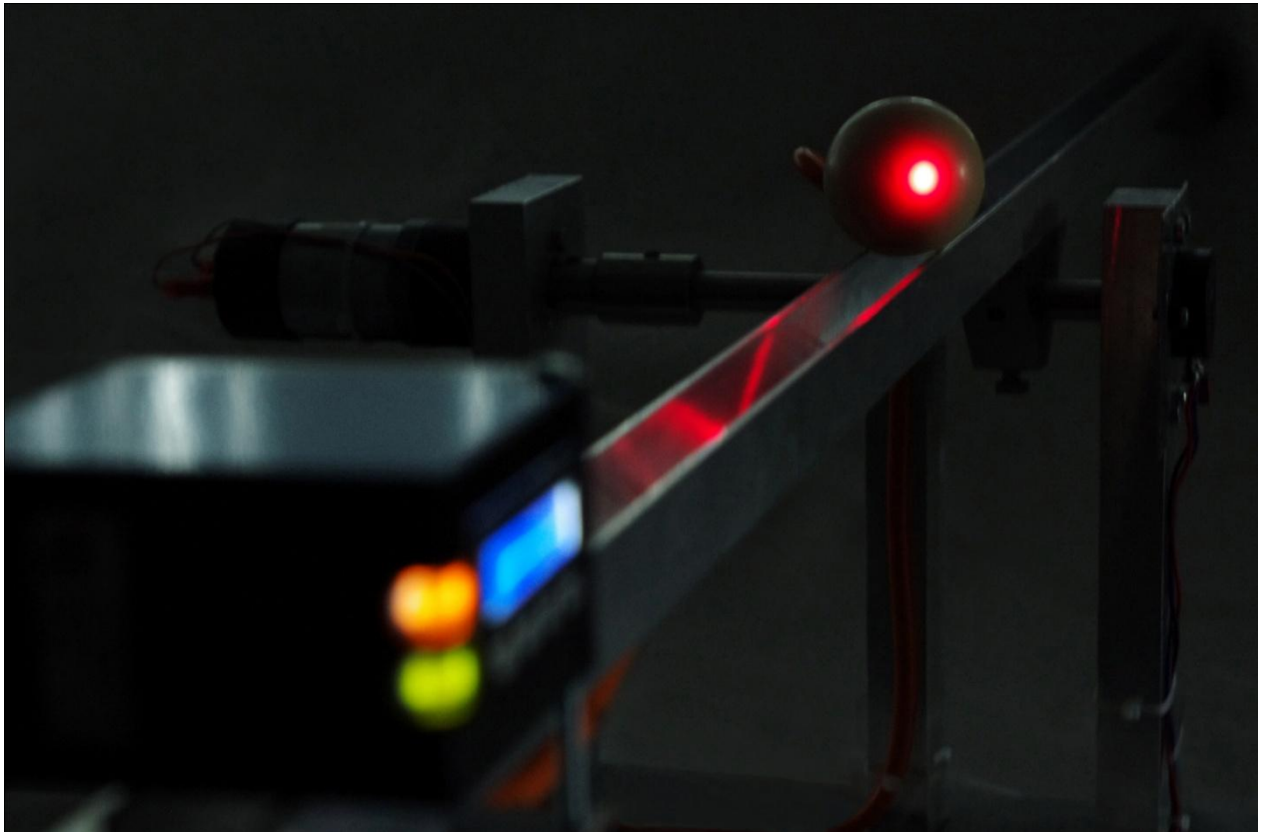


KANDIDATARBETE



Ball and Beam

Utveckling av ett demonstrationsobjekt för reglerteknik

ROBERT HJELTE
ANTON KLINTBERG
PHILIP STABERG

RASMUS HOFWIMMER
DANIEL LIDANDER

Institutionen för Signaler och System
Avdelningen för Reglerteknik, Automation och Mekatronik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2012

SSYX02-12-32

Förord

Denna rapport är skriven i samband med ett kandidatarbete under våren 2012 på institutionen Signaler och System vid Chalmers tekniska högskola. Under arbetets gång har en mängd personer underlättat arbetet genom sitt kunnande och engagemang.

Vi vill särskilt tacka vår handledare professor Bo Egardt som har vägledit oss genom hela arbetet och bidragit med värdefull kritik vid flera tillfällen.

Vi vill också tacka personalen i prototyplabbet som lät oss få tillgång till labbet vid flera tillfällen när vi kom oanmälda. De bidrog dessutom med mycket kunskap och idéer vid utvecklingen av den mekaniska konstruktionen.

Slutligen vill vi tacka Pär Malmberg på SKF som visade stort engagemang när han som utomstående importerade och skänkte stålkulor till projektet.

Chalmers 2012

Robert Hjelte
Rasmus Hofwimmer
Anton Klintberg
Daniel Lidander
Philip Staberg

Abstract

This report involves the construction, modeling, control design and implementation of an expanded Ball and Beam System. The system is supposed to balance a ball on a beam, and also accelerate and roll the ball off the beam so it will land at a predetermined location.

The purpose of this report is to describe the development of the system and provide a theoretical basis for the functions of the developed prototype. The reader can use solutions and discussions to facilitate the development of a similar system.

The process of balancing and accelerating the ball is accomplished by the use of two controllers, a lead- and P-controller respectively. The positioning of the beam is accomplished using a DC motor, for which two control strategies are presented. Both strategies have been verified with computer-based simulations, and one of these strategies has been implemented in the final product.

The system is coded and executed by Simulink, which is connected serially to the microprocessor Arduino Mega 2560. The ball position on the beam is measured accurately with the laser sensor SICK-DT50, and beam angle with the angular sensor, WAL305.

The whole system has been evaluated through computer-based simulations and practical experiments. The evaluation shows that the system can balance a specific ball on the beam even if the ball is exposed to external disturbances. The function which accelerates the ball and rolls it off the beam works, with varying precision, for distances up to 1.5 meters from the beam's center of rotation, when the beam is located 0.95 meter above floor level.

Sammanfattning

Denna rapport behandlar konstruktion, modellering, reglerdesign och implementering av ett utökat Ball and Beam-system. Utöver funktionen att balansera en kula ska systemet även kunna accelerera och rulla av kulan från bommen och få den att landa på en förutbestämd plats.

Syftet med rapporten är att beskriva utvecklingen av systemet och ge ett teoretiskt underlag för funktionerna hos den utvecklade prototypen. Läsaren kan också ta del av lösningar och diskussioner för att underlätta utveckling av ett liknande system.

Balansering och acceleration av kulan genomförs med en lead- respektive P-regulator. Bommens positionering genomförs med hjälp av en likströmsmotor, för vilken två styrstrategier presenteras. Båda strategierna har verifierats med simuleringar och ett av dem har implementerats i det verkliga systemet.

Styrstrategierna implementeras via Simulink som kopplas seriellt till mikroprocessorn Arduino Mega 2560. Kulans position på bommen mäts med en lasersensor, SICK-DT50, och bommens vinkel med en vinkelsensor, WAL305.

Hela systemet har utvärderats genom simuleringar och praktiska experiment. Utvärderingen visar att systemet kan balansera en specifik kula på bommen även om kulan utsätts för störningar. Funktionen för acceleration och avrullning av kulan fungerar, med varierande precision, för avstånd upp till 1,5 meter från bommens rotationscentrum när bommen befinner sig 0,95 meter ovanför marken.

Innehåll

1	Introduktion	1
1.1	Bakgrund	1
1.2	Syfte	1
1.3	Avgränsningar	2
1.4	Hållbar utveckling	2
2	Elektromekanisk konstruktion	3
2.1	Systemöverblick	3
2.2	Likströmsmotor	4
2.3	Sensorer	4
2.3.1	Positionssensor	4
2.3.2	Vinkelsensor	5
2.3.3	Strömsensor	5
2.4	Drivkrets	5
2.5	Styrenhet	5
3	Matematisk modellering	7
3.1	Kulans rörelse på bommen	7
3.1.1	Likströmsmotorns dynamik	7
3.1.2	Bommens dynamik	8
3.1.3	Kulans dynamik på bommen	9
3.2	Kulans rörelse i luften	10
4	Styrlagsdesign	13
4.1	Balansering av kula	13
4.2	Avrullning av kula	14
4.3	Styrning av likströmsmotor	16
4.3.1	Likströmsmotorns blockschema	16
4.3.2	Vinkelreglering med lead-lag-regulator	17
4.4	Alternativ styrning av likströmsmotor	18
4.4.1	Strömreglering	18
4.4.2	Varvtalsreglering	19
4.4.3	Vinkelreglering	20
5	Resultat	21
5.1	Balansering av kula	21
5.1.1	Simuleringar	21
5.1.2	Praktisk verifiering	24
5.2	Avrullning av kula	25
5.2.1	Simuleringar	25
5.2.2	Praktisk verifiering	27
6	Diskussion	29
6.1	Sensorer	29
6.2	Implementering med Simulink	29
6.3	Implementering av motorstyrning	29
6.4	Balansering av kula	30
6.5	Avrullning av kula	30
7	Slutsats	31

Referenser	33
Appendix	35
A Elektrisk konstruktion	35
B Stödjande beräkningar för val av motor	36
C Linjärisering av kulans dynamik på bommen	38
D Design av balanseringsregulator	39
E Linjärisering av kulans dynamik vid avrullning	41
F Design av hastighetsregulator	42
G Design av lead-lag-regulator	43
H Design av strömregulator	45
I Design av varvtalsregulator	46

Beteckningslista

Nedan presenteras de storheter och beteckningar som används i rapporten. Variabler och konstanter separeras i två tabeller.

Tabell 1: Använda variabler.

Beteckning	Storhet	Enhet
E_a	Elektromotorisk kraft (back-EMK)	[V]
F_c	Centripetalkraft	[N]
F_f	Friktionskraft	[N]
i_a	Ankarström	[A]
N	Normalkraft	[N]
r	Avstånd från kulans mittpunkt till bommens rotationsaxel	[m]
\dot{r}_0	Kulans begynnelsehastighet längs med bommen för dess rörelse i luften	[m/s]
T_{kula}	Kulans belastande moment	[Nm]
T_e	Motorns drivande moment	[Nm]
U_a	Ankarspänning	[V]
v_0	Kulans begynnelsehastighet för dess rörelse i luften	[m/s]
x_0	Kulans begynnelsevärde i x-led för dess rörelse i luften	[m]
y_0	Kulans begynnelsevärde i y-led för dess rörelse i luften	[m]
θ	Bommens vinkel	[rad]
θ_0	Bommens vinkel när kulan påbörjar sin rörelse i luften	[rad]
$\dot{\theta}_0$	Bommens vinkelhastighet när kulan påbörjar sin rörelse i luften	[rad/s]

Tabell 2: Använda konstanter.

Beteckning	Storhet	Värde	Enhet
$a_{rätblock}$	Rätblockets längd	$6 \cdot 10^{-2}$	[m]
b	Dämpning	$0,12 \cdot 10^{-3}$	[Ns/m]
$c_{rätblock}$	Rätblockets bredd	$2,5 \cdot 10^{-2}$	[m]
g	Tyngdacceleration	9,82	[m/s ²]
J	Sammanlagt tröghetsmoment för J_{bom} och J_{motor}	0,19	[kgm ²]
J_{bom}	Bommens, positionssensorns och motviktens tröghetsmoment	0,19	[kgm ²]
J_{motor}	Motorns tröghetsmoment	$4,23 \cdot 10^{-6}$	[kgm ²]
k_e	EMK-konstant	$2,0 \cdot 10^{-3}$	[V/rad/s]
k_t	Momentkonstant	1,4463	[Nm/A]
ℓ	Bommens totallängd	1,10	[m]
L_a	Induktans i ankarlindningen	$3,25 \cdot 10^{-3}$	[H]
m_{bom}	Bommens massa	0,3	[kg]
m_{kula}	Kulans massa	0,1	[kg]
$m_{motvikt}$	Motvikt till lasersensor	0,29	[kg]
$m_{rätblock}$	Rätblockets massa	0,29	[kg]
m_{sensor}	Lasersensorns massa	0,2	[kg]
R_a	Resistans i ankarlindningen	8,152	[Ω]
$r_{rätblock}$	Avstånd från rätblockets mittpunkt till bommens rotationsaxel	0,52	[m]

1 Introduktion

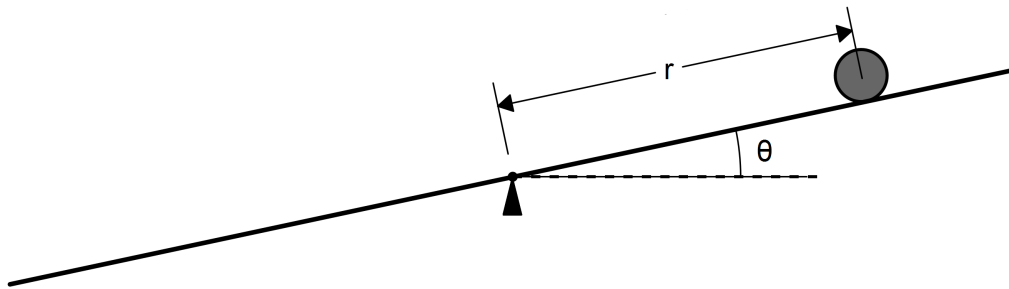
1.1 Bakgrund

Ett nyttigt inslag i teoretisk undervisning är praktiska demonstrationer, som stärker kopplingen mellan teori och verklighet. Genom iögonfallande tillämpningar ökar sannolikt förståelsen, samtidigt som många intresse kan väckas.

Ett populärt laboratorieexperiment vid undervisning av reglerteknik kallas för Ball and Beam. Experimentet avser att balansera en kula på en bom, se figur 1. Bommen skall styras så att kulan förflyttas till en förutbestämd position och stannar där, även om kulan utsätts för störningar.

En orsak till experimentets popularitet är att systemet, trots sin enkelhet, är instabilt. Utan ett återkopplat regelsystem kommer kulan rulla av bommen. Ett återkopplat system ändrar bommens vinkel beroende på kulans läge i förhållande till referensläget. Systemets enkelhet gör att den reglertekniska insatsens betydelse är lätt att förstå.

I detta arbete har experimentet utökats. Systemet skall förutom att balansera kulan också kunna accelerera och rulla av den från bommen. Detta utförs under kontrollerade former, med vilket menas att kulan skall landa på en förutbestämd plats.



Figur 1: Illustrerar principen för Ball and Beam.

