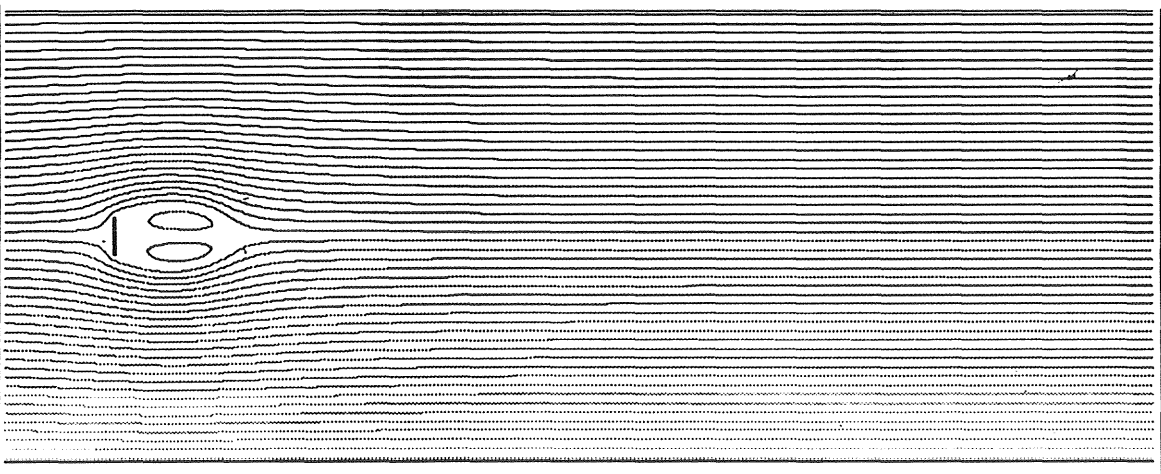
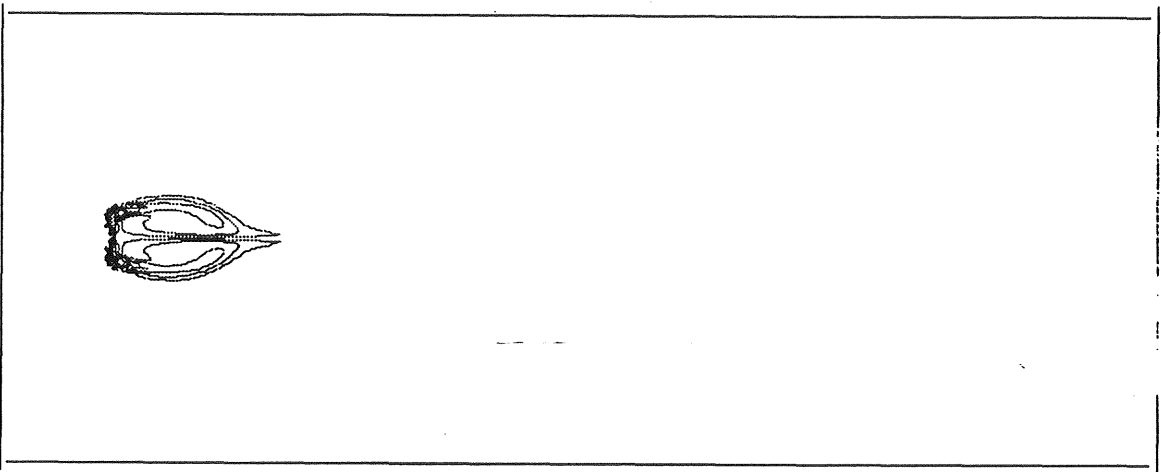
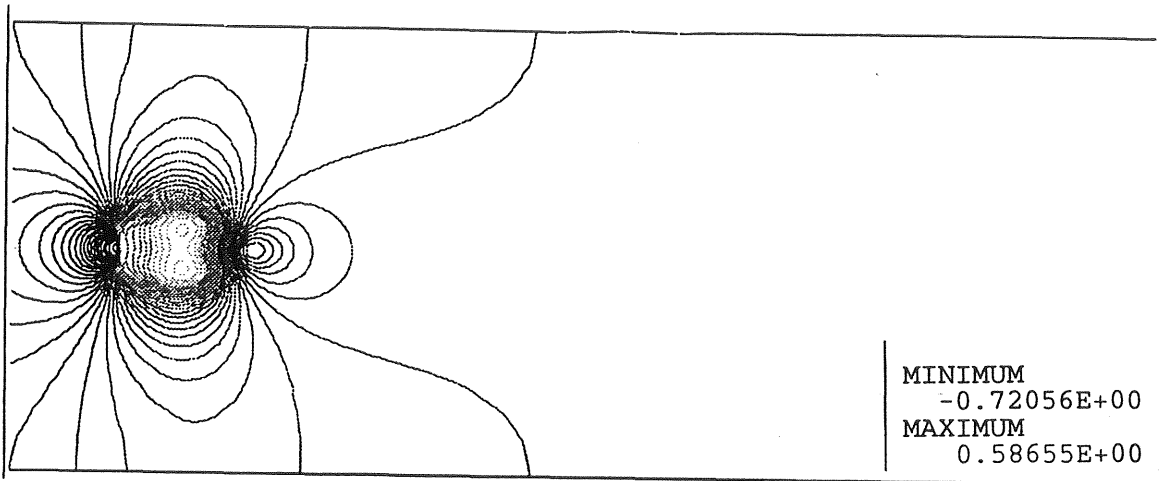
### 5.7. Turbulent transient friktionsbehäftad strömning, accelererande flöde

Ett sista steg i valideringen har varit att simulera ett tiden varierande randflöde. Ett oscillerande strömningsmönster innebär för den valda simuleringsmodellen att omväxlande accelerations- och retardationsfält införs på ränderna. I syfte att kontrollera att detta ej försvårade konvergensen på något oväntat sätt, gjordes en längre tidssimulering med en linjärt ökande hastighet på inflödesranden.

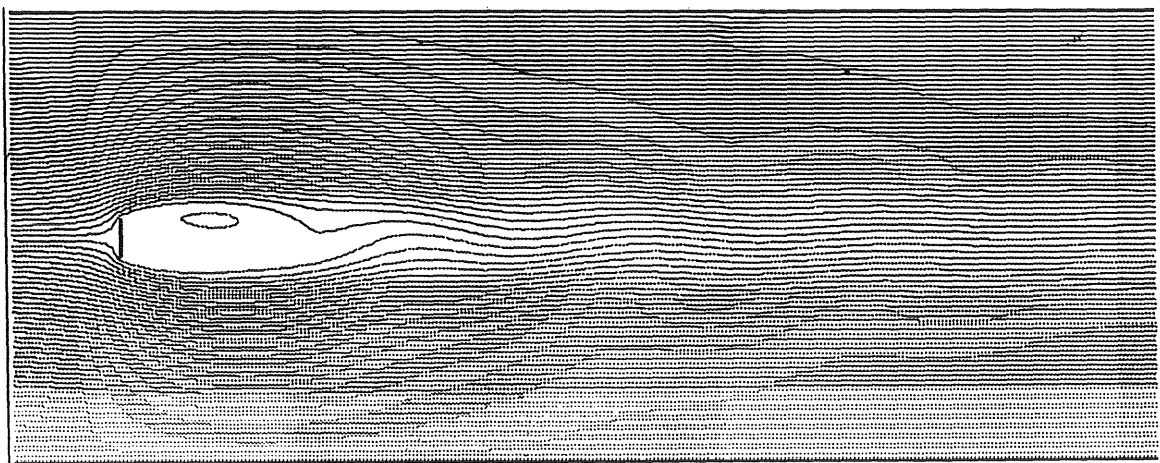
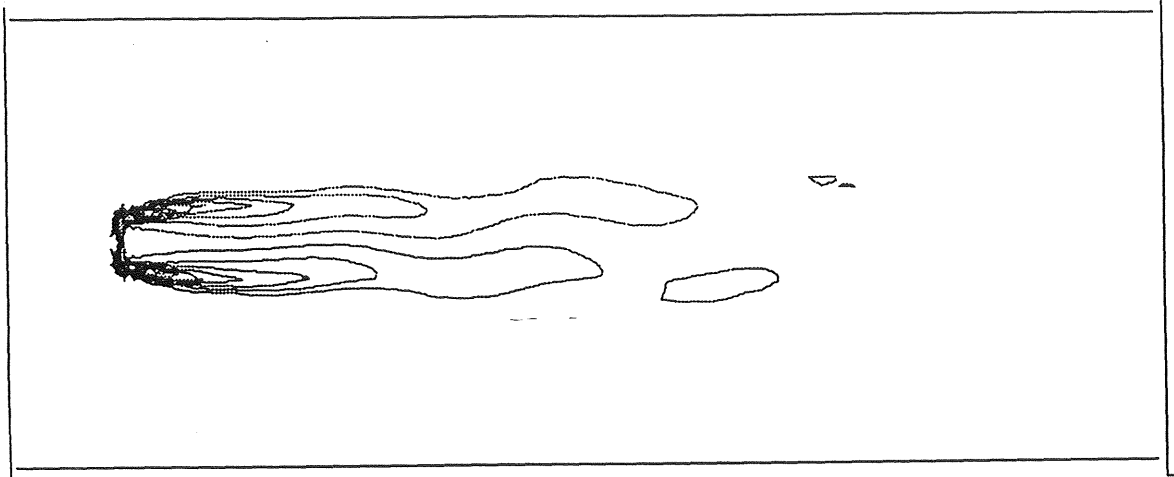
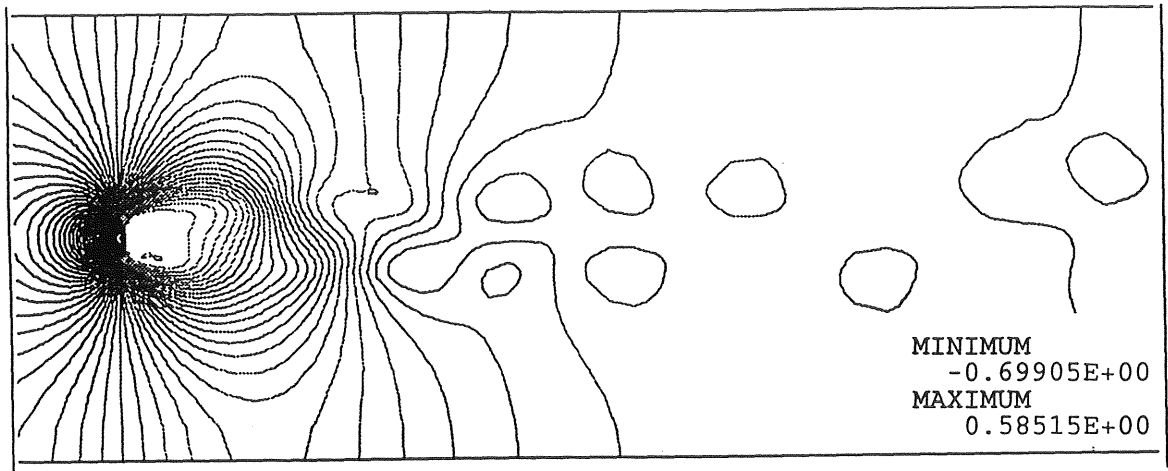
Det accelererade inflödet uppvisade en klart stabiliserande effekt på strömningsbilden. Det tillväxande virvelparet på plattans bakkant behöll sin horisontalsymmetriska struktur under hela accelerationsförloppet. I avsikt att utröna om det var det accelererade flödet i sig själv som gav upphov till denna stabilitet, eller om det orsakades av numeriska tillfälligheter, avslutades accelerationen efter en tid varefter hastigheten lades på en fix nivå. Inflödets horisontalkomponent fick härmed ett tidsberoende enligt figur 5.21. När inflödet väl fixerats kunde man observera en exponentiell tillväxt av instabilitetsmagnituden (figur 5.20), samt utveckling av en von Karman-gata.

Karaktären hos strömningsförloppet var ej helt oväntat eftersom strömnings-instabilitetsteori förutspår just en sådan utveckling för flöden som rör sig mot en negativ tryckgradient (lägre tryck nedströms). Att flödet känner av denna tryckfördelning kan inses genom att betrakta impulsekvationen i en dimension precis i accelerationsförloppets början. För  $x_1$ -riktningen fås (här används ekvationerna *med* dimensioner)

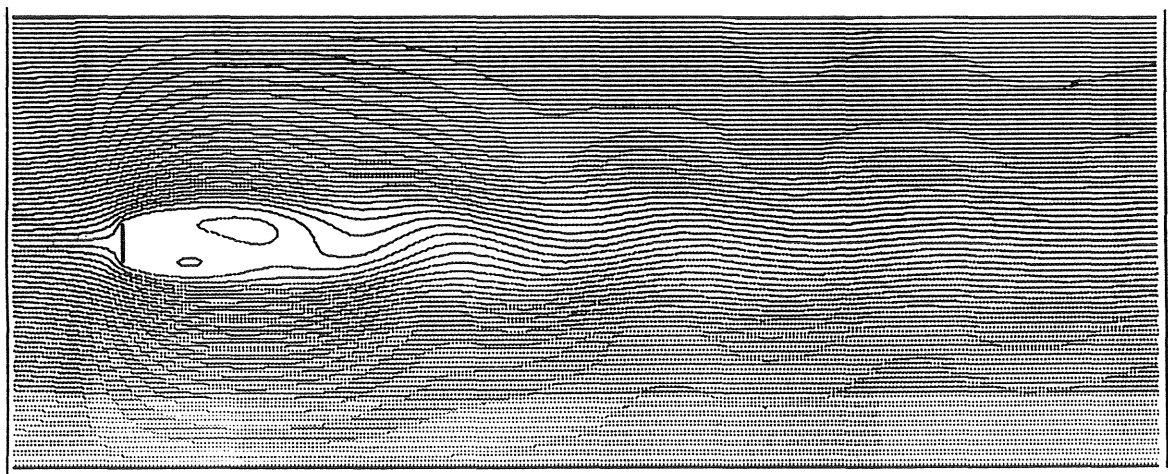
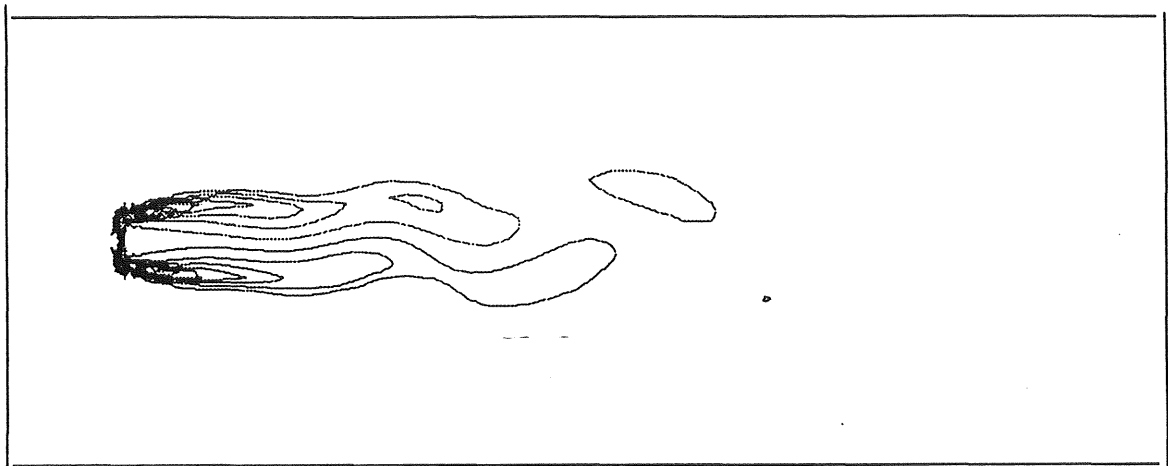
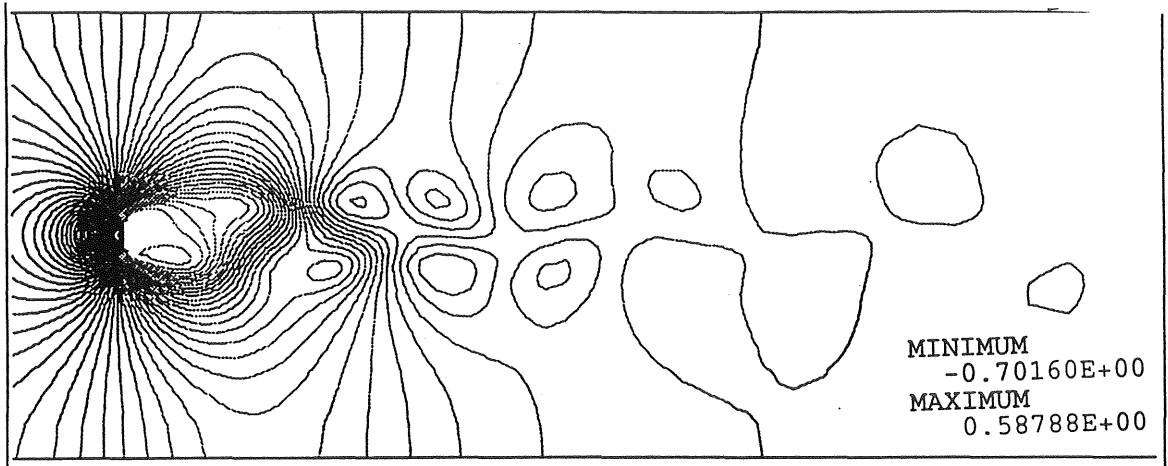
$$\rho \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (5.11)$$



