

EXAMENSARBETE I VATTENBYGGNAD

Anders Nilsson och Kenneth Nilsson redovisar sitt examensarbete

Strömning hos vågor runt en vertikal cylinder -
en experimentell och teoretisk studie

Tid: Fredag 24 januari 1986 kl 13.00

Plats: Seminarierum 2002
Sektion VoV
Sven Hultins gata 8

Alla intresserade är välkomna!

Göran Moberg



Institutionen för Vattenbyggnad
Chalmers Tekniska Högskola

Department of Hydraulics
Chalmers University of Technology

STRÖMNING HOS VÅGOR RUNT EN
VERTIKAL CYLINDER

En experimentell och teoretisk studie

Anders Nilsson

Kenneth Nilsson

Källangivelse följer på alla figurer

Examensarbete 1985:7

Göteborg 1985

Adress: Institutionen för Vattenbyggnad
Chalmers Tekniska Högskola
412 96 Göteborg

Telefon: 031/81 01 00

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	FÖRORD	
	SAMMANFATTNING	
1.	INTRODUKTION	1
1.1	Plant strömmande vatten med konstant hastighet	1
1.2	Plant oscillerande vatten	7
1.3	Problemformulering	11
2.	VÄGTEORI	12
2.1.1	Grundläggande begrepp	13
2.1.2	Partikelrörelser	15
2.1.3	Partikelhastigheter	16
2.2	Antaganden för vågor vid användandet av 2D-potentialströmningsteori	18
3.	2D-POTENTIALSTRÖMNINGSTEORI	20
3.1	Hastighetspotential för 2D-strömning	20
3.2	Strömningsfunktion för 2D-strömning	22
3.3	Strömningslinjer-Ekvipotentiallinjer	23
3.4	Hastighetsfördelning runt en vertikal fast fixerad cylinder enligt 2D-potentialströmningsteori	24
4.	LABORATORIEUNDERSÖKNING	30
4.1	Utrustning	30
4.1.1	Vattenränna-Cylinder	30
4.1.2	Utrustning för mätning av vattenhastigheter	31
4.2	Omfattning	32
4.2.1	Undersökta vågor	32
4.2.2	Mätpunkter och undersökta nivåer	34
4.3	Utförande	35
4.4	Mätförfarande	36
5.	RESULTAT	37
5.1	Strömningsmönster	37
5.2	Hastigheter	40
6.	SLUTSATSER	44

BILAGOR

Kalibreringskurva

FÖRORD

Föreliggande examensarbete, Strömning hos vågor runt en vertikal cylinder, har utförts vid Institutionen för Vattenbyggnad på Chalmers tekniska högskola.Handledare har varit Göran Moberg.

Vi vill tacka Göran Moberg för handledning och hjälp under arbetets gång. Dessutom vill vi tacka Bengt Carlsson som bistått med hjälp under laboratoriemätningarna.

Göteborg i december 1985

Anders Nilsson

Kenneth Nilsson

SAMMANFATTNING

Vårt examensarbete behandlar strömning hos vattenvågor runt en vertikal cylinder. I examensarbetet ingår

- En experiment^{ell} studie ✓
- En teoretisk studie

Syftet har varit att undersöka om man med 2D-potentialströmningsteori kan beskriva strömningen runt cylindern.

Vår^{as} undersökning visar ^Yhastigheterna runt cylindern väl kan beskrivas ^{med} 2D-potentialströmningsteori. Däremot avviker hastighetsriktningen given av 2D-potentialströmningsteori från de av oss uppmätta. Detta gäller framförallt i närheten av cylinder-
ytan. ✓

1. INTRODUKTION

1.1 Plant strömmande vatten med konstant hastighet

När vatten strömmar förbi en vertikal cylinder kan vitt skilda strömningsmönster uppkomma. I vissa fall påminner strömningsmönstret mycket starkt om det mönster man erhåller för en ideell vätska (inkompressibel och viskös, dvs saknar inre friktion), medan strömningsmönstret i andra fall, då vattnet uppvisar utpräglade viskösa egenskaper, blir betydligt mer komplicerat. För att illustrera detta skall vi börja med att se på en bildsekvens över det enklast möjliga strömningsfallet - strömmande vatten med konstant hastighet. Pa

Figur 1.1 visar en cylinder i vatten där vattnet plötsligt blir utsatt för en konstant hastighet U_0 . I figur 1.1a är strömningen nästan symmetrisk på uppströms och nedströmssidan. Vattnet uppträder här snarlikt en ideell vätska med undantag för ett tunt skikt närmast cylinderns sk gränsskikt som bildats pga friktion mellan cylinderytan och vattnet. Efter en tid kan man på cylinderns nedströmssida observera att gränsskiktet växer i storlek och virvlar börjar bildas, se figur 1.1b,c,d. I figur 1.1e har virvlarna blivit så stora att de snart kan rivas loss från cylindern, och den sista bilden visar situationen efter lång tid, dvs då ett stationärt strömningsmönster har inträtt. Pa
✓

Bildsekvensen visar att strömningsmönstret runt cylindern ändrar karaktär beroende på hur lång tid den konstanta strömmen har stått på. Till att börja med, figur 1.1a, är strömningen mycket lik potentialströmning, dvs strömningsmönstret ansluter nära till det man kan förvänta sig för en ideell vätska (en utförligare förklaring kommer vi till längre fram). Allteftersom tiden går desto mer komplicerat blir strömningsmönstret. Potentialströmning råder inte inom områden med virvlar och inte heller inom gränsskiktet. Det beror på att de viskösa krafterna har stor inverkan inom dessa områden. Pa

$$U_0 \cdot t \approx$$

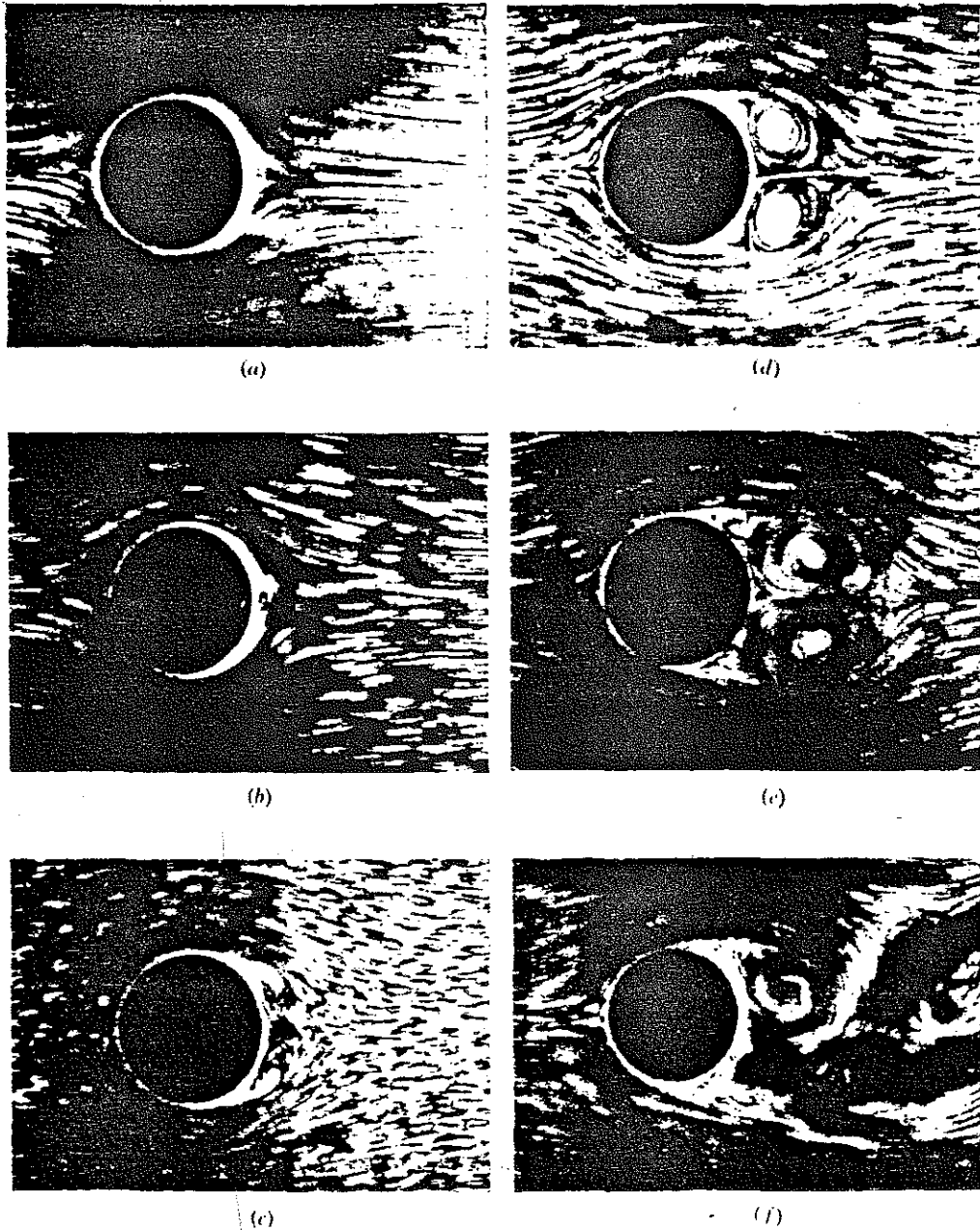


Fig 1.1

Strömningsmönstret runt en cylinder i konstant ström vid olika tidsögonblick. Bild (a): nästan potentialströmning. (b) gränsskiktet rullas upp till virvlar. (c) fullt utvecklat virvelpar. (f) virvelavlösning och separation (efter lång tid). (Moe and Overvik 1963).

(Var har ni sett bilden!)

Virvelbildning - Separation

Varför uppstår virvelbildning? I ett försök till att förklara detta fenomen skall vi ta figur 1.2 som utgångspunkt. Den övre bilden visar strömningen runt en cylinder där man har virvelbildning på baksidan av cylindern. I den undre är tryckfördelningen runt cylindern för en ideell vätska skisserad.

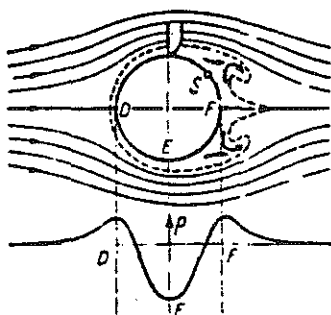


Fig 1.2 Separation och virvelbildning runt en cirkulär cylinder. S = separationspunkt. (Kalle?)
(Moe, Overvik 1983)

I en ideell vätska kommer vätskepartiklarna att accelereras uppströms från D till E och retarderas nedströms från E till F. Alltså kommer trycket att avta från D till E och öka från E till F (energibetraktelse - Bernoullis ekvation). Denna beskrivning kommer att vara korrekt för vattnet som befinner sig utanför gränsskiktet. Där kommer tryck(energi) att omvandlas till kinetisk energi från D till E och omvänt från E till F så att hastigheten vid F blir densamma som hastigheten var vid D. Vattenpartiklarna inom gränsskiktet kommer att avge kinetisk energi pga av friktion. När så trycket ökar mellan E och F, har partiklarna inte nog kinetisk energi till att övervinna mottrycket. De kommer att stoppa upp och trycket tvingar dem till att ändra riktning, så att man får en

tillbakaströmning och virvlar uppstår. När en virvel transporteras bort säger man att strömmen blir separerad och separationspunkten är definierad som den punkt på cylindern där hastighetsprofilens tangent bildar rät vinkel med cylinderytan. Figur 1.3 visar schematiskt en hastighetsprofils utseende kring separationspunkten.

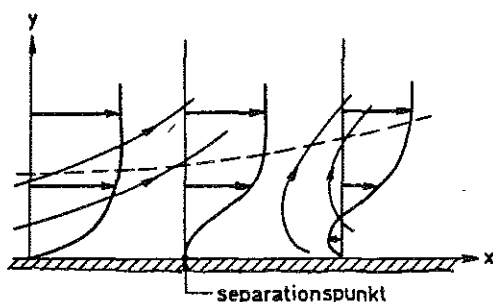
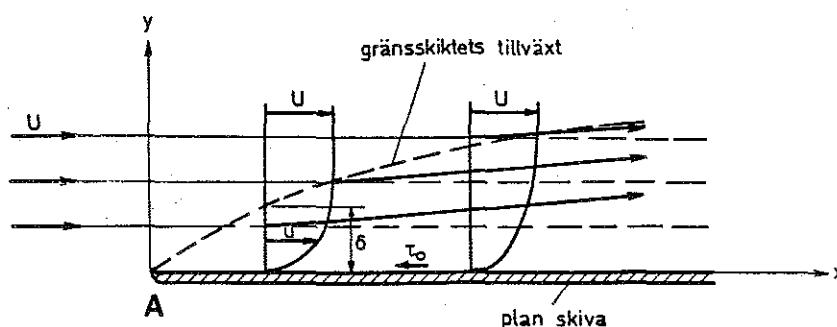


Fig 1.3 Hastighetsfördelning i området kring separationspunkten (Plan skiva), (Cederwall, Larsen 1976).