1.2 Syfte

Rapporten redogör för design och tekniska lösningar av ett utökat Ball and Beam-system som kan användas som ett demonstrationsobjekt för reglerteknik. Systemet skall kunna balansera en kula till en given plats på en bom och få den att stanna där även om kulan utsätts för störningar. Dessutom skall kulan kunna accelereras och rullas av bommen så att den landar på en förutbestämd plats.

Syftet med rapporten är att beskriva utvecklingen av systemet och ge ett teoretiskt underlag för funktionerna hos den utvecklade prototypen. Läsaren kan också ta del av lösningar och diskussioner för att underlätta utveckling av ett liknande system.

1.3 Avgränsningar

Prototypen avser att balansera en specifik kula och är således inte designad för att hantera kulor med andra storlekar och vikter. Vid utveckling av modeller, samt beräkningar antas friktionskraften vara tillräckligt stor för att kulan ska rulla utan att glida. Utöver detta antas bommens rotationsaxel gå genom bommens tyngdpunkt. Ingen hänsyn tas till luftmotstånd, eftersom det bedöms ha en mycket liten betydelse för systemet som helhet.

Inga kritiska val av sensorer genomförs för att uppnå en given prestanda hos systemet, eftersom projektet är begränsat av en total budget på 5000 kronor.

1.4 Hållbar utveckling

Prototypen är avsedd att användas som ett demonstrationsobjekt för reglerteknik. En koppling mellan reglerteknik och hållbar utveckling finns genom möjligheten att konstruera energieffektiva system, som reglertekniska lösningar erbjuder. Genom att använda sensorer för att mäta önskade storheter kan styrlagar med stor precision utvecklas för att göra processer energieffektivare.

Ingenjörer med goda tekniska kunskaper är en förutsättning för att utveckla hållbara och energieffektiva produkter. Demonstrationsobjekt kan sannolikt attrahera fler personer till tekniska utbildningar och även stärka studenters kunskaper.

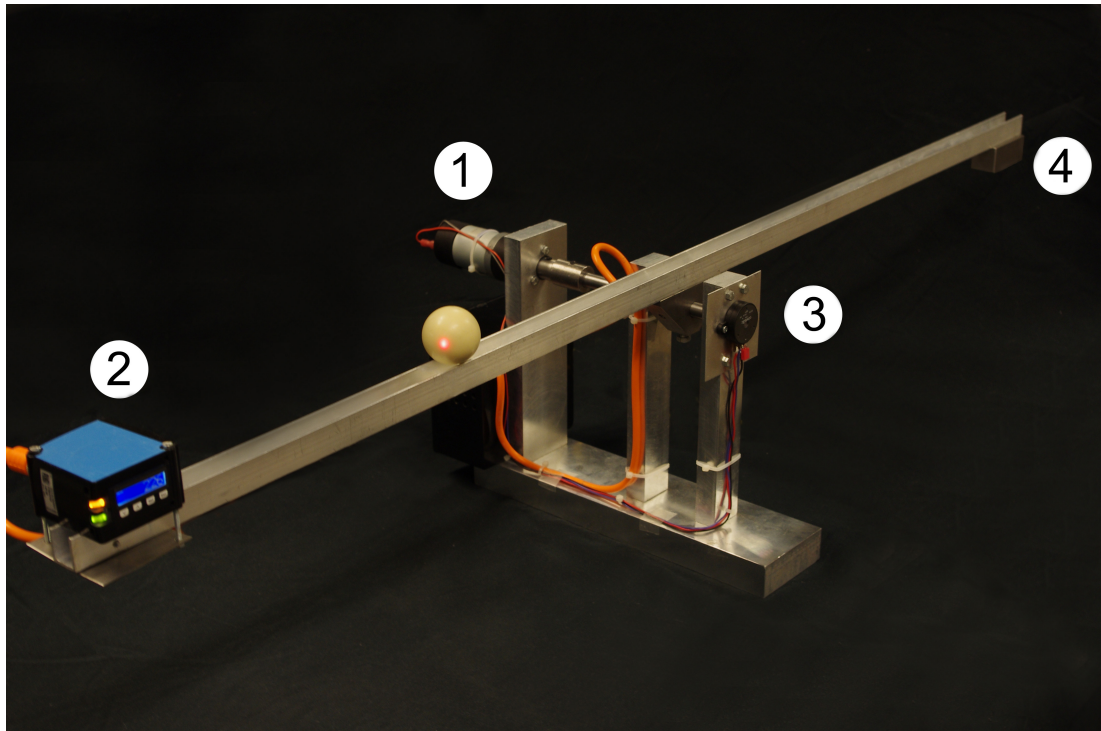
2 Elektromekanisk konstruktion

Detta avsnitt presenterar systemets elektromekaniska konstruktion. Först introduceras systemet som helhet och sedan presenteras enskilda komponenter i efterföljande delavsnitt.

2.1 Systemöverblick

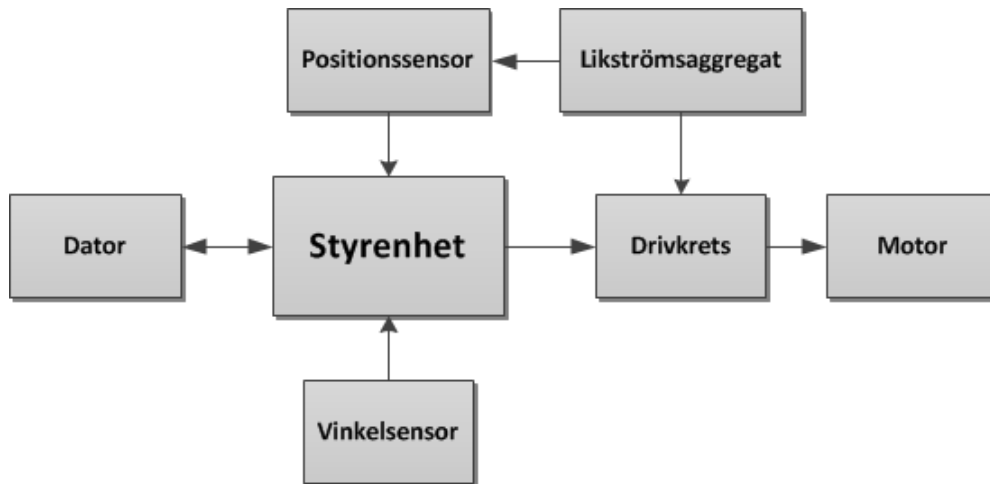
En övergripande bild av den färdiga prototypen ges i figur 2. En positionssensor är monterad på bommens ände för att mäta kulans position. Bommen positioneras med hjälp av en likströmsmotor och dess vinkel mäts med en vinkelsensor som fästs kring rotationsaxeln. Följande komponenter är utmärkta i figuren:

1. Likströmsmotor
2. Positionssensor
3. Vinkelsensor
4. Motvikt



Figur 2: Översiktsbild över den färdiga prototypen.

Den elektriska delen av konstruktionen beskrivs av blockschemat i figur 3, där kommunikationen mellan styrenhet, dator, sensor, drivkrets och motor framgår. Styrenheten får information av sensorerna om systemets tillstånd och skickar utifrån detta en styrsignal till drivkretsen som förer motorn med önskad spänning. Datorn används för att programmera systemet innan programmet laddas över till styrenheten via en USB-anslutning. Styrenheten exekverar sedan programmet utan inverkan från datorn. För en mer detaljerad beskrivning av systemets elektriska konstruktion hänvisas läsaren till appendix A.



Figur 3: Principiellt blockschema över det elektriska systemet.

2.2 Likströmsmotor

Styrningen av bommen genomförs med en permanentmagnetiserad likströmsmotor, E192.24.67, med ett nominellt vridmoment på 2,2Nm upp till varvtal i intervallet 45-60,5rpm [1]. För att motivera valet av motor redovisas stödjande beräkningar i appendix B. Där framgår det att motorn måste kunna generera ett vridande moment på minst 1,94Nm vid varvtal upp till 30rpm.

2.3 Sensorer

De storheter som återkopplas i systemet måste mätas eller skattas. Dessa är:

- Kulans position på bommen
- Bommens vinkelläge
- Kulans hastighet

I avsnitt 4.4 presenteras en alternativ regulatorstruktur för styrning av likströmsmotorn som inte implementeras. Denna styrning kräver fler återkopplingar och då tillkommer mätning eller skattning av följande storheter:

- Ström till motorn
- Motorns varvtal

I efterföljande delavsnitt presenteras sensorer som används och även sensorer som kan användas för implementering av den alternativa regulatorstrukturen.

2.3.1 Positionssensor

För att lokalisera kulans position används en lasersensor, SICK-DT50. Denna sensor avger en analog signal som är proportionell mot det uppmätta avståndet och har en mätosäkerhet på $\pm 5\text{mm}$ [2]. Arbetsområdet ligger mellan 200-10 000mm, där sensorn har 16 bitars upplösning [2]. Eftersom sensorn fästs på bommens ena ände medför det att de första 200mm blir oläsbara. Sensorn kräver en matningsspänning i intervallet 15-30V [2].

Positionsmätningen används för att skatta kulans hastighet. Detta utförs genom att positionsändringen divideras med tidsintervallet mellan två valda sampel. På grund av brus i signalen måste tidsskillnaden mellan dessa sampel vara tillräckligt stor för att bruset inte ska ha för stor inverkan på den skattade hastigheten.

2.3.2 Vinkelsensor

Bommens vinkel relativt horisontalplanet mäts med en passiv vinkelsensor, WAL305. Den har en mätosäkerhet på $\pm 0,1^\circ$ och ett elektriskt mätområde i intervallet $5 - 340^\circ$ [3]. Sensorn har en linjär karaktäristik och fungerar som en potentiometer med varierande resistans upp till $5k\Omega$ [3]. Varje vinkelläge motsvarar en unik resistans från vilken vinkeln kan bestämmas. Utifrån vinkelmätningarna kan motorns varvtal skattas på samma sätt som för kulans hastighet.

2.3.3 Strömsensor

Ett tänkbart alternativ för mätning av ström till motorn är halleffekt-sensorn, ACS756KCA-50B-PFF-T, vars utsignal är en spänning proportionell mot strömmen. Det är möjligt att mäta strömmen i båda riktningarna. Sensorns kretslogik måste förses med en spänning på 5V [4].

2.4 Drivkrets

Motordriften genomförs med hjälp av en H-brygga, L298N [5], som förses med ström från en spänningskälla som ansluts externt till systemet. Genom att skicka pulsbreddsmodulerade signaler (PWM-signaler) till H-bryggan, kan spänningen över motorn varieras.

2.5 Styrenhet

Systemets styrenhet är en Arduino Mega 2560. Den har 54 tillgängliga digitala in- och utgångar varav 14 stycken kan användas för att generera PWM-signaler. Utöver detta har den 16 analoga ingångar med upplösningen 10 bitar [6]. Styrenheten är kapabel att leverera en maximal spänning på 5V utan extra effekttillförsel [6]. Den kopplas till en dator via en USB 2.0-anslutning. Systemet programmeras och exekveras genom Simulink, som stödjer seriell kommunikation med Styrenheten.

3 Matematisk modellering

Avsikten med detta avsnitt är att ta fram matematiska modeller som beskriver systemet när kulan befinner sig på bommen och när den befinner sig i luften. Med hjälp av dessa samband kan regulatorer bestämmas och simuleras tillsammans med de matematiska modellerna.

3.1 Kulans rörelse på bommen

När kulan befinner sig på bommen kan tre kopplade differentialekvationer beskriva hur motor, bom och kula interagerar med varandra. Dessa är:

$$\dot{i}_a = \frac{1}{L_a} \left(U_a - R_a i_a - k_e \dot{\theta} \right) \quad (3.1)$$

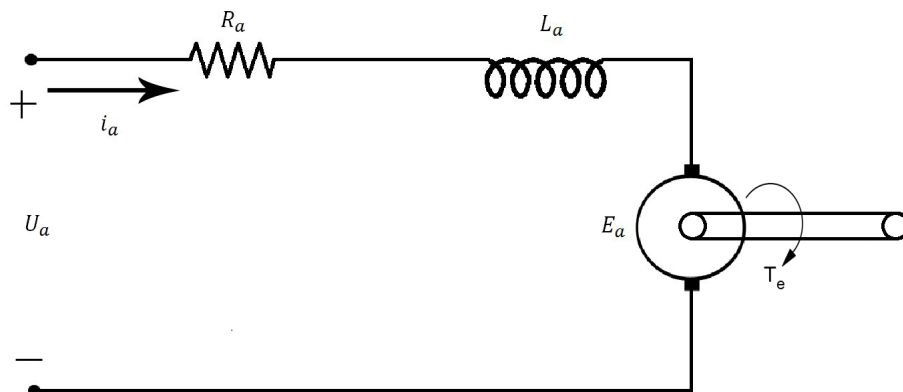
$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_{bom} + m_{kula} r^2 + J_{motor}} \left(k_t i_a - b \dot{\theta} - 2m_{kula} r \dot{r} \dot{\theta} - m_{kula} g r \cos(\theta) \right) \quad (3.2)$$

$$\ddot{r} = \frac{5}{7} \left(r \dot{\theta}^2 - g \sin(\theta) \right) \quad (3.3)$$

Notera att de två nedre ekvationerna är olinjära. Härledning av samtliga differentialekvationer presenteras i följande delavsnitt.

3.1.1 Likströmsmotorns dynamik

En likströmsmotor är en elektromekanisk konstruktion där den elektriska och mekaniska delen sammanlänkas av ett magnetiskt flöde. En ekvivalent krets för en likströmsmotor illustreras i figur 4.



Figur 4: Ekvivalent kretsschema för likströmsmotorn.

För att motorn ska leverera det vridande momentet T_e krävs att hänsyn tas till motorns egna rörelsemängdsmoment och friktionsförluster. Detta ger en ekvation för motorns mekaniska del enligt

$$T_e = k_t i_a - J_{motor} \ddot{\theta} - b \dot{\theta}, \quad (3.4)$$

där den elektriska och mekaniska delen sammanlänkas av motorparametern k_t .