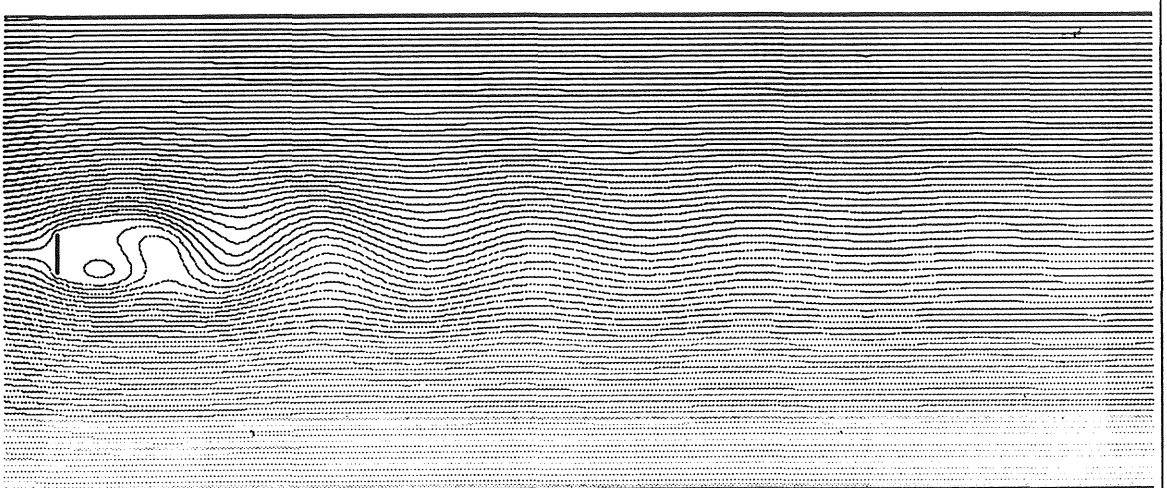
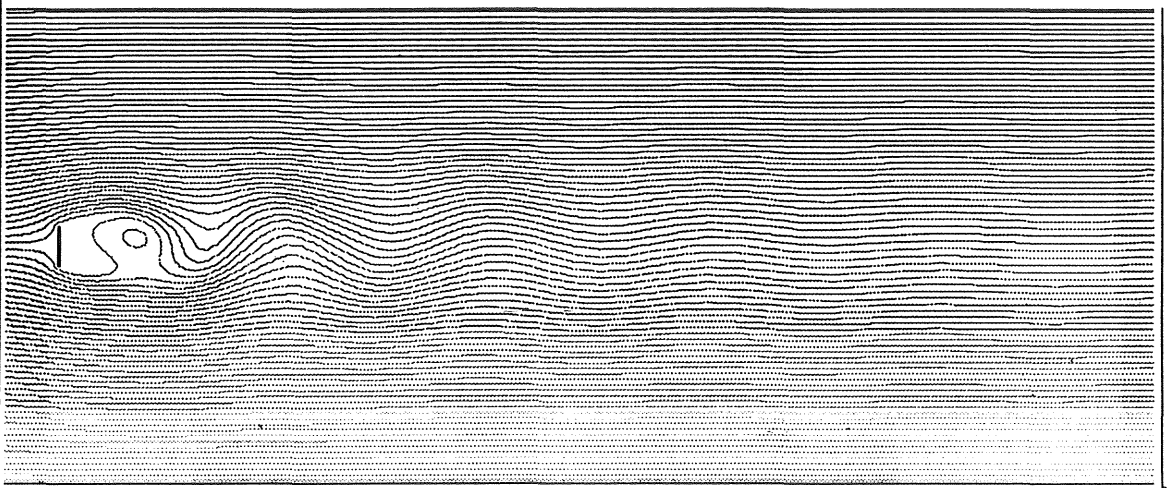
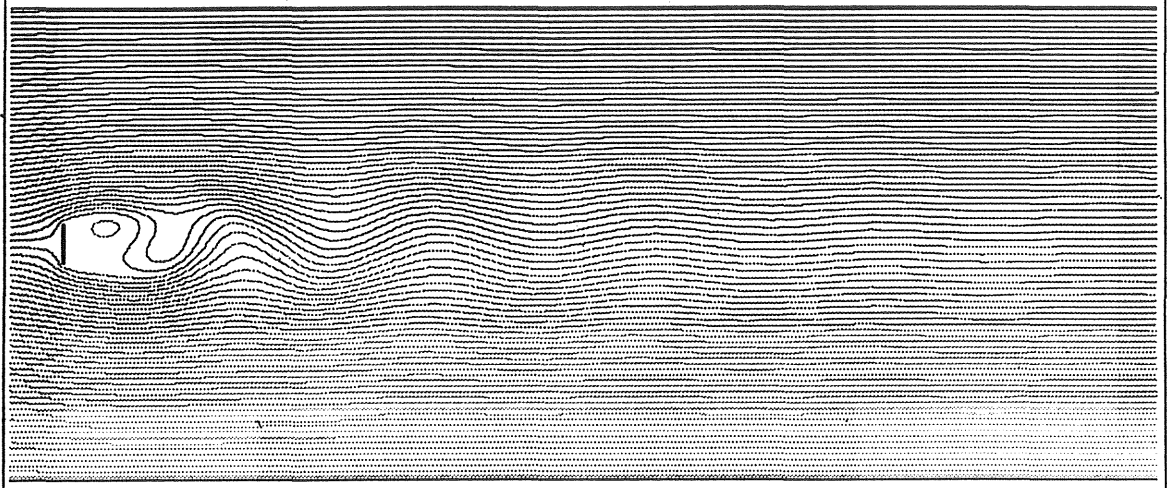
Figur 5.11 Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för  $Re=10000$ ,  $t^*=7.73$



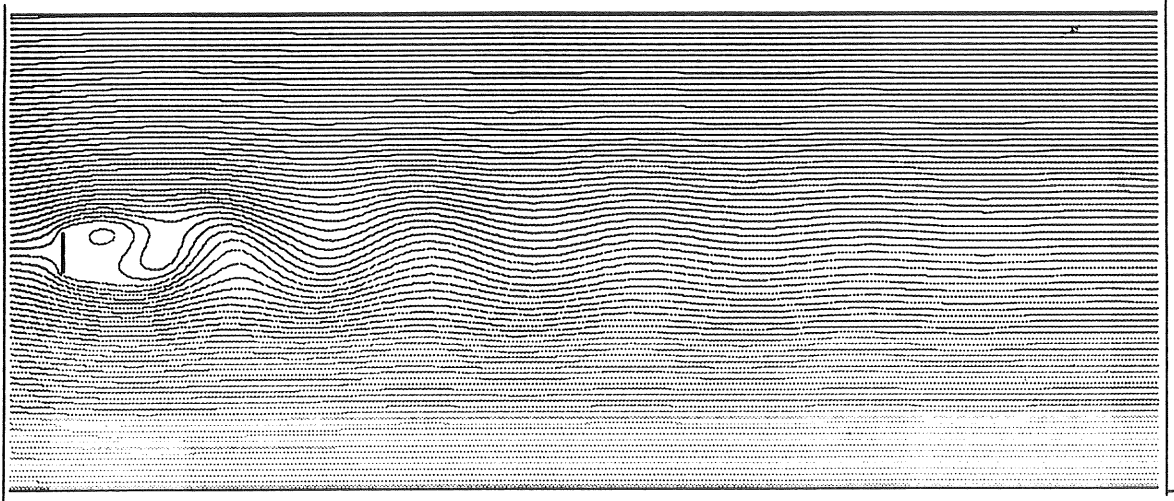
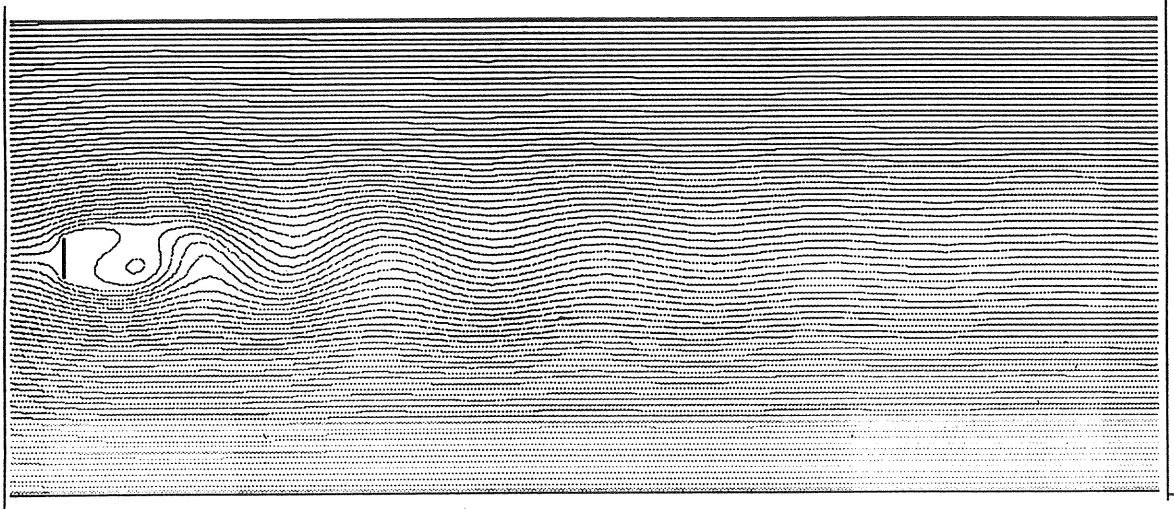
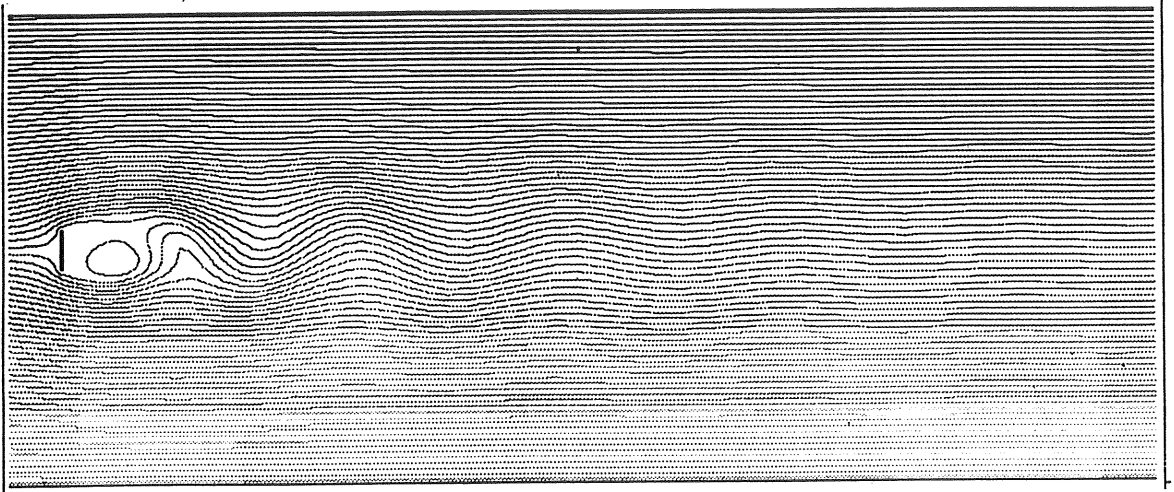
Figur 5.12 Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för  $Re=10000$ ,  $t^*=57.9$



Figur 5.13 Trycklinjer, vorticitetslinjer och strömlinjer för  $Re=10000$ ,  $t^*=97.9$

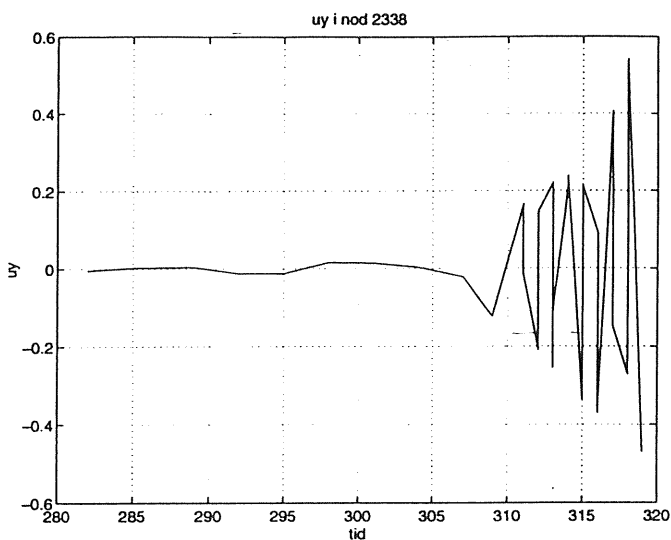
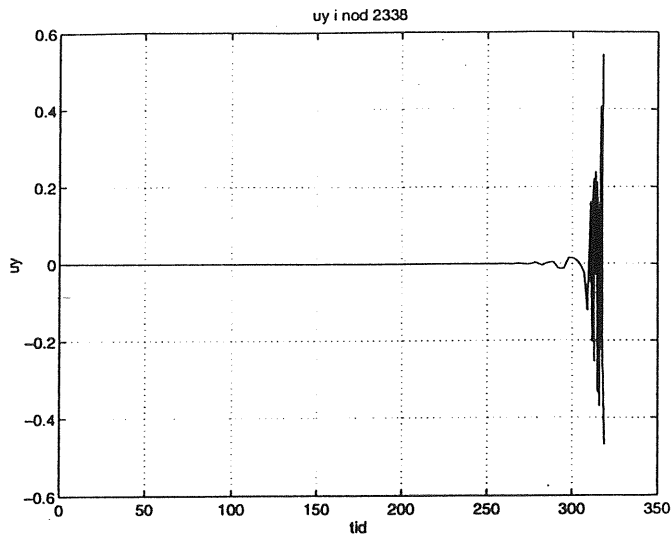


Figur 5.14-5.19 Strömlinjer för  $Re=10000$ ,  $t^*=220-226$



Figur 5.14-5.19 Strömlinjer för  $Re=10000$ ,  $t^*=220-226$





Figur 5.20 Vertikal hastighet i nod 2338, centralt belägen c:a 5 plathöjder nedströms plattan,  $Re=500000$

Om den accelererade rörelsen precis påbörjats så antas alla hastigheter i fluiddomänen vara noll. De enda kvarvarande termerna i ekv (5.11) blir således

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (5.12)$$

Om denna ekvation integreras med avseende på  $x_1$  fås

$$p = p_0 - \rho \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{t=0} x_1 \quad (5.13)$$

vilket innebär att ett linjärt varierande hydrostatiskt tryck introduceras i accelerationens riktning i en fluid som påtvingas en accelererad rörelse. En fluidpartikel som ges en acceleration i positiva  $x_1$ -riktningen kommer således att röra sig mot en negativ tryckgradient,

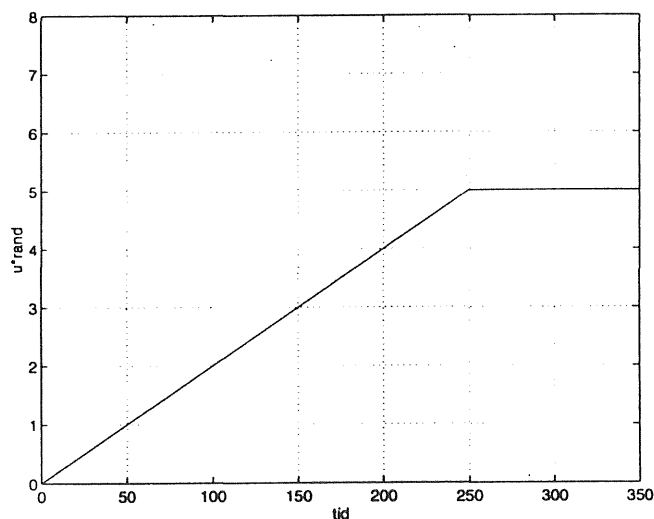
vilken enligt stabilitetsteori undertrycker instabiliteter (Panton, 1991). För vårt specifika problem, dvs kraftpåkänningen på plattan i strömningsriktningen, blir effekten att en nettokraft i samma riktning som den påtvingade accelerationen, fås som tillskott till den ordinarie, i en modell som arbetar med en påtvingad strömning istället för en påtvingad rörelse av plattan. Denna kraft kan direkt jämföras med Archimedes flytkraft som en kropp alltid känner av på grund av jordens gravitationsfält (som ju är ett konstant accelerationsfält). Man kan se det som att en överlagrad, påtvingad, makroskopisk acceleration av fluiden ger en linjär tryckvariation i accelerationens riktning som är överlagrad den tryckfördelning som uppkommer pga viskösa dynamiska effekter.

Det simulerade accelerationsfältet visade sig ej i detta skede ge upphov till några numeriska problem, utan dessa uppstod vid de snabbare förloppen då plattan utsattes för oscillerande tvärströmning. Dessa redovisas i nästa sektion. Den modell som valideringen genererat ansågs tillräckligt tillförlitlig för att dess karakteristik vad gäller elementgeometri och lösningsmetodik kunde anses fastställd. Någon modellering av ett isolerat retarderat hastighetsfält gjordes därför ej.

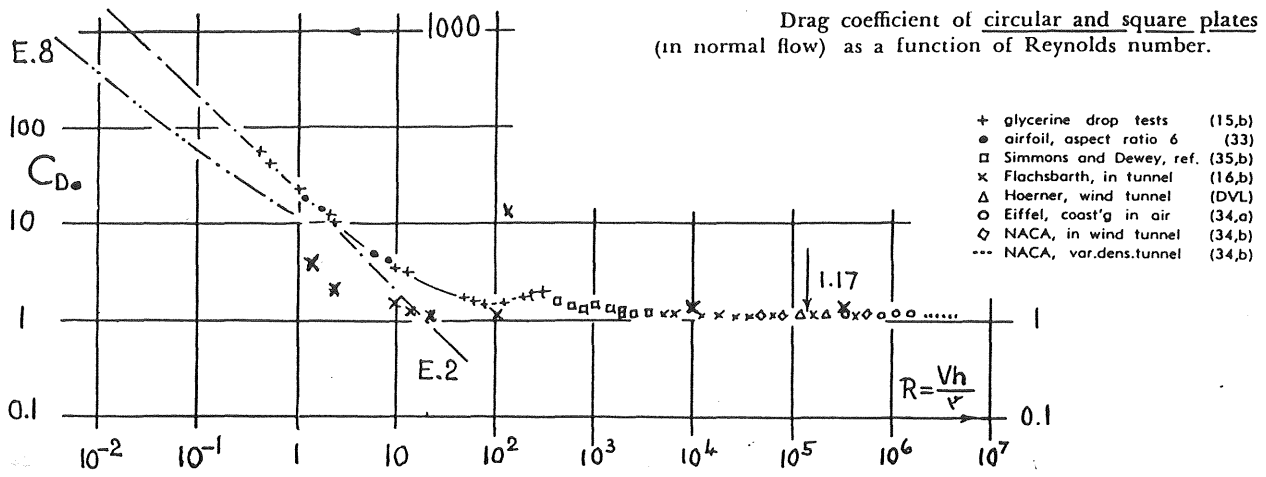
I appendix D redovisas en indatafil för den slutliga beräkningsmodell (inte för nätgenereringen dock), för ett oscillerande flöde, som valideringen utmynnat i. Randvillkor och initialvillkor är naturligtvis specifika för varje körning (i appendix D är  $KC=5$  och  $\beta=1000$ ).