Gränsskikt

När vatten strömmar förbi en cylinder kommer friktionen vid cylinderytan att orsaka en asymptotisk reduktion av vattnets hastighet i närheten av cylindern. Vid cylinderytan är hastigheten noll. Hastighetsgradient och skjuvspänning uppnår sina maximala värden vid ytan för att sedan starkt avta utåt i strömningen. Den del av flödet som är påverkad av friktionen vid cylinderytan kallas gränsskikt.



Figur 1.4 Gränsskikt. Strömning längs en plan skiva

(Cederwall, Larsen 1976).

Gränsskiktet kan vara laminärt eller turbulent. Om gränsskiktet är laminärt sker det ett begränsat utbyte av vatten mellan gränsskikt och omgivande flöde, medan detta utbyte ökar betydligt då gränsskiktet är turbulent. Det existerar dock ingen distinkt övergång från laminärt till turbulent gränsskikt, utan man har ett övergångsområde där gränsskiktet varken kan klassas som laminärt eller turbulent.

För att definiera om gränsskiktet är laminärt eller turbulent använder man sig av Reynoldstalet, $Re = uv/D$, där u är vattnets strömningshastighet, ν är vattnets viskositet och D är cylinderns diameter. Figur 1.5 visar inom vilka intervall för Re som gränsskiktet är laminärt resp turbulent runt en cylinder. Figuren visar även tillhörande strömningsskeden vilka kan sägas vara de skeden som bildats då ett stationärt strömningstillstånd har inträtt, dvs de inkluderar inte den tidsberoende delen av strömningen (jmf sid 1).

Generellt kan man säga att separationspunkten vid laminärt gränsskikt ligger på cylinderns framsida vid ca 80° från strömningens riktning.

an

När vattnets hastighet ökar så att gränsskiktet blir turbulent kommer separationspunkten att flyttas baköver på cylindern. En förklaring till detta är att vätskepartiklarna i gränsskiktet ständigt blir utbytta och därmed tillförs kinetisk energi så att vätskepartiklarna "orkar" flytta separationspunkten bakåt på cylindern.

	A Subcritical	B Critical	C Supercritical	D Post-supercritical
Boundary layer	laminar	transition	turbulent	turbulent
Separation	about 82 deg.	transition	120 - 130 deg.	about 120 deg.
Shear layer near separation	laminar		laminar separation, bubble turbulent reattachment	turbulent
Strouhal number	$S = 0.212 - \frac{2.7}{Re}$	transition	0.35 - 0.45	about 0.29
Wake	$Re < 60$ laminar; $60 < Re < 5000$ vortex street $Re > 5000$ turbulent	not periodic		
Approximate Re range	$< 2 \times 10^5$	2×10^5 to 5×10^5	$5 \times 10^5 - 3 \times 10^6$	$> 3 \times 10^6$

Fig. 3.1a. Incompressible flow regimes and their consequences.

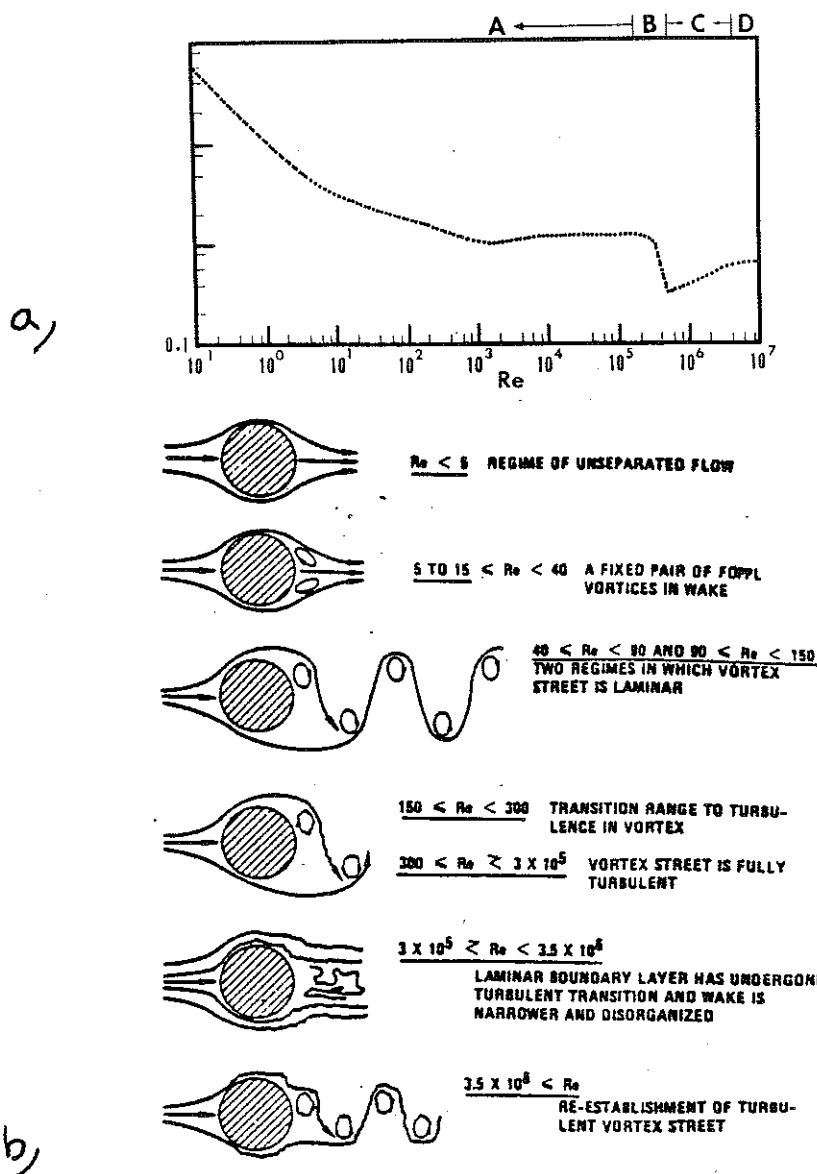


Fig 1.5 a, Indelning mellan laminärt och turbulent gränsskikt som funktion av Re för stationär ström. b, Strömningsmönster runt en glatt cylinder som funktion av Re.

1.2 Plant oscillerande vatten

Hos oscillerande vatten accelereras vätskepartiklarna från stillastående upp till en maxhastighet för att sedan retarderas ned till stillastående igen. Därefter ändrar partiklarna rörelseriktning och samma förlopp upprepas.

Keulegan - Carpenter-tal

Av figur 1.1 framgår att det tar en viss tid för virvlar att bildas runt en cylinder då man har plant strömmande vatten med en konstant hastighet. För en cylinder i oscillerande vatten är problemet analogt. Frågan är här om virvlar hinner bildas innan partiklarna ändrar rörelseriktning. En dimensionslös faktor som kan sägas beskriva om virvlar hinner bildas är Keulegan-Carpenter talet, $KC = u_m T / D$, där u_m är den största horisontella partikelhastighet i respektive rörelseriktning, T är den tid som förflyter innan partiklarna ändrar riktning och D är cylinderns diameter. KC -talet kan tolkas som längden på den horisontella partikelförskjutningen i förhållande till cylinderdiametern innan strömmen vänder. För låga KC -tal kommer sträckan som partikeln rör sig i horisontalled att vara liten i förhållande till cylinderdiametern. Det betyder att för små KC -tal kommer separation ej att uppstå och vattnet kommer att uppträda närmast som en ideal vätska (potentialströmning). Om KC -talet ökas något kan man förvänta sig att partikelförskjutningen i horisontalled är så stor att virvlar bildas och strömningsmönstret blir då mer komplicerat. I figur 1.6 redovisas olika strömningsmönster runt en cylinder vid olika KC -tal.

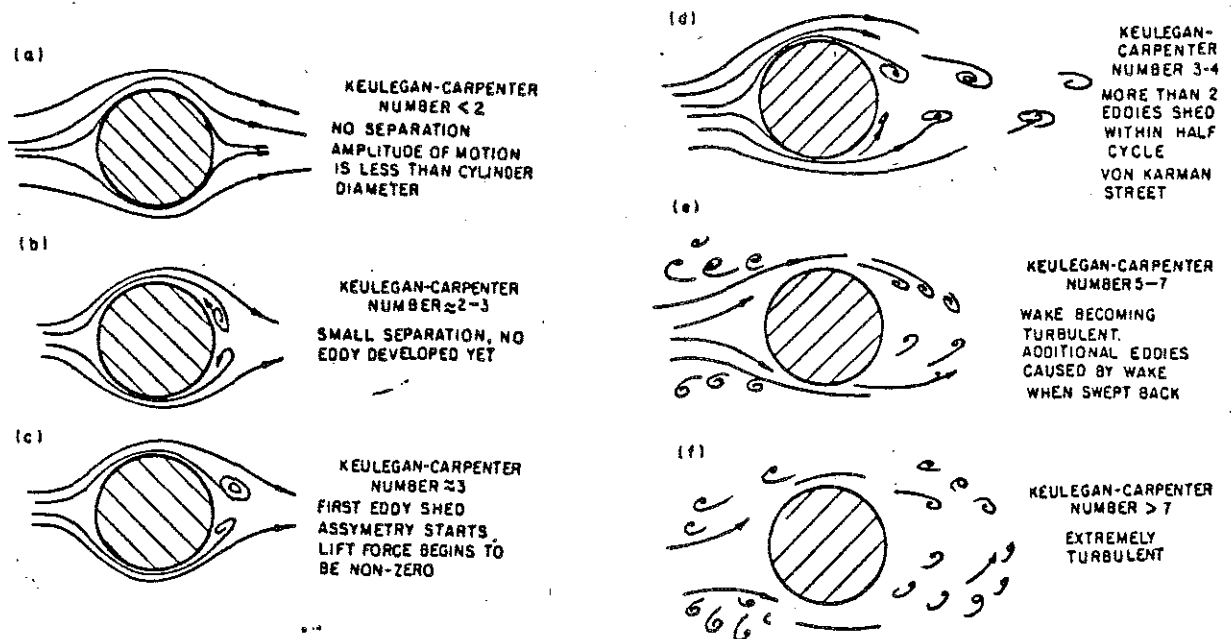


Fig 1.6 Strömningsmönster vid olika KC-tal

(Biddle 1971)

Gränsskikt

Även gränsskiktets karaktär är av avgörande betydelse för strömningens utseende. I figur 1.5 visades en kurva som beskriver övergången från laminärt till turbulent gränsskikt som funktion av Reynolds tal. Hos oscillerande vatten kommer denna kurva att förskjutas. Det beror på att man runt en cylinder i oscillerande vatten har en tryckgradient orsakad av både hastighet och acceleration