Kirchhoffs spänningslag i motorns ekvivalenta schema ger följande ekvation för den elektriska delen:

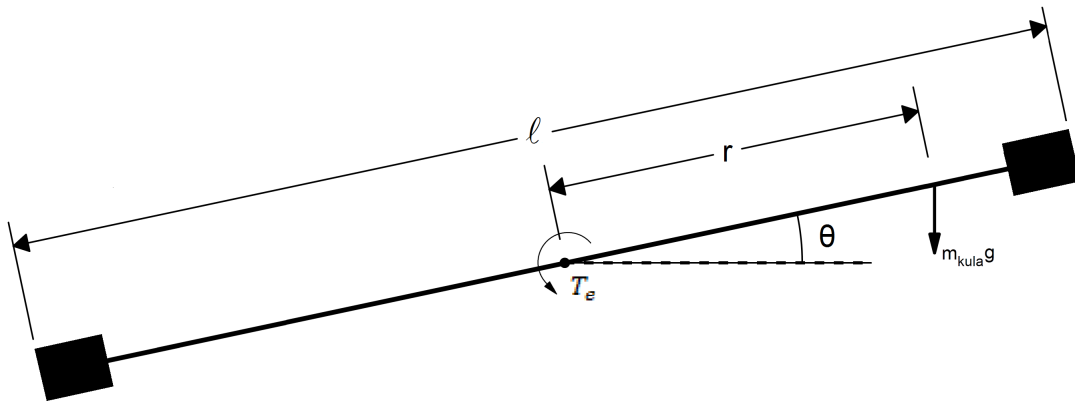
$$U_a = R_a i_a + L_a \dot{i}_a + E_a \quad (3.5)$$

Från ekvation 3.5 och att back-EMK är proportionell mot vinkelhastigheten följer den första differentialekvationen, som beskriver likströmsmotorns elektriska dynamik.

$$\dot{i}_a = \frac{1}{L_a} (U_a - R_a i_a - k_e \dot{\theta}) \quad (3.6)$$

3.1.2 Bommens dynamik

En friläggning av bommen då kulan befinner sig vid godtyckligt läge åskådliggörs i figur 5. Denna används som utgångspunkt för härledning av differentialekvationen som beskriver bommens dynamik.



Figur 5: Friläggning av bommen. Rätblocken på bommens ändar representerar positionssensorn och motvikten.

Det totala tröghetsmomentet kring motorns rotationsaxel ges av tröghetsmomentet för bommen, positionssensorn, motvikten och trögheten som kulan verkar med på bommen, [7].

$$J_{axel} = J_{bom} + m_{kula} r^2 \quad (3.7)$$

Där J_{bom} betecknar bommens, positionssensorns och motviktens tröghet, se ekvation 3.8. Positionssensorn och motvikten antas vara två identiska rätblock.

$$J_{bom} = \frac{1}{12} m_{bom} \ell^2 + 2m_{rätblock} r_{rätblock}^2 + \frac{m_{rätblock}}{6} (a_{rätblock}^2 + c_{rätblock}^2) \quad (3.8)$$

När systemet befinner sig i rörelse är det resulterande momenten lika med $\frac{d}{dt}(J_{axel}\dot{\theta})$, eftersom tröghetsmomentet varierar med kulans läge på bommen. Summering av momenten kring motorns rotationsaxel ger:

$$T_e - m_{kula}gr \cos(\theta) = \frac{d}{dt}(J_{axel}\dot{\theta}) = J_{axel}\ddot{\theta} + 2m_{kula}r\dot{\theta} \quad (3.9)$$

Detta kan skrivas om till ett uttryck för bommens vinkelacceleration enligt:

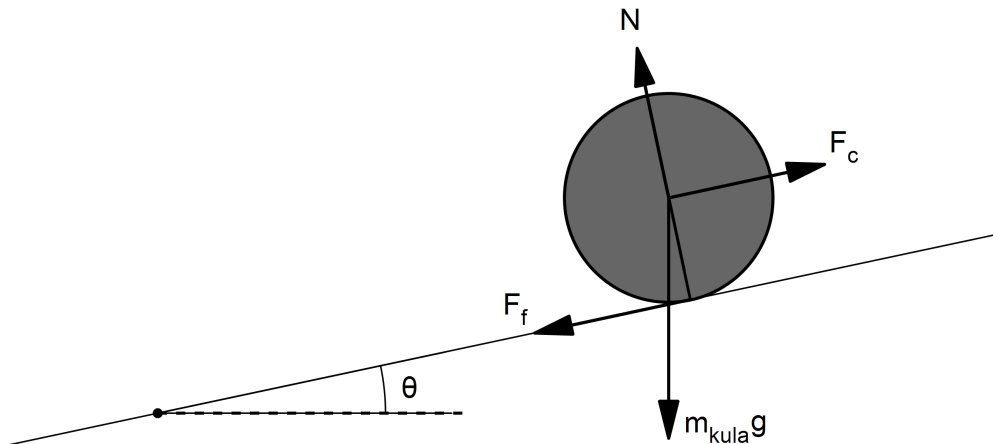
$$\ddot{\theta} = \frac{T_e}{J_{axel}} - \frac{2m_{kula}r\dot{\theta} + m_{kula}gr \cos(\theta)}{J_{axel}} \quad (3.10)$$

Ekvation 3.7 och 3.10 tillsammans med ekvation 3.4 från föregående delavsnitt ger den andra differentialekvationen enligt följande:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_{bom} + m_{kula}r^2 + J_{motor}} \left(k_t i_a - b\dot{\theta} - 2m_{kula}r\dot{\theta} - m_{kula}gr \cos(\theta) \right) \quad (3.11)$$

3.1.3 Kulans dynamik på bommen

Ekvationen som beskriver kulans dynamik längs bommen härleds utifrån en kraftfriläggning. Figur 6 illustrerar kraftfriläggningen när kulan befinner sig vid ett godtyckligt läge på bommen.



Figur 6: Friläggning av kulan på bommen.

Summan av alla krafter i bommens längsriktning resulterar i en acceleration av kulan enligt Newtons andra lag:

$$F_c - F_f - m_{kula}g \sin(\theta) = m_{kula}\ddot{r} \quad (3.12)$$

Ekvation 3.12 tillsammans med uttryck för centripetalkraften och friktionskraften samt antagandet att kulan rullar utan att glida ger:

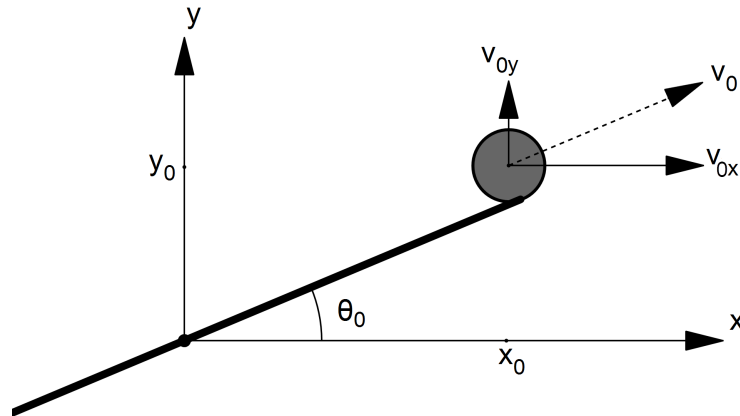
$$m_{kula}r\dot{\theta}^2 - \frac{2}{5}m_{kula}\ddot{r} - m_{kula}g \sin(\theta) = m_{kula}\ddot{r} \quad (3.13)$$

Från ekvation 3.13 erhålls den tredje differentialekvationen:

$$\ddot{r} = \frac{5}{7} \left(r\dot{\theta}^2 - g \sin(\theta) \right) \quad (3.14)$$

3.2 Kulans rörelse i luften

Från modellen när kulan befinner sig på bommen ges de begynnelsevärden som behövs för att beskriva kulans rörelse i luften. I detta avsnitt kommer en matematisk modell för detta att tas fram.



Figur 7: Kulan i avrullningsögonblicket.

Origo för koordinatsystemet väljs i bommens rotationspunkt eftersom detta är den enda fasta punkten i systemet när bommen roterar. Koordinaten där kulan lämnar bommen ges direkt ur figur 7 enligt:

$$y_0 = \frac{\ell}{2} \sin(\theta_0) \quad (3.15)$$

$$x_0 = \frac{\ell}{2} \cos(\theta_0) \quad (3.16)$$

Kulans utgångshastighet beror av kulans hastighet längs med bommen samt bommens rotationshastighet i ögonblicket när kulan lämnar bommen. Utgångshastigheten kan ur figur 7 komposantuppdelas enligt:

$$v_{0y} = \dot{r}_0 \sin(\theta_0) + \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_0 \cos(\theta_0) \quad (3.17)$$

$$v_{0x} = \dot{r}_0 \cos(\theta_0) - \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_0 \sin(\theta_0) \quad (3.18)$$

När kulan befinner sig i luften påverkas kulans hastighet i y-led av gravitationen enligt följande uttryck:

$$v_y(t) = v_{0y} - gt \quad (3.19)$$

Eftersom inverkan från luftmotståndet försummas beskrivs kulans hastighet i x-led av:

$$v_x(t) = v_{0x} \quad (3.20)$$

Integration av v_y och v_x ger uttryck för kulans position i y- respektive x-led vilka beskriver kulans rörelse efter att den lämnat bommen.

$$y(t) = \int_0^t (v_{0y} - g\tau) d\tau + y_0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} + y_0 = \left(r_0 \sin(\theta_0) + \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_0 \cos(\theta_0) \right) t - \frac{gt^2}{2} + y_0 \quad (3.21)$$

$$x(t) = \int_0^t v_{0x} d\tau + x_0 = v_{0x}t + x_0 = \left(r_0 \cos(\theta_0) - \frac{\ell}{2} \dot{\theta}_0 \sin(\theta_0) \right) t + x_0 \quad (3.22)$$

Utifrån valda slutvärden för y och x, som motsvarar en vald landningsplats kan sedan olika värden för utgångshastigheten och bommens vinkel väljas för att matcha landningsplatsen. Hur detta utförs framgår i avsnitt 4.2.

4 Styrlagsdesign

Detta avsnitt behandlar styrningen av systemet. Eftersom styralgoritmerna skiljer sig åt beroende på om kulan skall balanseras eller rullas av bommen, behandlas dessa separat. Utöver detta presenteras två styrstrategier för likströmsmotorn. Orsaken till att två styrsystem presenteras är att den först tänkta styrstrategin innefattade praktiska svårigheter vid implementeringen vilket har lett till användandet av en enklare regulatorstruktur. Detta diskuteras vidare i avsnitt 6.

Styrstrategin som presenteras i avsnitt 4.3 har simulerats och implementerats i det verkliga systemet. Den alternativa regulatorstrukturen som behandlas i avsnitt 4.4 har endast verifierats med simuleringar.

Avsnittet avser att behandla övergripande tankegångar. För att underlätta läsandet hänvisas läsaren till appendix för detaljerade härledningar och beräkningar.

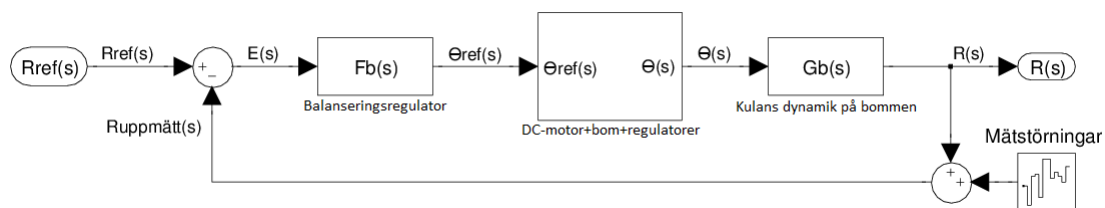
4.1 Balansering av kula

Bommen skall styras så att kulan förflyttas till en förutbestämd plats och stannar där, även om den utsätts för störningar. För att detta skall vara möjligt måste kulans position återkopplas och jämföras med ett referensläge. Det återkopplade systemets regulator beräknar vilken vinkel bommen skall ha för att kulan skall förflyttas till den önskade positionen.

I tidigare avsnitt framgår det att ekvationen som beskriver kulans dynamik på bommen är olinjär. Regulatorn designas utefter en linjärisering av denna. En linjär överföringsfunktion från bommens vinkel till kulans läge härleds i appendix C och ges av:

$$G_b(s) = -\frac{5g}{7s^2} \quad (4.1)$$

Reglersystemet som beskrivs ovan är kaskadkopplat med ett inre system som består av likströmsmotorn, bommen och tillhörande regulatorer, vilket illustreras i figur 8. Bommens vinkel som beräknas av balanseringsregulatorn blir referenssignal till det inre systemet. Vid beräkningarna för det yttre systemet kan det inre systemets dynamik försummas om dess snabbhet är mycket högre än det yttre systemets. En 10 gånger lägre skärfrekvens än för det inre systemet, vilken framgår i avsnitt 4.3, ger $\omega_c = 3rad/s$.



Figur 8: Återkopplat reglersystem för balanseringen av kulan. Det innersta blocket representerar likströmsmotorn, bommen och tillhörande regulatorer.

Utöver skärfrekvensen ställs följande krav på kretsöverföringen:

- $\varphi_m \geq 50^\circ$
- Inget kvarstående fel vid stegformad referenssignal.

där φ_m betecknar systemets fasmarginal.

Systemets överföringsfunktion, enligt ekvation 4.1, är en dubbelintegrator och därför behöver regulatorn ingen integrerande verkan för att eliminera kvarstående fel för en stegformad referenssignal. Detta gäller under förutsättningen att likströmsmotorns reglersystem inte har något stationärt fel, med vilket menas att dess utsignal antas vara lika med dess referenssignal. För att tillgodose kraven på kretsöverföringen används en lead-regulator:

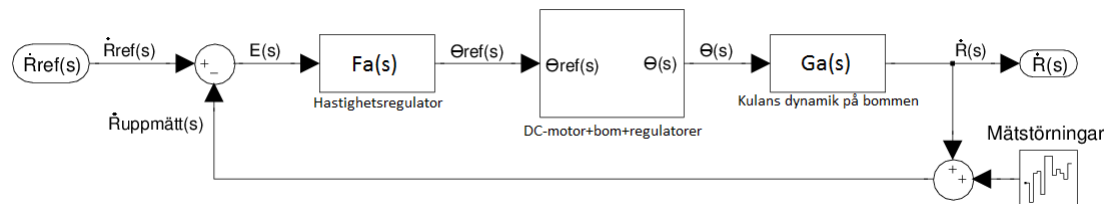
$$F_b(s) = -0,5 \left(\frac{0,92s + 1}{0,12s + 1} \right) \quad (4.2)$$

För utförliga beräkningar se appendix D.