### 5.8. Sammanfattning modellvalidering

Vid modellvalideringen har goda resultat beträffande strömningsbilden erhållits genomgående.  $C_D$ -värdena ligger dock inte riktigt rätt jämfört med tidigare studier (se figur 5.22). Orsaken till detta har inte framkommit under arbetet.



Figur 5.21 Inloppshastighet, transient turbulent problem,  $Re=0-500000$



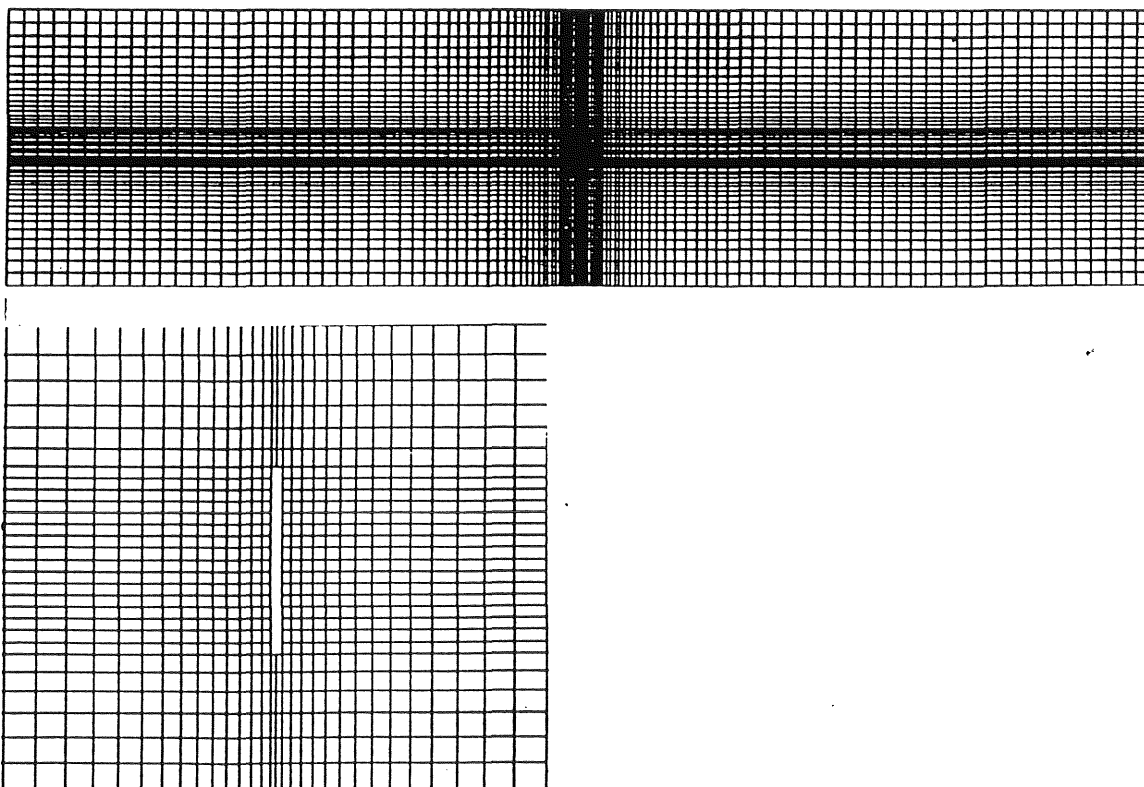
Figur 5.22  $C_D$  som funktion av Reynolds tal (Hoerner, 1965)  
*x* representerar de värden som beräknats under modellvalideringsfasen

## 6. Försöksserier, harmoniskt oscillerande strömning

### 6.1. Inledning

Huvudsyftet med studien har varit att studera kraftpåkänningen på en platta som utsätts för en harmoniskt oscillerande strömning. Modellvalideringsfasen har utförts som en förberedande studie för att få fram en FEM-modell som ger önskad konvergenskaraktistik. Denna modell har sedan modifierats såtillvida att plattan har placerats i mitten av en fluiddomän med dimensionslös längd  $l^*=50$ . Eftersom strömningen växlar riktning under förloppet bör modellen därmed vara symmetrisk även i horisontalld (se figur 6.1). Det svängande förloppet har åstadkommit genom att ansätta horisontalkomponenten av hastigheten på inlopps- och utloppsränderna som en sinusfunktion där  $-1 < u^*_{rand} < 1$  (se ekvation (3.39)). Den turbulenta kinetiska energin samt dissipationen har givits tids- och rumskonstanta värden på nämnda ränder. En textfil innehållande nödvändiga kommandon för strömningssimulering vid den dimensionslösa periodtiden 5 finns i appendix D.

Vid harmoniskt oscillerande strömning kommer två nya parametrar in i beräkningarna, periodtiden och rörelseamplituden. I och med detta kan inte strömningen längre karakteriseras enbart av Reynolds tal. Istället införs två nya dimensionslösa parametrar, Keulegan-Carpentertalet,  $KC$  och frekvensparametern,  $\beta$ , av vilka svängningsförloppets karaktär och tillhörande hydrodynamiska koefficienterna beror. Parametrarna  $KC$  och  $\beta$  definieras enligt ekvation (2.8) och (2.9).



Figur 6.1 FEM-modell för oscillerande flöde; hela domänen (ovan) och detalj kring plattan (nedan)

Enligt tidigare undersökningar kan  $C_D$  lämpligen plottas som en funktion av  $KC$  för ett konstant  $\beta$  (Sarpkaya & Isacson, 1981). Vid inledningen av arbetet var tanken att kunna genomföra sådana simuleringsserier med varierande  $KC$  för ett antal konstanta  $\beta$ , men det visade sig orealistiskt på grund av långa beräkningstider för varje simulering. Resultatet har blivit en serie för  $\beta=1000$  och  $KC= 2.5, 5, 10$  och  $15$ , vilket i det aktuella fallet motsvarar dimensionslösa periodtider om  $2.5, 5, 10$  och  $15$  samt simuleringar för  $\beta=100000$ ,  $KC= 1$  och  $\beta=200000$ ,  $KC=0.5$ , vilket motsvarar dimensionslösa periodtider om  $1$  respektive  $0.5$ .

Det svängande strömningsförloppet visade sig ge upphov till numeriska svårigheter som ej infunnit sig under modellvalideringen. Framför allt uppstod problem med högfrekventa svängningar i tiden hos trycket, vars orsak ej har spårats. Deras eventuella ursprung diskuteras mer utförligt i kapitel 4. Trots oscillationerna har beräkning av de hydrodynamiska koefficienterna,  $C_D$  och den för ett accelererande förlopp tillkommande  $C_M$ , ändå kunnat utföras. De har beräknats utifrån normalspänningsfördelningen över plattan. Den totala kraften har fått genom att integrera spänningarna över plattan och den totala rörelseekvationen har ställts upp enligt Morisons formel (ekvation (6.3), kraft per längdenhet).

$$F = -\omega\rho\frac{\pi}{4}D^2C_mU_\infty\cos\omega t - \frac{1}{2}\rho DC_DU_\infty^2|\sin(\omega t)|\sin(\omega t) \quad (6.3)$$

$C_D$  och  $C_M$  har sedan beräknats utifrån en fouriermedelvärdering av kraftens fördelning under en svängning enligt Sarpkaya (Sarpkaya & Isacson, 1981)

$$C_D = \frac{3}{4} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{F \sin \omega t}{\rho U_\infty^2} \omega dt \quad (6.4)$$

$$C_M = \frac{2U_\infty T}{\pi^3 D} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{F \cos \omega t}{\rho D U_\infty^2} \omega dt \quad (6.5)$$

## 6.2 Beräkningsresultat

Fem beräkningar har utförts; beräkningarna har gjorts för längre tid än en och en halv svängningsperiod, utom i de fall där tryckoscillationerna i tidsdimensionen gjort fortsatta beräkningar meningslösa (och alltför kostsamma tidsmässigt). Simuleringarna har utförts längre än en och en halv period eftersom beräkningarna i samtliga fall har startats från ett tillstånd i vila och den första periodhalvan har därmed inte tillfredsställande ansetts kunna beskriva det tillstånd av harmoniskt oscillerande strömning som beräkningarna skall gälla för. Önskvärt vore att beräkningarna drivs så långt att man kan visa att ett "periodstationärt" tillstånd verkligen uppnås innan  $C_D$  och  $C_M$  beräknas men detta har inte visat sig genomförbart för någon av simuleringarna på grund av långa beräkningstider. Studerar man kraften som verkar på plattan för den i förhållande till periodtiden längsta simuleringen,  $KC=10$ ,  $\beta=1000$  (se figur 6.7), ser den dock någorlunda stabil ut.

Svängningsförloppet kan delas in i 4 faser

- Fas1 Flödet initieras på randen och ett virvelpar utbildas på baksidan av plattan, precis som för simuleringarna under modellvalideringen (se figur 6.2)
- Fas2 Efter en fjärdedel av periodtiden når fluiden max hastighet och börjar att retardera. Virvlarna på plattans nedströmssida finns kvar och under en kort period uppträder en recirkulationszon på plattans uppströmssida (se figur 6.3)
- Fas3 Vid själva vändläget<sup>1</sup> har recirkulationszonen försvunnit och istället har utbildats ett andra virvelpar som verkar tillsammans med och nedströms det första. Det andra virvelparet cirkulerar åt motsatt håll i förhållande till det första (se figur 6.4)
- Fas4 Kort efter vändläget<sup>1</sup> trycks virvlarna som beskrevs i fas 1 ut åt sidorna och förloppet börjar om med motsatt riktning (se figur 6.5)

Detta svängningsförlopp skiljer sig från referenslitteraturen (Faltinsen, 1990). De simuleringar som utförts i detta arbete uppvisar ett stabilare strömningsmönster med mindre störningar från de tidigare svängningarna.

Den totala kraften som verkar på plattan för simuleringarna där  $\beta=1000$  redovisas i figur 6.6-6.9 tillsammans med den påtvingade sinusformade randhastigheten och man kan där se att kraften varierar periodiskt. Kraften är plottad med positiv riktning i positiv  $x_1$ -riktning, det vill säga på samma sätt som hastigheten. Kraften som plottats är den totala nettokraften som verkar på plattan. Observeras bör att kraften följer randhastigheten med en viss fasförskjutning, vilket är naturligt eftersom effekterna av en hastighetsändring på randen behöver en viss tid innan den påverkar plattan. Vidare kan man observera att kraftens amplitud är tämligen konstant för hela förloppet,  $C_D$  och  $C_M$  uppvisar dock en förändring vid beräkning för olika tidsintervall (se tabell 6.1)

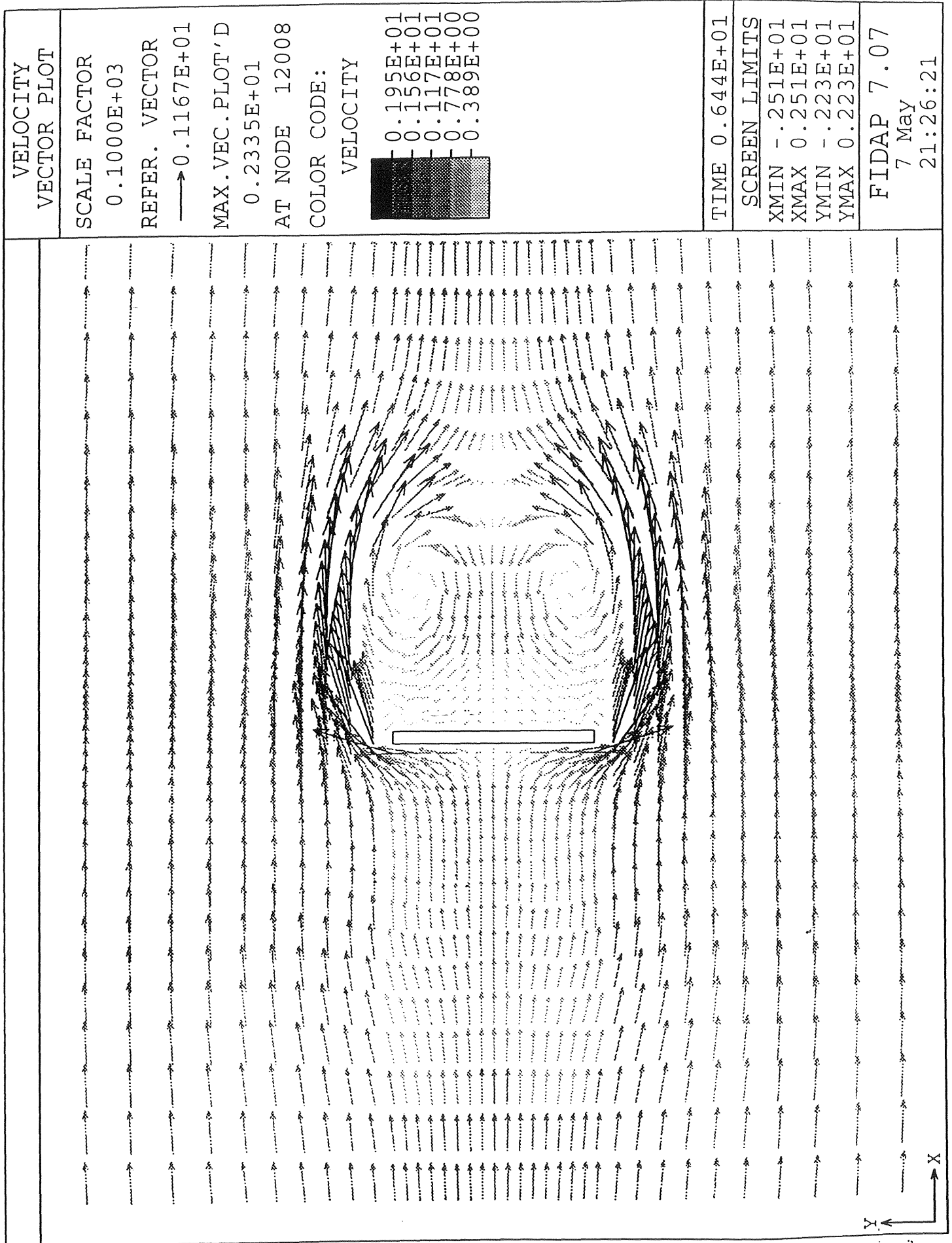
int. gränser	$0 < t^* < 2.5$	$0 < t^* < 2.5^2$	$0 < t^* < 5$	$2.5 < t^* < 7.5$	$5 < t^* < 10$	$0 < t^* < 10$
$\beta$	1000	1000	1000	1000	1000	1000
KC	2.5	2.5	5	5	5	10
$C_D$	4.3969	3.576	3.3950	4.3258	4.6172	2.2761
$C_M$	1.4975	1.350	1.7350	2.0536	2.1256	2.1360
int. gränser	$2.5 < t^* < 12.5$	$5 < t^* < 15$	$10 < t^* < 20$	$0 < t^* < 15$	$5 < t^* < 20$	$7.3 < t^* < 22.3$
$\beta$	1000	1000	1000	1000	1000	1000
KC	10	10	10	15	15	15
$C_D$	3.0158	3.2370	3.4924	2.2178	3.0043	3.3359
$C_M$	2.8968	2.8282	3.1049	2.6313	3.5052	2.8232
int. gränser	$0 < t^* < 1^2$	$0.2 < t^* < 1.2^2$	$0.4 < t^* < 1.4^2$	$0 < t^* < 0.5^2$	jämförande värden <sup>3</sup>	
$\beta$	100000	100000	100000	200000	773	1453
KC	1	1	1	0.5	7.5	5.3
$C_D$	2.8478	0.8298	-0.0979	8.6986	5.15	7.25
$C_M$	1.2556	1.1298	1.1233	6.7877	2.51	2.17

Tabell 6.1  $C_D$  och  $C_M$ , datorsimuleringar

<sup>1</sup> Med vändläget avses när hastigheten på in och -utloppsänderna växlar tecken.