Se Fig 1.7

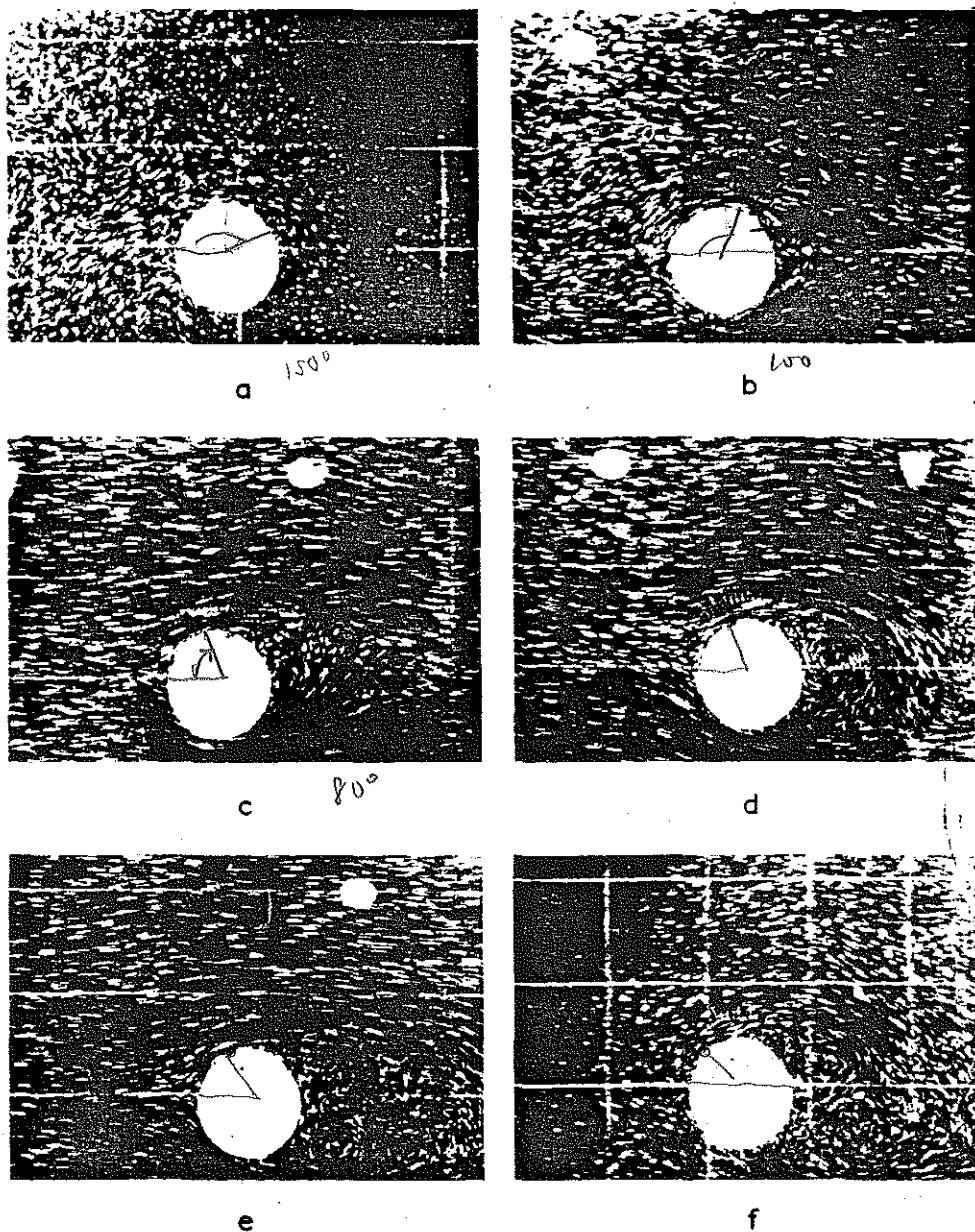
För att karaktärisera strömningen runt en cylinder i oscillerande vatten brukar man använda sig av just Reynolds tal och det ovan nämnda Keulegan-Carpenter talet. Detta gäller även för oscillerande vattenvågor där man har en oscillation som är tredimensionell.

Separation

Vi skall avsluta beskrivningen med att titta på en bildserie över strömning runt en cylinder där oscillationsrörelsen åstadkoms genom att en cylinder har accelererats-retardaderats i stillastående vatten. Figur 1.8a visar strömningsmönstret då cylindern precis börjat röra sig åt vänster (motsvarar en strömningsriktning åt höger). Separationspunkten ligger vid $\phi \approx 150^\circ$. I figur 1.8b har hastigheten ökat något och separationspunkten har flyttats till $\phi \approx 100^\circ$. I figur 1.8c har hastigheten ökat ytterligare och börjar att närma sig sitt maximum. Separationspunkten ligger nu vid $\phi \approx 80^\circ$. Framför separationspunkten verkar vattnet uppträda likt en ideal vätska. I figur 1.8d,e har cylindern börjat att retardera och separationspunkten har flyttats till $\phi \approx 70^\circ$ resp. 60° . I den sista figuren är hastigheten nästan noll och separationspunkten ligger vid $\phi \approx 45^\circ$.

Bildserien visar att man vid oscillerande vatten har en separationspunkt som vandrar fram och tillbaka på cylinderns yta.

Fig 1.7 C_D som funktion av Re
(Sarpkaya 1976)



Smooth Cylinder. $R_c = 2.19 \times 10^4$; $K_c = 38$; $T = 5.2$ Secs.
 Phase Times t/T : a) 0.049; b) 0.122; c) 0.195;
 d) 0.293; e) 0.366 f) 0.439

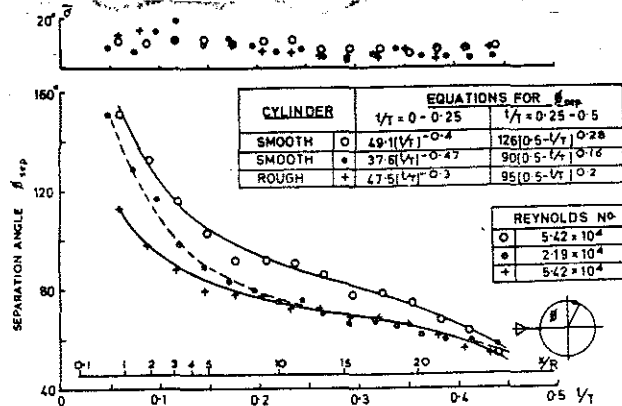


FIG. 4 Separation Angle vs Phase of Oscillation ($K_c = 38$)

Fig 1.8

Separationspunktens vandring längs cylinderytan vid
 oscillerande ström (Grass, Kemp). 1979

1.3 Problemformulering

Av den nu gjorda bakgrundsbeskrivningen framgår att strömningen runt en cylinder i plant oscillerande vatten är betydligt mer komplicerad än i plant strömmande vatten med konstant hastighet. Hos oscillerande vattenvågor blir strömningen än mer komplicerad då vätskepartiklarna här oscillerar i 3-dimensionella banor som kan vara cirkel- eller ellipsformade. l

Vi har gjort en undersökning över strömningsförhållandena hos oscillerande vattenvågor runt en vertikal cylinder, där vi begränsat oss till att enbart studera de största horisontella partikelhastigheterna under vågtoppen. Den fråga vi har ställt oss är: Kan man med ^{2D}potentialströmningsteori beskriva hur dessa hastigheter till storlek och riktning förändras då vågtoppen passerar cylindern? (Jämför med den oskärade strömningen)

För att besvara frågan utfördes en experimentell studie där partikelhastigheter till storlek och riktning uppmättes runt en cylinder.

Som grund för den allmänna förståelsen av våra resultat skall vi i nästkommande kapitel redogöra för Airys vågteori samt för förutsättningarna bakom potentialströmningsteori.

2. VÅGTEORI

Det är vanligt att man delar in vågorna i tre olika områden beroende på förhållandet mellan vattendjup och våglängd. De tre områdena är djupt vatten ($d/L > 1/2$), övergångsområdet ($1/25 < d/L < 1/2$) resp grunt vatten ($d/L < 1/25$). Indelningen grundar sig på hur stor inverkan botten har på vågrörelsen.

De vågor vi har undersökt befinner sig inom övergångsområdet. Vi skall i detta kapitel beskriva fysiken (partikelhastigheter och partikelrörelser) hos en sådan våg då vågen får svänga fritt utan påverkan från en cylinder. Den teori vi använder för detta ändamål är Airys teori som är den enklaste och mest elementära av vågteorierna. Airys teori går även under benämningen linjär eller 1:a ordningens teori.

Vi vill här påpeka att vi inte använder oss av några hastigheter framtagna med Airys teori i vår undersökning, utan där är alla hastigheter uppmätta med en micropropeller.

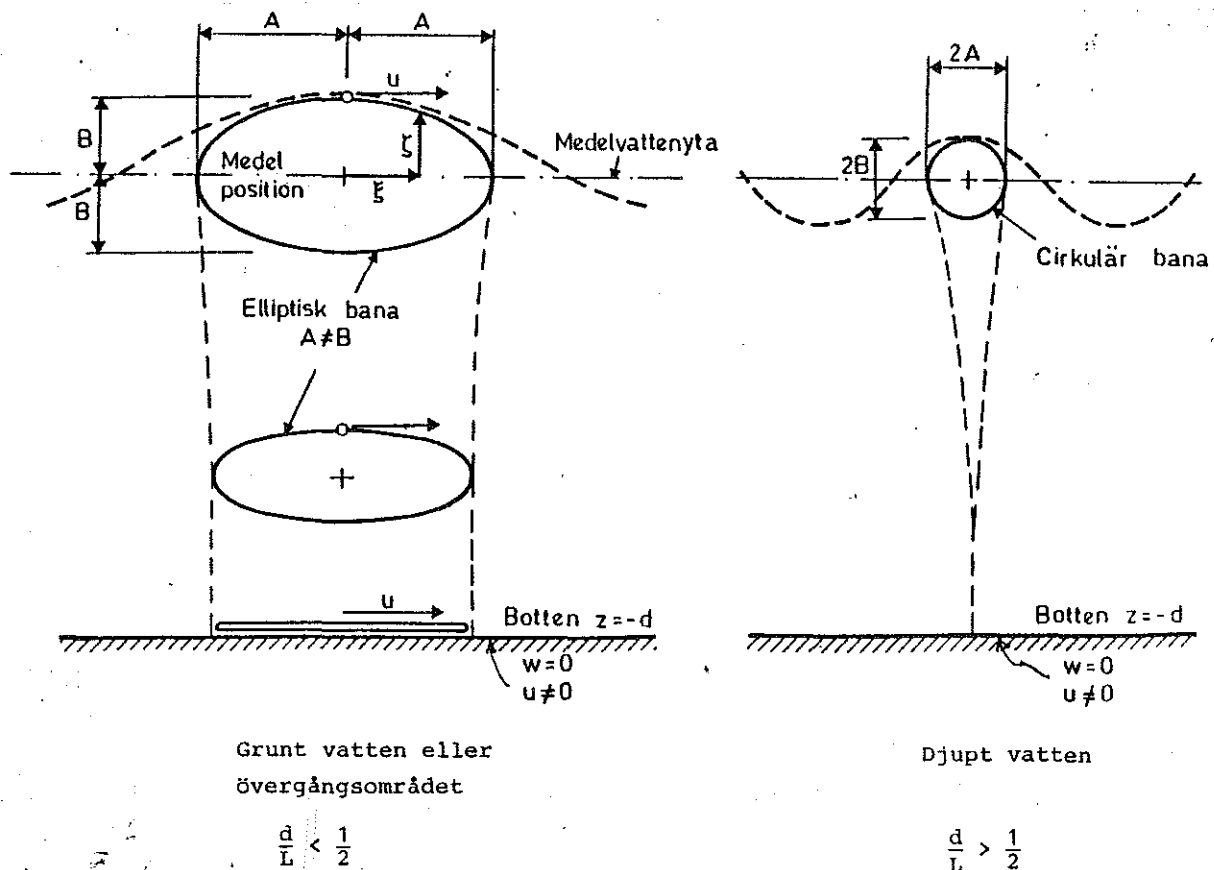


Fig 2.1 Vattenpartiklarnas rörelser under en sinusformad våg enligt linjär teori.

2.1.1 Grundläggande begrepp

För att definiera en fortskridande oscillerande våg använder vi oss av följande parametrar:

Längden, L = horisontella avståndet mellan motsvarande punkter på två successiva vågor

Höjden, H = vertikala avståndet från vågtopp till vågdal

Amplituden, a = $H/2$

Perioden, T = tiden som åtgår för två successiva vågtoppar att passera en given punkt.