4.2 Avrullning av kula

Bommen skall kunna utföra en rörelse så att kulan rullar av bommen på ett sätt så att dess landningsplats kan förutbestämmas. Från avsnitt 3.2 framgår det att kulans landningsplats beror av tre variabler, kulans hastighet när den lämnar bommen samt bommens vinkel och vinkelhastighet när kulan lämnar den.

För att förenkla styrmetoden återkopplas endast kulans hastighet på bommen för att nå önskad utgångshastighet. Detta åskådliggörs i figur 9 där det också framgår att systemet är kaskadkopplat med likströmsmotorns styrsystem.



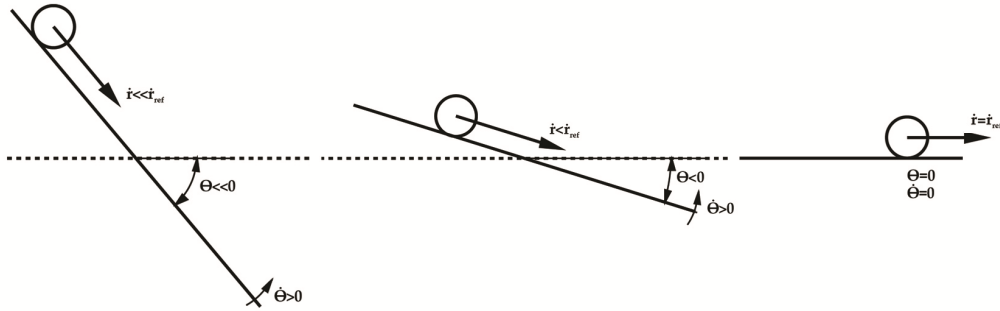
Figur 9: Återkopplat reglersystem för avrullningen av kulan. Det innersta blocket representerar likströmsmotorn, bommen och tillhörande regulatorer.

När skillnaden mellan kulans verkliga hastighet och dess referenshastighet är stor accelereras kulan med ett stort vinkelutslag på bommen. Bommens vinkel närmar sig horisontellt läge när kulans hastighet närmar sig referenshastigheten. Detta åskådliggörs i figur 10. Om referenshastigheten inte väljs för högt kommer bommens vinkel vara 0° och dess vinkelhastighet 0 rad/s när kulan lämnar bommen. Detta medför att kulans landningsplats endast beror på kulans hastighets längs bommen och kan bestämmas med enkla specialfall av sambanden 3.21 och 3.22 enligt,

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2|y(t)|}{g}} \quad (4.3)$$

$$x(t) = \dot{r}_{ref}t + x_0 = \dot{r}_{ref}\sqrt{\frac{2|y(t)|}{g}} + x_0, \quad (4.4)$$

där \dot{r}_{ref} betecknar den önskade utgångshastigheten.



Figur 10: Beskriver principen för hastighetsreglering för avrullningen av kulan.

Om kulan inte hinner uppnå referenshastigheten under accelerationsförloppet kommer bommen fortfarande vara i rörelse och dess vinkelhastighet kommer ge ett bidrag till kulans utgångshastighet. Detta medför att kulans landningsplats är svår att förutsäga eftersom informationen om bommens vinkel och vinkelhastighet inte utnyttjas.

För att designa en linjär hastighetsregulator behöver kulans dynamik på bommen linjäriseras kring en lämplig arbetspunkt. Detta utförs i appendix E. Det framgår att överföringsfunktionen från bommens vinkel till kulans hastighet ges av.

$$G_a(s) = -\frac{5g\cos(0,4)}{7s} \quad (4.5)$$

Systemets skärffrekvens väljs till $\omega_c = 3\text{rad/s}$, vilket är tio gånger mindre än likströmsmotorns snabbhet. Detta uppnås med en P-regulator enligt:

$$F_a(s) = -0,433 \quad (4.6)$$

För utförliga beräkningar se appendix F.

4.3 Styrning av likströmsmotor

Bommen positioneras med hjälp av en likströmsmotor som behöver ett styrsystem för att kunna följa en vinkelreferens. Detta avsnitt behandlar design av det styrsystem som används i det verkliga systemet och inleds med en beskrivning av likströmsmotorns blockschema som är utgångspunkten för utvecklingen av regulatorerna.

4.3.1 Likströmsmotorns blockschema

Likströmsmotorn består av en elektrisk och en mekanisk del som båda måste beaktas när motorn regleras. Nedanstående beräkningar grundas i motorns ekvivalenta krettschema som illustreras i figur 4 i avsnitt 3.1.1.

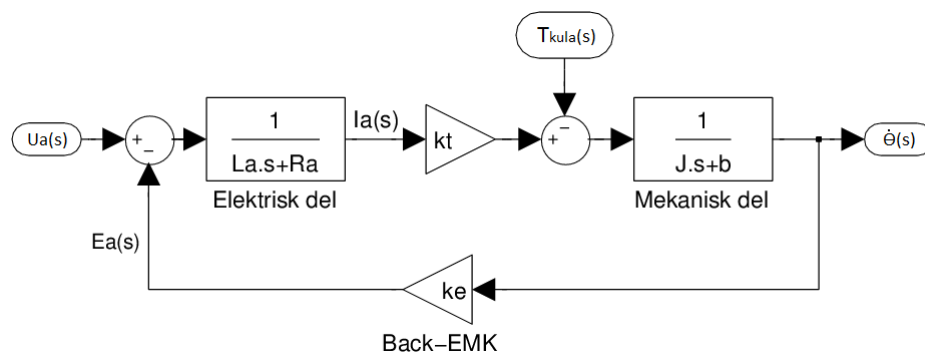
Motorns back-EMK ges av:

$$E_a = k_e \dot{\theta} \quad (4.7)$$

Ekvation 4.7 tillsammans med 3.4 och 3.6 ger ett samband för motorns varvtal enligt:

$$\dot{\theta} = \frac{k_t}{(Js + b)} \left(\frac{U_a(s) - E_a(s)}{L_a s + R_a} \right) - \frac{T_{kula}}{Js + b} \quad (4.8)$$

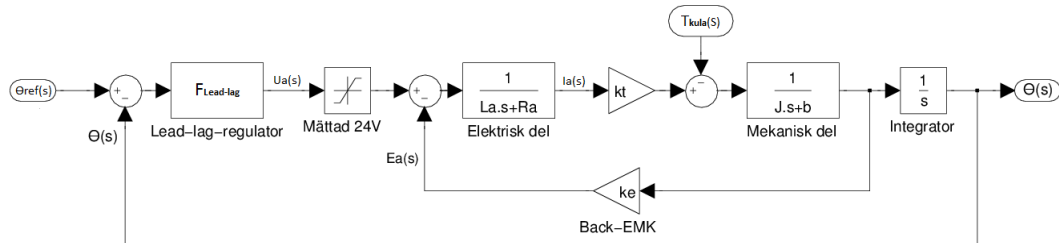
Ekvation 4.8 åskådliggör hur motorns varvtal beror på ankarspänningen och ett belastande moment. Detta kan illustreras i ett blockschema där det framgår att likströmsmotorn har en elektrisk och en mekanisk del, se figur 11. Tröghetsmomentet i den mekaniska delen innefattar motorns, bommens, positionssensorns och motviktens tröghet. Kulan ger upphov till ett moment som ändras beroende på dess position på bommen. Detta moment ansluts till modellen som ett belastande moment, T_{kula} .



Figur 11: Likströmsmotorns blockschema.

4.3.2 Vinkelreglering med lead-lag-regulator

Likströmsmotorn vinkelregleras med en lead-lag-regulator som tar in en vinkelreferens och ger en styrsignal som svarar mot en spänning. Eftersom motorns märkdrift är 24V mättas styrsignalen till detta värde för att skydda motorn och för att undvika integratoruppvridning. Systemets blockschema åskådliggörs i figur 12.



Figur 12: Blockschema för motorstyrning med lead-lag-regulator.

Vid design av regulator ställs följande krav på systemets kretsöverföring:

- $\omega_c = 30 \text{ rad/s}$
- $\varphi_m \geq 50^\circ$

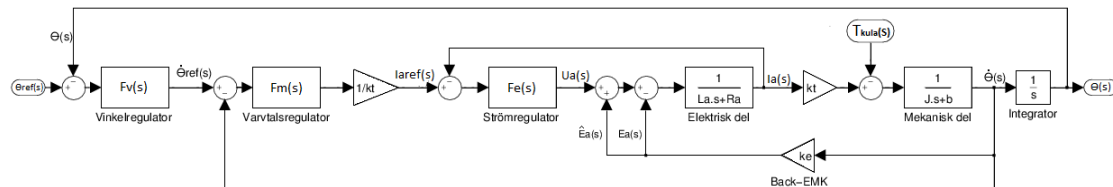
Regulatorns integrerande del används för att kancellera motorns långsammaste pol medan den deriverande delen används för att åstadkomma ett faslyft. Följande regulator används:

$$F_{lead-lag}(s) = 141 \left(\frac{0,11s + 1}{0,01s + 1} \cdot \frac{756s + 1}{756s + 0,5} \right) \quad (4.9)$$

För utförliga beräkningar se appendix G.

4.4 Alternativ styrning av likströmsmotor

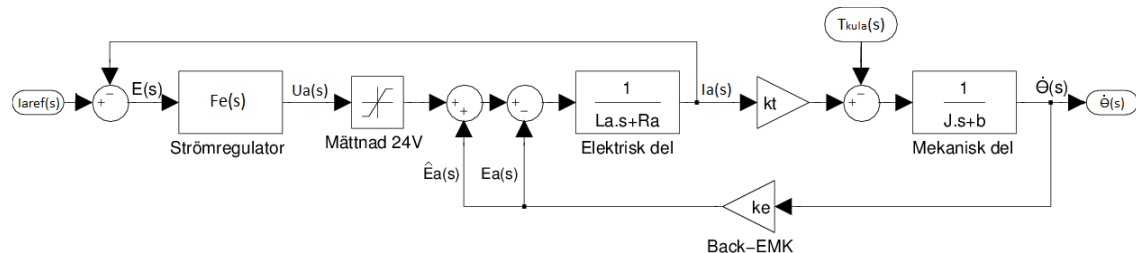
Detta avsnitt presenterar en alternativ styrstrategi som utgör en kaskadreglering bestående av en strömregulator, en varvtalsregulator och en vinkelregulator. Regulatorstrukturen åskådliggörs i figur 13.



Figur 13: Styrning av likströmsmotorn med kaskadreglering för följning av vinkelreferens.

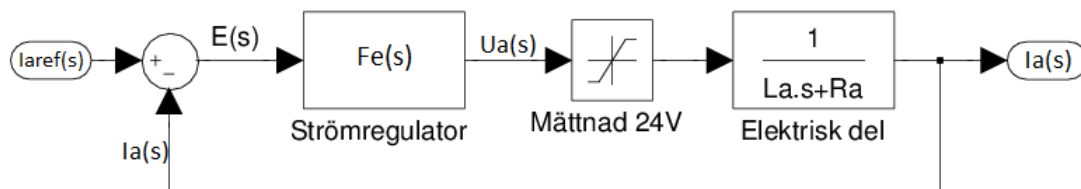
4.4.1 Strömreglering

Även om motorer klarar stora strömmar under begränsad tid är stora strömspikar inte önskvärda. För att undvika detta återkopplas motorns ström och jämförs med ett referensvärde. Det är önskvärt att denna reglering kan ske oberoende av motorns back-EMK. För att undertrycka denna störning beräknas varvtalet utifrån den uppmätta vinkeln. Från varvtalet skattas back-EMK och adderas till $U_a(s)$, vilket minskar inverkan av back-EMK på spänningssignalen [8]. Detta illustreras i figur 14. Skattningen betecknas \hat{E}_a .



Figur 14: Återkopplat regelsystem för motorns elektriska del där \hat{E}_a betecknar skattningen av back-EMK.

För att undvika onödigt stora strömmar är ett system av första ordningen att föredra [8]. Strömmen i ett sådant system kommer i teorin aldrig överstiga referensvärdet. Med skattningen av back-EMK kan systemet med en regulator beskrivas enligt figur 15.



Figur 15: Återkopplat regelsystem för motorns elektriska del utan påverkan från back-EMK.

Notera att i figur 15 går spänningssignalen direkt från systemets regulator in i motorns elektriska del. I själva verket ger regulatören en spänningsreferens till kraftelektroniken vilken i sin tur ger en

spänning till motorn. För att kraftelektroniken skall kunna uteslutas från beräkningarna måste dess snabbhet vara mycket större än snabbheten hos motorns elektriska del.

Sammanfattningsvis ställs följande krav på kretsöverföringen:

- Systemet skall vara av första ordningen.
- $\omega_c = 1000 \text{ rad/s}$

Från detta erhålls följande regulator:

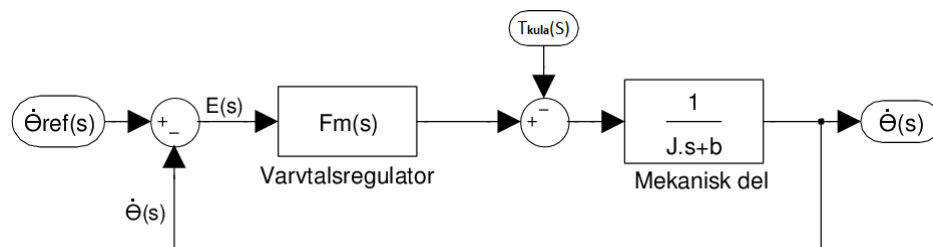
$$F_e(s) = 1000L_a + \frac{1000R_a}{s} \quad (4.10)$$

För utförliga beräkningar se appendix H.

4.4.2 Varvtalsreglering

Det elektriska systemets dynamik kan försummas i beräkningarna om snabbheten för det mekaniska systemet är mycket långsammare än för det elektriska. Ett återkopplat system för motorns mekaniska del illustreras i figur 16.

Regulatordesignen grundar sig på ett konstant belastningsmoment varvid kulans tröghetsmoment utesluts från beräkningarna. Detta ger att tröghetsmomentet i motorns mekaniska del, se figur 16, innefattar likströmsmotorns, bommens, positionssensorns och motviktens tröghet. Kulans belastande moment anses vara en störning för systemet.



Figur 16: Återkopplat regelsystem för motorns mekaniska del.

För att minska systemets komplexitet och för att undvika översvängningar föredras ett slutet system av första ordningen [8]. Från detta erhålls följande regulator:

$$F_m(s) = 100J + \frac{100b}{s} \quad (4.11)$$

För utförliga beräkningar, se appendix I.