<sup>2</sup> Inkluderar bodyforce vilket medför att  $C_M$  inte innehåller Froude-Krylovkraften (se 4.3.3)

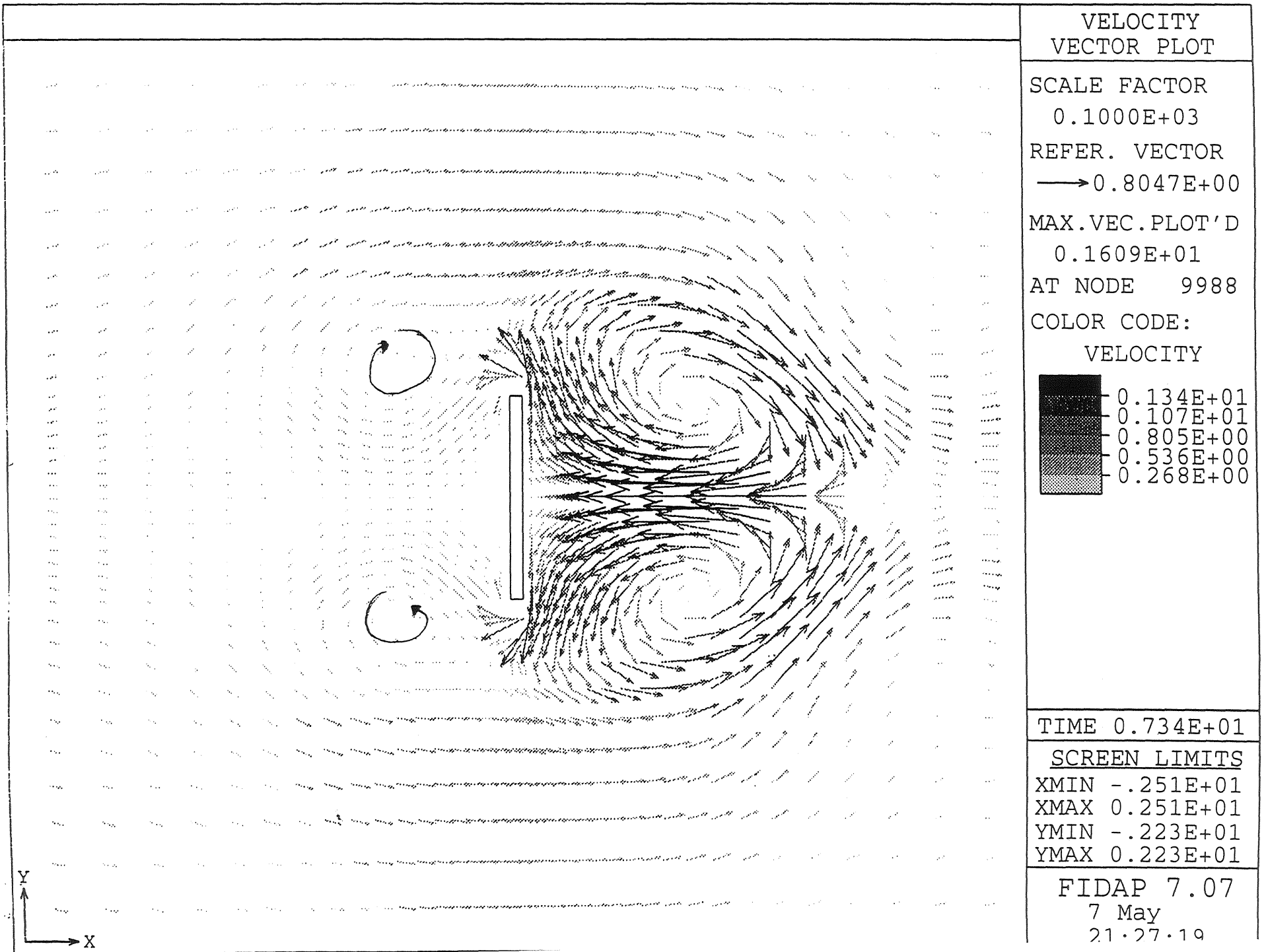
<sup>3</sup> Keulegan & Carpenter, 1958, experimentella studier



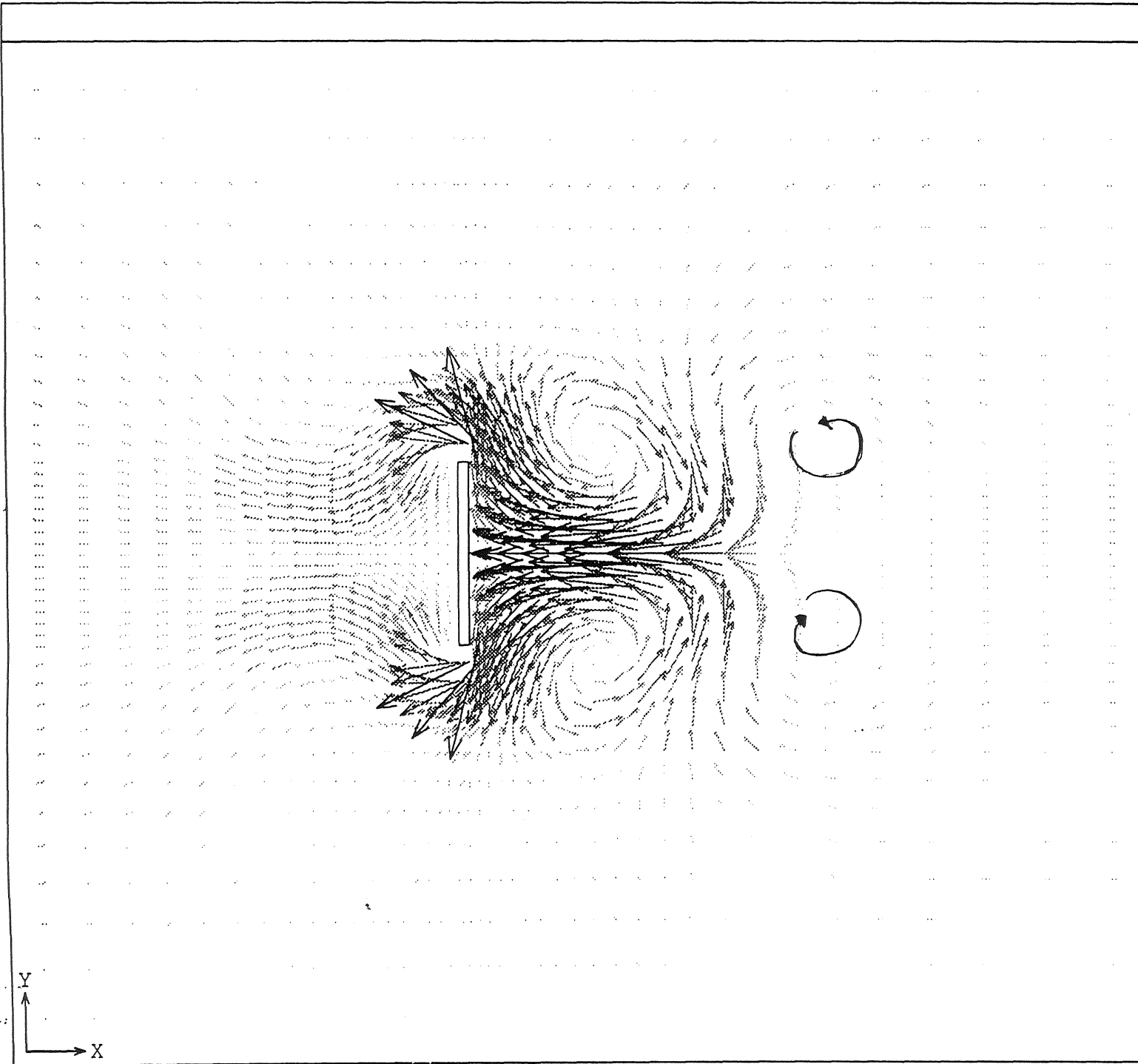
Figur 6.2

Fas 1 i svängningsförloppet

Figur 6.3 Fas 2 i svängningsförloppet







VELOCITY VECTOR PLOT

SCALE FACTOR  
 0.1000E+03  
 REFER. VECTOR  
 → 0.9108E+00  
 MAX.VEC.PLOT'D  
 0.1822E+01  
 AT NODE 6830

COLOR CODE:  
 VELOCITY

0.152E+01
0.121E+01
0.911E+00
0.607E+00
0.304E+00

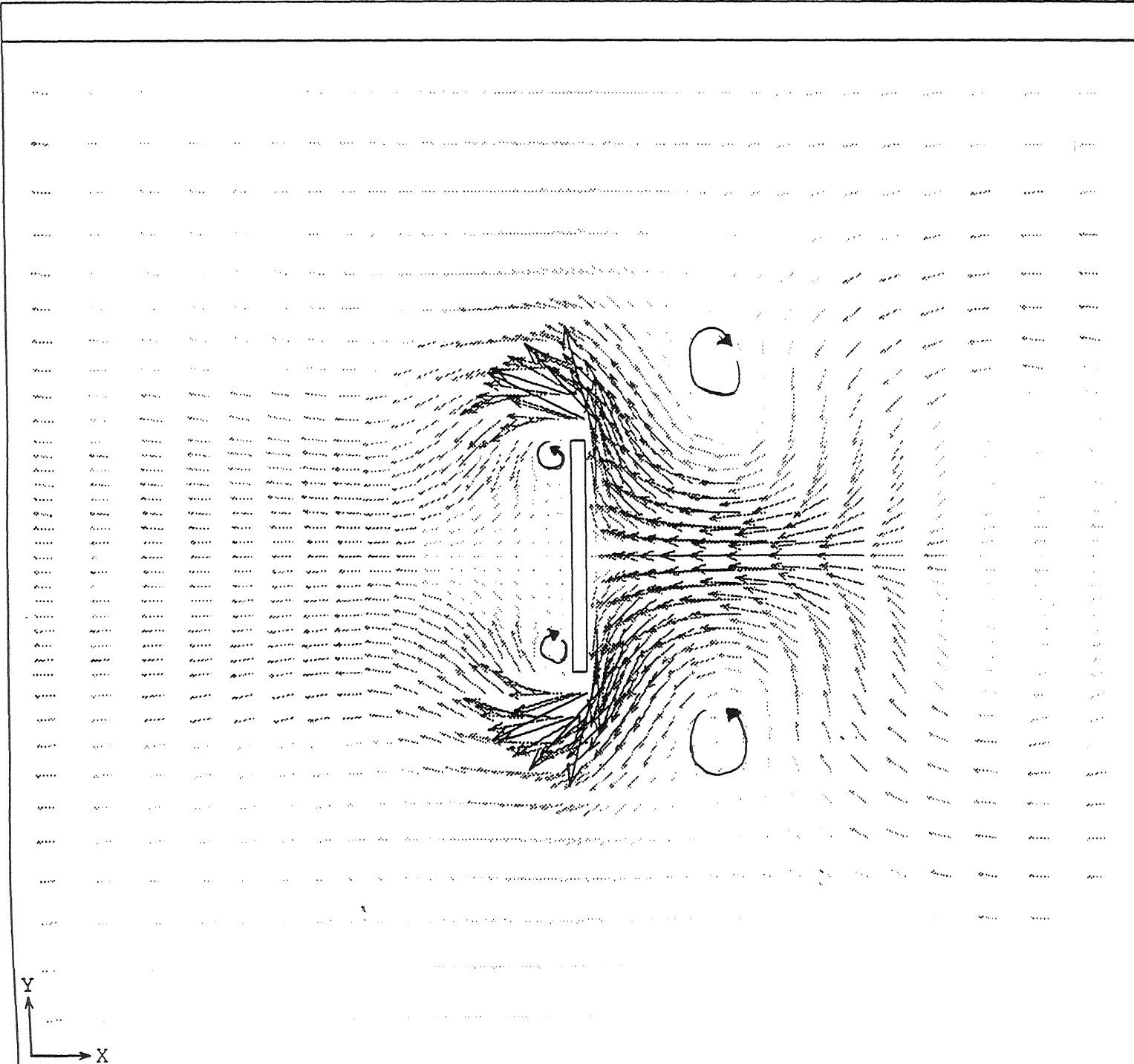
TIME 0.759E+01

SCREEN LIMITS  
 XMIN -.252E+01  
 XMAX 0.377E+01  
 YMIN -.278E+01  
 YMAX 0.278E+01

FIDAP 7.07  
 7 May  
 21:30:07

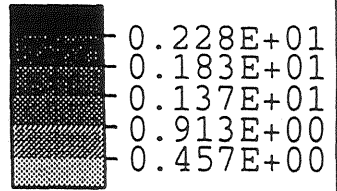
Figur 6.4 Fas 3 i svängningsförloppet

Figur 6.5 Fas 4 i svängningsförloppet



VELOCITY VECTOR PLOT

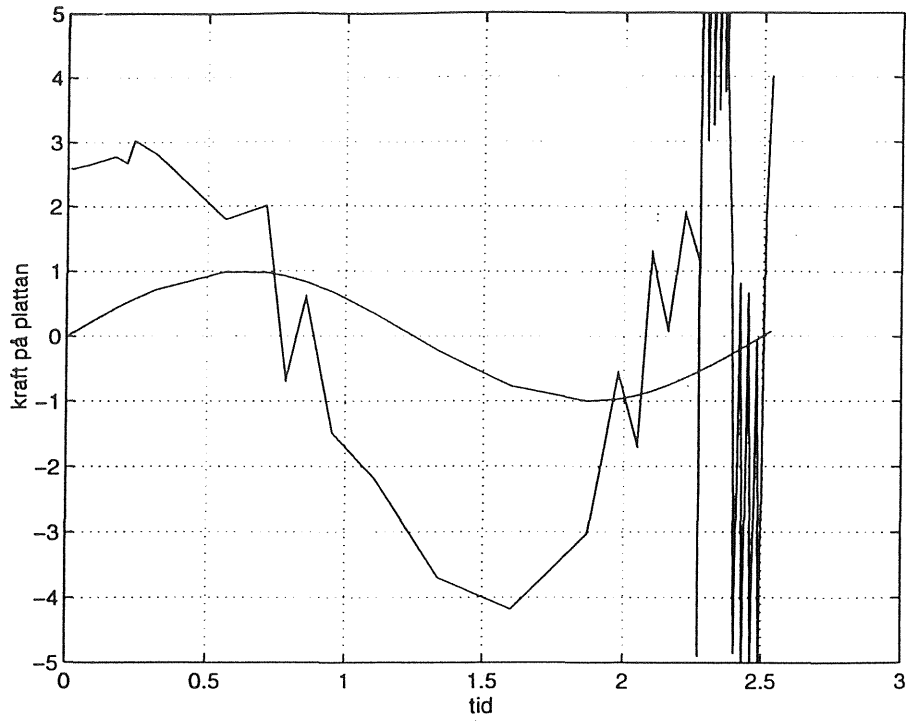
SCALE FACTOR  
0.1000E+03  
REFER. VECTOR  
→ 0.1370E+01  
MAX.VEC.PLOT'D  
0.2739E+01  
AT NODE 6830  
COLOR CODE:  
VELOCITY



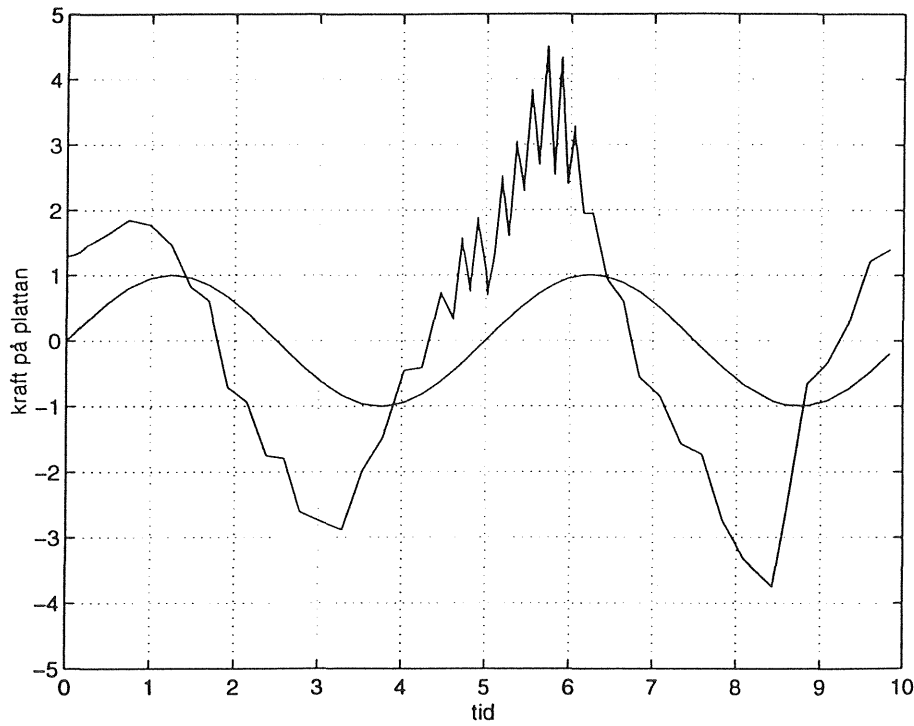
TIME 0.784E+01

SCREEN LIMITS  
XMIN -.251E+01  
XMAX 0.251E+01  
YMIN -.223E+01  
YMAX 0.223E+01

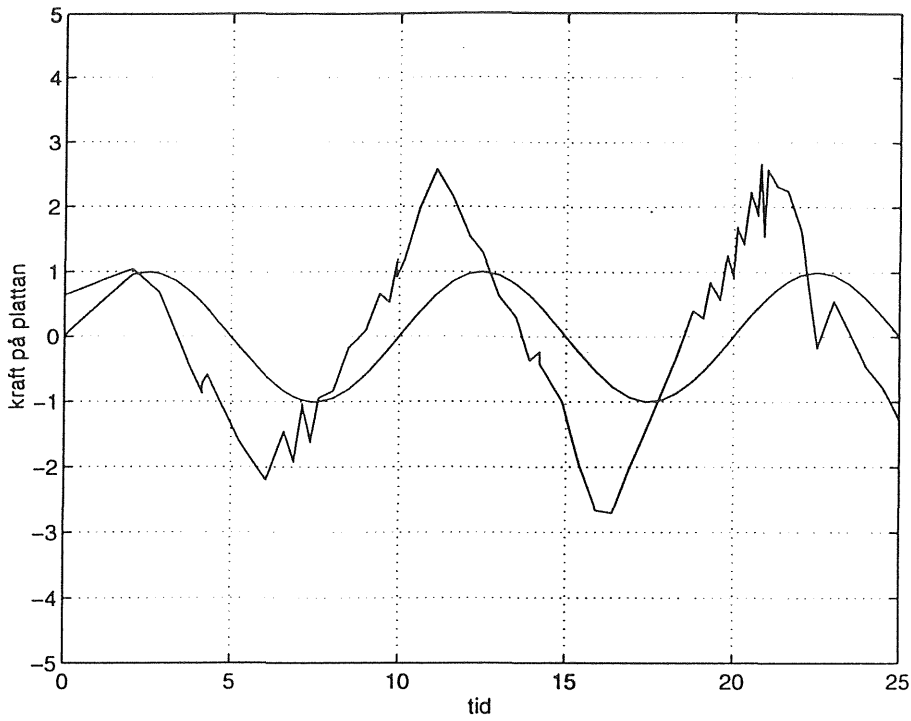
FIDAP 7.07  
7 May  
21.31.10



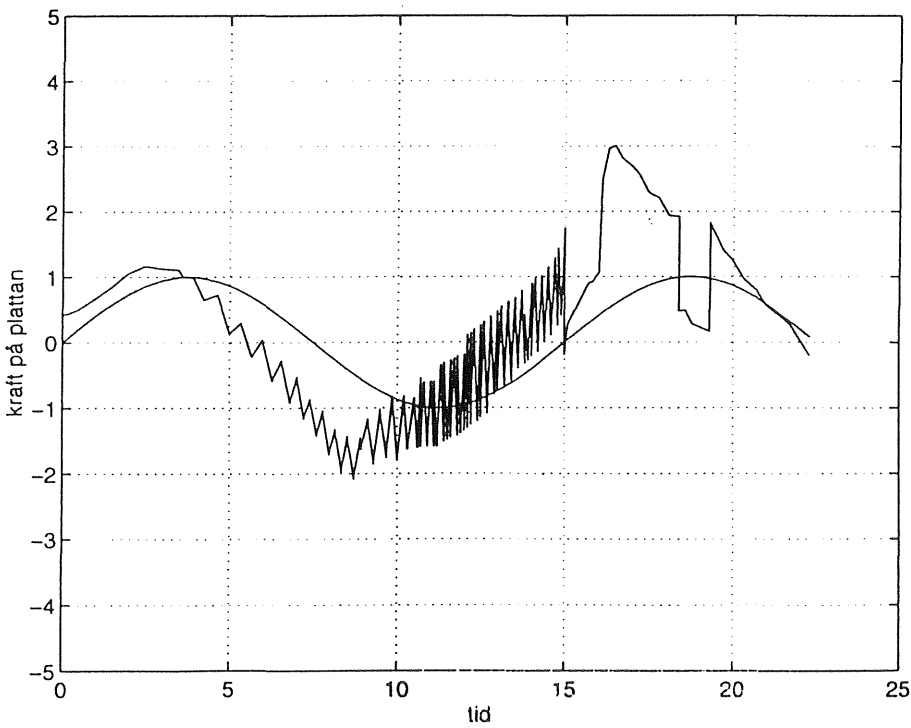
Figur 6.6 Kraft på plattan samt randhastigheten för  $KC=2.5$ ,  $\beta=1000$