Fashastighet, $C = L/T$

Frekvens, $f = 1/T$

Vattendjup, d = avståndet från botten till medelvattenytan

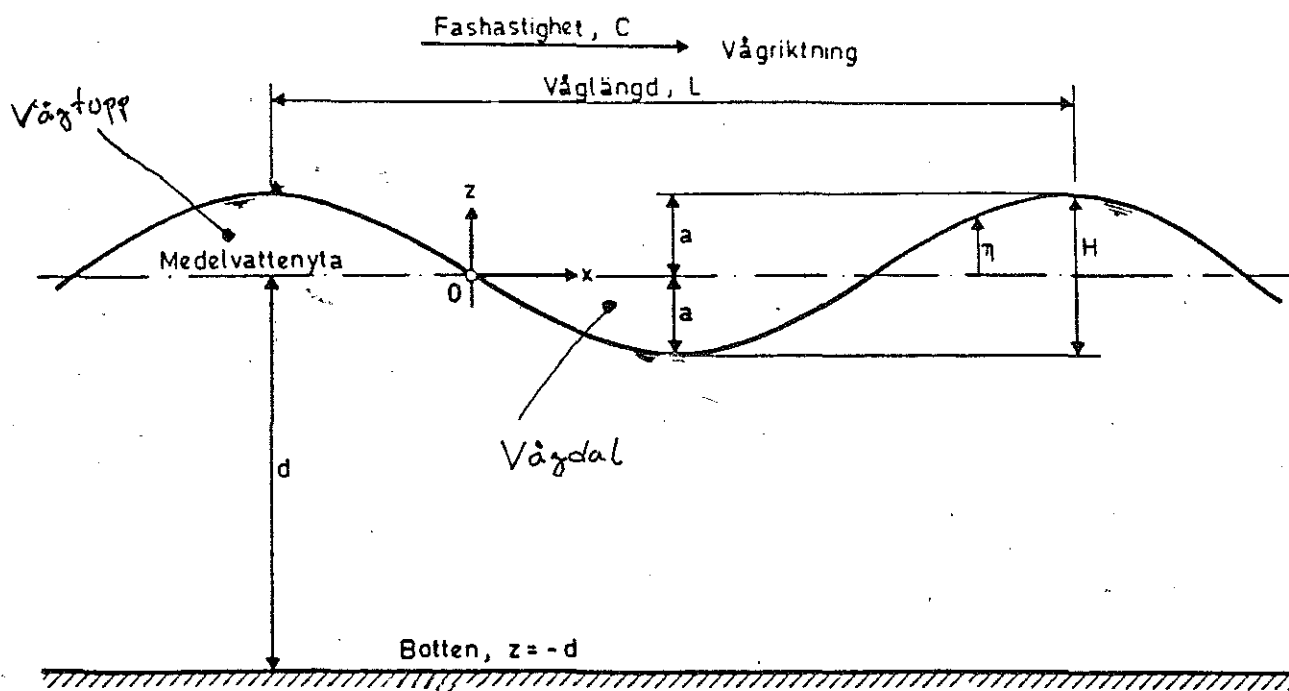
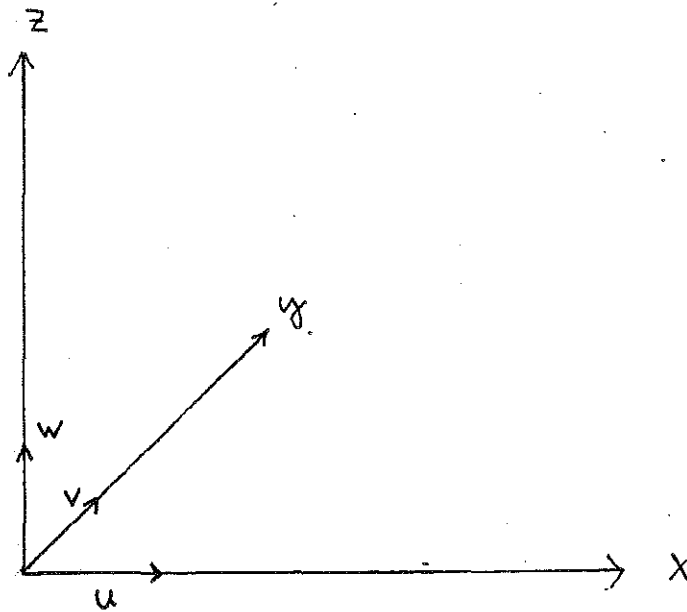


Fig 2.2

Definition av karakteristiska parametrar för en fortskridande oscillerande våg. Vågen har här förutsatts vara sinusformad.

DEFINITION AV PARTIKELHASTIGHETER

u = hastighetskomponent i x -riktning

v = hastighetskomponent i y -riktning

w = hastighetskomponent i z -riktning

Fig 2.3

Fig 2.3. Definition av partikelhastigheter

2.1.2 Partikelrörelser

Airys teori förutsätter att vågen är sinusformad och att våg-
amplituden är liten i förhållande till våglängden. För en sådan
våg ger Airys teori, (då $1/25 < d/L < 1/2$), att partikelbanorna är
elliptiskt formade och slutna. Att partikelbanorna är slutna inne-
bär att det inte sker någon vätsketransport i vågens utbrednings-
riktning. Partiklarnas förskjutning kring medelpositionen tecknas
som:

$$\xi = -a \frac{\cosh k(d+z)}{\sinh kd} \cos \theta \quad (\text{Horisontell partikelförskjutning})$$

$$\zeta = a \frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd} \sin \theta \quad (\text{Vertikal partikelförskjutning})$$

Det innebär att partikelbanorna minskar med djupet och att den
vertikala partikelförskjutningen minskar snabbare än den horison-
tella. Vid botten kommer partiklarna i princip att oscillera fram
och tillbaka.

2.1.3 Partikelhastigheter

Partiklarnas hastighet i sina banor tecknas enligt Airy som:

$$u = \frac{agk}{\omega} \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \sin \theta \quad (\text{Horisontell partikelhastighet})$$

$$w = -\frac{agk}{\omega} \frac{\sinh k(d+z)}{\cosh kd} \cos \theta \quad (\text{Vertikal partikelhastighet})$$

$$V = \sqrt{u^2 + w^2} = \frac{agk}{\omega \cosh kd} \left(\cosh^2 k(d+z) \sin^2 \theta + \sinh^2 k(d+z) \cos^2 \theta \right)^{1/2} \neq 1$$

Av dessa uttryck framgår att partiklarnas hastighet V minskar med djupet. ~~Om man tittar på en enskild artikels hastighet så är den konstant hela tiden i sin bana*, d v s V är konstant. Däremot uppvisar partikeln ett accelerations-retardationsförlopp om man enbart ser till hastighetsförändringen i horisontal- resp vertikalled (u resp w).~~

De hastigheter vi har varit intresserade av i vår undersökning är de maximala horisontella partikelhastigheterna under vågtoppen. Dessa hastigheter inträffar enligt Airy rakt under vågtoppen oavsett nivå z och är riktade i positiv ^{*}riktning. Vid dessa tillfällen är den vertikala hastighetskomponenten w noll. I figur 2.5 ⁴ har vi ritat ut detta hastighetstillstånd hos en våg.

* om banan är cirkulär n.b.

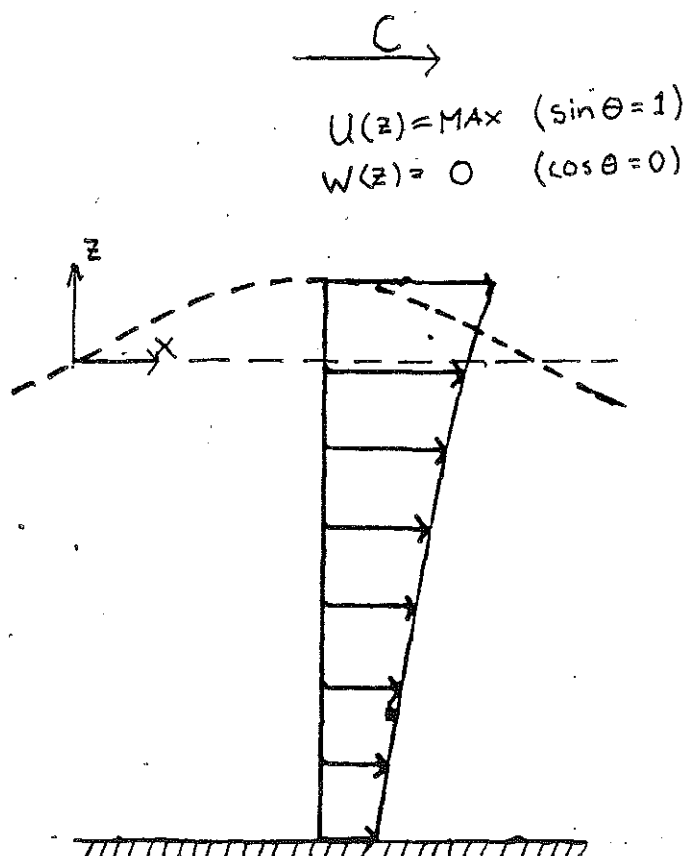


Fig 2.5 Hastighetsprofil för de största horisontella hastigheterna under vågtopp enligt Airy.

2.49

2.2 Antaganden hos vågor vid användandet av 2D-potentialströmningsteori

De antaganden man gör för vattenvågor då man använder sig av potentialströmningsteori är:

Vatten är en inkompressibel vätska

Strömningen hos vågen är rotationsfri. Rotationsfri strömning innebär att vätske element inte roterar runt tyngdpunkt.

Förenkling av strömning hos vågor

Vätskepartiklarna hos vågor runt en vertikal cylinder beskriver som tidigare nämnts tredimensionella oscillerande banor. Det innebär att en fullständig lösning av strömningen runt en vertikal cylinder är en tredimensionell tidsberoende lösning. Vi har, då vi enbart är intresserade av de största horisontella hastigheterna under vågtoppen försökt att reducera strömningen till ett tvådimensionellt stationärt problem. Det gör vi genom att:

Vi antar att partikelrörelsen är plan i xy-planet vid de tillfällen partiklarna uppnår sina största horisontella hastigheter. Det innebär att vi vid dessa tillfällen antar att den vertikala hastighetskomponenten w är noll (se fig 2.6)

(Samma som 2.5)

Vi betraktar de största horisontella hastigheterna under vågtopp som strömningshastigheter hos en stationärt strömmande vätska genom att vi fryser vågtoppen vid de tillfällen partiklarna uppnår sina största horisontella hastigheter, och sedan följer med vågtoppen i vågens utbredningsriktning med fashastigheten C (se fig 2.7).

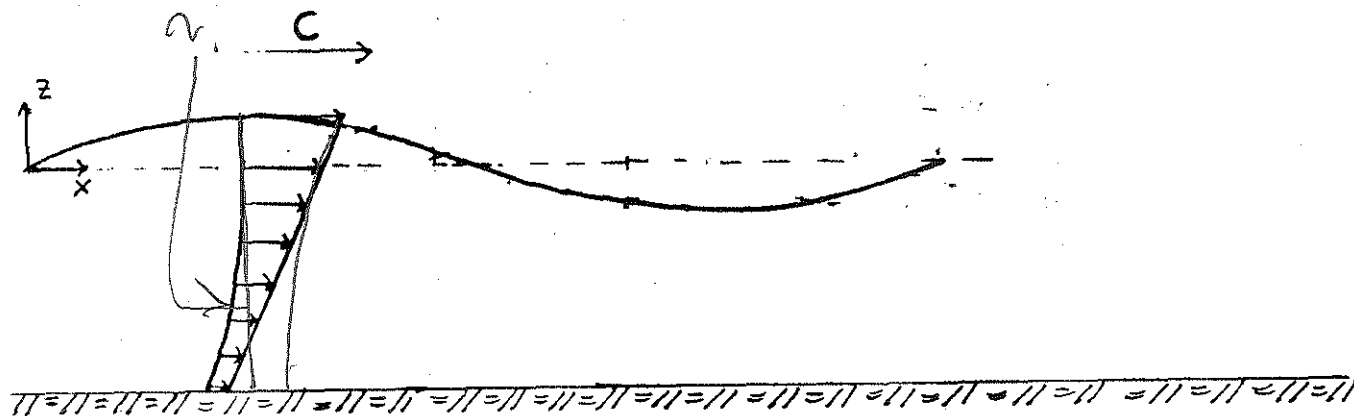


Fig 2.6 Antaget hastighetstillstånd i ostört område:

$$u(z) = \max$$

$$w(z) = 0$$

Fig 2.6

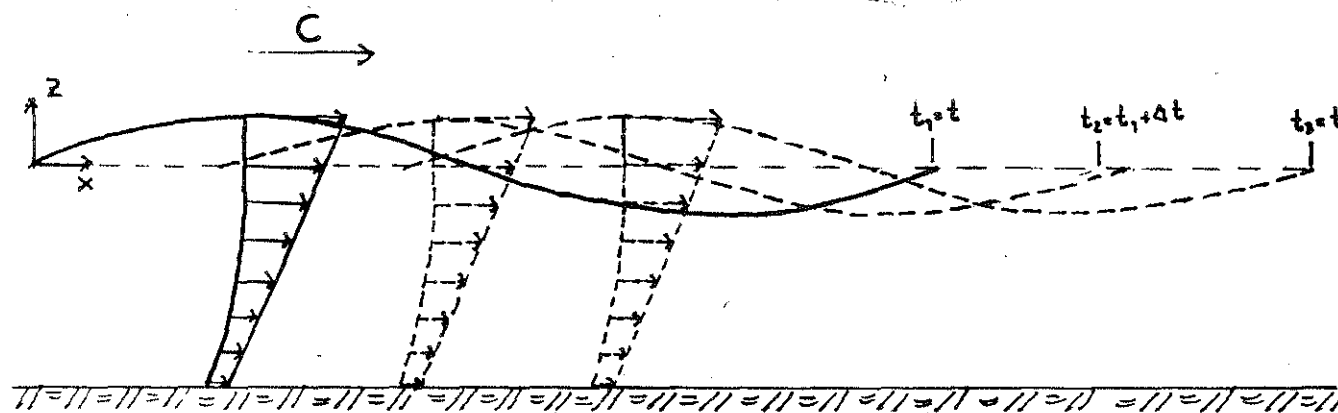
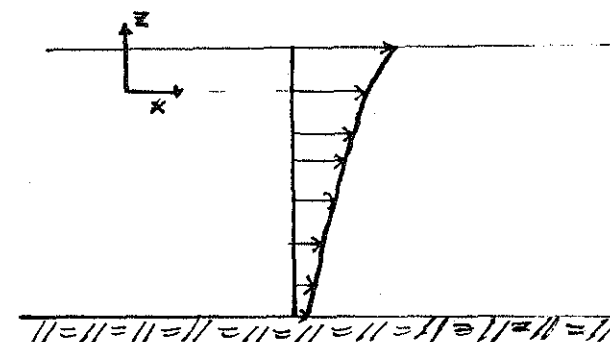


Fig 2.7 Strömningsbetraktelse av vågrörelsen i ostört område.