4.4.3 Vinkelreglering

För att relatera motorns vinkel till dess varvtal krävs en sammanlänkande derivata. Detta utförs med en lead-regulator. Eftersom fasmarginalen redan är god kan storleken på regulatorns deriverande del väljas godtyckligt. Vinkeln återkopplas och blir motorns yttersta återkopplings-slinga, se figur 13, och bör därmed vara långsammare än varvtalsregleringen. Skärfrekvensen $\omega_c = 30rad/s$ ger följande regulator:

$$F_v(s) = 16,95 \left(\frac{0,06s + 1}{0,02s + 1} \right) \quad (4.12)$$

5 Resultat

Detta avsnitt presenterar resultat i form av simuleringar och praktiska verifieringar. Alla simuleringar är genomförda med de olinjära modellerna som beskrivs i avsnitt 3.

Simuleringar för motorns två styrstrategier presenteras parallellt. För att öka läsbarheten presenteras dessa i olika färger, blått respektive rött. Praktiska verifieringar har endast genomförts med styrstrategin innehållande lead-lag-regulatorn.

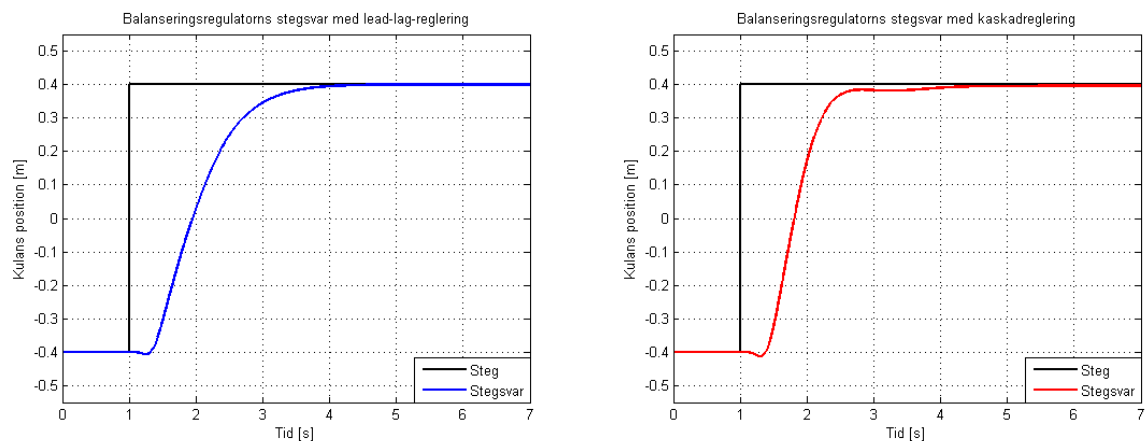
5.1 Balansering av kula

I detta avsnitt utvärderas systemets balanseringsfunktion, där fokus ligger på analys av dess stegsvar. Dessutom utförs ett praktiskt experiment för att illustrera hur systemet uppträder när kulan utsätts för en extern störning.

5.1.1 Simuleringar

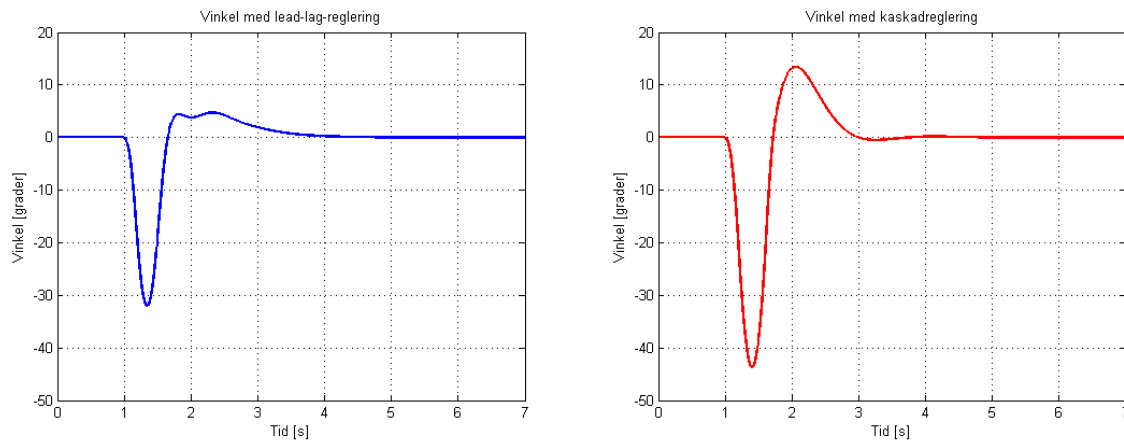
Nedan presenteras systemets stegsvar vid en referensändring på 0,8m. För att ge en bättre helhetsbild över hur systemet uppträder vid stegsvaret presenteras även grafer över bommens vinkel och varvtal samt spänning och ström i motorn.

Figur 17 illustrerar stegsvaren för respektive styrstrategi. Notera att kulan rör sig i motsatt riktning inledningsvis. Detta beror på att centripetalkraften är den dominerande kraften i det ögonblicket bommen ger en snabb vinkeländring, vilket får kulan att rulla i motsatt riktning innan den vänder in mot referenspositionen.

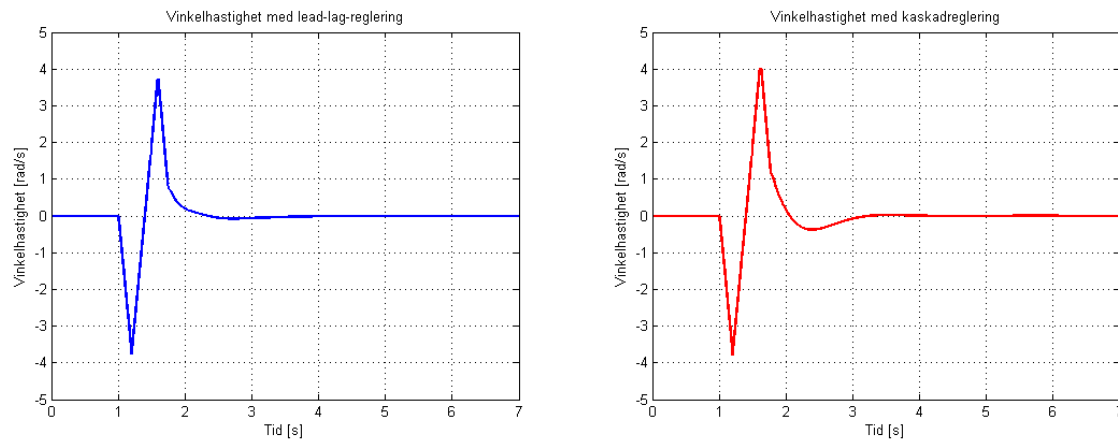


Figur 17: Balanseringsregulatorns stegsvar med lead-lag- respektive kaskadreglering. Kulans position anges i förhållande till bommens mittpunkt.

Bommens vinkel och varvtal visas i figur 18 respektive 19. Vinkelutslagen är som väntat större hos kaskadregleringen eftersom den har en kortare stigtid.

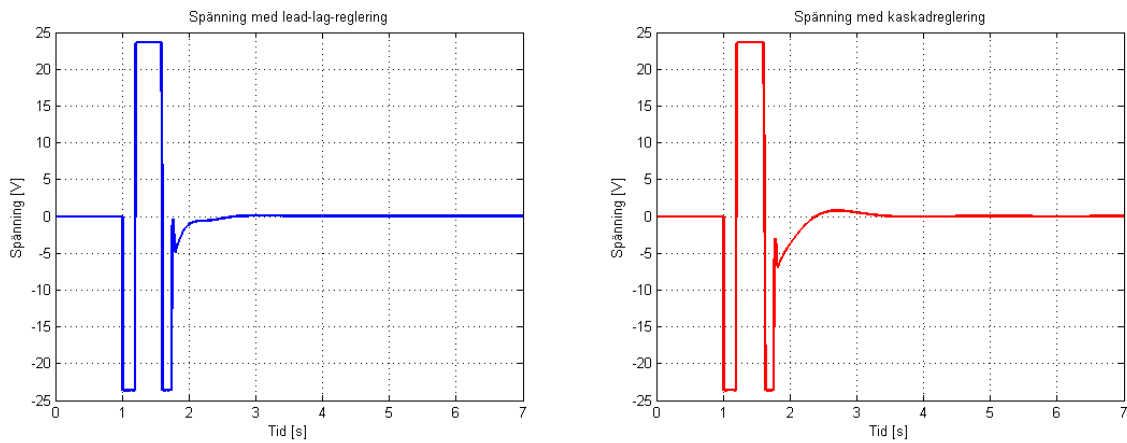


Figur 18: Bommens vinkel vid en stegformad referensändring av kulans position för lead-lag- respektive kaskadreglering.

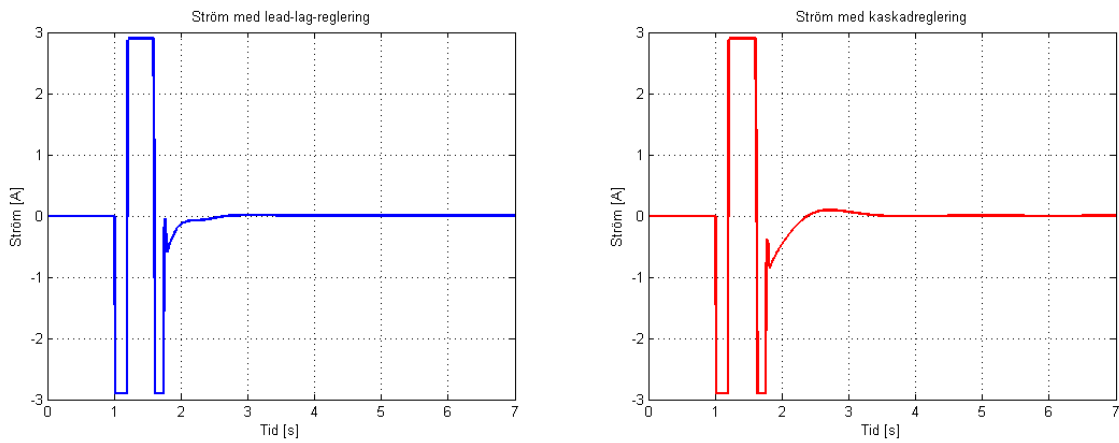


Figur 19: Bommens vinkelhastighet vid en stegformad referensändring av kulans position för lead-lag- respektive kaskadreglering.

Motorns spänning och ström åskådliggörs i figur 20 respektive 21. Observera att spänningen ser ut att vara direkt proportionell mot strömmen. Detta beror på att induktansen i motorn är väldigt liten vilket medför att strömmens tröghet inte är märkbar.



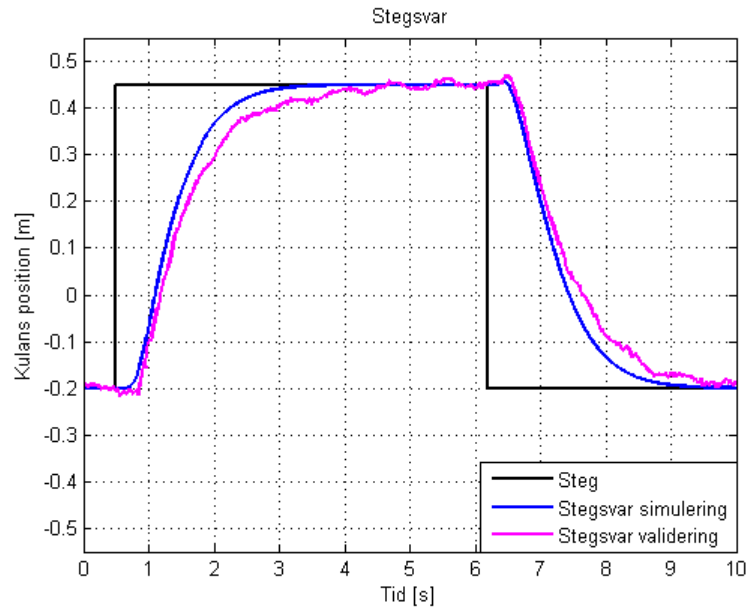
Figur 20: Spänningen över motorn vid en stegformad referensändring av kulans position för lead-lag- respektive kaskadreglering.



Figur 21: Strömmen genom motor vid stegformad referensändring av kulans position för lead-lag- respektive kaskadreglering.

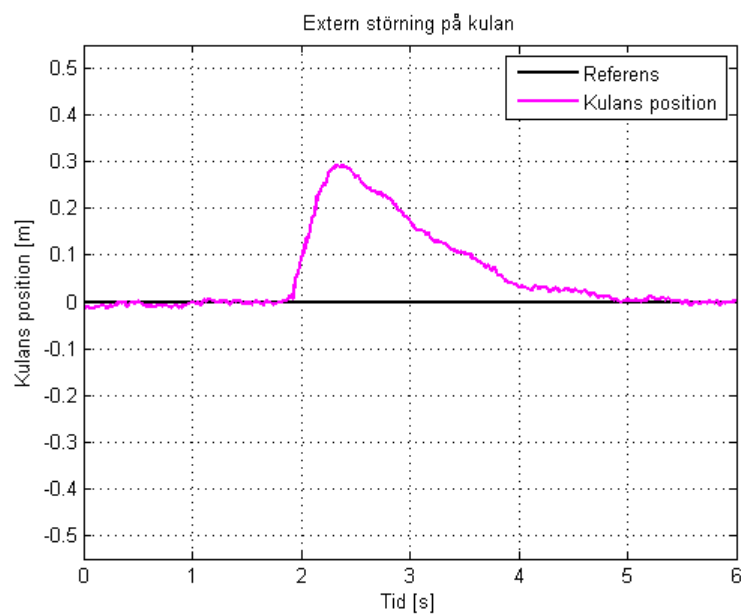
5.1.2 Praktisk verifiering

I figur 22 illustreras systemets verkliga och simulerade stegsvar. Figuren visar att det verkliga stegsvarets utformning stämmer väl överens med det simulerade.



Figur 22: Systemets verkliga och simulerade stegsvar. Kulans position anges i förhållande till bommens mittpunkt.

För att utvärdera hur systemet hanterar externa störningar på kulan utförs ett praktiskt experiment där kulan knuffas till. Detta illustreras i figur 23.