Figur 6.7 Kraft på plattan samt randhastigheten för  $KC=5$ ,  $\beta=1000$



Figur 6.8 Kraft på plattan samt randhastigheten för  $KC=10$ ,  $\beta=1000$



Figur 6.9 Kraft på plattan samt randhastighet för  $KC=15$ ,  $\beta=1000$

## 7. Experimentell studie av kraftpåkänning på en lång platta.

### 7.1. Syfte med mätningarna

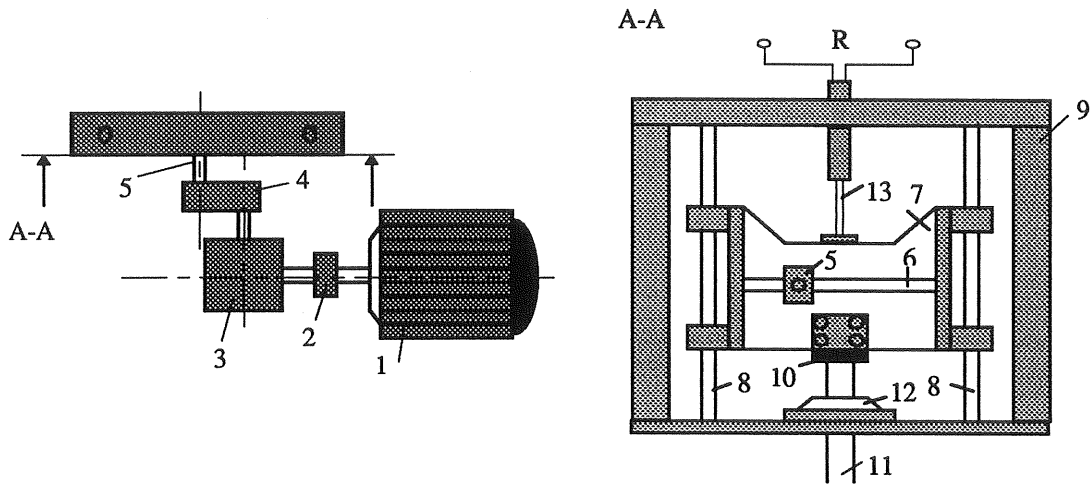
Det primära syftet med försöken var att bestämma strömningsmotståndskoefficienten  $C_D$  och added-mass-koefficienten  $C_M$  för olika oscillationsamplituder och periodtider. Några visualiseringsförsök har ej utförts.  $C_D$  och  $C_M$  har beräknats för värden på  $KC$  och  $\beta$  som svarar mot laborationsutrustningens möjliga driftintervall. Intervallet ligger något lågt i jämförelse med vad som kan anses relevant för tillämpningsområdet (se diskussion i avsnitt 2.3.1).

### 7.2. Laborationsriggens uppställning

Experimenten har utförts i en bassäng avsedd för experiment med vågor. Denna mäter  $15 \times 9$  m och hade vid experimentets utförande ett vattendjup på 1.00 m. Mitt i bassängen är en plattform ( $3 \times 3$  m) placerad som står på bassängens botten. På plattformen är placerad en konstruktion vars funktion är att generera en påtvingad harmonisk rörelse hos en platta nedsänkt i vattnet.

Anordningen för att ge plattan dess rörelse är avbildad i en principskiss i figur 7.1. Den vänstra figuren illustrerar konstruktionen uppifrån, den högra från sidan. En ställning av stål är ihopsvetsad till en styv konstruktion varpå en elmotor (1) är monterad. Via en koppling (2) och en vinkelväxel (3) överförs motoraxelns rotation till en vevarm (4). På vevarmen är fastsatt en kort axel. Denna kan låsas i olika lägen längs vevarmen varvid svängningsamplituden kan varieras. Axeln överför den cirkulära rörelsen till en vertikal rörelse via en slid (5) som kan glida i horisontalled längs en axel (6). Denna är fast inspänd i en släde (7) som i sin tur kan glida i vertikalled längs ett axelpar (8). Dessa sitter i en ram (9). På slädens undersida sitter en kraftgivare (10) i vilken en vertikal axel (11) är fastgängad. Axelns vertikala rörelse stabiliseras av en kulbussning (12). Slädens vertikala position registreras av en resistiv lägesgivare (13).

I den vertikala axeln är fäst en platta med utseende och mått enligt figur 7.2. För att efterlikna den tvådimensionella modell som använts vid datorsimuleringarna har plattan konstruerats så att den kan anses lång, med förhållandet plattbredd/plattjocklek så nära datormodellen som möjligt. Snedställda förstävningar har monterats mellan en hylsa som axeln går igenom, och den kraftupptagande plattan. Stagens placering har beräknats så att utböjningen vid plattans ändar blir lika stor som utböjningen mitt emellan axelns och förstävningens infästningar i plattan, då maximal belastning läggs på densamma. Därmed anses plattan under oscillationen få en så liten total deformation som möjligt.

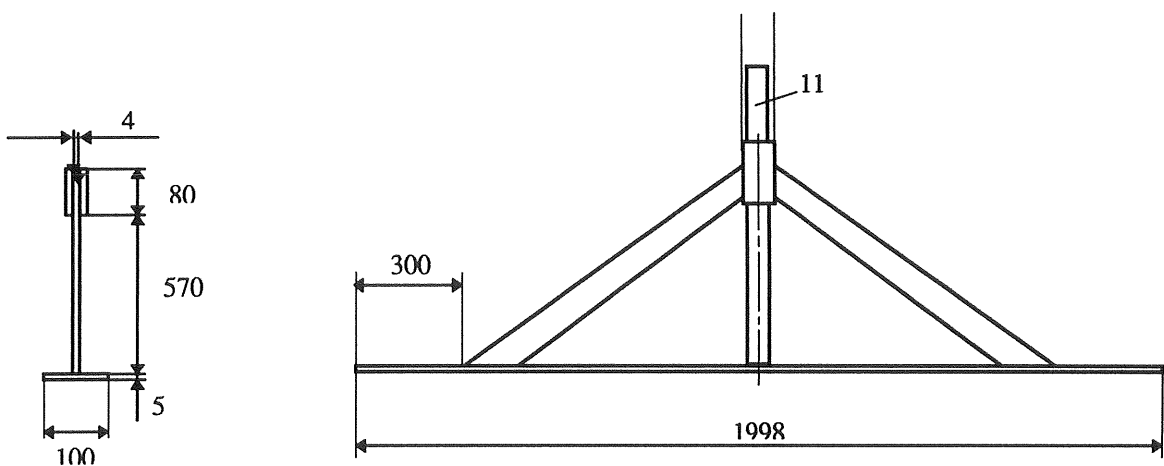


Figur 7.1 Laborationsriggens principiella utseende. Till vänster sedd uppifrån, till höger från sidan.

### 7.3. Mätning

De mätdata som är intressanta för experimentet är plattans läge och den dynamiska kraft som verkar på den. Vid en fullständig analys bör även våghöjden en bit utanför plattan mätas för att kunna uppskatta hur stor energi som lämnar systemet i form av ytvågor som radieras ut ifrån plattan. Eftersom plattan sänkts ned under ytan kan denna energi pga strålningsdämpningen anses försumbar. Både lägesgivaren och kraftgivaren har linjär karakteristik, varför de ej måste kalibreras m.a.p. nolläge för varje mätning. Signal från lägesgivaren respektive kraftgivaren omvandlas till en spänning som läses in analogt i parallellporten på en Macintosh Powerbook, och omvandlas mjukvarumässigt till en digital signal med av användaren vald samplingsfrekvens.

De parametrar som kan varieras i mätserierna är plattans rörelseamplitud  $\hat{z}$  och frekvens  $f$  (periodtiden  $T = 1 / f$ ). Dessa motsvarar de för ett oscillerande förlopp karakteristiska parametrarna  $KC$  (Keulegan-Carpenter-talet) och  $\beta$  (Frekvensparametern) definierade enligt ekvation (2.8) och (2.9). Elmotorn har en maximal effekt på 1.25 kW aktiv effekt, som har varit dimensionerande för maximala varvtalet och därmed frekvensen. Frekvensens undre gräns bestäms av driftstabiliteten (vridmomentet) vid låga varvtalet. Maximala amplituden begränsas av den fysiska



Figur 7.2 Illustration av platta använd vid experimentella studier. Mått i mm.

konstruktionen. Det finns ingen egentlig effekt- eller hållfasthetsknuten undre gräns men vid alltför små rörelser blir krafterna så små att mätbrus och andra störningar blir för stora i förhållande till den intressanta kraftsignalen. Följande intervall erhålls på ingående parametrar vid mätningar på plattan.

Amplitud: 0 - 61 mm

Frekvens: 0.59 - 1.43 Hz

Motsvarande dimensionslösa parametrar blir då med  $v = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  för vatten av  $20^\circ \text{ C}$  och en plattbredd  $D = 0.100 \text{ m}$

KC: 0.75 - 3.83

$\beta$ : 5800 - 14200

Liksom tidigare nämnts kan konstateras att de parameterintervall som i kapitel 2 härleddes som intressanta för en vågenergiapplikation (se olikheterna (2.10)) skiljer sig markant från de värden som kan uppnås med laborationsutrustningen, vad beträffar frekvensparametern, samtidigt som värdet på KC ligger något högt. Trots detta har experimenten utförts i hela det ovan angivna intervallet. En amplitud (KC) har fixerats vid olika nivåer (12, 25, 36, 48, 55 och 61mm) och frekvensen har därefter varierats i 10 steg genom att reglera styrspänningen till elmotorn. Rörelse- och kraftsignal har samplats under 30 sekunder med en samplingsfrekvens på c:a 50 Hz.

## **7.4. Signalbehandling, utvärdering av mätdata**

### **7.4.1. Bakgrund**

Spänningarna från kraft- respektive lägesgivarna läses in i datorn och ritas upp på bildskärmen och sparas till fil. För presentation och behandling av signalerna har använts ett härför avsett program; AcqKnowledge.

Signalen från lägesgivaren kan anses vara helt sinusformad då motorn ej belastas för hårt, dvs inom redovisat driftintervall. Kraftsignalen däremot kommer ej att vara helt sinusformad utan innehåller en del övertoner. För att identifiera olika delar i kraftsignalen Fourier-analyseras denna.

### **7.4.2. Styrande ekvationer**

En approximativ rörelseekvation för plattan i tidsplanet ger, om strålningsdämpningen försummas (positiv kraftriktning definierad i hastighetens och accelerationens positiva riktning)

$$-F(t) = (m_t + a)\ddot{z}(t) + f_1\dot{z}(t) + \frac{1}{2}A\rho C_D|\dot{z}(t)|\dot{z}(t) \quad (7.1)$$

Den av fluiden på plattan exciterade kraften  $F(t)$  antas, i enlighet med vad som sagts i kapitel 2, uppdelad i en del proportionell mot accelerationen (en masströghetsterm) och en del proportionell mot hastigheten i kvadrat (en friktionsförlust pga strömningsmotståndet). Denna ekvation är uppbyggd på samma sätt som Morisons ekvation (2.7) och ger en hygglig bild av kraftsituationen. En ny term, som tar hänsyn till lagerförluster, har uppkommit. Termen  $f_l$  kallas hädanefter lagerdämpningskoefficient och  $m_t$  är den totala massan hos platta, stag och stång.  $C_D$  är den Fourier-medelvärderade släpkraften.

Empirisk analys visar att totala lagerfriktionen  $F_R$  ej har helt viskös karaktär, utan till viss del även består av rullfriktion och andra förluster. Härvid fås att  $F_R \propto \dot{z}^{\frac{2}{3}}$  (SKF Huvudkatalog, 1989). Friktionens ringa storlek gör dock att den i sammanhanget med god approximation kan anses ha ett linjärt hastighetsberoende.

Om en rent sinusformad rörelse påtvingas plattan, dvs

$$z = \hat{z} \sin(\omega t) \quad (7.2)$$

så fås genom derivering, för hastighet respektive acceleration

$$\dot{z}(t) = \omega \hat{z} \cos(\omega t) \quad (7.3)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 \hat{z} \sin(\omega t) \quad (7.4)$$

Vidare antas  $F(t)$  vara en periodisk signal med huvudsakligen sinusformad karaktär och med en fasvridning  $\varepsilon$  från rörelsen  $z(t)$ . Om man definierar kraften som liggande *efter* kroppens *läge* fås

$$F = \hat{F} \sin(\omega t - \varepsilon) \quad (7.5)$$

Om kraft, hastighet och acceleration definieras med positivt tecken i samma riktning kan ekvation (7.1) nu skrivas

$$\hat{F} \sin(\omega t - \varepsilon) = \omega^2 \hat{z} (m_t + a) \sin(\omega t) - \omega \hat{z} f_l \cos(\omega t) - \frac{1}{2} A \rho C_d \omega^2 \hat{z}^2 |\cos(\omega t)| \cos(\omega t) \quad (7.6)$$

För att kunna lösa ut  $C_D$  och  $C_M$  ur ekvation (7.6) måste kraftsignalen Fourieranalyseras och för att kunna göra detta måste den sista termen lineariseras.

### 7.4.3. Linearisering, Fourierutveckling

Den olinjära delen  $|\cos(\omega t)| \cos(\omega t)$  i sista termen i högerledet lineariseras med hjälp av en Fourier-utveckling (Bergdahl, 1987).

$$|\cos(\omega t)| \cos(\omega t) = \frac{8}{3\pi} \cos(\omega t) + \frac{8}{15\pi} \cos(3\omega t) + \dots \quad (7.7)$$



Vid den fortsatta analysen antas att endast den första termen av dessa ger ett relevant bidrag till den totala kraften och den andra termen försummas.

Vidare kan vänsterledet i (7.6) skrivas om så att

$$\hat{F} \sin(\omega t - \varepsilon) = \hat{F}(\sin(\omega t) \cos \varepsilon - \cos(\omega t) \sin \varepsilon) \quad (7.8)$$

Kombination av ekvationerna (7.6) till (7.8) samt identifiering av termerna i vänster- respektive högerled ger att släpkraftskoefficienten  $C_D$  kan lösas ut

$$C_D = \frac{\hat{F} \sin \varepsilon - f_1 \omega \hat{z}}{\frac{1}{2} A \rho \omega^2 \hat{z}^2 \frac{8}{3\pi}} \quad (7.9)$$

I detta uttryck ingår en del termer som måste beräknas ur spektralanalys av amplitud- och kraftsignalen för att  $C_D$  explicit ska kunna lösas ut och man ser att  $C_D$  kommer att variera med frekvensen och amplituden.

*Added mass*  $a$  beräknas på liknande sätt genom termidentifiering i ekvation (7.6) till (7.8).

$$a = \frac{\hat{F} \cos \varepsilon}{\omega^2 \hat{z}} - m_i \quad (7.10)$$

och ett  $C_M$  för uppskattning av krafter i tidsplanet kan beräknas enligt

$$C_M = \frac{a}{\rho \frac{\pi}{4} D^2 L} \quad (7.11)$$

Resultaten av beräkningarna ( $C_D$  och  $C_M$  s.f.a.  $KC$  och  $\beta$ ) återfinns i slutet av detta kapitel. För den största amplituden (61 mm) har  $C_D$  beräknats då lagerfriktionen försummits. Den relativa skillnaden mellan koefficienterna varierar mellan 0.6 och 5.6 %.