3. 2D-POTENTIALSTRÖMNINGSTEORI

3.1 Hastighetspotential för 2D-strömning

En hastighetspotential är en funktion ϕ som har följande egenskap:

$$u = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

$$v = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

där u , v är strömningshastigheten i x - resp y -riktning. Det innebär att man genom att derivera hastighetspotentialen mot önskad riktning erhåller hastigheten i denna riktning. Om strömningen antages vara rotationsfri gäller irrotationsvillkoret.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Kombineras ekvationerna (3.1) och (3.2) med ovanstående ekvation fås

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

d v s andra derivatorna är blandande, vilket innebär att ϕ är kontinuerlig och differentierbar. Funktionen ϕ existerar således om strömningen är rotationsfri, och rotationsfri strömning kallas därför för potentialströmning. Vidare gäller för en inkompressibel vätska kontinuitetsvillkoret.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

som med ekvationerna (3.1) och (3.2) insatt ger Laplace differentialekvation.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

3.2 Strömningsfunktion för 2D-strömning

En strömfunktion är en funktion ψ som har följande egenskap:

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

Det innebär att man genom att derivera strömfunktionen mot önskad riktning erhåller hastigheten i denna riktning (pss som för hastighetspotentialen).

Om vätskan är inkompressibel gäller kontinuitetsvillkoret.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Insättning av ekvationerna (3.5) och (3.6) i ovanstående ekvation ger

$$- \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

vilket innebär att ψ är kontinuerlig och differentierbar.

Vidare gäller om vätskan är rotationsfri att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Kombineras ekvationerna (3.5) och (3.6) med ovanstående ekvation fås Laplace differentialekvation.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

3.3 Strömningslinjer - Ekvipotentiaallinjer

En strömningslinje är en linje utefter vilket ψ är konstant. I det fallet man har stationär stömning kommer strömlinjerna inte att ändra sig i tiden, och strömlinjer och partikelbana är i detta fall identiska.

En ekvipotentiaallinje är en linje utefter vilket ϕ är konstant.

Man kan visa att strömlinjer och ekvipotentiaallinjer bildar ett ortogonalt linjesystem. Det innebär att de överallt skär varandra under rät vinkel.

$$\left[\frac{dx}{dy} \right] = - \frac{u}{v} \quad \phi = \text{konstant} \quad \dots\dots\dots(3.9)$$

$$\left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{v}{u} \quad \psi = \text{konstant} \quad \dots\dots\dots(3.10)$$

3.4 Hastighetsfördelning runt en vertikal fast fixerad cylinder enligt 2D-potentialströmningsteori

I kapitel 2 visades hur vi betraktar de största horisontella partikelhastigheterna under vågtopp som strömningshastigheter hos en plant stationärt strömmande vätska, där vätskan antogs vara inkompressibel och rotationsfri. Vi skall här visa hur man får fram hastighetsfördelningen runt en vertikal, fast fixerad cirkulär cylinder för en sådan vätska.

Lösningen med 2D-potentialströmningsteori kan sägas bestå av två olika delar. Den ena delen är den strömningsbild man har då cylindern inte påverkar strömningen. Denna del kallas för rätlinjigt flöde. Den andra delen representerar den inverkan cylindern får på strömningsbilden. Denna del kallas dipol. Genom att koppla samman det rätlinjiga flödet med dipolen fås strömningsbilden runt cylindern.

Rätlinjigt flöde

Om man har en stationär strömmande vätska i positiv x-riktning, sådan att $u = u_s$ och w är noll, fås mha ekvationerna (3.1), (3.2), (3.5), (3.6) att:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = u_s \Rightarrow \phi = -u_s \cdot x + f(y) + \text{konstant}.$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \phi \text{ är ingen funktion av } y, \text{dvs } f(y) = 0.$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_s \Rightarrow \psi = -u_s \cdot y + f(x) + \text{konstant}.$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi \text{ är ingen funktion av } x, \text{dvs } f(x) = 0.$$

Om konstanterna väljs till noll ger ovanstående att

otemp/pe
index.

$$\phi = -u_s \cdot y$$

.....(3.11)

$$\psi = -u_s \cdot x$$

Hastigheten u_s kallas för friströmningshastighet, och är alltså den hastighet det strömmande vattnet har då cylinderna inte påverkar strömningen.

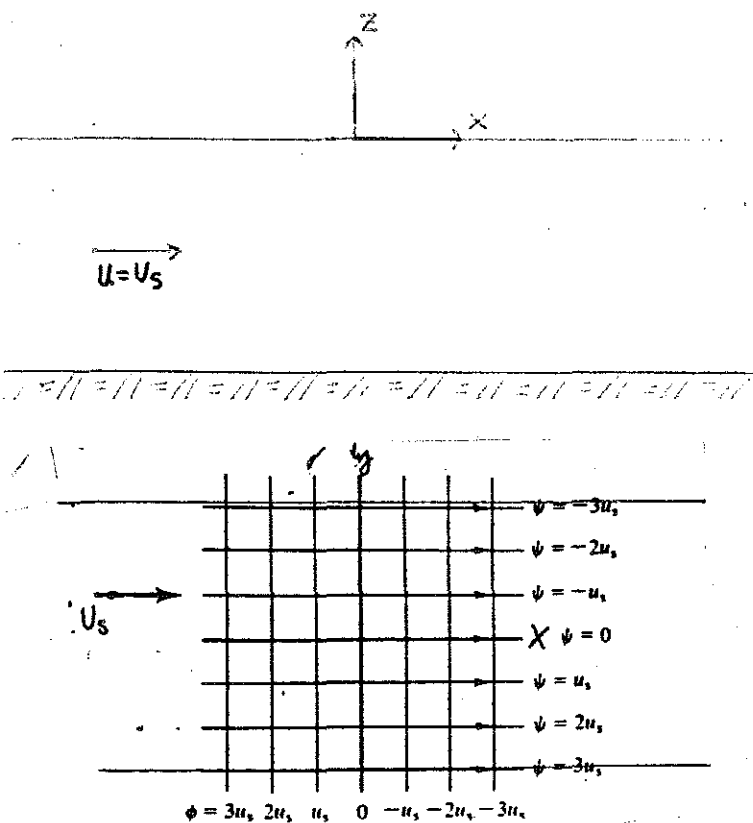


Fig 3.1 Strömlinjer och ekvipotentiallinjer vid rätlinjigt flöde.

Dipol

För att beskriva en dipol använder man sig av begreppen linjekälla och linjesänka. Både linjekälla och linjesänka kan sägas vara matematiska formuleringar som bl a används för att beskriva en cylinders inverkan på ett strömningsfält. Vi nöjer oss här med att definiera de olika begreppen och ger direkt den matematiska formuleringen av en dipol utan någon härledning.

En linjekälla är en linje av en enhets längd mellan två parallella plan, från vilket ett flöde strömmar radiellt i alla riktningar parallellt med planen (se fig 3.2).

En linjesänka är en negativ källa, d v s man har ett inströmmande istället för ett utströmmande flöde.

Styrkan hos linjekällan motsvaras av det volymflöde som produceras från den, och för linjesänkan motsvaras styrkan av det volymsflöde som "sugs in".

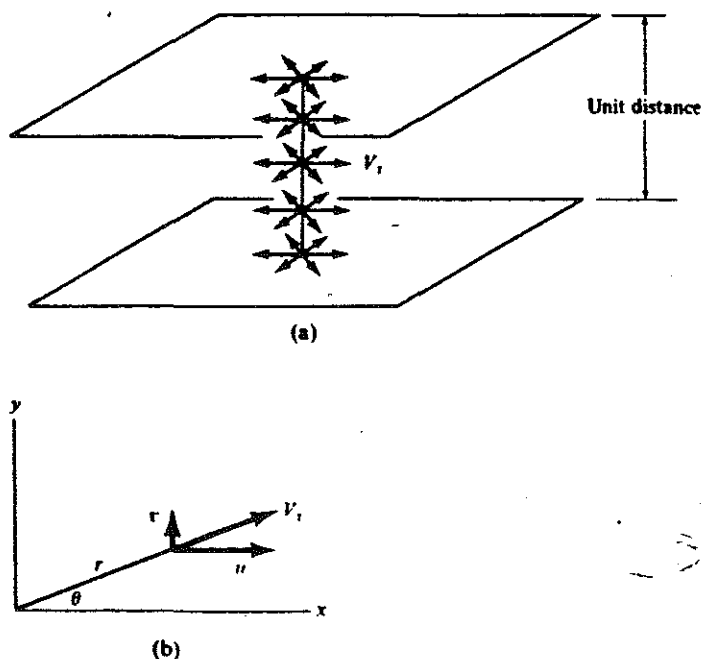


Fig 3.2 Flöde från en linjekälla. (a) Linjekälla. (b) Flöde i xy-planet.

En dipol erhålls om man kopplar ihop en linjekälla med en linjesänka på det sättet att produkten av deras styrka och avståndet mellan dem är konstant. Den matematiska formuleringen av en dipol är:

$$\phi = \frac{C \cdot x}{x^2 + y^2} \quad \checkmark \quad \dots\dots\dots(3.12)$$

$$\psi = - \frac{C \cdot y}{x^2 + y^2}$$

där C är dipolens styrka

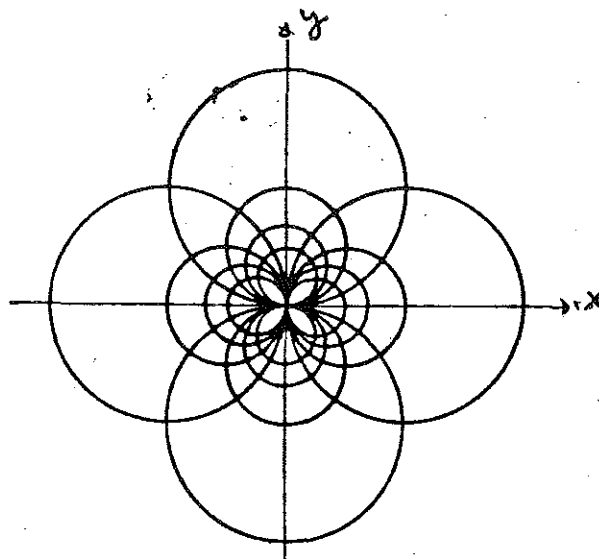


Fig 3.3 Strömlinjer och ekvipotentiallinjer för en dipol.

Sammankoppling av Rätlinjigt flöde - Dipol

Strömningsbilden runt cylindern fås genom att "koppla ihop" det rätlinjiga flödet med dipolen.

$$\phi = \phi_R + \phi_D = -u_s \cdot x - \frac{u_s R^2 x}{x^2 + y^2} \quad \dots\dots\dots(3.13)$$

$$\psi = \psi_R + \psi_D = -u_s \cdot y + \frac{u_s R^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$(C = u_s D, \text{ vilket fås av att } u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ vid } (x = \pm D, y = 0))$$

$$C = u_s R^2 \quad \dots$$

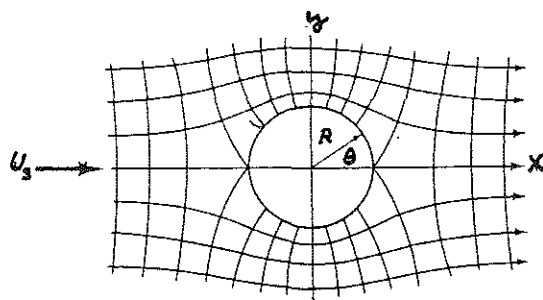


Fig 3.4 Strömningslinjer och ekvipotentiallinjer runt en cirkulär cylinder.