Figur 23: Visar hur kulans position påverkas när den utsätts för en störning i form av en knuff. Kulans position anges i förhållande till bommens mittpunkt.

5.2 Avrullning av kula

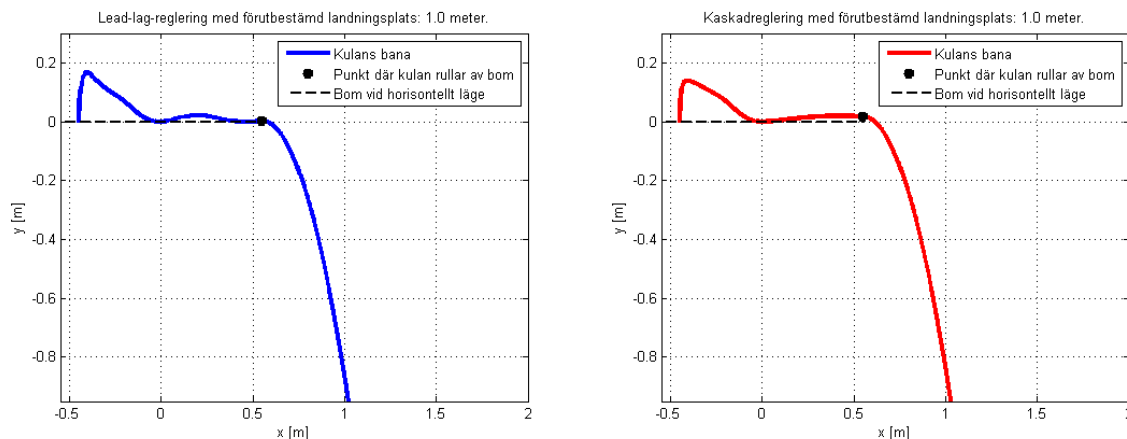
Detta avsnitt behandlar en situation där prototypen är placerad så att bommens rotationscentrum befinner sig 0,95 meter ovanför marken. Utöver simuleringar presenteras praktiska experiment i form av statistik för kulans landningsplats för olika referenslängder.

Eftersom det är fördelaktigt att vid avrullningen utnyttja hela bommens längd placeras kulan intill positionssensorn innan den börjar accelereras. Förloppet börjar med att bommen vrids till 20° för att förflytta kulan till sensorns mätområde som inte innefattar de första 20 centimetrarna. När kulan hamnar inom mätområdet tar hastighetsregleringen vid.

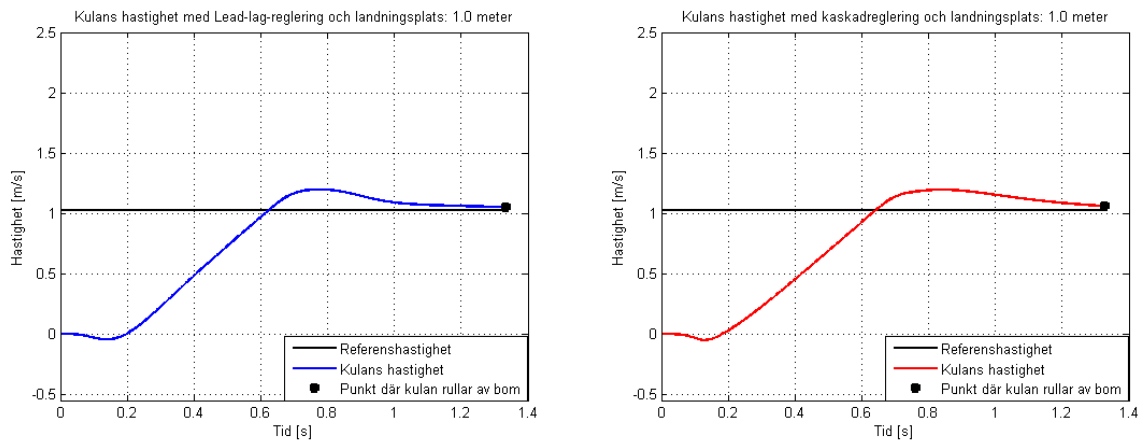
5.2.1 Simuleringar

När kulan lämnar bommen sker ett byte av modellen som simuleras. När kulan befinner sig på bommen simuleras modellen i avsnitt 3.1 och när den befinner sig i luften modellen i avsnitt 3.2.

Kulans rörelse då den förutbestämda landningsplatsen är 1 meter i x-led från bommens mittpunkt illustreras i figur 24. Figuren visar att kulan rullar av bommen när den är i horisontellt läge. Detta betyder att kulan har uppnått referenshastigheten, vilket även visas i figur 25, och följer därmed förloppet som illustreras i figur 10 i avsnitt 4.2.

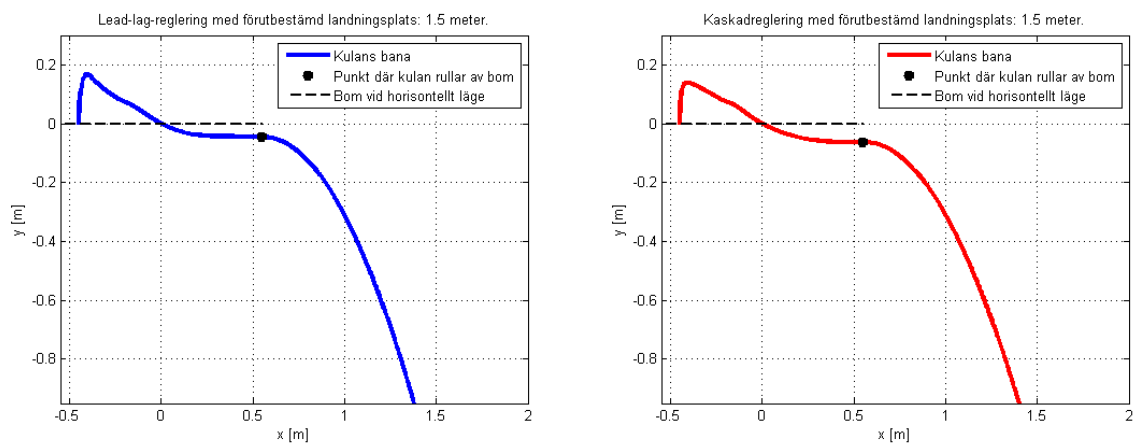


Figur 24: Kulans position vid avrullning till en förutbestämd landningsplats 1 meter i x-led från bommens mittpunkt.

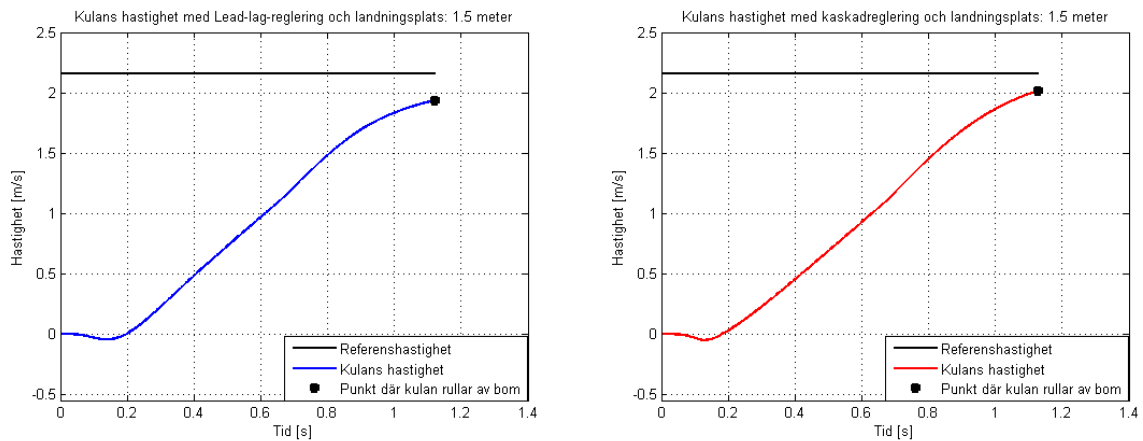


Figur 25: Kulans hastighet längs bommen fram tills den rullar av bommen mot en förutbestämd landningsplats 1 meter relativt bommens mittpunkt.

Kulans rörelse med en förutbestämd landningsplats 1,5 meter i x-led från bommens mittpunkt åskådliggörs i figur 26. Tillsammans med figur 27 framgår det att kulan inte uppnår referenshastigheten och att bommen inte heller når horisontellt läge. Bommens vinkelhastighet ger här ett bidrag till kulans utgångshastighet, vilket betyder att referenshastigheten är högre än den hastighet systemet kan ge kulan under avrullningsförloppet.



Figur 26: Kulans position vid avrullning till en förutbestämd landningsplats 1,5 meter relativt bommens mittpunkt.



Figur 27: Kulans hastighet längs bommen fram tills den rullar av mot en förutbestämd landningsplats 1,5 meter relativt bommens mittpunkt.

5.2.2 Praktisk verifiering

För att praktiskt verifiera simuleringarna mäts kulans landningsplats. I tabell 3 åskådliggörs landningsplatserna för olika referenslängder från bommens rotationscentrum. För att ge en uppfattning om systemets precision och repeterbarhet presenteras experimentens medelvärden och standardavvikelser i tabell 4. Dessa är, som det framgår i tabellen, beräknade av utfallet från 10 försök. Experimentet har antagits följa en normalfördelning.

Tabell 3: Praktiskt experiment för avrullningen av kulan. Tabellen visar 10 utförda försök för 5 olika referenser. Alla värden visas i cm.

Referens [cm]	Försök										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
75	76	75	75	75	77	74	74	74	75	74	
100	95	92	93	92	91	96	93	89	93	90	
125	128	126	125	130	125	125	128	127	133	125	
150	150	153	153	154	154	153	150	149	153	151	
175	149	154	154	155	153	154	153	155	156	154	

Tabell 4: Beräknat medelvärde och standardavvikelse för de olika referenslängderna.

Referens [cm]	Medelvärde [cm]	Standardavvikelse [cm]
75	74,8	1,0
100	92,4	2,0
125	127,5	2,8
150	152,1	1,8
175	153,7	1,8

6 Diskussion

Diskussionen avser att behandla de lösningsförslag och resultat som har presenterats i rapporten. Avsnittets fokus ligger på de moment som har ansetts vara mest kritiska för arbetet.

6.1 Sensorer

Av de uppmätta storheterna var avståndsmätningen den mest utmanande. Utbudet av lämpliga sensorer var mycket begränsat och det framkom att valet var en avvägning mellan pris och noggrannhet. Ett flertal sensorer utvärderades och de som stått i fokus är IR-sensorn Sharp-GP2Y0A02YK [9] och lasersensorn SICK-DT50.

IR-sensorn, som är ett billigare alternativ, ger dåliga positionsmätningar på avstånd längre än 0,60 meter. Detta är inte lämpligt eftersom bommen är 1,10 meter och systemets funktioner kräver mätningar med god precision över ett större område. Det visade sig också att sensorn var väldigt känslig mot små positionsrubbingar, då detta gav upphov till en förändring av sensorns karaktäristik. Detta ställde stora krav på sensorns fästansordning, som med fördel designades så att dess position kunde finjusteras. Eftersom sensorn utnyttjar IR-teknik bör kulan vara vit, då detta ger starkare signal. Den signal som sensorn ursprungligen genererar bör lågpasfilteras för att eliminera stokastiskt brus.

Lasersensorn, som är ett dyrare alternativ, är lättanvänd och har god precision på mätningar i hela dess mätområde. Den analoga signal sensorn genererar är stabil, men aningen brusig. Ett första ordningen RC-filter minskar bruset till en godtagbar nivå. En nackdel med lasersensorn är dess vikt, vilket ställer större krav på en robust fästansordning.

6.2 Implementering med Simulink

Valet av metod för implementering av styrstrategierna stod mellan traditionell programmering och användandet av Simulink som kodgenererare. Den främsta anledning till att Simulink utnyttjades är för att ge användaren ett lättanvänt och överskådligt gränssnitt. Detta förenklar förståelsen över systemets flöde och funktionalitet, vilket är en fördel då prototypen är avsedd att användas som ett demonstrationsobjekt.

En del av den funktionalitet som användandet av Simulink medför begränsas av Arduinos beräkningskraft. Det visade sig exempelvis att det inte går att använda funktionen "External Mode" för att visualisera signaler i datorn samtidigt som processen körs, vilket försvårade felsökningsarbetet och den praktiska verifieringen.

6.3 Implementering av motorstyrning

I rapporten presenteras två styrstrategier för positioneringen av bommen som utförs med hjälp av likströmsmotorn. Den först tänkta styrstrategin var kaskadregleringen som beskrivs i avsnitt 4.4. Anledningen till att denna inte implementerades i det verkliga systemet beror på ett par faktorer. En utav dessa är att styrstrategin var tidskrävande att implementera eftersom den innehåller fler regulatorer, vilket medför att fler storheter måste mätas eller skattas.

Skattningen av vinkelhastigheten utifrån vinkelsensorns mätdata var problematisk eftersom dess mätområde inte täcker ett helt varv. Detta var inget hinder för systemets funktionalitet, men försvårade implementeringsarbetet eftersom varvtalsregulatorn inte enkelt kunde testas.

Ovanstående orsaker medförde att kaskadregleringen ersattes med en lead-lag-regulator. En stor fördel med denna regulatorstruktur är att den är enkel att implementera eftersom den endast återkopplar bommens vinkel.

6.4 Balansering av kula

Styrstrategin för balanseringen fungerade tillfredställande och den praktiska verifieringen stämde väl överrens med simuleringarna. Något som inte direkt framgår i figur 22, är att bommen inte är helt still även om kulan befinner sig på referenspositionen. Detta påverkar precisionen i regleringen och beror främst på ett litet glapp i växellådan.

6.5 Avrullning av kula

Den metod som presenteras för avrullningen av kulan baseras på att en skattning av kulans hastighet återkopplas. Med brusiga mätsignaler och låga hastigheter blir skattningen osäker eftersom brusets storlek inverkar på vilka positionsdifferenser som registreras. Av den anledningen bör inte tidsdifferensen mellan två på varandra följande sampel vara för liten.

Den praktiska verifieringen visar att avrullningens precision varierar beroende på kulans landningsplats. En av anledningarna till detta kan vara att endast en linjäriseringspunkt används och att inget kritiskt val av denna gjordes. En ökad precision kan åstadkommas genom att anpassa linjäriseringspunkten, och därmed regulatorn, efter vilken landningsplats som efterfrågas.