#### 7.4.4. Diskret Fourier-analys av signalen, identifiering av termer

Kraftamplituden  $\hat{F}$  är den amplitud som kraftsignalen skulle ha om den var en rent sinusformad signal (vilket gjordes som antagande tidigare). För att bestämma denna idealiserade amplitud-motsvarighet gör man en Fourier-transform av kraftsignalen. I korta ordalag innebär detta att man överför signalens variation i tidsplanet till frekvensplanet och därmed analyserar dess frekvensinnehåll - dess spektrum. Den kontinuerliga Fourier-transformen definieras av

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (7.12)$$

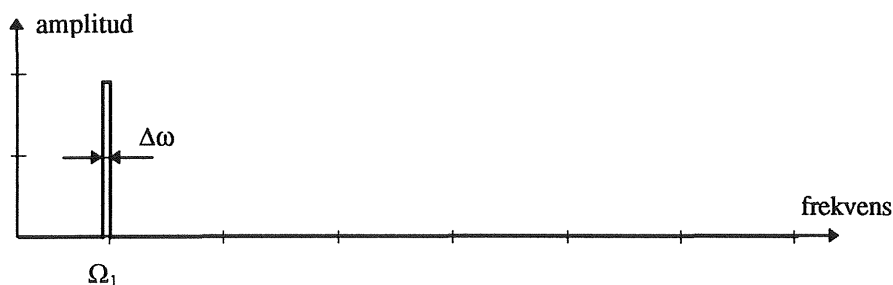
Eftersom datorn samlar in, samplar, värden vid ett ändligt antal tillfällen använder man sig dock istället av en diskret Fourier-transform. En speciell form av diskret algoritm har använts i analysen, Fast Fourier Transform (FFT), vilken bygger på att antalet samplade data är  $2^n$ , där  $n$  är ett heltal.

Om man gör en diskret Fourier-analys på en ren sinus-signal får man ett spektrum med ett karakteristiskt utseende enligt figur 7.3. Signalen har hela sitt energiinnehåll på en speciell grundfrekvens,  $\Omega_1$ , dock med en viss utbredning längs frekvensaxeln som motsvarar den diskreta talrepresentationens maximala upplösning (bredden är lika med samplingsintervallet).

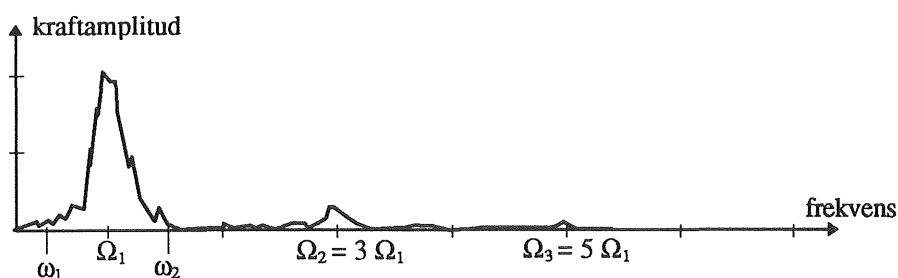
Om istället den verkliga kraftsignalen överförs till frekvensplanet får den ett principiellt utseende enligt figur 7.4. Pga att kraftsignalen ej innehåller endast rena, linjära sinuskomponenter samt ett visst mått av mätbrus och andra störningar "smetas" amplitudtoppen ut över ett bredare frekvensintervall. Dessutom finns ett visst energiinnehåll representerat på övertoner, i detta fall på udda multipler av grundtonen. Den andra tydliga toppen i figur 7.3 svarar väsentligen mot den andra termen i högerledet av Fourier-utvecklingen (7.7). Den antagna sinusformade kraftens amplitudmotsvarighet fås härmed genom att integrera den verkliga signalens amplitud över ett relevant avsnitt av frekvensaxeln och dividera med samplingsintervallets längd  $\Delta\omega$

$$\hat{F}_{\text{sinus}} = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \hat{F}_{\text{verklig}}(\omega) d\omega}{\Delta\omega} \quad (7.13)$$

Integrationsgränserna väljs typiskt så att den integrerade rörelseamplituden över ett symmetriskt avsnitt kring amplitudtoppen längs frekvensaxeln i Fourier-transformen för



Figur 7.3. Principiellt utseende av Fourier-transformen av en ren sinussignal



Figur 7.4. Principiellt utseende hos Fourier-transformen av den verkliga, uppmätta signalen från kraftgivaren. Signalen har viss mängd energi representerad på udda multipler av grundtonen

lägessignalen, dividerat med bredden av samplingsintervallet, blir lika med den *verkliga* inställda amplituden. Vinkelfrekvensen  $\omega$  fås genom att identifiera lägessignalens amplitudtopp längs frekvensaxeln (=grundtonen). Denna signal innehåller lite övertoner och har ett typiskt utseende enligt figur 7.5. Lägesamplituden  $\hat{z}$  är den som ställs in för varje försöksserie och är därmed känd. Fasskillnaden  $\epsilon$  mellan kraft och position avläses som skillnaden av fasläget vid grundfrekvensen för lägets respektive kraftens Fourier-transformer.

En uppskattning av den dynamiska lagerfriktionskoefficienten  $f_1$  fås genom att demontera plattan inklusive stag från den vertikala axeln och därefter göra en mätserie då endast stängen oscillerar i luft. Strömningsmotståndsförluster kan härmed anses försumbart små. Detsamma gäller added mass-termen. Rörelseekvationen reduceras till

$$F = m_{st} \ddot{x} + f_1 \dot{x} \quad (7.14)$$

Alla storheter utom lagerfriktionskoefficienten är kända vid varje tidunkt och denna kan enkelt lösas ut.

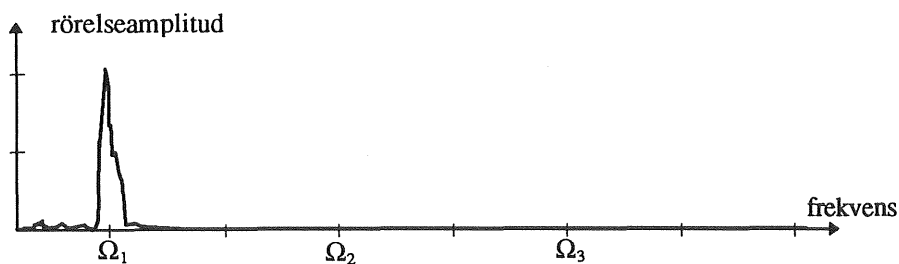
$$\hat{F} \sin(\omega t + \epsilon) = -\omega^2 \hat{x} m_{st} \sin(\omega t) + f_1 \omega \hat{x} \cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{F}(\sin(\omega t) \cos \epsilon + \cos(\omega t) \sin \epsilon) = -\omega^2 \hat{x} m_{st} \sin(\omega t) + f_1 \omega \hat{x} \cos(\omega t) \Rightarrow \quad (7.15)$$

$$\Rightarrow \hat{F} \sin \epsilon = f_1 \omega \hat{x} \Rightarrow f_1 = \frac{\hat{F} \sin \epsilon}{\omega \hat{x}}$$

Lagerfriktionsmätningar har gjorts för samtliga periodtider som använts för kraftmätningarna på plattan nedsänkt i vatten. Mätningar har utförts för två olika svängningsamplituder. Detta för att kontrollera om koefficienten  $f_1$  har något relevant frekvens- eller amplitudberoende. Resultatet av mätningarna visar ett ej försumbart frekvensberoende och ett visst amplitudberoende. Lagerfriktionskoefficienten har uppskattats utifrån mätresultaten.

Alla i ekvation (7.9) och (7.10) ingående storheter är därmed kända och  $C_D$  och  $C_M$  kan beräknas för varje frekvens- och amplitudkombination.



Figur 7.5 *Karakteristiskt utseende hos den verkliga, uppmätta signalen från lägesgivaren. Signalen har i princip all energi representerad på endast ett smalt frekvensavsnitt.*

## 7.5. Resultat från experiment

Nedan presenteras värden på de hydrodynamiska koefficienterna, som beräkningarna gett upphov till. Frekvensparametern skiljer sig något mellan de olika tabellerna, men i princip varierar den från 6000 till 14000. Lagerfriktionskoefficienten har sorten kg/s.

Frekvens (rad/s)	Amplitud (mm)	Lagerfriktionskoefficient	Frekvensparameter ( $\beta$ )	Keulegan-Carpenter-talet (KC)	Reynolds tal (Re)	$C_D$	$C_m$
3.676	12	7	5828	0.754	4394	11.91	1.67
3.908	12	7	6195	0.754	4671	14.73	1.46
4.141	12	7	6564	0.754	4949	15.28	1.64
4.448	12	6.5	7052	0.754	5317	10.57	1.43
4.675	12	6.5	7410	0.754	5587	14.09	1.69
5.674	12	3.2	8994	0.754	6781	9.98	1.43
6.283	12	2.3	9960	0.754	7510	7.96	1.28
7.358	12	2	11663	0.754	8794	5.48	1.21
8.972	12	1.5	14223	0.754	10724	-	-

Tabell 7.1. Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 12 mm, KC = 0.754.

Frekvens (rad/s)	Amplitud (mm)	Lagerfriktionskoefficient	Frekvensparameter ( $\beta$ )	Keulegan-Carpenter-talet (KC)	Reynolds tal (Re)	$C_D$	$C_m$
3.525	25	7	5588	1.571	8779	15.23	2.13
3.833	25	7	6076	1.571	9545	11.23	1.88
4.141	25	7	6564	1.571	10312	8.00	1.63
4.448	25	6.5	7052	1.571	11079	13.77	1.84
4.599	25	6.5	7291	1.571	11454	8.41	1.63
5.674	25	3.2	8994	1.571	14130	11.19	1.70
6.283	25	2.3	9960	1.571	15647	8.98	1.44
7.358	25	2	11663	1.571	18323	5.99	1.71
8.972	25	1.5	14223	1.571	22344	13.40	1.17

Tabell 7.1. Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 25 mm, KC = 1.571.

Frekvens (rad/s)	Amplitud (mm)	Lagerfriktionskoefficient	Frekvensparameter ( $\beta$ )	Keulegan-Carpenter-talet (KC)	Reynolds tal (Re)	$C_D$	$C_m$
3.676	36	7	5828	2.262	13181	9.79	2.06
3.833	36	7	6076	2.262	13744	9.85	1.96
4.141	36	7	6564	2.262	14848	9.88	1.92
4.448	36	6.5	7052	2.262	15956	9.23	1.82
4.675	36	6.5	7410	2.262	16761	8.55	1.70
5.674	36	3.2	8994	2.262	20344	8.69	1.69
6.283	36	2.3	9960	2.262	22530	8.61	1.61
7.358	36	2	11663	2.262	26382	9.42	1.70
8.897	36	2	14104	2.262	31903	11.17	1.26
9.965	36	1.5	15797	2.262	35733	10.70	1.36

Tabell 7.1. Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 36 mm, KC = 2.262.

Frekvens (rad/s)	Amplitud (mm)	Lager-friktions-koefficient	Frekvens-parameter ( $\beta$ )	Keulegan-Carpenter-talet (KC)	Reynolds tal (Re)	$C_D$	$C_m$
3.676	48	7	5828	3.016	17574	8.88	2.44
3.908	48	7	6195	3.016	18684	8.90	2.42
4.141	48	6.5	6564	3.016	19797	8.80	2.31
4.448	48	5	7052	3.016	21269	8.05	2.15
4.599	48	4	7410	3.016	21990	9.04	2.29
5.674	48	2	8994	3.016	27126	8.70	2.16
6.283	48	1.5	9960	3.016	30039	7.79	2.06
7.358	48	1.5	11663	3.016	35176	7.60	1.97
8.897	48	1.5	14223	3.016	42538	12.79	0.98

Tabell 7.1. Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 48 mm,  $KC = 3.016$ .

Frekvens (rad/s)	Amplitud (mm)	Lager-friktions-koefficient	Frekvens-parameter ( $\beta$ )	Keulegan-Carpenter-talet (KC)	Reynolds tal (Re)	$C_D$	$C_m$
3.676	55	7	5828	3.456	20141	8.16	2.66
3.908	55	7	6195	3.456	21410	7.33	2.57
4.141	55	6.5	6564	3.456	22685	8.50	2.54
4.448	55	5	7052	3.456	24372	7.90	2.32
4.675	55	4	7410	3.456	25609	8.43	2.44
5.674	55	2	8994	3.456	31083	7.91	2.28
6.283	55	1.5	9960	3.456	34422	7.62	2.25
7.282	55	1.5	11544	3.456	39896	7.78	2.16
8.879	55	1.5	14104	3.456	48743	7.60	2.15

Tabell 7.1. Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 55 mm,  $KC = 3.456$ .

Frekvens (rad/s)	Amplitud (mm)	Lager-friktions-koefficient	Frekvens-parameter ( $\beta$ )	Keulegan-Carpenter-talet (KC)	Reynolds tal (Re)	$C_D$	$C_m$
3.833	61	7	6076	3.833	23289	7.43	2.60
4.141	61	6.5	6564	3.833	25160	7.55	2.48
4.291	61	5	6803	3.833	26076	7.82	2.65
4.599	61	4	7291	3.833	27946	7.09	2.49
5.674	61	2	8994	3.833	34474	7.13	2.42
6.283	61	1.5	9960	3.833	38177	7.15	2.38
7.358	61	1.5	11663	3.833	44704	6.89	2.40
8.897	61	1.5	14104	3.833	54061	7.43	2.35

Tabell 7.1. Hydrodynamiska koefficienter. Amplitud 61 mm,  $KC = 3.833$ .

## 8. Slutsatser och förslag till fortsatt arbete

Arbetet har mynnat ut i numeriska och experimentella beräkningar av de hydrodynamiska koefficienterna  $C_D$  och  $C_M$ . Den numeriska modellen som framtagits har dock sina brister och erhållna resultat visar ej tillfredsställande överensstämmelse med referenslitteraturen. Vidare arbete ligger i att vidareutveckla modellen och bör fokuseras på följande problem:

- I FIDAP 7.0 modelleras väggeffekter genom speciella "väggfunktioner" appliceras på elementlagret närmast väggen (se kapitel 3.6). Svårigheten i de oscillerande simuleringarna är att hastigheten, och därmed tjockleken på gränsskiktet, som skall rymmas i det innersta elementlagret, varierar med tiden. I detta arbetet har intresset fokuserats på krafterna på plattan, varför det varit angeläget att ha ett tätt elementnät närmast plattan, samtidigt som hastigheterna stundtals varit mycket låga och därmed ställt krav på ett glesare elementnät normalt plattan. Frågan är hur ett elementnät bör utformas som tillfredsställer båda ovanstående krav.
- En noggrann inställning av upwindingsparametern bör göras. Rätt använd motverkar den exakt de numeriska problem som uppkommer vid användning av Galerkins metod (se kapitel 4.3), annars kan den resultera i att strömningen blir överdiffusiv.
- Trycksvängningarna i tiden bör utredas; orsak och åtgärder. Mycket märkliga trycknivåer har dessutom förekommit vid ett flertal simuleringar, och generellt bör mer arbete läggas på att kartlägga trycket som frihetsgrad och hur FIDAP 7.0 behandlar det i ekvationerna.

## 9. Referenser

- Nämnden för energiproduktionsforskning (1981). *Akvatisk energi - resultat, utvecklingsläge och förutsättningar*. Resultatrapport NE 1981:16. Stockholm: Liber Tryck.
- Svensk Energiförsörjning (1993). *Tema energi, overheadpaket*. Stockholm.
- An assessment of the state of art, technical perspectives and potential market for wave energy. For the Commission of the European Communities Directorate Generale XVII for energy. Oxfordshire: ETSU, Harwell Laboratory, Amadora: CCE.
- Bergdahl, L. (1987). *Kompendium i vågor och vågkrafter*. Göteborg: Chalmers Tekniska Högskola, Inst. för Vattenbyggnad.
- Berggren, L. (1992). *Energy take-out from a wave energy device. A theoretical study of the hydrodynamics of a two-body problem consisting of a buoy and a submerged plate*. Report Series A:23. Göteborg: Chalmers Tekniska Högskola, Inst. för Vattenbyggnad. ISSN 0348-1050.
- Berggren, L. (1995). *Time-domain simulation of a single wave energy converter*. 2nd European wave energy symposium, Lisabon.
- Brater, E.F., McNown, J.S. & Stair, L.D. (1958). Wave forces on submerged structures. *Jour. Hyd. Div. ASCE, Paper 1833*, **84**, HY6
- Morison, J.R., O'Brien, M.P., Johnson, J.W. & Schaaf, S.A. (1950). The force exerted by surface waves on piles. *Pet. Trans.*, **189**, 149-154.
- Sarpkaya, T. & Isaacson, M. (1981). *Mechanics of wave forces on offshore structures*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.
- Faltinsen, O.M. (1990). *Sea loads on ships and structures*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hoerner, S.F. (1965). *Fluid-dynamic drag. Theoretical, experimental and statistical information*. Albuquerque: Hoerner Fluid Dynamics.
- Nordisk ministerråd (1984). *Vågenergiteknik. Problemområden inom vågenergitekniken*. Helsingfors: Statens tryckericentral. ISBN 87-88217-26-4.
- Keulegan, G.H. & Carpenter, L.H. (1958). Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **60**, 5, 423-440.
- Mörtstedt, S.-E. & Hellsten, G. (1991). *Data och Diagram. Energi- och kemitekniska tabeller*. Stockholm: Esselte Studium AB. ISBN-91-24-34197-5.
- Dennis, S.C.R., Qiang W., Coutanceau, M. & Launay, J.-L. (1993). Viscous flow normal to a flat plate at moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, **248**, 605-635.