Strömningshastigheten runt cylindern fås genom att derivera ϕ (alternativt ψ) mot önskad riktning.

$$u = u_s \left(1 + \frac{R^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad (x\text{-komponent}) \quad \dots\dots(3.14)$$

$$v = -u_s R^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (y\text{-komponent}) \quad \dots\dots(3.15)$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (\text{horisontell hastighet}) \quad \dots\dots 3.16)$$

Som framgår av dessa uttryck så satisfieras Laplace's differentialekvation överallt i strömningen runt cylindern. Det innebär att dessa uttryck är en lösning enligt potentialströmningsteori. Även randvillkoren är uppfyllda, dvs att strömningshastigheten långt från cylindern går mot u_s samt att normalkomponenten av partikelhastigheten på cylinderns yta är noll.

Det innebär att uttrycken är en korrekt lösning till det aktuella problemet.

Uttrycken ovan innebär att känner man strömningshastigheten i ostört område u_∞ samt cylinderns diameter D , kan man enkelt räkna fram strömningshastigheten och strömningsriktningen i en godtycklig punkt runt cylindern genom insättning av värden på punktens x - och y -koordinater. Man kan på så sätt få en bild av hur hastigheten till storlek och riktning förändras då vätskan strömmar förbi cylindern.

Det är alltså ovanstående uttrycks giltighet vi har undersökt. Hur denna undersökning har tillgått framgår av nästa kapitel.

4. LABORATORIEUNDERSÖKNING

4.1 Utrustning

4.1.1 Vattenränna - Cylinder

Den Vattenrännan som använts vid undersökningen är 80 m lång, 2 m bred och har ett maximaldjup på 1 m. Lugnvattendjupet har under hela undersökningen varit 0,80 m. I ena änden av vattenrännan finns en våggenerator och i den andra en lutande slänt, vars syfte är att minimera vågreflexion.

Den Cylinder som använts är 1 m hög och har diametern 0,30 m. Den kan mha en speciell anordning fixeras vid vattenrännans botten. Både cylinder och vattenränna har sådana ytor att de kan anses vara glatta. Cylinders placering i vattenrännan framgår av nedanstående figur.

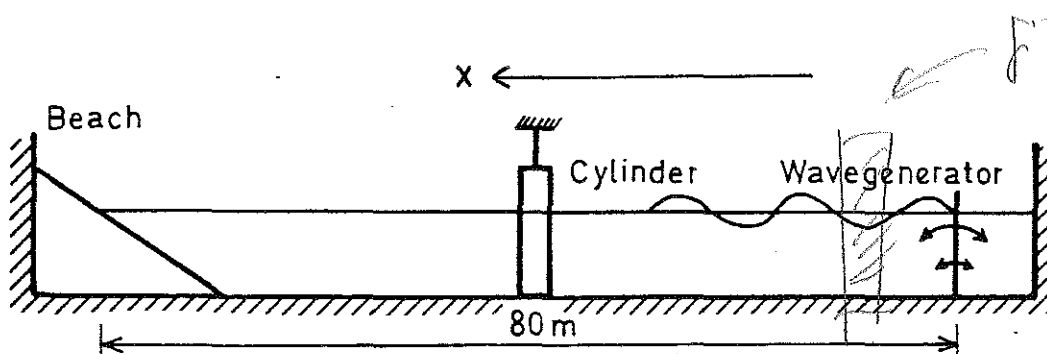


Fig 4.1 Vattenränna - Cylinder

4.1.2 Utrustning för mätning av vattenhastigheter

För hastighetsmätningen har vi använt oss av en fembladig micro-propeller (fig 4.2). Propellern är så konstruerad att varje gång ett propellerblad passerar en viss punkt skapas en elektrisk puls. Dessa pulser registreras på en skrivare.

Eftersom propellern snurrar fortare vid ökad hastighet, kommer då avstånden mellan de på skrivaren registrerade pulserna att minska. Avståndet mellan pulserna har relaterats till en verklig hastighet genom att propellerna förts genom stillastående vatten med olika kända hastigheter. Ur detta har sedan ett kalibreringsschema upprättats (se bilaga 1). Utvärderingen av mätningarna har skett genom att man för varje vågtopp mätt det minimala avståndet mellan fem pulser. Detta har sedan mha kalibreringsschemat översatts till en verklig hastighet. För att kunna avgöra var på vågen man befinner sig var en våghöjdsjälmätare kopplad till skrivaren.

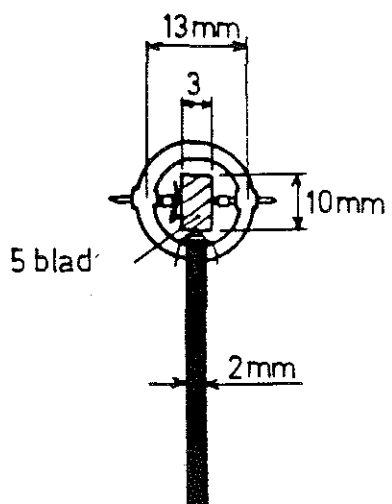


Fig 4.2 Fembladig micropropeller.

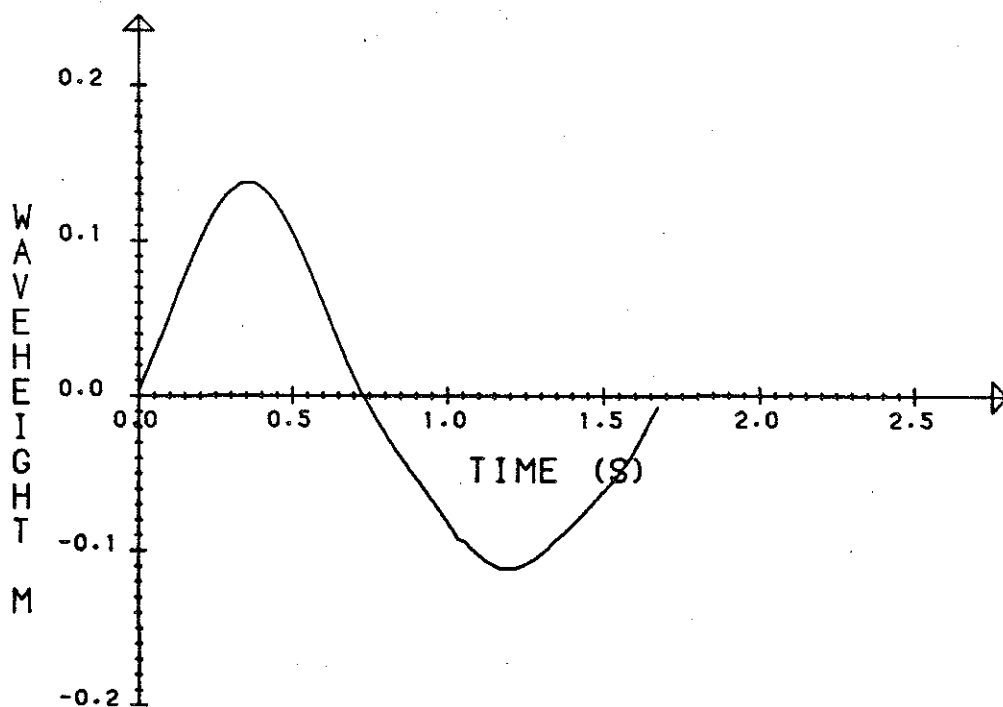
4.2 Omfattning

4.2.1 Undersökta vågor

Två olika vågtyper har genererats i vattenrännan, Våg A och Våg B. Karaktäristiska egenskaper för vågorna framgår av nedanstående.

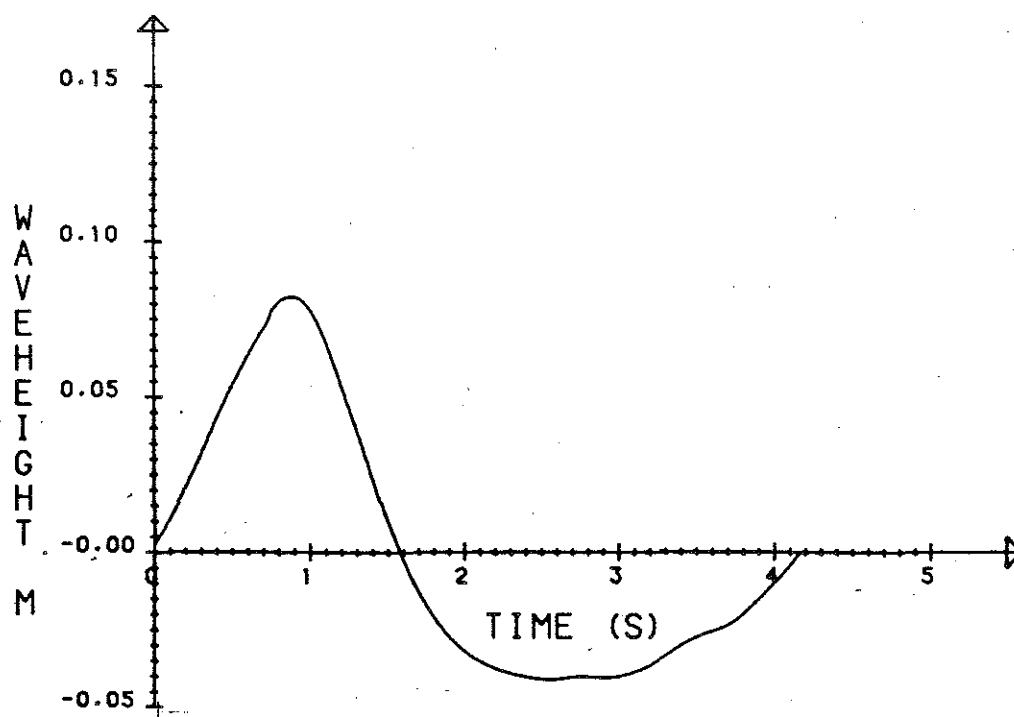
Våg A

Våglängd, L	= 3.9 m	
Våghöjd, H	= 0.18 m	
Period, T	= 1.7 s	
Vattendjup, d	= 8.80 m	✓ 0.80 ?
Re	= 2.0×10^5	(i medelvattenytan)
KC	= 3	(i medelvattenytan)
Antal medel-		
bildade vågor	= 5	



Våg B

Våglängd, L = 11.4 m
Våghöjd, H = 0.13 m
Period, T = 4.2 s
Vattendjup, d = 0.80 m
Re = 1.1×10^5 (i medelvattenytan)
KC = 5 (i medelvattenytan)
Antal medel-
bildade vågor = 3



4.2.2 Mätpunkter och undersökta nivåer

För varje vågtyp har hastighetsmätningarna med en micropropeller utförts på nivåerna (-0.10 m, -0.30 m) under lugnvattenytan. På varje nivå har dessa hastighetsmätningar gjorts på 15 olika punkter runt cylindern och i en punkt i ostört område.

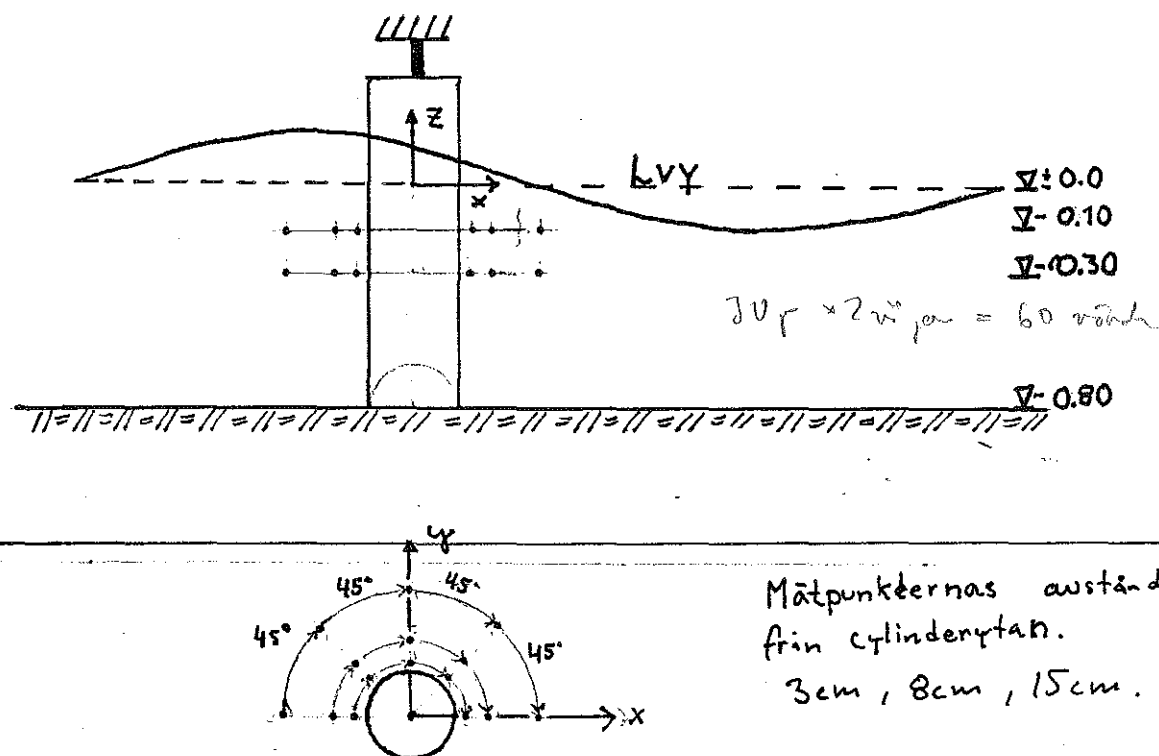


Fig 4.3 Mätpunkter och mätnivåer runt cylindern.