Tabell 3 visar att precisionen försämras kraftigt vid avståndet 1,75 meter. Detta beror på att referenshastigheten är högre än den hastighet systemet kan ge kulan under avrullningsförloppet. Därmed kan det konstateras att funktionen inte fungerar för avstånd längre än 1,5 meter från bommens rotationscentrum.

I ett fortsatt arbete kan en mer avancerad metod, som även utnyttjar informationen om bommens vinkel och vinkelhastighet, sannolikt bidra till högre precision och längre avrullningslängder.

7 Slutsats

Rapporten presenterar lösningsförslag för ett utökat Ball and Beam-system. Styrsystemet har designats och verifierats genom simuleringar och praktiska experiment på den tillverkade prototypen. Resultaten visar att systemet kan balansera en specifik kula på bommen, även om kulan utsätts för störningar. Funktionen för accelerering och avrullning av kulan fungerar, med varierande precision, för avstånd upp till 1,5 meter från bommens rotationscentrum när bommen befinner sig 0,95 meter ovanför marken.

Referenser

- [1] Motoriduttori-Gear-motors. Internet: <https://www1.elfa.se/data1/wwwroot/assets/datasheets/054445507.pdf>, [apr. 14, 2012].
- [2] Mid range distance sensors Dx50, DT50. Internet: <https://www.mysick.com/saqqara/im0030290.pdf>, [maj. 05, 2012].
- [3] WAL305. Internet: https://www1.elfa.se/data1/wwwroot/assets/datasheets/etWAL305_data_en.pdf, [feb. 28, 2012].
- [4] Fully Integrated, Hall Effect-Based Linear Current Sensor with 3 kVRMS Voltage Isolation and a Low-Resistance Current Conductor. Internet: <http://www.electrokit.se/productFile/download/1889>, [mar. 03, 2012].
- [5] Dual full-bridge driver. Internet: https://www1.elfa.se/data1/wwwroot/assets/datasheets/ofL298N_647108_dat_en.pdf, [mar. 20, 2012].
- [6] Arduino Mega 2560. Internet: <http://arduino.cc/it/Main/ArduinoBoardMega2560>, [maj. 14, 2012].
- [7] J.W. Jewett och R.A. Serway, “*Rotation of a rigid object about a fixed axis*,” i *Physics for Scientists and Engineers*, uppl., 6. Californien, USA: Brooks/Cole Cengage Learning, ss. 304.
- [8] L. Harnefors, “*Control of DC Motor Drives*,” i *Control of Variable-Speed Drives*, Västerås, Sverige: Mälardalens högskola, ss. 7-38.
- [9] GP2Y0A02YK Long distance measuring sensor. Internet: <http://www.farnell.com/datasheets/10247.pdf>, [jan. 25, 2012].
- [10] 5-V, Low power, 16-bit, 200-ksps serial analog-to digital converters with auto-power down. Internet: <http://www.farnell.com/datasheets/1447265.pdf>, [maj. 08, 2012].
- [11] T. Glad och L. Ljung, “*Kompensering (Syntes II)*,” i *Reglerteknik grundläggande teori*, uppl., 4:6. Lund, Sverige: Studentlitteratur AB, ss. 105-107.

Appendix

A Elektrisk konstruktion

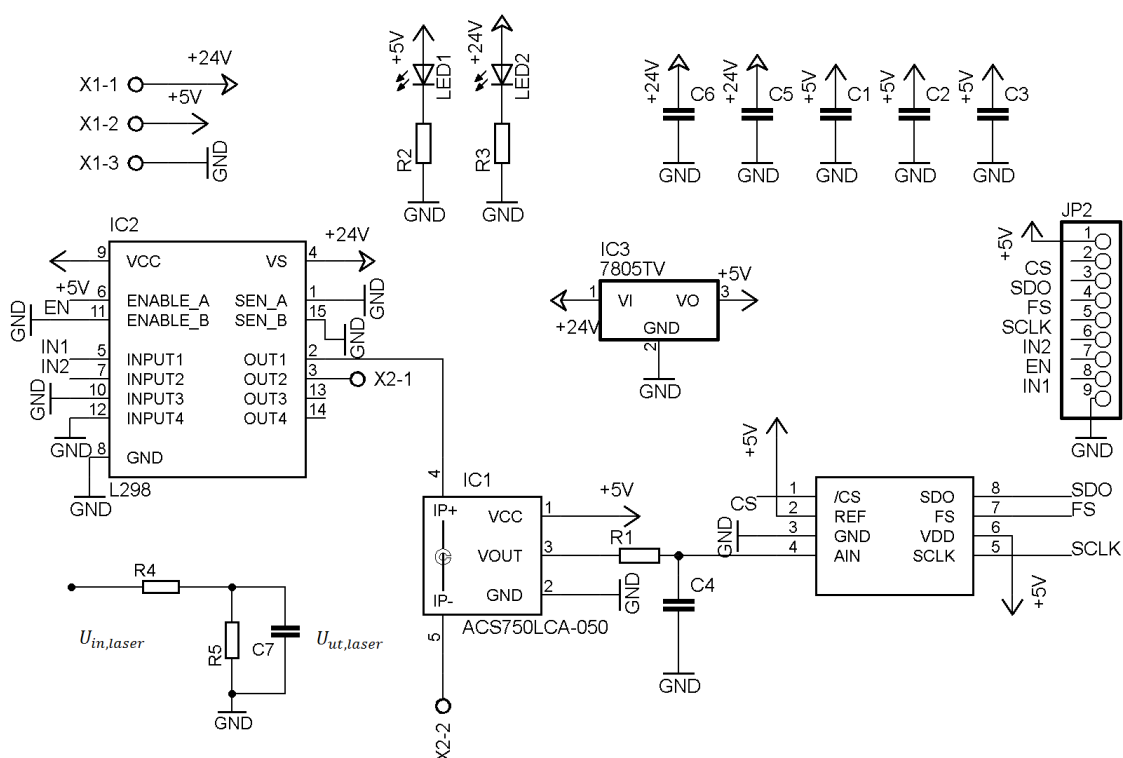
Systemets elektronik har placerats på ett kretskort som innehåller komponenter för att realisera båda styrstrategierna som behandlas i rapporten. Detta avsnitt avser att förklara hur elektroniken skall kopplas och hur kretskortet skall användas. Ett kopplingschema åskådliggörs i figur 28.

Eftersom kretsen är utrustad med en spänningsregulator (IC3) behöver den endast matas med 24V på ingång X1-1. Spänningsregulatorn transformerar denna spänning till 5V vilken tillhandahålls på plintens utgång (X1-2) och utgång 1 på plintlisten (JP2). Detta åskådliggörs i kretsschemat. Allt som är markerat med GND skall kopplas till gemensam jord.

Motorn kopplas mellan X2-1 och X2-2. Från utgång 7 (EN) på plintlisten ges PWM-signalen som driver motorn. Motorns rotationsriktning bestäms av utgångarna 6 (IN2) och 8 (IN1).

Kretskortet är utrustat med den i rapporten beskrivna strömsensorn. Eftersom den har ett brett mätområde används en ADC för att öka dess upplösning. För information om hur ADC:n fungerar hänvisas läsaren till [10].

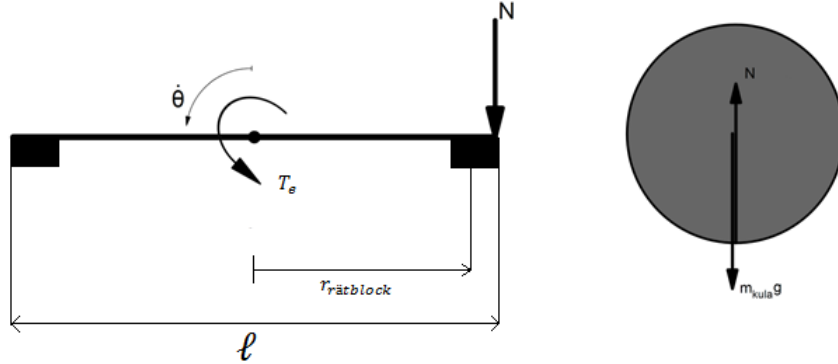
Lasersensorn ger en utsignal i form av en spänning mellan 0 och 10V. Eftersom 5V är den maximala spänning som får kopplas till Arduinons ingångar spänningsdelas signalen innan denna kopplas vidare. Detta utförs med två lika stora motstånd (R4 och R5).



Figur 28: Kretsschema över elektroniken placerad på kretskortet.

B Stödjande beräkningar för val av motor

Motorn dimensioneras för fallet då systemet infinner sig i det mest momentkritiska läget. Detta inträffar vid horisontellt läge, då kulan befinner sig längst ut på ena änden av bommen samtidigt som bommen innehar maximal vinkelacceleration. En friläggning av systemet i detta läge åskådliggörs i figur 29. Vikterna på bommens ändar är positionssensorn och dess motvikt. Dessa antas vara identiska, homogena rätblock vars tyngdpunkt befinner sig på samma avstånd och i linje med rotationscentrum.



Figur 29: Friläggning av kulan och bommen i systemets mest momentkritiska läge.

Krafterna på kulan summeras i en kraftjämvikt.

$$N - m_{kula}g = \frac{\ell}{2}\ddot{\theta}m_{kula} \quad (\text{B.1})$$

Momentjämvikt för bommen ges av

$$T_e - \frac{\ell}{2}N = J_{bom}\ddot{\theta} \quad (\text{B.2})$$

där tröghetsmomentet J_{bom} ges av ekvation 3.8 i avsnitt 3.1.2.

För att förenkla beräkningarna antas bommens tvärsnitt vara homogent och kvadratisk. Detta för att inte underskatta momentbehovet. Utifrån ekvation B.1 och B.2 följer motorns momentbelastning:

$$T_e = J_{bom}\ddot{\theta} + \frac{\ell}{4}(m_{kula}\ell\ddot{\theta} + 2m_{kula}g) \quad (\text{B.3})$$

Motorn dimensioneras efter den maximala vinkelaccelerationen som motorn skall kunna ge vid det mest momentkritiska läget, då kulan befinner sig längst ut på ena änden av bommen. Maximal vinkelacceleration antas finnas i början av rotationscykeln, då bommen på kort tid skall nå en hög vinkel. Bommen antas behöva förflytta sig från 0° till 90° på 0,5 sekunder under konstant vinkelacceleration.

$$\ddot{\theta}_{max} = \frac{\theta}{t^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} = 2\pi \text{rad/s}^2 \quad (\text{B.4})$$

En bom med längden 1,10m och en kula med vikten 0,1kg, ger enligt ekvation B.3 motorns maximala momentbehov:

$$T_{max} = 1,94Nm \quad (\text{B.5})$$

Detta moment måste genereras på bommen för att den önskade vinkelaccelerationen skall uppnås vid det mest momentkritiska läget. Motorns maximala vinkelhastighet beräknas från den maximala vinkelaccelerationen under antagandet att vinkelaccelerationen är konstant.

$$\dot{\theta}_{max} = \ddot{\theta}_{max}t = \frac{2\pi}{2} = \pi rad/s \approx 30rpm \quad (\text{B.6})$$

Detta ger att motorn ska kunna generera ett vridande moment på 1,94Nm för vinkelhastigheter upp till $\pi rad/s$.

C Linjärisering av kulans dynamik på bommen

Kulans dynamik på bommen beskrivs av en olinjär differentialekvation som ges av:

$$\ddot{r} = f(r, \theta, \dot{\theta}) = \frac{5}{7} \left(r\dot{\theta}^2 - g \sin(\theta) \right) \quad (\text{C.1})$$

För att möjliggöra transformering till s-planet måste f linjäriseras. Detta utförs med en Taylorutveckling av första ordningen kring en jämviktspunkt som ges av:

$$(r_{l0}, \theta_{l0}, \dot{\theta}_{l0}) = (0, 0, 0) \quad (\text{C.2})$$

Taylorutveckling av första ordningen av f i jämviktspunkten ges av:

$$\begin{aligned} f(r_{l0} + \Delta r, \theta_{l0} + \Delta\theta, \dot{\theta}_{l0} + \Delta\dot{\theta}) &= f(r_{l0}, \theta_{l0}, \dot{\theta}_{l0}) + \frac{\partial}{\partial r} (f(r_{l0}, \theta_{l0}, \dot{\theta}_{l0})) (r - r_{l0}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} (f(r_{l0}, \theta_{l0}, \dot{\theta}_{l0})) (\theta - \theta_{l0}) + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} (f(r_{l0}, \theta_{l0}, \dot{\theta}_{l0})) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_{l0}) = -\frac{5}{7}g\theta \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Laplacetransformering ger en överföringsfunktion från bommens vinkel till kulans läge enligt:

$$G_b(s) = \frac{R(s)}{\theta(s)} = -\frac{5g}{7s^2} \quad (\text{C.4})$$

D Design av balanseringsregulator

Följande krav ställs på kretsöverföringen:

- $\omega_c = 3 \text{ rad/s}$
- $\varphi \geq 50^\circ$
- Inget kvarstående fel vid stegformad referenssignal.