- Ingham, D.B. & Tang, T. (1991). Steady two-dimensional flow past a normal flat plate. *Jour. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP)*, **42**, 584.
- Tamaddon-Jahromi, H.R., Townsend, P. & Webster M. F. (1994). Unsteady viscous flow past a flat plate orthogonal to the flow. *Computers and Fluids*, **23**, 2, 433-446.
- Törnkvist, R.T. (1976). Havets vågor. *Teknisk tidskrift*, **1-2**.
- White, F.M. (1988). *Fluid Mechanics*. New York: McGraw-Hill.
- White, F.M. (1991). *Viscous fluid flow*. New York: McGraw-Hill.
- Regnström, B. (1991). *Numerical simulation of the Karmàn vortex street behind a rectangular object*. Göteborg: Chalmers Tekniska Högskola, Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Division of Hydromechanics. ISBN 91-7032-574-X.
- Sundén, B. (1988). *Kompendium i värmeöverföring*. Publ. nr 88/7. Göteborg: Chalmers Tekniska högskola, Inst. för Tillämpad Termodynamik och Strömningslära.
- Hoffman, K.A. & Chiang, S.T. (1993). *Computational fluid dynamics for engineers - volume I*. Wichita: Engineering Education System.
- Lauder, B.E. & Spalding, D.B. (1974). The numerical computation of turbulent flow. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, **3**, 269.
- Chen, Y.S. & Kim, S.W. (1987). Computation of turbulent flows using an extended k- $\epsilon$ -turbulence closure model. NASA CR-179204.
- Higuchi, H. & Balligand, H. (1992). *Development of vortex structure behind a circular disk*. IUTAM symposium Göttingen, Germany: Bluff-body wakes, dynamics and instabilities. 55-58.
- Rodi, W. (1984). *Turbulence models and their application in hydraulics - a state of the art review*. Delft: International Association for Hydraulic Research.
- Lankhorst, A.M. (1991). *Laminar and turbulent natural convection in cavities. Numerical modeling and experimental validation*. tekn. doktorsavhandling. Delft: Technische Universiteit Delft, Faculteit der Technische Natuurkunde, subgroep Warmetransport.
- FIDAP 7.0 theory manual (1993). Evanston: Fluid Dynamics International, Inc. (FDI).
- Schlichting, H. (1955). *Boundary layer theory*. London: Pergamon press.
- Zienkiewics, O.C. & Taylor, R.L. (1989). *The Finite Element Method. Volume 1. Basic formulation and linear problems*. London: McGraw-Hill Book Company.
- Zienkiewics, O.C. & Taylor, R.L. (1991). *The Finite Element Method. Volume 2. Solid and fluid mechanics. Dynamics and non-linearity*. London: McGraw-Hill Book Company.



Panton, R.L. (1984). *Incompressible flow*. New York: John Wiley & Sons.

Okajima, A. & Kitajima, K. (1993). Numerical study on aeroelastic instability of cylinders with a circular and rectangular cross-section. *Jour. of Wind Eng. and Ind. Aerodynamics*, **46** & **47**, 541-550.

Pattani, P.G. & Olson, M.D. (1988). Forces on oscillating bodies in viscous fluid. *Int. Jour. for Num. Meth in Fluids*, **8**, 519-536.

## Appendix A. Kort introduktion till tensornotation

Det är ofta praktiskt att skriva ekvationer med tensornotation då de kan skrivas på en avsevärt kompaktare form än om de skrivs på konventionell form. Här ges en kort introduktion till cartesisk tensorformalism.

I kartesisk tensornotation skrivs vektorer med ett vidhäftat index som representerar de olika förekommande dimensionerna, t.ex.

$$\text{rymdvektor i tre dimensioner} \quad \mathbf{x}_i = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{hastighetsvektor i tre dimensioner} \quad \mathbf{u}_i = (u_1, u_2, u_3)$$

Vektorns tre komponenter i ett cartesiskt system fås genom att sätta index (här  $i$ ) till 1, 2 respektive 3.

En variabel med 2 index (t.ex.  $i$  och  $j$ ) kallas tensor och har i det tredimensionella fallet 9 element, vilka erhålls som samtliga permutationer av indexkombinationen  $ij$  där  $i$  och  $j$  tillåts variera mellan 1 och 3:

$$\mathbf{u}_{ij} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Spänningstensorn  $\tau_{ij}$  som förekommer i impulekvationen är en typisk sådan. Elementvisa produkten mellan två vektorer ger också en tensor:

$$\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3 u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Reynolds spänningstensor är exempel på en sådan. En speciell tensor är Kroneckers delta  $\delta_{ij}$  som har komponenterna

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

dvs  $\delta_{ij}=1$  om  $i=j$  och  $\delta_{ij}=0$  om  $i \neq j$ .

Ytterligare en aspekt på tensornotation, som är särskilt effektiv då det gäller att reducera längden på ekvationer, återstår att förklara. Det är additionsregeln, som säger att om ett index förekommer på två ställen i samma term, måste summation ske över alla dimensioner, alltså

$$\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i = u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 \quad (\text{A.4})$$

Detta gäller givetvis även derivationsuttryck och exempelvis kontinuitetsekvationen kan skrivas på detta vis med tensornotation

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

För de advektiva termerna i impulsekvationen gäller detsamma

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}$$

I appendix C har en något annorlunda variant av tensornotation, som kan göra skrivsättet än mer kompakt, använts. Istället för att skriva en partiell rumsderivata med bråkstreck, används istället ett kommatecken och därefter ett index. Om man t.ex. vill skriva (partiella) derivatan av  $u_i$  med avseende på rumskoordinaten  $x_j$  så blir den med vanlig indexnotation:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Den i appendix C använda formalismen ger istället

$$u_{i,j}$$

Ett kommatecken med index  $j$  efter betyder alltså rumsderivation med avseende på riktning  $j$ .

## Appendix B. Härledning av dimensionslösa styrande ekvationer för turbulent flöde i 2D.

### B.1. Inledning

Nedan ges härledningar för turbulenta ekvationer på dimensionslös form. De variabler som betecknas med gemena bokstäver, med eller utan asterisk, skall betraktas som tidsmedelvärden av dimensionella respektive icke-dimensionella storheter. Samtliga variabler som ingår i ekvationssystemet för ett turbulent flöde (k-epsilon modellen) görs dimensionslösa enligt

$$\begin{aligned}x_1^* &= \frac{x_1}{D} \quad , \quad x_2^* = \frac{x_2}{D} \quad , \quad u_1^* = \frac{u_1}{U_\infty} \quad , \quad u_2^* = \frac{u_2}{U_\infty} \quad , \quad p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2} \quad , \quad t^* = \frac{U_\infty t}{D} \\k^* &= \frac{k}{U_\infty} \quad , \quad \varepsilon^* = \frac{D}{U_\infty^3} \varepsilon \quad , \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{\mu_t}{\mu_0} \quad , \quad \mu_t^* = \frac{\mu_t}{\rho U_\infty D} \quad , \quad \Phi^* = \frac{D^2}{U_\infty^2} \Phi\end{aligned}\tag{B.1}$$

som är det sätt som föreslås i FIDAP-manualen. Här gäller att

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_0 + \mu_t \\ \mu_t &= \rho c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}\end{aligned}\tag{B.2}$$

Vid härledningen av de dimensionslösa styrande ekvationerna har ej indexnotation använts, utan längder och hastigheter har angivits med i dessa sammanhang gängse beteckningar, det vill säga

$$\begin{aligned}x_1 &= x \quad , \quad x_2 = y \\ u_1 &= u \quad , \quad u_2 = v\end{aligned}\tag{B.3}$$

### B.2. Kontinuitetsekvationen

På dimensionsform skrivs den inkompressibla kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\tag{B.4}$$

Introduceras definitionen av de dimensionslösa variablerna erhålls

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^*} (u^* U_\infty) \frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{U_\infty}{D}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y^*} (v^* U_\infty) \frac{\partial y^*}{\partial y} = \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \frac{U_\infty}{D}$$

Och den dimensionslösa kontinuitetsekvationen blir

$$\frac{U_\infty}{D} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{B.5})$$

### B.3. Impulsekvationen

Impulsekvationen i x-riktningen (med dimensioner):

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \quad (\text{B.6})$$

Med ovan definierade dimensionslösa variabler fås

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^*}{\partial t^*} \frac{U_\infty^2}{D} \quad , \quad u \frac{\partial u}{\partial x} = u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{U_\infty^2}{D} \quad , \quad v \frac{\partial u}{\partial y} = v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \frac{U_\infty^2}{D} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \frac{\rho U_\infty^2}{D}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x^*} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{D} + \mu \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{1}{D} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \mu_0 + \rho c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{U_\infty}{D^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\partial}{\partial x} (u^* U_\infty) \right) \frac{1}{D} \left( \mu_0 + \rho c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \right) = \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \rho c_\mu \frac{(k^* U_\infty^2)^2}{U_\infty^3 \epsilon^*} D \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{U_\infty}{D^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) \frac{U_\infty}{D^2} \left( \mu_0 + \rho c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \right) = \rho c_\mu \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{k^{*2}}{\epsilon^*} \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{U_\infty^2}{D} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \left( \mu_0 + \rho c_\mu \frac{(k^* U_\infty^2)^2}{U_\infty^3 \epsilon^*} D \right) \frac{U_\infty}{D^2} = \end{aligned}$$

$$= \left\{ \mu_t^* = \frac{\rho c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}}{\rho U_\infty D} = c_\mu \frac{k^{*2}}{\epsilon^*} \right\} = \rho c_\mu \frac{\partial \mu_t^*}{\partial x^*} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{U_\infty^2}{D} + \frac{U_\infty}{D^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \underbrace{\left( \mu_0 + \rho U D \mu_t^* \right)}_{\mu_0 \mu^*}$$

På samma sätt fås för övriga gradienter i högerledet:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \dots = \rho \frac{\partial \mu_t^*}{\partial y^*} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \frac{U_\infty^2}{D} + \frac{U_\infty}{D^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \mu_0 \mu^*$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \dots = \rho \frac{\partial \mu_t^*}{\partial y^*} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \frac{U_\infty^2}{D} + \frac{U_\infty}{D^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} \mu_0 \mu^*$$

Ekvationen (B.6) kan nu skrivas på dimensionslös form:

$$\begin{aligned} \frac{\rho U_\infty^2}{D} \left( \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) &= -\frac{\rho U_\infty^2}{D} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + 2 \frac{\rho U_\infty^2}{D} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{\partial \mu_t^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty}{D^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \mu_0 \mu^* + \\ &+ \frac{\rho U_\infty^2}{D} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \frac{\partial \mu_t^*}{\partial y^*} + \frac{U_\infty}{D^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \mu_0 \mu^* + \frac{\rho U_\infty^2}{D} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \frac{\partial \mu_t^*}{\partial y^*} + \frac{U_\infty}{D^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial y^*} \mu_0 \mu^* \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{\partial \mu_t^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \mu^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \frac{\partial \mu_t^*}{\partial y^*} + \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \mu^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \frac{\partial \mu_t^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \mu^* \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} \end{aligned}$$

$$\text{Men } \mu_t = \mu_0 (\mu^* - 1) \text{ och } \mu_t^* = \frac{\mu_t}{\rho U_\infty D} = \frac{1}{\text{Re}} (\mu^* - 1) \Rightarrow \frac{\partial \mu_t^*}{\partial x^*} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \mu^*}{\partial x^*}$$

Slutligen fås alltså den dimensionslösa impulsekvationen i x-led:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^*} \left( 2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \mu^* \left( \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \right] \quad (\text{B.7})$$

Impulsekvationen i y-led härleds analogt och blir på dimensionslös form:

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial}{\partial y^*} \left( 2\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \mu^* \left( \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) \right] \quad (\text{B.8})$$

Sambandet mellan impulsekvationerna på dimensions- respektive dimensionslös form är alltså att om densiteten sätts till konstant=1, kommer den dynamiska molekylära viskositeten  $\mu_0$  att svara direkt mot inversen av Reynolds-talet. Impulsekvationerna har således bara en styrande parameter, nämligen Re. Det bör dock tilläggas att genom att sätta randvillkor på

dimensionslösa turbulenta kinetiska energin och dissipationen, kommer dessa in i impulsekvationen via sambandet  $\mu_t^* = c_\mu k^{*2} / \epsilon^*$ . Däremot i det laminära fallet, då transportekvationerna för  $k$  och  $\epsilon$  utgår, skulle Reynolds-talet vara den enda parametern som krävs för att karakterisera strömningen.

De tidigare definierade dimensionslösa talen  $\beta$  och  $KC$ , som är signifikanta för ett oscillerande flöde, dyker inte upp i dessa ekvationer, som visats i kapitel 3.5, till följd av en användarbegränsning i programvaran.

#### B.4. Transportekvationen för turbulent kinetisk energi, $k$

$k$ -ekvationen på dimensionsform:

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \left( \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \left( \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \right) \right) + \mu_t \Phi - \rho \epsilon \quad (B.9)$$

De ingående termerna görs dimensionslösa

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t^*} (k^* U_\infty^2) \frac{U_\infty}{D} = \frac{\partial k^*}{\partial t^*} \frac{U_\infty^3}{D}$$

$$u \frac{\partial k}{\partial x} = u^* U_\infty \frac{\partial k}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} = u^* \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \frac{U_\infty^3}{D}, \quad v \frac{\partial k}{\partial y} = v^* U_\infty \frac{\partial k}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y} = v^* \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \frac{U_\infty^3}{D}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \left( \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho U_\infty D \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \left( \frac{U_\infty^2}{D} \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty^2}{D} \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \left( \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right) \right) \frac{\rho U_\infty^3}{D}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \left( \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \right) \right) = \dots = \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \left( \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right) \right) \frac{\rho U_\infty^3}{D}$$

$$\rho \epsilon = \frac{\rho U_\infty^3}{D} \epsilon^*$$

$$\mu_t \Phi = \rho U_\infty L \mu_t^* \frac{U_\infty^2}{D^2} \Phi^* = \frac{\rho U_\infty^3}{D} \mu_t^* \Phi^*$$

Sambanden sätts in i (B.9) och båda leden divideras med  $\frac{\rho U_\infty^3}{D}$ :

$$\frac{\partial k^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial k^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \left( \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \left( \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right) \right) + \mu_t^* \Phi^* - \varepsilon^* \quad (\text{B.10})$$

### B.5. Transportekvationen för dissipationen $\varepsilon$

På dimensionsform skrivs dissipationsekvationen:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right) + c_1 \left( \frac{\varepsilon}{k} \right) \mu_t \Phi - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{B.11})$$

De ingående termerna görs dimensionslösa enligt föreskrivna definitioner:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t^*} \left( \frac{U_\infty^3}{D} \varepsilon^* \right) \frac{U_\infty}{D} = \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t^*} \frac{U_\infty^4}{D^2}$$

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = u^* U_\infty \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{U_\infty^3}{D} \varepsilon^* \right) \frac{1}{D} = u^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} \frac{U_\infty^4}{D^2}$$

$$v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = v^* U_\infty \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \frac{U_\infty^3}{D} \varepsilon^* \right) \frac{1}{D} = v^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \frac{U_\infty^4}{D^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho U_\infty L \mu_t}{\sigma_\varepsilon} \left( \frac{U_\infty^3}{D^2} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty^3}{D^2} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right) \right) = \frac{\rho}{\sigma_\varepsilon} \frac{U_\infty^4}{D^2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \mu_t \left( \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right) = \dots = \frac{\rho}{\sigma_\varepsilon} \frac{U_\infty^4}{D^2} \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \mu_t \left( \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right) \right)$$

$$c_1 \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \Phi = c_1 \frac{U_\infty^3}{D} \varepsilon^* \frac{1}{U_\infty^2 k^*} \rho U_\infty D \mu_t \frac{U_\infty^2}{D^2} \Phi^* = c_1 \rho \frac{U_\infty^4}{D^2} \frac{\varepsilon^*}{k^*} \mu_t \Phi^*$$

$$\rho c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} = \rho c_2 \frac{U_\infty^6}{D^2} \varepsilon^{*2} \frac{1}{k^* U_\infty^2} = \rho \frac{U_\infty^4}{D^2} c_2 \frac{\varepsilon^{*2}}{k^*}$$

Sätt in sambanden i (B.11) och dividera båda leden med  $\rho \frac{U_\infty^4}{L^2}$ :



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} &= \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} \right) \right) + \\
+c_1 \frac{\varepsilon^*}{k^*} \mu_t^* \Phi^* - c_2 \frac{\varepsilon^{*2}}{k^*}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

## Appendix C, FEM-uppställning av Reynolds ekvationer i 2D

### C.1. Allmänt

Varje element har för det tvådimensionella fallet fem frihetsgrader;  $u_1, u_2, p, k$  och  $\epsilon$ .

I härledningen betraktas först fallet laminär strömning utan turbulensmodell, därefter förs  $k$  och  $\epsilon$  - ekvationerna in i ekvationssystemet som då övergår i att beskriva turbulent strömning. För att åskådliggöra ekvationerna ytterliggare skrivs impulsekvationen i  $x_1$ -riktningen ut fullständigt, motsvarande ekvation i riktning  $x_2$  är fullständigt analog men tas inte med explicit.

### C.2. Föresättningar

- Inkompressibel isotherm strömning
- $k$ - $\epsilon$  modell används för att turbulensmodellering
- diskontinuerlig mixing length modell för trycket
- kvadratiska element med linjära basfunktioner för hastigheterna och konstanta basfunktioner för trycket

### C.3. Reynolds ekvationer i 2D

$$u_{j,j} = 0 \quad (\text{kontinuitetsekvationen})$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right] = -p_{,i} + \left[ \mu_0 (u_{i,j} + u_{j,i}) - \overline{\rho u_i u_j} \right]_{,j} \quad (\text{impulsekvationen})$$

$$\rho \left[ \frac{\partial k}{\partial t} + u_j k_{,j} \right] = \left[ \mu_0 + \frac{\mu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right]_{,j} + \mu_t \phi - \rho \epsilon \quad (\text{k-ekvationen})$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_j \epsilon_{,j} \right]_{,j} = \left[ \mu_0 + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \epsilon_{,j} \right]_{,j} + c_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t \phi - \rho c_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (\text{\epsilon-ekvationen})$$

$$\phi = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$\sigma_k = 1,00$	$\sigma_\epsilon = 1,30$	$c_1 = 1,44$	$c_2 = 1,92$	$c_\mu = 0,09$
-------------------	--------------------------	--------------	--------------	----------------

#### C.4. Eddy viscosity concept

$$\mu = \mu_0 + \mu_t$$

$$\mu_t = \rho c_m \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t (u_{i,j} + u_{j,i}) - \rho \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

#### C.5. FEM-formulering för laminär strömning

För varje element gäller:

$$u_i(x_i, t) = \Phi^T U_i(t)$$

$$p(x_i, t) = \Psi^T P(t)$$

där  $\Phi$  respektive  $\Psi$  är basfunktioner,  $U_i$  respektive  $P$  de obekanta nodstorheterna samt  $u_i$  och  $p$  de kontinuerliga variablerna för hastighet och tryck. I FIDAP används alltid identiska basfunktioner för alla hastighetskomponenter, men de behöver inte vara desamma som de för trycket varför de tilldelats olika namn (FIDAP 7.0 theory manual).