4.3 Utförande

För att avgöra om man kan tillämpa 2D-potentialströmningsteori för att beräkna de största horisontella partikelhastigheterna under vågtoppen då vågtoppen passerar cylinder, har undersökningen utförts i två steg.

Steg 1: Vi har med micropropellern mätt upp de största horisontella hastigheterna i ostört område. Utgående från dessa hastigheter har vi med potentialströmningsteori räknat fram en teoretisk hastighetsfördelning runt cylindern.

Steg 2: Vi har med micropropellern mätt upp de största horisontella hastigheterna till storlek och riktning då vågtoppen passerar cylindern.

Utvärderingen har sedan skett genom att vi jämfört teoretisk hastighetsfördelning med uppmätt "verklig" hastighetsfördelning.

4.4 Mätförfarande

Hastighetsmätning i ostört område

Micropropellern placerades ut med propelleraxeln parallellt med x-axeln. De största horisontella hastigheterna under vågtoppen registrerades, d v s de största horisontella hastigheterna i positiv x-riktning. Genom att ha en våghöjds-mätare utplacerad invid propellern kunde vi avgöra vid vilken våghöjd dessa hastigheter inträffade.

Hastighetsmätning runt cylindern

24 ?

För att i varje mättpunkt kunna bestämma de största horisontella hastigheterna till storlek och riktning har vi använt oss av ett speciellt mättningsförfarande. Genom kontrollmätningar har vi konstaterat att micropropellern avger störst antal pulser då strömningsriktningen är parallell med propelleraxeln.

Utgående från detta har vi i varje mätpunkt gjort mätningar där propelleraxeln har vridits i intervall på 5° mellan varje mätning. Den maximala hastigheten som då erhållits är den totala hastigheten i punkten och den aktuella vinkeln för propelleraxeln är liktydig med strömningsriktningen i punkten.

5. RESULTAT

5.1 Strömningsmönster

Uppmätta strömningsriktningar och strömningsriktningar givna av 2D-potential-strömningsteori redovisas i Tabell 1. I fig. 5.1 är använda vinklar definierade. Sammantaget uppvisar teorin och de uppmätta värdena vissa skilnader i strömningsmönster. Genomgående för de uppmätta värdena i förhållande till teorin kan sägas vara:

- Brantare banor på cylinderns framsida.
- Ej tangentiell riktning vid 90 d.v.s. mitt på cylindern.
- Flackare banor på cylinderns baksida.

Dessa avvikelser är gemensamma för vågorna och speciellt uttalade nära cylinderytan.

VÅG A

VÅG B

45°

	Uppmätt nivå-0.1	Uppmätt nivå-0.3	Potential- teori		Uppmätt nivå-0.1	Uppmätt nivå-0.3	Potential- teori	
3cm	50°	50°	55°		45°	45°	55°	10°
8cm	65°	65°	65°		65°	65°	65°	
15cm	70°	75°	75°		80°	80°	75°	

90°

	Uppmätt nivå-0.1	Uppmätt nivå-0.3	Potential teori		Uppmätt nivå-0.1	Uppmätt nivå-0.3	Potential- teori	
3cm	85°	85°	90°		85°	85°	90°	
8cm	85°	85°	90°		90°	90°	90°	
15cm	85°	85°	90°		90°	90°	90°	

135°

	Uppmätt nivå-0.1	Uppmätt nivå-0.3	Potential- teori		Uppmätt nivå-0.1	Uppmätt nivå-0.3	Potential- teori	
3cm	120°	115°	125°	10°	120°	120°	125°	
8cm	110°	110°	115°		115°	115°	115°	
15cm	105°	105°	105°		105°	105°	105°	

Tabell 1. Uppmätta och teoretiska strömningsriktningar
(se enl. fig. 5.1)

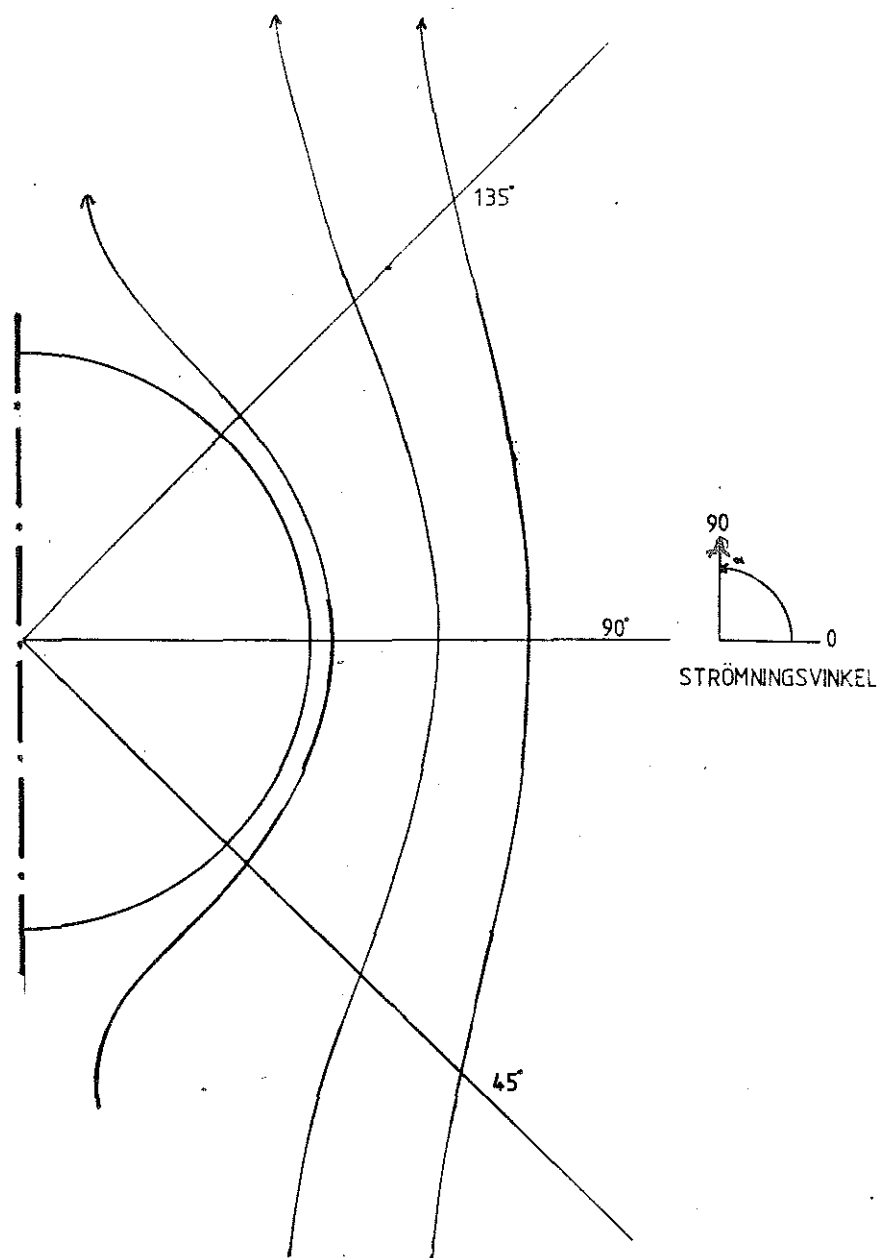
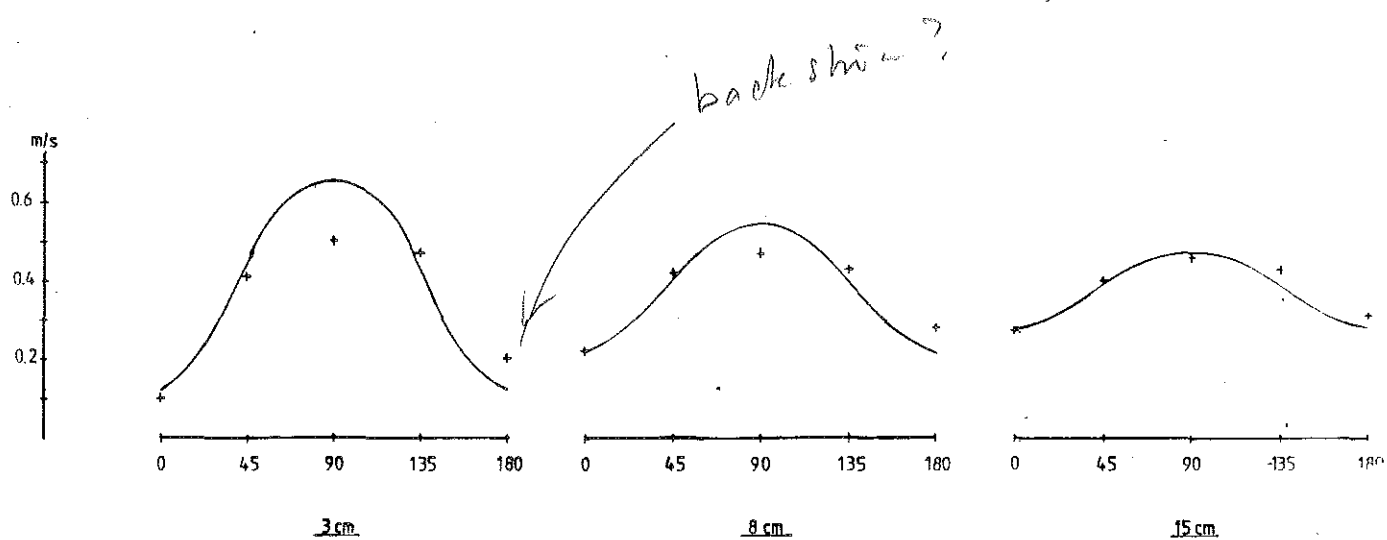


Fig 5.1 Strömningsbanor enligt 2D-potential-strömningssteori.

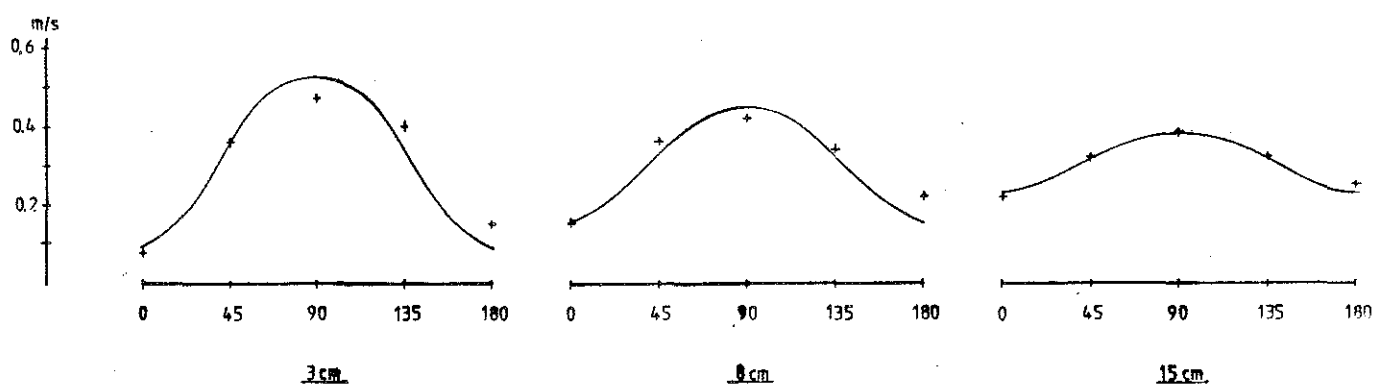
5.2 Hastigheter

I Figur 5.2 redovisas hastigheter framräknade med 2D-potentialströmningsteori och uppmätta hastigheter. Man kan konstatera att överensstämmelsen mellan teoretiska och uppmätta hastigheter i stort sett är god. Vissa genomgående avvikelser kan dock konstateras:

- Vid 90° ligger uppmätta hastigheter lägre än teoretiska. Detta är mer uttalat för våg A än för våg B. Avvikelse minskar med avståndet från cylinderytan och med djupet.
- Vi har i regel mätt en något högre hastighet vid 135° dvs. på baksidan, än vid 45° . Vilket medför en runt 90° osymetrisk strömningsbild.
- Uppmätta hastigheter i området rakt framför cylindern är lägre än de teoretiska. I fig. 5.3 visas den procentuella avvikelsen mellan teoretiska och uppmätta värden i detta område för våg B. Man ser att avvikelse ökar ju närmare cylinderytan man kommer. Detta innebär att retardationen är högre än vad teorin ger.