Följande regulator används:

$$F_{lead}(s) = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \quad (\text{D.1})$$

Systemets fasmarginal utan regulator beräknas:

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg(G_b(j\omega_c)) = 0^\circ \quad (\text{D.2})$$

För att uppnå den föreskrivna fasmarginalen måste fasen lyftas 50° vilket genomförs enligt, [11]:

$$\varphi_{max} = \arctan\left(\frac{1 - \beta}{2\sqrt{\beta}}\right) = 50^\circ \Rightarrow \beta \approx 0,13 \quad (\text{D.3})$$

För att faslyftet skall ske vid skärfrekvensen beräknas τ_D enligt, [11]:

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\beta}} \approx 0,92 \quad (\text{D.4})$$

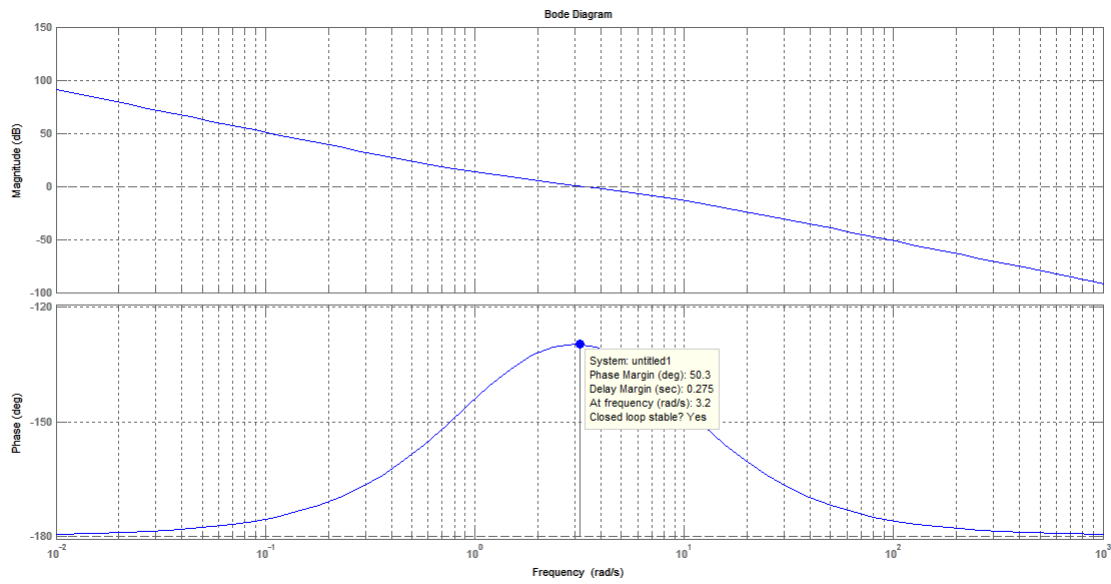
Regulatorns K-parameter anpassas så att det slutna systemet uppfyller skärfrekvensen, ω_c :

$$|G_b(j\omega_c)| = K \frac{5g}{7\omega_c^2} = 1 \iff K \approx 0,5 \quad (\text{D.5})$$

Ovanstående beräkningar ger följande regulator

$$F_b(s) = -0,5 \left(\frac{0,92s + 1}{0,12s + 1} \right) \quad (\text{D.6})$$

Beräkningarna kontrolleras med ett bodediagram, se figur 30, där det framgår att kraven på kretsöverföringen är uppfyllda.



Figur 30: Bodediagram för balanseringssystemets kretsöverföring.

E Linjärisering av kulans dynamik vid avrullning

För att designa en regulator som styr avrullningen av kulan från bommen måste dess dynamik linjäriseras kring en arbetspunkt. Kulans dynamik på bommen ges av följande olinjära ekvation:

$$\ddot{r} = f(r, \theta, \dot{\theta}) = \frac{5}{7} \left(r \dot{\theta}^2 - g \sin(\theta) \right) \quad (\text{E.1})$$

Arbetspunkten anpassas till bommens rörelse och ges av:

$$(r_{l0}, \theta_{l0}, \dot{\theta}_{l0}) = (0, 25, -0, 4, 0) \quad (\text{E.2})$$

Taylorutveckling av första ordningen av f i arbetspunkten ges av:

$$\begin{aligned} f(r_{l0} + \Delta r, \theta_{l0} + \Delta\theta, \dot{\theta}_{l0} + \Delta\dot{\theta}) &= f(r_{l0}, \theta_{l0}, \dot{\theta}_{l0}) + \frac{\partial}{\partial r} (f(r_{l0}, \theta_{l0}, \dot{\theta}_{l0})) (r - r_{l0}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} (f(r_{l0}, \theta_{l0}, \dot{\theta}_{l0})) (\theta - \theta_{l0}) + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} (f(r_{l0}, \theta_{l0}, \dot{\theta}_{l0})) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_{l0}) = -\frac{5g \cos(0, 4)}{7} (\theta + 0, 4) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

En överföringsfunktion från bommens vinkel till kulans hastighet ges av:

$$G_a(s) = \frac{\dot{R}(s)}{\theta(s)} = -\frac{5g \cos(0, 4)}{7} \quad (\text{E.4})$$

F Design av hastighetsregulator

Systemets överföringsfunktion beräknas i appendix F och ges av:

$$G_a(s) = -\frac{5g \cos(0,4)}{7s} \quad (\text{F.1})$$

Följande krav ställs på kretsöverföringen:

- $\varphi_m \geq 50^\circ$
- $\omega_c = 3 \text{ rad/s}$

För att bestämma om en deriverande verkan är nödvändig beräknas systemets fas utan regulator. Minustecknet bortses ifrån eftersom det kommer kancelleras av regulatorns tecken.

$$\Phi_m = 180^\circ + \arg\left(\frac{5g \cos(0,4)}{7s}\right) = 90^\circ \quad (\text{F.2})$$

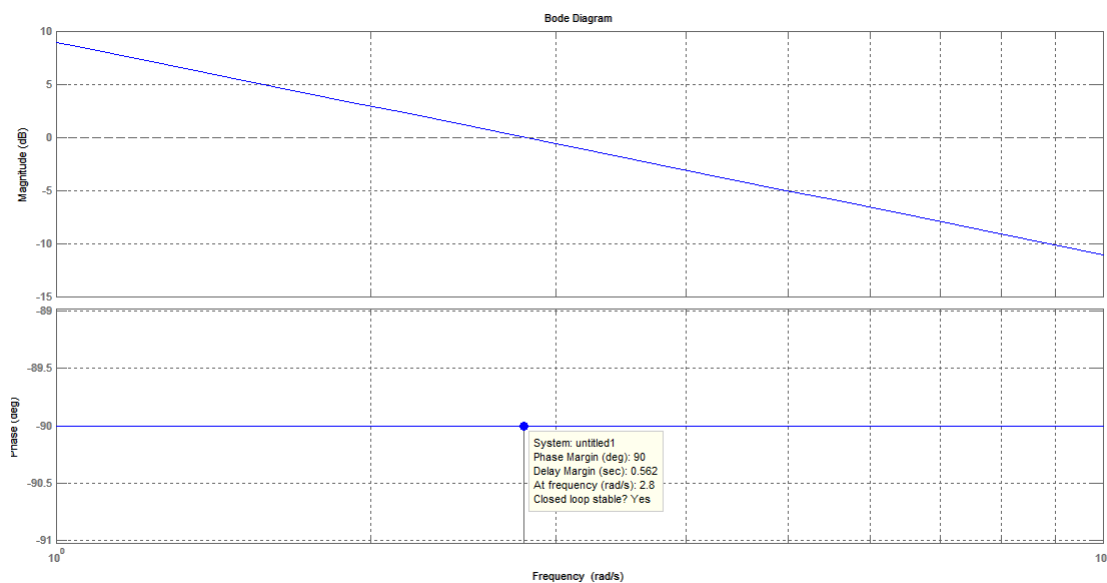
Systemet behöver inget faslyft och därmed behöver regulatorn ingen deriverande verkan. Regulatorns proportionella del bestäms så att förstärkningen vid skärfrekvensen blir 1.

$$\left|K \frac{5g \cos(0,4)}{7\omega_c}\right| = 1 \Rightarrow K = -0,433 \quad (\text{F.3})$$

Följande regulator används för avrullningen av kulan:

$$F_a(s) = -0,433 \quad (\text{F.4})$$

Beräkningarna kontrolleras med ett bodediagram, se figur 31, där det framgår att kraven på kretsöverföringen är uppfyllda.



Figur 31: Bodediagram över systemets kretsöverföring med hastighetsregulator.

G Design av lead-lag-regulator

Följande krav ställs på kretsöverföringen:

- $\omega_c = 30 \text{ rad/s}$
- $\varphi \geq 50^\circ$

Ett samband för bommens vinkel ges av:

$$\theta = \frac{k_t(U_a - E_a)}{s(Js + b)(L_a s + R_a)} \quad (\text{G.1})$$

Inverkan från back-EMK kan försummas eftersom dess maximala värde, som uppstår vid maximal vinkelhastighet, uppskattas till

$$E_a = k_e \dot{\theta}_{max} \approx 0,012V \quad (\text{G.2})$$

där $\dot{\theta}_{max} \approx 6 \text{ rad/s}$. Detta ger en approximativ överföringsfunktion från spänningen över motorn till bommens vinkel enligt:

$$G(s) = \frac{k_t}{s(Js + b)(L_a s + R_a)} \quad (\text{G.3})$$

Motorn styrs med en lead-lag-regulator på formen:

$$F_{lead-lag}(s) = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} \quad (\text{G.4})$$

Kretsförstärkningen ges av:

$$G_c(s) = \frac{k_t/b}{(\frac{J}{b}s + 1)(L_a s + R_a)s} K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} = K \frac{k_t/b(\tau_D s + 1)}{(L_a s + R_a)(\beta \tau_D s + 1)(\tau_I s + \gamma)s} \quad (\text{G.5})$$

då $\tau_I = \frac{J}{b} \approx 756$.

Fasmarginalen utan regulatorns deriverande del ges då av:

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg\left(K \frac{k_t/b}{(L_a j\omega_c + R_a)(\tau_I j\omega_c + \gamma)j\omega_c}\right) \approx 0^\circ \quad (\text{G.6})$$

För att undvika ett svängigt system höjs fasen 55° . Detta ger följande värden för regulatorns deriverande del, [11]:

$$\begin{cases} \beta = 0,1 \\ \tau_D = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\beta}} = 0,11 \end{cases} \quad (\text{G.7})$$

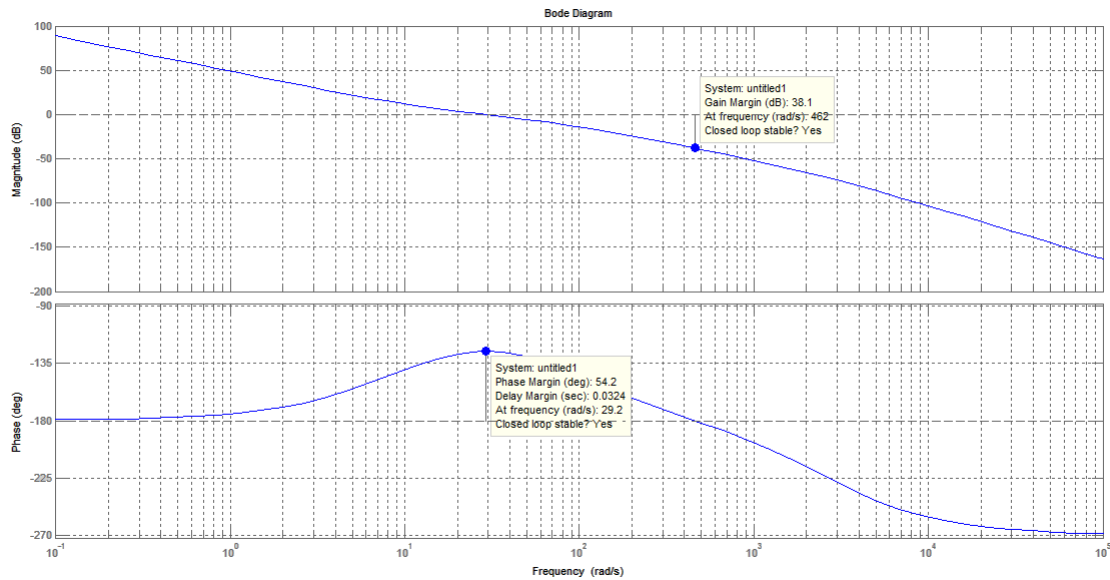
K bestäms så att förstärkningen ett erhålls vid skärfrekvensen.

$$\left| K \frac{k_t/b(\tau_D s + 1)}{(L_a s + R_a)(\beta \tau_D s + 1)(\tau_I s + \gamma)s} \right| = 1 \Rightarrow K \approx 141 \quad (\text{G.8})$$

Följande regulator erhålls:

$$F_{lead-lag}(s) = 141 \left(\frac{0,11s + 1}{0,01s + 1} \cdot \frac{756s + 1}{756s + 0,5} \right) \quad (G.9)$$

Beräkningarna verifieras med ett bodediagram som åskådliggörs i figur 32. Det framgår att fasmarginalen överstiger 50° och att det maximala faslyftet ligger vid skärfrekvensen.



Figur 32: Bodediagram över motorns kretsöverföring med lead-lag-regulator.

H Design av strömregulator

Avsnittets beräkningar är hämtade ur [8]. Det återkopplade systemet kan skrivas som:

$$G_{ce}(s) = \frac{F_e(s)G_e(s)}{1 + F_e(s)G_e(s)} = \frac{\alpha_e}{s + \alpha_e} = \frac{\alpha_e/s}{1 + \alpha_e/s} \quad (\text{H.1})$$

Identifiering visar att en PI-regulator ger ett första ordningens system om regulatorparametrarna väljs enligt nedanstående.

$$F_e(s) = \frac{\alpha_e}{sG_e(s)} = \frac{\alpha_e(L_a s + R_a)}{s} = \alpha_e L_a + \frac{\alpha_e R_a}{s} = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (\text{H.2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_p = \alpha_e L_a \\ K_i = \alpha_e R_a \end{cases} \quad (\text{H.3})$$

Systemets snabbhet beror på α_e . För att erhålla ett snabbt system väljs med fördel ett stort värde. Övre begränsningen bestäms av snabbheten hos kraftelektroniken, då dess dynamik med fördel utesluts från beräkningarna väljs $\alpha_e = 1000$. Följande regulator erhålls:

$$F_e(s) = 1000L_a + \frac{1000R_a}{s} \quad (\text{H.4})$$

I Design av varvtalsregulator

Avsnittets beräkningar är hämtade ur [8]. En överföringsfunktion för motorns mekaniska del ges av:

$$G_m(s) = \frac{1}{Js + b} \quad (\text{I.1})$$

För att erhålla ett första ordningens system kan kretsförstärkningen skrivas enligt:

$$G_{cm}(s) = \frac{F_m(s)G_m(s)}{1 + F_m(s)G_m(s)} = \frac{\alpha_m}{s + \alpha_m} = \frac{\alpha_m/s}{1 + \alpha_m/s} \quad (\text{I.2})$$

Från detta kan regulatorn identifieras enligt:

$$F_m(s) = \frac{\alpha_m}{sG_m(s)} = \frac{\alpha_m(Js + b)}{s} = \alpha_m J + \frac{\alpha_m b}{s} = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (\text{I.3})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_p = \alpha_m J \\ K_i = \alpha_m b \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Regulatorparametrarna erhålls genom att välja systemets snabbhet. För att motorns elektriska dynamik skall kunna uteslutas från beräkningarna måste dess snabbhet vara mycket högre än motorns mekaniska del. En faktor tio är tillräcklig. Detta ger följande regulator:

$$F_m(s) = 100J + \frac{100b}{s} \quad (\text{I.5})$$