Impulsekvationen och kontinuitetsekvationen får nu följande utseende:

$$\rho \Phi^T \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} U_i + \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} P - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} U_i + \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_i} U_j \right) \right] = R$$

(C.1)

$$\frac{\partial \Phi^T}{\partial u_j} U_j = R \quad (C.2)$$

Residualen minimeras enligt Galerkins metod genom multiplikation med en serie viktsfunktioner  $\xi$  och integrering över området  $V$ .

$$\int_V \xi R dV = 0 \quad (C.3)$$

$\xi = \Phi$  i impulsekvationen

$\xi = \Psi$  i kontinuitetsekvationen

Att sätta viktsfunktionen till  $\psi$  istället för  $\Phi$  i kontinuitetsekvationen ger ett snällare ekvationssystem att lösa på grund av att det ger ett färre antal olika integraler att evaluera.

(C.3) i (C.1) och (C.2) ger

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_S \rho \Phi \Phi^T dS \right] \frac{\partial U_i}{\partial t} + \left[ \int_S \rho \Phi u_j \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS \right] U_i + \left[ \int_S \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} dS \right] P \\
& - \left[ \int_S \mu_0 \Phi \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS \right] U_i - \left[ \int_S \mu_0 \Phi \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_i} dS \right] U_j = 0
\end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\left[ \int_s \Psi \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS \right] U_j = 0 \tag{C.5}$$

De sista två termerna i (C.4) innehåller 2:a ordningens partiella derivator av basfunktionerna  $\Phi$ . Dessa är dock enligt förutsättningarna linjära och har därmed 2:a-derivatan 0 eller ingen definierad 2:a-derivata. För att lösa detta partialintegreras termerna vilket kommer att ge två nya ytintegraler och två randintegraler som bara innehåller 1:a ordningens derivator. Även trycktermen i (C.4) partialintegreras för att få integralen på samma form som den i kontinuitetsekvationen (C.5).

Partialintegrering av de två sista termerna i (C.4) riktningen  $x_1$ :

$$\begin{aligned}
& - \left[ \left( \int_s \mu_0 \Phi \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_1} dS \right) + \left( \int_s \mu_0 \Phi \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_2} dS \right) \right] U_1 \\
& - \left[ \left( \int_s \mu_0 \Phi \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_1} dS \right) U_1 + \left( \int_s \mu_0 \Phi \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_1} dS \right) U_2 \right] \\
& \Leftrightarrow \\
& - \left[ \left( \int_r \mu_0 \Phi \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_1} d\Gamma \right) - \left( \int_s \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_1} dS \right) + \left( \int_r \mu_0 \Phi \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_2} d\Gamma \right) - \left( \int_s \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_2} dS \right) \right] U_1 \\
& - \left[ \left( \int_r \mu_0 \Phi \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_1} d\Gamma \right) - \left( \int_s \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_1} dS \right) \right] U_1 - \left[ \left( \int_r \mu_0 \Phi \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_1} d\Gamma \right) - \left( \int_s \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_1} dS \right) \right] U_2
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Partialintegrering av trycket i impulsekvationen i riktningen  $x_1$

$$\left[ \int_s \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_1} dS \right] P = \left[ \int_r \Phi \Psi^T d\Gamma \right] P - \left[ \int_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \Psi^T dS \right] P \tag{C.7}$$

(C.6) och (C.7) sätts nu in i (C.4) och i randintegralerna substitueras  $\Phi U_i(t)$  och  $\Psi P(t)$  tillbaka mot de kontinuerliga funktionerna  $u_i(x_i, t)$  och  $p(x_i, t)$ , vilket ger den slutliga uppställningen av impulsekvationen (C.8).

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_S \rho \Phi \Phi^T dS \right] \frac{\partial U_i}{\partial t} + \left[ \int_S \rho \Phi u_j \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS \right] U_i + \left[ \int_S \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} dS \right] P - \left[ \int_S \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS \right] U_i \\
& - \left[ \int_S \bar{\mu}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_i} dS \right] U_j = \left[ \int_r \mu_0 \Phi \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Gamma \right] + \left[ \int_r \mu_0 \Phi \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\Gamma \right] - \left[ \int_r \Phi p d\Gamma \right]
\end{aligned} \tag{C.8}$$

I vänsterledet finns nu bara yntegraler och i högerledet finns lasten i form av randintegraler. Problemet är således ett randvärdesproblem i rummet och randvillkor måste ges för antingen de obekanta hastigheterna och trycken eller hastighetsgradienterna och trycken för att ekvationerna skall kunna lösas. Om inte dessa randvillkor ges fullständigt sätter FIDAP randvillkoret att summan av randtermerna är lika med noll, ZEROFLUX. Om man studerar lasttermerna ser man att de är en del av Reynolds spänningstensor  $\sigma_{ij}$ , i impulsekvationen i  $x_1$ -riktningen ingår randspänningarna i  $x_1$ -riktningen och analogt för impulsekvationen i  $x_2$ -riktningen ingår randspänningarna i  $x_2$ -riktningen. På matrisform ser ekvationssystemet ut som följer;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial t} \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{12} & -\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{11} + 2\mathbf{K}_{22} & -\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{C}_1^T & -\mathbf{C}_2^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ P \end{bmatrix} + \tag{C.9}$$

$$\begin{bmatrix} \sum A_i(u_j) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum A_i(u_j) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \int_s \rho \Phi \Phi^T dS \\ \mathbf{K}_{ij} = \int_s \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_i} dS \\ \mathbf{C}_i = \int_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Psi^T dS \\ A_i(u_j) = \int_s \rho \Phi u_j \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_i} dS \\ \mathbf{F}_i = \int_r \sigma_i \Phi d\Gamma \end{cases}$$

I matriserna har olinjära och linjära termer ställts upp var för sig; för laminär strömning dominerar således de linjära termerna. Här ser man också fördelen med att sätta

viktsfunktionen till  $\psi$  i kontinuitetsekvationen samt partialintegreringen av trycket i impulsekvationen; fyra istället för fem olika integraler skall evalueras i och med att C ingår i både impulsekvationen och kontinuitetsekvationen.

### Införande av transportekvationerna för $k$ och $\epsilon$

Varje element får ytterligare två frihetsgrader:

$$k(x_i, t) = \Phi^T K(t)$$

$$\epsilon(x_i, t) = \Phi^T E(t)$$

där  $k$  representerar turbulent kinetisk energi och  $\epsilon$  visös dissipation och  $\Phi$  är samma uppsättning basfunktioner som de som används för hastigheterna. Det nya ekvationssystemet består av fem ekvationer och fem obekanta. Kontinuitetsekvationen ser ut som för det laminära fallet, men impulsekvationerna ändrar sig i och med införandet av den turbulenta viskositeten,  $\mu_t$ . De nya ekvationerna utgörs av transportekvationer för  $k$  och  $\epsilon$ .

En diskretisering av  $k$  -och  $\epsilon$ -ekvationen, samt impulsekvationen ger följande resultat:

$$\rho \Phi^T \frac{\partial K}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} K - \frac{\partial \mu_0}{\partial x_j} - \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} K - \mu_t \phi + \rho \frac{\epsilon}{k} \Phi^T K = R \quad (C.10)$$

$$\rho \Phi^T \frac{\partial E}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} E - \frac{\partial \mu_0}{\partial x_j} - \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} E - c_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t \phi + \rho c_2 \frac{\epsilon}{k} \Phi^T E = R \quad (C.11)$$

$$\rho \Phi^T \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} U_i + \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} P - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu_0 + \mu_t) \left( \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} U_i + \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_i} U_j \right) \right] = R \quad (C.12)$$

Dessa ekvationer är inte fullständiga, om man jämför impulsekvationen C.10 med Eddy viscosity concept så saknas termen  $-\rho 2/3 k \delta_{ij}$ . Den läggs ihop med trycket så att trycket som erhålls i lösningen är egentligen  $p+2/3k$  (FIDAP turbulence seminar notes). I de flesta fall är dock tryckets magnitud flera tiopotenser högre än den kinetiska energins varför dess bidrag till trycket oftast kan försummas, ingen hänsyn har tagits i de beräkningar som utförts i det här arbetet.

Efter residualminimerin enligt Galerkin, samt partialintegrering av termerna som innehåller 2:a ordningens partiella derivator så övergår ekvationerna på följande form.

$$\left[ \int_S \rho \Phi \Phi^T dS \right] \frac{\partial K}{\partial t} + \left[ \int_S \rho \Phi u_j \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} \right] K - \left[ \int_S \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS \right] K + \left[ \int_S \rho \frac{\varepsilon}{k} \Phi \Phi^T dS \right] K = \int_S \Phi \mu_t \phi dS + \int_{\Gamma} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} d\Gamma \quad (C.13)$$

$$\left[ \int_S \rho \Phi \Phi^T dS \right] \frac{\partial E}{\partial t} + \left[ \int_S \rho \Phi u_j \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} \right] E - \left[ \int_S \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS \right] E + \left[ \int_S \rho c_2 \frac{\varepsilon}{k} \Phi \Phi^T dS \right] E = \int_S \Phi c_1 \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \phi dS + \int_{\Gamma} \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} d\Gamma \quad (C.14)$$

$$\left[ \int_S \rho \Phi \Phi^T dS \right] \frac{\partial U_i}{\partial t} + \left[ \int_S \rho \Phi u_j \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS \right] U_i + \left[ \int_S \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} dS \right] P - \left[ \int_S (\mu_0 + \mu_t) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS \right] U_i - \left[ \int_S (\mu_0 + \mu_t) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_i} dS \right] U_j = \left[ \int_{\Gamma} (\mu_0 + \mu_t) \Phi \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Gamma \right] + \left[ \int_{\Gamma} (\mu_0 + \mu_t) \Phi \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\Gamma \right] - \left[ \int_{\Gamma} \Phi p d\Gamma \right] \quad (C.15)$$

Det bör observeras att detta är det sätt som FIDAP valt att FEM-formulera problemet på och det är inte det enda möjliga sättet. En matrisuppställning ger följande resultat.

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial t} \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial K}{\partial t} \\ \frac{\partial E}{\partial t} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \sum A_i(u_j) + 2D_{11} + D_{22} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & \sum A_i(u_j) + D_{11} + 2D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum A_i(u_j) + \frac{1}{\sigma_k}(B_{11} + B_{22}) + R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum A_i(u_j) + \frac{1}{\sigma_\epsilon}(B_{11} + B_{22}) + c_2 R \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ P \\ K \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_1^T & -c_2^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ P \\ K \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ S \\ T \end{bmatrix}$$

(C.16)

$$D_{ij} = \int_s (\mu_o + \mu_t) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS$$

$$B_{ij} = \int_s \mu_t \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x_j} dS$$

$$R = \int_s \rho \frac{\epsilon}{k} \Phi \Phi^T dS$$

$$S = \int_s \Phi \mu_t \phi dS + \int_\Gamma \Phi \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial n} d\Gamma$$

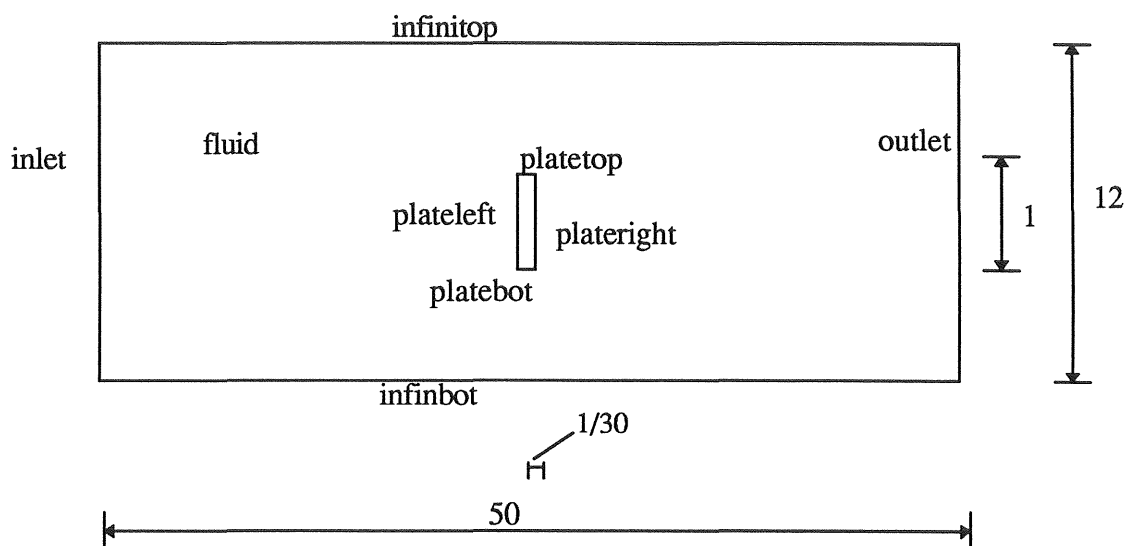
$$T = \int_s \Phi c_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t \phi dS + \int_\Gamma \Phi \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial n} d\Gamma$$

Precis som i den laminära uppställningen har de olinjära termerna separerats från de linjära och det visar sig att olineariteten har ökat markant och endast de termer som är associerade med trycket nu är linjära. Detta en av orsakerna till att problemet blir svårare att lösa för turbulent strömning och kräver ökad processortid för en numerisk lösning.



## Appendix D. Indatafil FIDAP 7.0

Indatafil för simulering av harmonisk oscillerande tvärströmning för en tunn platta i FIDAP 7.0. Beteckningar och geometri enligt figur D.1.



Figur D.1 Modell för oscillerande strömning, geometri och entiteter

/FIPREP( )

platta7.run37

```

DATAPRINT( ADD, CONT )          *** filhanteringsparameter
EXECUTION( ADD,NEWJ)           *** nytt problem/omstart?
OPTIONS( ADD, UPWI )           *** aktiverar upwinding
POSTPROCESS( ADD, NBLO = 1, NOPT, NOPA ) *** bestämmer utskriftstäthet
    1,      101,      10
PRINTOUT( ADD, NONE, BOUN )    *** filhanteringsparameter
PRESSURE(ADD,MIXED,DISC)       *** val av tryckmodell
PROBLEM( ADD, 2-D, INCO, TRAN, TURB, NONL, *** vilka ekv. ska lösas?
    NEWT, MOME, ISOT, FIXE, SING )
SOLUTION( ADD, SEGR = 15, PREC = 21, PPRO, ) *** lösningsalgoritm
BODYFORCE( CONST, FX = 2*3.141592654/0.5, *** masskraftsterm i
    CURVE = 4 )                *** impulsekvation?
TIMEINTEGRATION( ADD, TRAP, NSTE =101, *** val av tidsintegrator
    TSTA = 0., TEND = 1, DT =   och styrparametrar
    0.005, VARI, NOFI,         för denna
    DTMA = 0.02, INCM = 2 )
TIMEFUNCTION (ADD,SET=3, NPOINTS=31) *** tidsfunktion (sinus) som
    styr inflödet på randen,
    0      0      0.05   0.3090  0.1   periodtid: 1
    0.15   0.8090  0.2    0.9511  0.25 (t1 f1 t2 f2...)
    .....
    0.95   -0.3090  1      0
    .....
    1.45   0.3090  1.5    0
TIMEFUNCTION (ADD,SET=4,NPOINTS=31) *** tidsfunktion (cosinus)
    0      1      0.05   0.9511   som styr 'bodyforce'
    .....
RENUMBER( ADD, PROF )         *** automatisk optimal
                                elementnumrering
UPWINDING( ADD )              *** upwinding-styrparametrar
    1,      1,      0,      1
    0,      0,      1,      1
    0,      0,      0,      0
    0,      0,      0,      0
    0,      0,      0,      0
    0,      0,      0,      0
    0,      0,      0,      0
DENSITY( ADD, SET = 1, CONS = 1 ) *** densitet
VISCOSITY( ADD, SET = 1, CONS = 1/100000, *** densitet, turbulensmodell
    K.E., CLIP=10000000 )
ENTITY( ADD, NAME = "fluid", FLUI ) *** egenskaper hos entiteter
ENTITY( ADD, NAME = "plateleft", WALL )
ENTITY( ADD, NAME = "plateright", WALL )
ENTITY( ADD, NAME = "platetop", WALL )
ENTITY( ADD, NAME = "platebot", WALL )
ENTITY( ADD, NAME = "infinitem", PLOT )
```

```
ENTITY( ADD, NAME = "infinibot", PLOT )
ENTITY( ADD, NAME = "inlet", PLOT )
ENTITY( ADD, NAME = "outlet", PLOT )

BCNODE( ADD, UX, ENTI = "inlet", CONS = 1, CURVE=3 )    *** randvillkor
BCNODE( ADD, UY, ENTI = "inlet", ZERO )
BCNODE( ADD, KINE, ENTI = "inlet", CONS = 0.00001 )      (Dirichlet)
BCNODE( ADD, KINE, ENTI = "outlet", CONS = 0.00001 )
BCNODE( ADD, DISS, ENTI = "inlet", CONS = 9e-07 )
BCNODE( ADD, DISS, ENTI = "outlet", CONS = 9e-07 )
BCNODE( ADD, UY, ENTI = "infinibot", ZERO )
BCNODE( ADD, UY, ENTI = "infinibot", ZERO )
BCNODE( ADD, VELO, ENTI = "plateleft", ZERO, X, Y, Z )
BCNODE( ADD, VELO, ENTI = "platetop", ZERO, X, Y, Z )
BCNODE( ADD, VELO, ENTI = "platebot", ZERO, X, Y, Z )
BCNODE( ADD, VELO, ENTI = "plateright", ZERO, X, Y, Z )
BCNODE( ADD, UX, ENTI = "outlet", CONS = 1, CURVE = 1)
BCNODE( ADD, UY, ENTI = "outlet", ZERO )

ICNODE(ADD,KINE,CONS=0.00001,ALL)                        *** initialvillkor
ICNODE(ADD,DISS,CONS=2.25e-08,ALL)
```