VÅG A -0.10

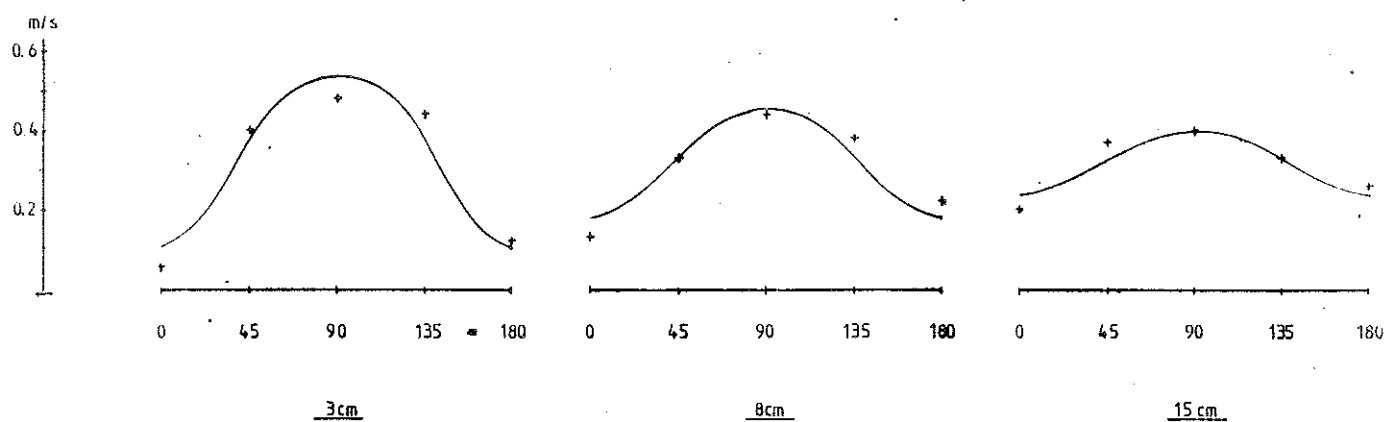


VÅG A -0.30

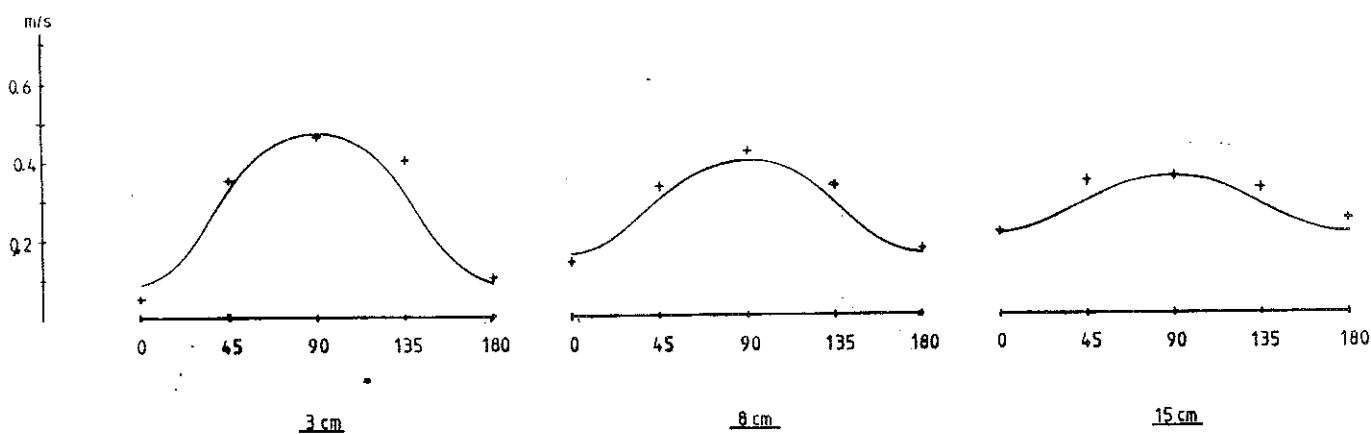
Fig 5.2 (A). Hastigheter för våg A.

— 2D-potentialströmningsteori.

+ Uppmätta hastigheter.



VÅG B - 0.10



VÅG B - 0.30

Fig. 5.2 (B). Hastigheter för våg B.

— 2D-potentialströmningsteori.

+ Uppmätta hastigheter

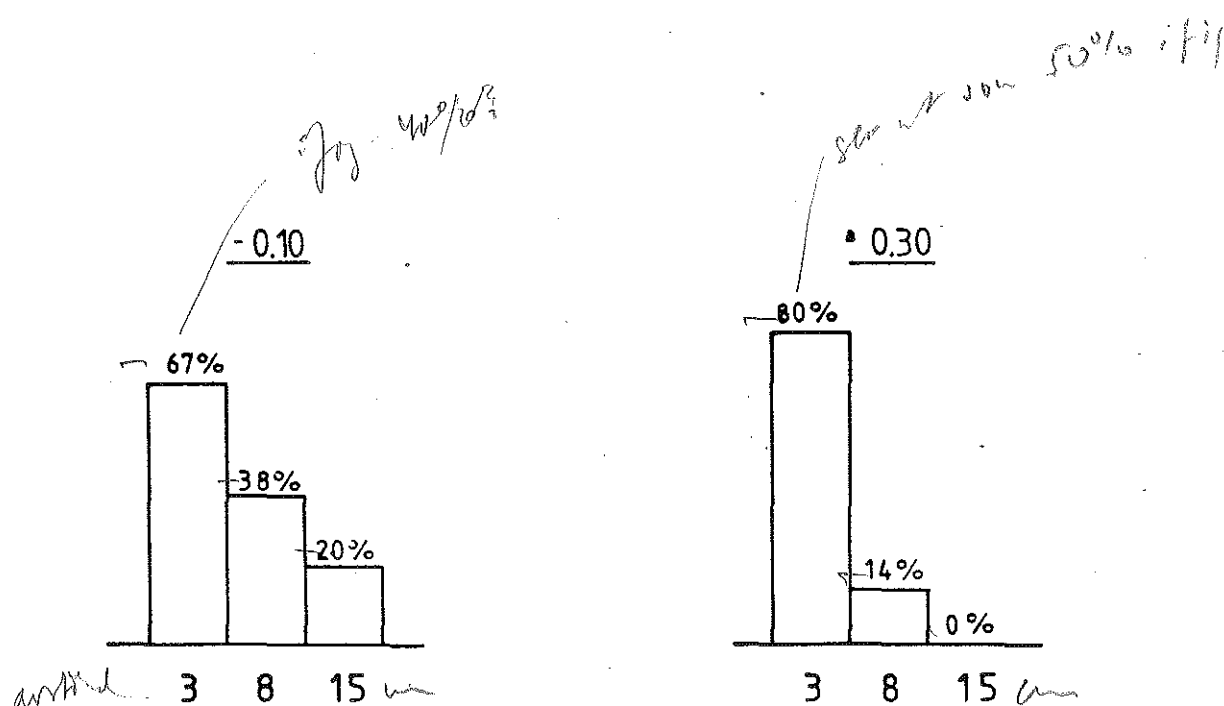


Fig 5.3 Procentuell avvikelse från teorin i området rakt framför cylindern, våg B.

9c

45 26 16

44 13

41% 20% 10%

44 12

6. SLUTSATSER

Frågan som vi ställde oss i kap. 1. var: Kan man med 2D-potentialströmningsteori beskriva hur de i en vågtopp största horisontella partikelhastigheterna, till storlek och riktning, förändras då vågtoppen passerar cylindern?

På vår fråga kan vi svara både Ja och Nej.

Ja till att beskriva strömningshastigheten runt cylindern.

Nej till att helt korrekt beskriva strömningsriktningen nära cylindern.

De av oss kända strömnings analogierna förklarar störningar av strömningsbilden enbart med separationens läge och separationspunktens vandring. Vi har snarare funnit att strömningsmönstret runt cylindern även är beroende av vad som händer på cylinderns framsida. Våra mätningar tyder på att man där har ett förstorat gränsskikt som förutom det i kap. 1. definierade också består av ett område, med av cylindern retarderat vatten. Att så är fallet grundar vi på följande:

- att Strömningsriktningarna på framsidan av cylindern är brantare än vad teorin ger.
- att Den rakt framför cylindern konstaterade tendensen, att retardationen i verkligheten är högre än vad teorin ger, tyder på att hastigheten har blivit noll innan partiklarna nått cylinderytan. Detta medför att man har ett skikt med stillastående vatten.

Vi har även visuellt kunnat iakta att det på framsidan av cylindern existerar en förtjockning av gränsskiktet.

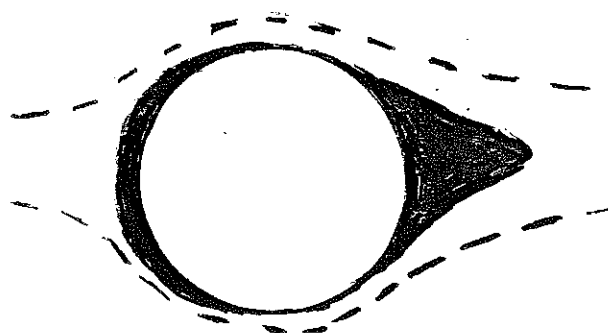


Fig 6.1 Schematisk bild av strömningen nära cylinderytan.

Sammantaget kan vi säga att strömningen kring cylindern tycks vara beroende både av ett förtjockat gränsskikt beläget på framsidan, samt av separation på cylinderns baksida. I fig. 6.1 är strömningen nära cylinderytan skisserad. Man kan se att strömningen inte följer den verkliga cylinderytan utan snarare den fiktiva kropp som består av den verkliga cylindern plus de påverkade områdena framför och bakom denna.

På större avstånd från cylinderytan överensstämmer dock som tidigare nämnts strömningen väl med teorin.

REFERENSER

1. ^{h/} Bergdal Lars, Beräkning av vågkrafter. (Institutionen för vattenbyggnad, CTH 1983)
- 2.3 ^{tt} Cederwall Klas, Larsen Peter, Hydraulik för Väg och Vattenbyggare. (1976)
3. 4 Grass and Kemp, Flow visualisation studies of oscillatory flow past smooth and rough circular cylinders in Mechanics of wave-induced forces on cylinders, (ed T.L. Shaw), Pittman, London, PP 406-420. (1979) ^c
4. 5 ^c Moberg Göran, Use of korrekt or nominal water velocities and accelerations in Morisons equation. (Institutionen för vattenbyggnad CTH 1985) ^c
5. 6 ^e Moe Arild, Hydrodynamiske kræfter og bevegelser. (Institutt for havenbygging Norges tekniske høgskole 1980) [✓]
6. 7 Olson Ruben M, Essentials of engineering fluid mechanics Harper & Row, Publishers, New York. 1980 [✓]
7. 8 Sarpkaya, Isaacson, Mechanics of wave forces on offshore structures. (Van Nordstrand Reinhold Company 1981) [✓]
8. 9 Sjöberg Anders, Vindvågor. (Institutionen för vattenbyggnad 1983)

* Bergdahl La, Carlsson B

* Bridge D Laboratory study of lift forces on circular piles J. Winterkuns, Harbours and coasta engineering division (1971)

Figma felvänd!

Kalibrering för
hastighetsmätning

